

1. Abracadabra

Escribimos las letras de ABRACADABRA en once tarjetas que metemos en una caja negra.



Sin mirar sacamos cuatro tarjetas y las metemos en una caja roja. De las 31 posibles combinaciones de cuatro letras que puede haber en la caja roja, ¿cuántas de ellas **no** contienen la letra R?

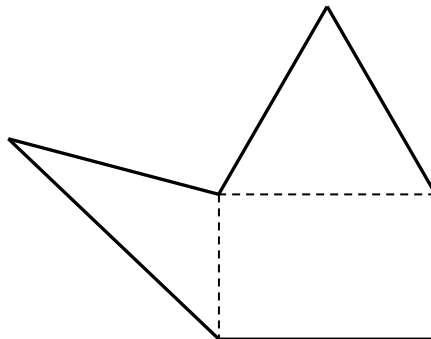
2. Fechas

Hoy es 5 de marzo de 2022 y esta fecha se escribe como 05 – 03 – 2022. Hemos empleado ocho cifras: tres ceros, tres doses, un tres y un cinco. A partir del 1 de enero del año 1000, ¿cuál es la primera fecha que se ha podido escribir (o que se escribirá) con sus ocho cifras diferentes?

3. Perímetros

Sobre los lados de un rectángulo cuyo lado menor es dos tercios del lado mayor hemos colocado dos triángulos de igual perímetro, uno equilátero y otro escaleno, para formar el hexágono que ves en la figura.

Si el perímetro del rectángulo es 90 cm, ¿cuál es el perímetro del hexágono?

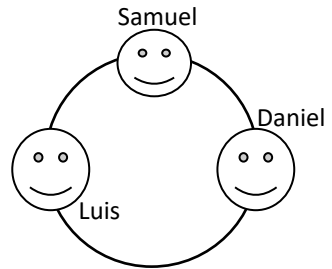


1. La inecuación

Si x , y , z son enteros positivos que cumplen $\left(\frac{x}{y} + \frac{x}{z} + 1\right) : \left(\frac{y}{x} + \frac{y}{z} + 1\right) = 30$, ¿cuántas soluciones (x, y, z) tiene la inecuación $3x + 2y + z \leq 100$? Escríbelas todas.

2. Matepoly

Tres amigos juegan al *Matepoly*. Daniel coge una carta y lee “*da un tercio de tus ecuaciones al jugador de tu derecha*”. A continuación le toca a Samuel, coge una carta que dice “*da un quinto de tus ecuaciones al jugador de tu derecha*”. Le toca a Luis y coge la misma carta que le tocó a Daniel. ¡Anda!, cada amigo tiene ahora 64 ecuaciones cada uno.

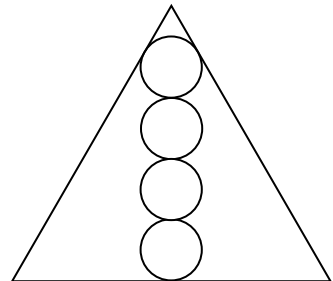


¿Cuántas ecuaciones tenía cada amigo al empezar la partida?

3. El logo

Las chicas y chicos de 4ESO han diseñado este logo para su clase: un triángulo equilátero de lado 12 dm en cuyo interior hay cuatro circunferencias iguales y tangentes como ves en el dibujo.

¿Cuántos dm mide el radio de cada circunferencia?



1. La igualdad con cubos

Tratamos de probar la siguiente serie de igualdades:

$$16^3 + 50^3 + 33^3 = 165\,033 = 33 \cdot 5001$$

$$166^3 + 500^3 + 333^3 = 166\,500\,333 = 333 \cdot 500\,001$$

$$1666^3 + 5000^3 + 3333^3 = 166\,650\,003\,333 = 3333 \cdot 50\,000\,001$$

Para ello

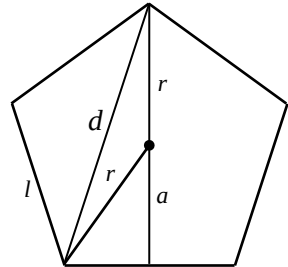
(a) Prueba que $\left(\frac{100-4}{6}\right)^3 + \left(\frac{100}{2}\right)^3 + \left(\frac{100-1}{3}\right)^3 = 33 \cdot 5001$

(b) Prueba que $\left(\frac{1000-4}{6}\right)^3 + \left(\frac{1000}{2}\right)^3 + \left(\frac{1000-1}{3}\right)^3 = 333 \cdot 500\,001$

(c) Demuestra que $\left(\frac{10^n-4}{6}\right)^3 + \left(\frac{10^n}{2}\right)^3 + \left(\frac{10^n-1}{3}\right)^3 = \frac{10^n-1}{3} \cdot \left(\frac{10^{2n}}{2} + 1\right)$

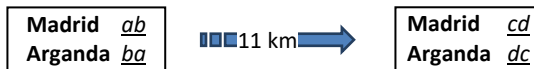
2. En el pentágono regular

Se sabe que la relación entre la diagonal y el lado de un pentágono regular es el número $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Determina en función de ϕ la relación entre la apotema y el radio de la circunferencia circunscrita al pentágono regular.

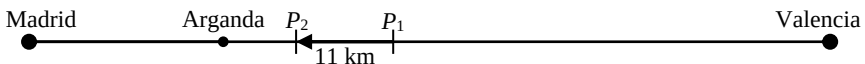


3. Camino de Arganda

En un determinado punto de la carretera de Valencia a Madrid hay una indicación en la que se informa de la distancia a Madrid mediante un número de dos cifras y de la distancia a Arganda mediante otro número con las dos mismas cifras del anterior, pero cambiadas de orden. 11 km después hay otra señal en la que se repite la circunstancia anterior:



Si la suma de las distintas cifras que aparecen es $a + b + c + d = 24$, y la distancia de Madrid a Arganda en km es un número de dos cifras inferior a 30. ¿A qué distancia de Madrid se encontraba la primera señal?



XX INTERCENTROS Joaquín Hernández

PRUEBA INDIVIDUAL

NIVEL I (1ESO – 2ESO)

1. El campeonato

Tres equipos juegan entre sí un campeonato de balonmano. Juegan todos contra todos una sola vez y aquí puedes ver el recuento de los goles a favor y en contra de cada equipo.

Si el equipo X empató todos sus partidos, ¿cuál fue el resultado final de todos los partidos que se jugaron?

	Goles Favor	Goles Contra
equipo X	13	
equipo Y	12	15
equipo Z		11

2. La herencia del faraón

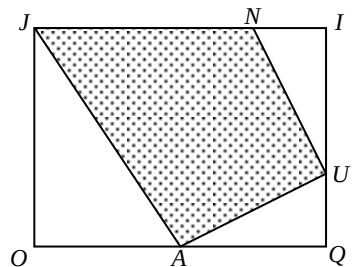
Al morir el faraón se abrió su testamento que decía:

“Dejo al mayor de mis descendientes un tercio de mis riquezas, al segundo un cuarto de mis riquezas, al tercero un quinto de mis riquezas y así hasta llegar al último, que se quedará con el resto”.

Si el menor fue el que menos monedas recibió y le correspondieron 27 000 monedas de oro, ¿cuántos hijos tenía el faraón y cuántas monedas recibió cada uno?

3. Joaquín

$JOQI$ es un rectángulo. A es el punto medio del lado OQ , QU es un tercio de QI y IN es un cuarto de IJ . ¿Qué fracción del rectángulo $JOQI$ representa el cuadrilátero $JAUN$?



1. Cuadrado perfecto

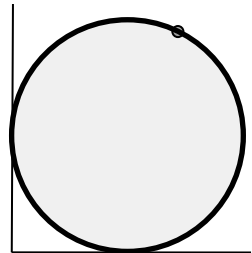
Si $M = (2^{10} - 2^9) \cdot (2^{10} - 2^8) \cdot (2^{10} - 2^7) \cdot (2^{10} - 2^6)$, ¿cuál es el menor entero positivo N tal que $M \cdot N$ es un cuadrado perfecto?

2. Las velas

Sol tiene una buena colección de velas. Primero regala a Sergio los dos quintos de las velas y le quedan menos de 60 velas. Luego regala a Lucía dos tercios de las que le quedan y al final, Sol se queda con más de 18 velas. ¿Cuántas velas tenía Sol en su colección al principio?

3. La aspiradora

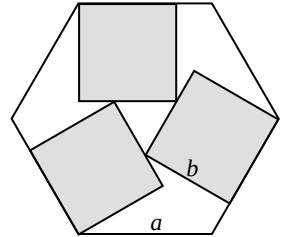
Un robot aspirador circular se queda encajado en el rincón de una habitación como ves en el dibujo. Si la distancia del punto señalado a las paredes de la esquina son 36 cm y 32 cm, ¿cuál es el radio del robot aspirador?



1. El hexágono y los cuadrados

En un hexágono regular de lado a inscribimos tres cuadrados de lado b , como se indica en la figura. Halla la

relación $\frac{b}{a}$.



Indicación: Recuerda que $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$

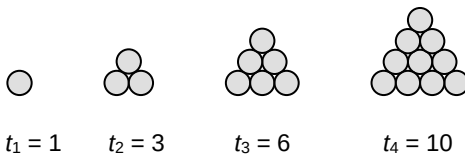
2. Tiro con arco

Alba, Beatriz y Carolina realizan una competición de tiro con arco. Disparan a un globo que cuelga de una diana por orden, primero Alba, después Beatriz y luego Carolina. Si el globo no ha explotado, vuelven a empezar. Si la probabilidad de acierto de Alba en cada tiro es $1/4$, la de Beatriz $1/3$ y la de Carolina $1/2$, ¿qué probabilidad tiene cada una de ganar?

3. Números triangulares

Un número n es triangular si se pueden disponer n objetos (por ejemplo, bolas) formando un triángulo. Los primeros números triangulares son 1, 3, 6, 10, 15, ... Si llamamos t_n al n -ésimo

número triangular, calcula la suma $S_{2022} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{t_{2022}}$.



[Anota la respuesta en la tarjeta y pásala a tu relevo de 3ESO – 4ESO]

EMPIEZA CON EL PROBLEMA II B

II A. [Sea T la respuesta del problema I A]

Gasté exactamente T euros en comprar el máximo número posible de zapatos de 60 euros y de 70 euros. ¿Cuántos zapatos de 70 euros compré?

[Anota la respuesta en la tarjeta y pásala a tu relevo de Bachillerato]

II B.

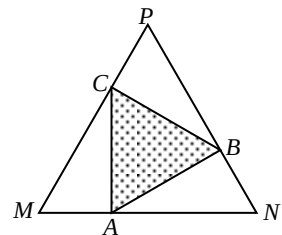
Dos amigos quieren saber quién juega mejor al tenis, así que organizan un torneo, con más de un partido, en el que juegan solo ellos. En cada partido, el ganador se lleva G puntos y el perdedor P puntos. Alicia gana el torneo con 22 puntos ya que Carlos consiguió solo 13. Si Carlos solo ganó un partido, ¿cuántos puntos se lleva el perdedor de un partido?

[Anota la respuesta en la tarjeta y pásala a tu relevo de Bachillerato]

II C. [Sea T la respuesta del problema I C]

El triángulo equilátero ABC es inscrito en el otro triángulo equilátero MNP . Cada lado del triángulo ABC es perpendicular a un lado del triángulo MNP .

Si el área del triángulo MNP es igual a T , ¿cuál es el área del triángulo ABC ?



[Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema]

XX INTERCENTROS *Joaquín Hernández*

PRUEBA DE RELEVOS

NIVEL III (BACH)

EMPIEZA CON EL PROBLEMA III C

III A. [Sea **T** la respuesta del problema **II A**]

Carmen y Esteban salen a correr juntos. Carmen tarda 6 minutos en dar la vuelta al lago y Esteban tarda $2T$ minutos. Antes de empezar la siguiente vuelta Carmen descansa un minuto y Esteban descansa dos. Si empiezan a correr juntos, ¿cuántos minutos tardarán en volver a coincidir en el mismo punto del recorrido?

[Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema]

III B. [Sea **T** la respuesta del problema **II B**]

Si $n \neq 0$, calcula la suma de los números reales x que satisfacen la ecuación $\log_{2^n}(Tx) = \frac{x}{n}$.

[Anota la respuesta en la tarjeta y pásala a tu relevo de 1ESO – 2ESO]

III C.

Se considera la función $f(x)$ que verifica $f(x \cdot y) = \frac{f(x)}{y}$ cualesquiera que sean los

números reales x e $y \neq 0$. Si $f(337) = 18$, ¿cuál es el valor de $f(2022)$?

[Anota la respuesta en la tarjeta y pásala a tu relevo de 1ESO – 2ESO]

tw!9.! thw9v!lth{

SOLUCIÓN NIVEL I

1. Abracadabra

La letra A está 4 veces, la B 2 veces, la C 1 vez y la D 1 vez.

Las combinaciones posibles son:

AAAA, AAAB, AAAC, AAAD, AABB, AABC, AABD, AACD, ABBC, ABBD, ABCD, BBBCD. **En total hay 12**

2. Fechas

La primera cifra del año más pequeña posible es el 1.

Para la segunda cifra tenemos:

- El 0 no puede ser porque nos quedaríamos sin cifras para el mes.
- El 2 tampoco porque ocurre lo mismo.
- El 3 puede ser y es el más pequeño.

Para la tercera cifra:

- Tampoco pueden ser ni el 0 ni el 2 ni el 3, será el 4.
- El año menor que se puede formar es 1345.

Para el mes el número más pequeño es el correspondiente a junio, 06.

Para el día nos queda el 27. **La respuesta es 27 - 06 - 1345.**

3. Perímetro

Como los dos triángulos tienen el mismo perímetro

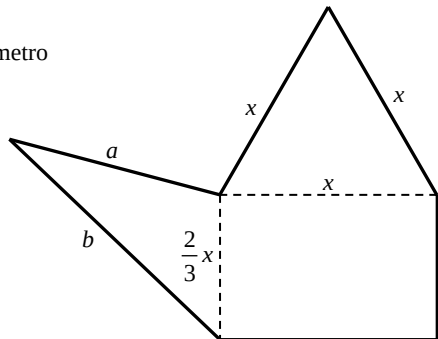
$$\frac{2}{3}x + a + b = 3x \Rightarrow a + b = 3x - \frac{2}{3}x = \frac{7}{3}x$$

El perímetro del hexágono es:

$$2x + \frac{7}{3}x + x + \frac{2}{3}x = \frac{6x + 7x + 3x + 2x}{3} = 6x$$

Como $2 \cdot \frac{2}{3}x + 2x = 90 \Rightarrow x = 27$

El perímetro buscado es $6 \cdot 27 = 162$



SOLUCIÓN NIVEL II

1. La inecuación

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{x}{z} + 1\right) : \left(\frac{y}{x} + \frac{y}{z} + 1\right) = 30 \Rightarrow \frac{zx + xy + yz}{yz} : \frac{yz + xy + xz}{xz} = 30$$

$$\frac{(zx + xy + yz)xz}{(yz + xy + xz)yz} = 30 \Rightarrow \frac{x}{y} = 30 \text{ luego } x \text{ es un múltiplo de } 30.$$

Como $3x + 2y + z \leq 100$ el valor de x no puede ser mayor que 30, por lo tanto $x = 30, y = 1$.

Y como $3x + 2y + z \leq 100, 90 + 2 + z \leq 100$ los únicos valores posibles de z son: 1, 2, 3, 4, 5,

6, 7 y 8.

Solución $x = 30, y = 1, z = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

2. Matepolý

Si designamos con d al número de ecuaciones que tiene Daniel, con s al número de ecuaciones que tiene Samuel y con l al de ecuaciones de Luis.

Cuando Daniel y Samuel han jugado, el número de ecuaciones que tienen en ese momento

$$\text{es: Daniel } \frac{2}{3}d \quad \text{Samuel } \left(s + \frac{1}{3}d\right)\frac{4}{5} \quad \text{y Luis } l + \left(s + \frac{1}{3}d\right)\frac{1}{5}$$

Cuando Luis hace la entrega de un tercio de sus ecuaciones a Daniel la cantidad de ecuaciones que tiene cada uno es:

$$\text{Daniel } \frac{2}{3}d + \frac{1}{3}\left[l + \left(s + \frac{1}{3}d\right)\frac{1}{5}\right] \quad \text{Samuel } \left(s + \frac{1}{3}d\right)\frac{4}{5} \quad \text{y Luis } \left[l + \left(s + \frac{1}{3}d\right)\frac{1}{5}\right] \cdot \frac{2}{3}$$

$$\text{Operando se obtiene para Daniel } \cdot \frac{31}{45}d + \frac{1}{15}s + \frac{1}{3}l = 64$$

$$\text{Para Samuel } \left(s + \frac{1}{3}d\right)\frac{4}{5} = 64 \quad \text{y para Luis } \frac{2}{3}l + \frac{2}{15}s + \frac{2}{45}d = 64$$

Resolviendo el sistema se obtiene que: $d = 48, s = 64$ y $l = 80$.

Solución: Daniel = 48, Samuel = 64, Luis = 80

3. El logo

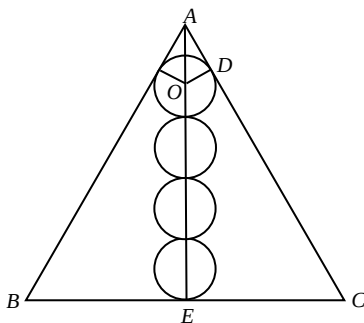
El segmento OE mide 7 radios. En el triángulo rectángulo ADO (30° , 60° , 90°) $AO = 2OD$. Luego la altura mide $7r + 2r = 9r$

La altura del triángulo equilátero es:

$$EA = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 12 = 6\sqrt{3}$$

$$\text{Por lo tanto } 6\sqrt{3} = 9r \Rightarrow r = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Solución: $r = \frac{2}{\sqrt{3}}$



SOLUCIÓN NIVEL III

1. La igualdad con cubos

(a) Podemos probar que $\left(\frac{100-4}{6}\right)^3 + \left(\frac{100}{2}\right)^3 + \left(\frac{100-1}{3}\right)^3 = 33 \cdot 5001$ calculando todas las operaciones.

$$\left(\frac{96}{6}\right)^3 + \left(\frac{100}{2}\right)^3 + \left(\frac{99}{3}\right)^3 = 16^3 + 50^3 + 33^3 = 4096 + 125000 + 35937 = 165033 = 33 \cdot 5001$$

Pero lo que se pretende es demostrar la igualdad del apartado (c) y aplicarla a los demás casos.

Partimos de la igualdad $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$$\begin{aligned} \left(\frac{10^n-4}{6}\right)^3 + \left(\frac{10^n}{2}\right)^3 + \left(\frac{10^n-1}{3}\right)^3 &= \frac{10^n-1}{3} \cdot \left(\frac{10^{2n}}{2} + 1\right) = \\ &= \left(\frac{10^n-4}{6} + \frac{10^n}{2}\right) \left[\left(\frac{10^n-4}{6}\right)^2 - \left(\frac{10^n-4}{6}\right) \cdot \left(\frac{10^n}{2}\right) + \left(\frac{10^n}{2}\right)^2 \right] + \left(\frac{10^n-1}{3}\right)^3 = \\ &= \left(\frac{4 \cdot 10^n - 4}{6}\right) \left(\frac{10^{2n} - 8 \cdot 10^n + 16}{36} - \frac{10^{2n} - 4 \cdot 10^n}{12} + \frac{10^{2n}}{4} \right) + \left(\frac{10^n-1}{3}\right)^3 = \\ &= \frac{4}{6} (10^n - 1) \left(\frac{7 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 16}{36} \right) + \left(\frac{10^n-1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3} (10^n - 1) \left(\frac{7 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 16}{18} \right) + \left(\frac{10^n-1}{3}\right)^3 = \\ &= \frac{1}{3} (10^n - 1) \left[\frac{7 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 16}{18} + \left(\frac{10^n-1}{3}\right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{3} (10^n - 1) \left(\frac{7 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 16 + 2 \cdot 10^{2n} - 4 \cdot 10^n + 2}{18} \right) = \frac{1}{3} (10^n - 1) \left(\frac{9 \cdot 10^{2n} + 18}{18} \right) = \frac{10^n-1}{3} \cdot \left(\frac{10^{2n}}{2} + 1\right) \end{aligned}$$

Para probar cualquiera de los otros casos aplicamos esta relación.

Por ejemplo el (b).

$$\left(\frac{1000-4}{6}\right)^3 + \left(\frac{1000}{2}\right)^3 + \left(\frac{1000-1}{3}\right)^3 = \frac{1000-1}{3} \cdot \left(\frac{1000000}{2} + 1\right) = 333 \cdot 500001$$

2. En el pentágono regular

Comprobamos la relación conocida $\Phi^2 = 1 + \Phi$

$$\Phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{2+1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \Phi.$$

En el triángulo ABC aplicamos el teorema del coseno.

$$l^2 = d^2 + d^2 - 2 \cdot d \cdot d \cdot \cos 36^\circ \Rightarrow l^2 = 2d^2(1 - \cos 36^\circ)$$

$$\frac{d^2}{l^2} = \frac{1}{2(1 - \cos 36^\circ)} \Rightarrow \Phi^2 = \frac{1}{2(1 - \cos 36^\circ)} \text{ Luego } \cos 36^\circ = 1 - \frac{1}{2\Phi^2}$$

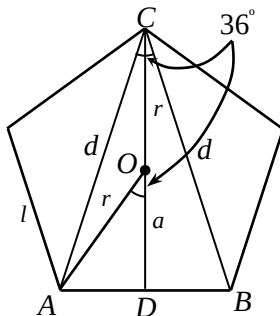
De la relación $\Phi^2 = 1 + \Phi$ se obtiene

$$\Phi = \frac{1}{\Phi} + 1 \Rightarrow \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 \Rightarrow \frac{1}{\Phi^2} = (\Phi - 1)^2 = \Phi^2 - 2\Phi + 1 = \Phi + 1 - 2\Phi + 1 = 2 - \Phi$$

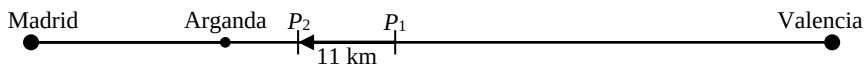
$$\text{Por lo tanto } 1 - \frac{1}{2\Phi^2} = 1 - \frac{1}{2} \cdot (2 - \Phi) = 1 - 1 + \frac{\Phi}{2} = \frac{\Phi}{2} = \cos 36^\circ$$

$$\text{Como en el triángulo } ADO \quad \cos 36^\circ = \frac{OD}{OA} = \frac{a}{r} \Rightarrow \frac{a}{r} = \frac{\Phi}{2}$$

Solución: $\frac{a}{r} = \frac{\Phi}{2}$



3. Camino de Arganda



Distancia $(P_1, \text{Madrid}) = [ab]$

Distancia $(P_1, \text{Arganda}) = [ba]$

Distancia $(P_2, \text{Madrid}) = [cd]$

Distancia $(P_2, \text{Arganda}) = [dc]$

Como la distancia $(P_1, P_2) = 11 = [ab] - [cd]$ se deduce que $a = c + 1$ y $b = d + 1$.

De $a + b + c + d = 24$ se obtiene $c + 1 + d + 1 + c + d = 24 \Rightarrow 2(c + d) = 22 \Rightarrow c + d = 11$

Por lo tanto $a + b = 13$.

Solución $x = 30, y = 1, z = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

La distancia $(\text{Madrid}, \text{Arganda}) = [ab] - [ba] = (10a + b) - (10b + a) = 9(a - b) < 30$

Por lo tanto $a - b < 10/3$ y los únicos números enteros que suman 13 y su diferencia es menor que $10/3$ son los números $a = 8$ y $b = 5$. Análogamente se deduce que $c = 7$ y $d = 4$

La distancia $(P_1, \text{Madrid}) = [ab] = 85$.

Solución La distancia $(P_1, \text{Madrid}) = [ab] = 85$

PRUEBA INDIVIDUAL

SOLUCIÓN NIVEL I

1. El campeonato

El número de goles en contra del equipo X es igual que el número de goles a favor porque empató todos los partidos.

Y como el número total de goles a favor ha de ser igual que el número en contra, $13 + 12 + n = 13 + 15 + 11 \Rightarrow n = 14$.

Los resultados de los partidos son:

$$X-Y \rightarrow (a, a) \quad X-Z \rightarrow (b, b) \quad Y-Z \rightarrow (c, d)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Goles a favor de equipo Y : } a + c = 12 \\ \text{Goles en contra de equipo Z : } b + c = 11 \end{array} \right\} \Rightarrow a - b = 1$$

y como $a + b = 13 \Rightarrow a = 7, b = 6$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Goles a favor de equipo Y : } 7 + c = 12 \\ \text{Goles en contra de equipo Y : } 7 + d = 15 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c = 5 \\ d = 8 \end{array}$$

Los resultados fueron: X-Y $\rightarrow$ (7, 7) X-Z $\rightarrow$ (6, 6) Y-Z $\rightarrow$ (5, 8)

2. La herencia del faraón

Si fueran 4 hijos recibirían $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$

Si fueran 4 hijos recibirían $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$ y le quedaría $\frac{13}{60} > \frac{1}{5}$ que es mayor que lo que recibe el tercero.

Si fueran 5 hijos recibirían $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60}$ y para el último quedaría $\frac{3}{60} < \frac{1}{6}$. Por lo

tanto eran 5 hijos. Como $\frac{3}{60}x = 27\,000 \Rightarrow x = 540\,000$ monedas

Al primero le correspondieron $\frac{1}{3} 540\,000 = 180\,000$ monedas. Al segundo le correspondieron

$\frac{1}{4} 540\,000 = 135\,000$ monedas. Al tercero le correspondieron $\frac{1}{5} 540\,000 = 108\,000$ monedas.

Al cuarto le correspondieron $\frac{1}{6} 540\,000 = 90\,000$ monedas y al quinto 27 000 monedas.

Solución: Eran 5 hijos y recibieron : 180 000, 135 000, 108 000, 90 000, 27 000
--

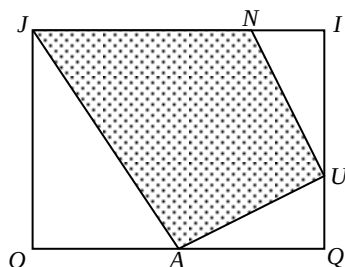
3. Joaquín

$$S_{JOA} = \frac{1}{2} \left(x \cdot \frac{1}{2} y \right) = \frac{1}{4} x \cdot y \quad S_{AQU} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} x \cdot \frac{1}{2} y \right) = \frac{1}{12} x \cdot y$$

$$S_{UIN} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} x \cdot \frac{1}{4} y \right) = \frac{1}{12} x \cdot y \quad S_{JOQI} = xy$$

$$S_{JAUN} = xy - \left(\frac{1}{4} xy + \frac{1}{12} xy + \frac{1}{12} xy \right) = xy - \frac{5}{12} xy = \frac{7}{12} xy$$

Solución $S_{JAUN} = \frac{7}{12} xy$
--



SOLUCIÓN NIVEL II

1. Cuadrado perfecto

$$M = (2^{10} - 2^9) \cdot (2^{10} - 2^8) \cdot (2^{10} - 2^7) \cdot (2^{10} - 2^6) = 2^9(2-1) \cdot 2^8(4-1) \cdot 2^7(8-1) \cdot 2^6(16-1) = \\ = 2^{30} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

Basta con multiplicar por con $5 \cdot 7 = 35$

Solución: Basta con multiplicar por $5 \cdot 7 = 35$

2. Las velas

Si x es el número de velas Sergio recibe $\frac{2}{5}x$ y sabemos que deben verificar

$$\frac{3}{5}x < 60 \Rightarrow x < 100.$$

A Lucía regala $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}x = \frac{2}{5}x$ y quedan $x - \frac{2}{5}x - \frac{2}{5}x = \frac{1}{5}x$ que debe verificar

$\frac{1}{5}x > 18 \Rightarrow x > 18 \cdot 5 = 90$ El único valor entero de x comprendido entre 90 y 100 que es

múltiplo de 5 es 95. Por lo tanto Sol tenía 95 velas.

Solución 95 velas

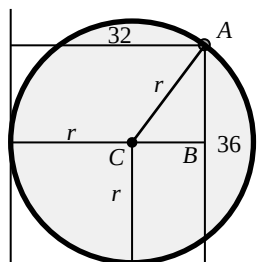
3. La aspiradora

En el triángulo rectángulo ABC $AC^2 = AB^2 + BC^2$, es decir,

$$r^2 = (36-r)^2 + (32-r)^2 \Leftrightarrow r^2 - 136r + 2320 = 0$$

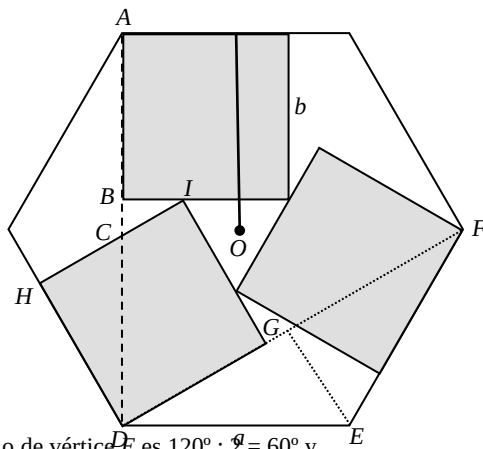
Cuyas soluciones son $x_1 = 20$ y $x_2 = 116$ (sin sentido).

Solución 20 cm



SOLUCIÓN NIVEL III

1. El hexágono y los cuadrados



En el triángulo rectángulo DEG el ángulo de vértice E es $120^\circ : \hat{E} = 60^\circ$ y

$$\operatorname{sen} \hat{E} = \frac{DG}{DE} \Rightarrow DG = DE \cdot \operatorname{sen} \hat{E} = a \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \sqrt{3} a.$$

luego $AD = DF = 2DG = \sqrt{3} a$. Pero $AD = AB + BC + CD$.

En el triángulo rectángulo DHC

$$\cos \hat{D} = \frac{DH}{DC} \Rightarrow DC = \frac{DH}{\cos \hat{D}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2b}{\sqrt{3}} \Rightarrow CI = b - \frac{2b}{\sqrt{3}} = b \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) = b \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos \hat{D} = \frac{DH}{DC} \Rightarrow DC = \frac{DH}{\cos \hat{D}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2b}{\sqrt{3}} \Rightarrow HC = \frac{1}{2} DC = \frac{b}{\sqrt{3}}$$

$$CI = b - \frac{b}{\sqrt{3}} = b \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = b \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}$$

En el triángulo rectángulo CBI

$$\operatorname{sen} \hat{I} = \frac{BC}{CI} \Rightarrow BC = CI \cdot \operatorname{sen} \hat{I} = b \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = b \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = b \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}}$$

En conclusión, como $AD = AB + BC + CD$ resulta que

$$\sqrt{3} a = b + b \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} + \frac{2b}{\sqrt{3}} = b \left(\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 + 4}{2\sqrt{3}} \right) = b \left(\frac{3 + 3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \right) = b \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(3 - \sqrt{3})}{9 - 3} = \frac{6\sqrt{3} - 6}{6} = \sqrt{3} - 1$$

Solución $\frac{b}{a} = \sqrt{3} - 1.$

2. Tiro con arco

La probabilidad de que gane Alba es la probabilidad de que gane a la primera o a la segunda o a la tercera, etc.

$$p(A) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

Análogamente con Beatriz

$$p(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{4} \right)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4} \right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \dots = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

Solución $p(A) = p(B) = p(C) = \frac{1}{3}.$

Y lo mismo ocurre con Carolina

3. Números triangulares

Un número n es triangular si se pueden disponer n objetos (por ejemplo, bolas) formando un triángulo. Los primeros números triangulares son 1, 3, 6, 10, 15, ... Si llamamos t_n al n -ésimo

número triangular, calcula la suma $S_{2022} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{t_{2022}}$.

Si calculamos $1/2 \cdot S_{2022}$ resulta que $\frac{1}{2} S_{2022} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{2t_{2022}} =$

$$\frac{1}{2} S_{2022} = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} \right) = 1 - \frac{1}{2023} \Rightarrow S_{2022} = 2 \left(1 - \frac{1}{2023} \right)$$

Solución $S_{2022} = 2 \left(1 - \frac{1}{2023} \right)$
--

PRUEBA DE RELEVOS

Solución Relevo A

I A

$q = 1$ porque sale de $1 + k = 10 \Rightarrow k = 9$.

s se obtiene de $1 + l = 10$ o de $1 + l + 1 = 10 \Rightarrow l = 9$ ó $l = 8$.

Ahora bien, $[ab] \times [cd] = [9lmn]$, pero para obtener un número como $98mn$ o $99mn$, no hay más que una posibilidad, que es, $99 \times 99 = 9801$, por lo tanto $a = b = c = d = 9$, $l = 8$ y $r = s = 0$.

Las demás cifras se deducen inmediatamente. $p = o = 9$ y el resultado final 10 000. $T = 10\,000$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc} a & b \\ \times & c & d \\ \hline e & f & g \\ h & i & j \\ \hline k & l & m & n \\ + & 1 & o & p \\ \hline q & r & s & t & u \end{array}
 \end{array}$$

II A Como $T = 10\,000$, dispongo de 10 000 € para comprar los zapatos.

El mayor número de zapatos se conseguirá con los zapatos de menor precio, 60 €.

$10\,000 : 60 = 166,66\dots$, luego con 166 zapatos de 60 € y ninguno de 70 € sobrarían 40 €.

Con 165 zapatos de 60 € puedo comprar 1 de 70 € y sobran 30 €.

Hay que encontrar el mayor valor de x para que $60x + 70y = 10\,000$.

Con $x = 164$ hay un resto de 160 €, con $x = 163$ hay un resto de 220 € y con $x = 162$ el resto es de 280 € que nos permite comprar $y = 4$ juegos de zapatos de 70 €. $T = 4$

III A Como $2T = 8$, Esteban tarda 8 minutos en dar una vuelta al lago.

Hasta el final de la 1ª vuelta Carmen tarda 6 minutos.

Hasta el final de la 2ª vuelta Carmen tarda $6 + 1 + 6 = 13$ minutos.

Hasta el final de la 3ª vuelta Carmen tarda $6 + 1 + 6 + 1 + 6 = 20$ minutos.

Si analizamos los tiempos que tarda Esteban en cada vuelta tenemos:

Hasta el final de la 1ª vuelta Esteban tarda 8 minutos.

Hasta el final de la 2ª vuelta Esteban tarda $8 + 2 + 8 = 18$ minutos, pero descansa 2 minutos y cuando vuelve a andar han transcurrido 20 minutos y le alcanza en ese momento Carmen.

Solución. **20** minutos

Solución Relevo B

II B

Si juegan x partidos Alicia gana $(x - 1)$ partidos y Carlos 1.

Si designamos con G los puntos que recibe el ganador y con P los que recibe el perdedor, tenemos:

$$\begin{cases} (x-1) \cdot G + P = 22 \\ G + (x-1) \cdot P = 13 \end{cases} \quad \text{Sumando se obtiene } x \cdot (G + P) = 35 \Rightarrow \begin{cases} x = 5, (G + P) = 7 \\ x = 7, (G + P) = 5 \end{cases}$$

$$\text{Si juegan 5 partidos resulta que } \begin{cases} 4 \cdot G + P = 22 \\ G + 4 \cdot P = 13 \end{cases} \Rightarrow 15P = 30 \Rightarrow \begin{cases} P = 2 \\ G = 5 \end{cases}$$

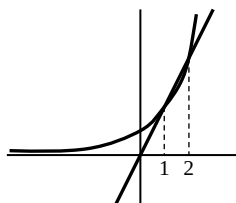
$$\text{Si juegan 7 partidos resulta que } \begin{cases} 6 \cdot G + P = 22 \\ G + 6 \cdot P = 13 \end{cases} \Rightarrow 35P = 56 \Rightarrow \begin{cases} P = \frac{8}{5} = 1,6 \\ G = \frac{17}{5} = 3,4 \end{cases}$$

Como la puntuación de las victorias en los partidos deportivos se hace con números enteros, consideramos solamente la respuesta $P = 2$. **$T = 2$**

III B Como $T = 2$, la ecuación es $\log_{2^n}(2x) = \frac{x}{n} \Rightarrow \left(2^n\right)^{\frac{x}{n}} = 2x \Leftrightarrow 2^x = 2x$

Esta igualdad se verifica cuando $x = 1$ y cuando $x = 2$. Si observamos las gráficas de las

funciones $y = 2^x$, $y = 2x$ vemos que solamente hay dos soluciones. **$T = 1 + 2 = 3$**



I B Como $T = 3$ entonces $10T = 30$.

El resultado del producto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 30$ terminará en tantos ceros como tantos cincos en el producto: $5, 10 = 2 \cdot 5, 15 = 3 \cdot 5, 20 = 4 \cdot 5, 25 = 5 \cdot 5$ y $30 = 5 \cdot 6$, en total hay 7.

Solución $T = 7$

Solución Relevo C

III C

Primer método. Tratamos de hallar la expresión de la función $f(x)$.

$$f(x) = f(1 \cdot x) = \frac{f(1)}{x} \text{ Hallamos } f(1). \quad f(337) = f(1 \cdot 337) = \frac{f(1)}{337} = 18 \Rightarrow f(1) = 18 \cdot 337$$

$$\text{Por lo tanto } f(x) = \frac{18 \cdot 337}{x} = \frac{6066}{x} \text{ y } f(2022) = \frac{6066}{2022} = 3$$

Segundo método, más directo.

$$f(2022) = f(337 \cdot 6) = \frac{f(337)}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

Por lo tanto **$T = 3$**

I C Como $T = 3$, $F3 = 15 \cdot 3 + 125 = 170$. Como $F2$ es $(2/3)F3$ entonces $F3$ es múltiplo de 3 y termina en 0, es decir, tiene que ser $C3 = 900$.

Con esto ya podemos escribir

		C1	C2	C3
		↓	↓	↓
F1 →	1			9
F2 →	6	0	0	
F3 →	1	7	0	

Lo que falta ya es evidente y se puede completar el cuadro.

La suma de las cifras de $F1$ es $1 + 2 + 9 = 12$. Luego **$T = 12$**

1	2	9
6	0	0
1	7	0

II C El área del triángulo MNP es 12

Como el triángulo MAC es rectángulo con $\hat{M} = 60^\circ$

entonces $MC = 2 MA$ y $AC = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = x\sqrt{3}$

Los triángulos ABC y MNP son semejantes con razón de

$$\text{semejanza } \frac{AC}{MP} = \frac{x\sqrt{3}}{3x} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ luego la razón de las áreas es } \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Por lo tanto } S_{ABC} = \frac{1}{3} S_{MNP} = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4 \quad \textbf{Solución } T = 4$$

