

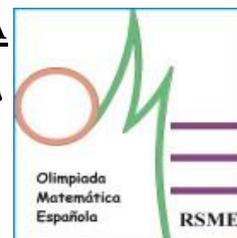


REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

LVIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Comunidad de Madrid

FASE CERO: sábado 27 de noviembre de 2021

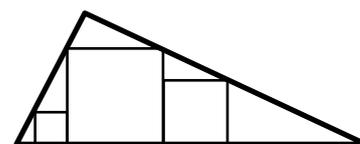


- 1** En la mesa presidencial tienen que sentarse las cinco autoridades A, B, C, D, E, mirando al público asistente. Por rencillas internas A y B no pueden estar juntos y C y D tampoco. ¿De cuántas maneras puede conformarse la mesa?



A) 52 B) 48 C) 46 D) 44 E) 40

- 2** Aprovechando tres cuadrados de áreas 1 cm^2 , 4 cm^2 y 9 cm^2 , hemos construido un triángulo de trazo grueso. ¿Qué área, en cm^2 , tiene este triángulo?



A) 22 B) 23,10 C) 22,50 D) 24 E) 22,05

- 3** Los cuatro primeros términos de una progresión aritmética son A , B , $5A + 2$, $2B + 4$. ¿Cuál de estos números pertenece a dicha progresión?

A) 2018 B) 2019 C) 2020 D) 2021 E) 2022

- 4** Antonio y Berta han decidido escribir entre dos y tres poemas diarios cada uno. Después de varios días Antonio había escrito 43 poemas y Berta 61. ¿Cuántos días pueden haber pasado desde que comenzaron a escribir?

A) 15 B) 17 C) 20 D) 21 E) 22

- 5** En una habitación hay cuatro perros y un gato. De las siguientes afirmaciones solo una es verdad y el resto son falsas:

(I) Moss es un gato.

(II) El gato es Jere, Nemo o Luna.

(III) Jere y Kira son perros.

(IV) Luna es un gato.

¿Quién es el gato?

A) Jere B) Kira C) Luna D) Moss E) Nemo

- 6** ¿Cuántas funciones de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ verifican que, para todo x ,

$$f(x) \cdot f(-x) = f(x^2)?$$

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

- 7** El dominio de cierta función f es $[0; 1]$ y su imagen (o rango) es el intervalo $[0; 2]$. ¿Qué intervalos son el dominio y la imagen de la función $g(x) = 1 - f(x + 1)$?

A) $[1; 3]$ y $[-1; 0]$

B) $[-1; 0]$ y $[-1; 1]$

C) $[0; 2]$ y $[-1; 0]$

D) $[1; 3]$ y $[0; 1]$

E) $[-1; 1]$ y $[0; 1]$

- 8 Si n es un entero positivo, definimos $F(n) = 2n$ si n es par y $F(n) = 3n$ si n es impar. Sea p un primo mayor que 2. ¿Cuánto vale $F(F(p-1) - p)$?

A) $2(p-2)$ B) $p-2$ C) $3(p-2)$ D) $3p-2$ E) $2p-2$

- 9 Don Retorcido es fanático de los números y se entretiene colocándolos como ves a la derecha.

¿En qué columna estará el 2021?

C1	C2	C3	C4	C5
1				
2	3			
4	5	6		
7	8	9	10	
11	12	13	14	15

A) C1 B) C5 C) C9 D) C13 E) C17

- 10 ¿Qué afirmación es cierta para el menor entero positivo n que cumple esta desigualdad?

$$\frac{2}{5} + \frac{8}{n} < \frac{5}{4} + \frac{2}{n}$$

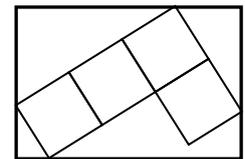
A) Es una potencia de 2 B) Es primo C) Es múltiplo de 3
D) Es impar y no es primo E) Es mayor que 25

- 11 Las longitudes de los lados a, b, c , de una familia de triángulos pueden expresarse de la forma $a = 2n, b = 3n + 78, c = 95$, donde n toma valores enteros. ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor perímetro posible de todos esos triángulos?

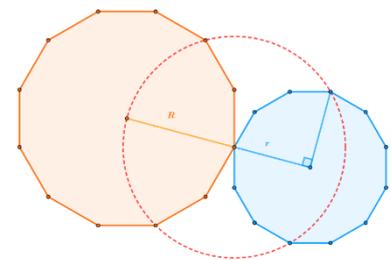
A) 70 B) 65 C) 51 D) 60 E) 80

- 12 Estás viendo un rectángulo de lados 26 cm y 18 cm y cuatro cuadrados idénticos con algunos vértices sobre lados del rectángulo. ¿Qué área, en cm^2 , tiene cada cuadrado?

A) 52 B) 48 C) 50 D) 60 E) 56



- 13 Se consideran dos dodecágonos con un vértice común. Si trazamos la circunferencia de centro ese vértice común y radio R (el radio de la circunferencia circunscrita al polígono más grande), esta circunferencia pasa por dos vértices del segundo polígono, como indica la figura. ¿Cuál es el cociente entre el área del dodecágono mayor y el área del dodecágono menor?



A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $2\sqrt{2}$ D) $3/2$ E) $(3\sqrt{2})/2$

- 14 Si $N = (n+22) + (n+23) + \dots + (n+70)$, ¿cuál es el menor entero positivo n para el que N es un cuadrado perfecto?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

- 15 ¿Cuántos números comprendidos entre 1000 y 9999 escritos usando solamente cifras pares son múltiplos de 5?

A) 80 B) 100 C) 125 D) 200 E) 500

- 16** El número n es un entero positivo que termina en 5. Sabemos que la cifra de las decenas de n^3 es impar. ¿Cuál es esta cifra?
- A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9
- 17** María salió a correr con muchas ganas. Durante los dos primeros tercios del recorrido llevó una velocidad de A m/s y en el último tercio, ya más cansada, corrió a una velocidad de B m/s. Si en total ha estado corriendo S segundos, ¿cuántos metros corrió María?
- A) $\frac{SAB}{A+2B}$ B) $\frac{3SAB}{2A+2B}$ C) $\frac{3S}{A+B}$ D) $\frac{3SAB}{2A+B}$ E) $\frac{3SAB}{A+2B}$
- 18** Un número capicúa es aquel que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Son números capicúas el 55, el 252, el 7997, etc. Hay en total 90 números capicúas de 4 cifras. ¿Cuántos de ellos son múltiplos de 7?
- A) 7 B) 9 C) 14 D) 18 E) 21
- 19** Queremos colorear cada cuadrado de una cuadrícula de 3×3 de verde, rojo o amarillo, de manera que ninguna fila o columna contengan cuadrados del mismo color. En el dibujo ves un ejemplo de una coloración válida. ¿De cuántas formas distintas se puede hacer?
- A) 15 B) 6 C) 9 D) 12 E) 24
- | | | |
|---|---|---|
| R | V | A |
| A | R | V |
| V | A | R |
- 20** Definimos por recurrencia la sucesión $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$; como sigue:
 $a_1 = 5; a_2 = 7$ y $a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$ para todo $n \geq 3$. Entonces, a_{2021} es
- A) $1/5$ B) $1/7$ C) $7/5$ D) $5/7$ E) 5
- 21** ¿Cuántos números del conjunto $\{1^1; 2^2; 3^3; \dots; 2020^{2020}; 2021^{2021}\}$ son cuadrados perfectos?
- A) 1000 B) 1010 C) 1024 D) 1032 E) 1042
- 22** ¿Cuál es el volumen de un cubo cuya superficie lateral es el doble que la de otro cubo de volumen 1?
- A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $2\sqrt{2}$ D) 4 E) 8
- 23** En el cuadrilátero $ABCD$ los ángulos $\angle ABC$ y $\angle ACD$ son rectos. Se sabe también que la diagonal $AC = 20$ cm y que el lado $CD = 30$ cm. Las diagonales se cortan en el punto E , con $AE = 5$ cm. El área del cuadrilátero, en cm^2 , es
- A) 330 B) 340 C) 350 D) 360 E) 370
- 24** Llamamos C_1 a la circunferencia circunscrita al cuadrado $ABCD$ de lado 120 cm, y C_2 a la circunferencia con centro A y radio AB . ¿Cuánto mide, en cm^2 , la luna determinada por ambas circunferencias? Llamamos luna al área de C_1 que queda fuera de C_2 y la circunferencia circunscrita al cuadrado es la que pasa por sus cuatro vértices.
- A) 7200 B) 2000π C) 2400π D) 8000 E) 1440π
- 25** Si la suma de diez números consecutivos es S , ¿cuál es la suma de los diez siguientes?
- A) $S + 100$ B) $S + 95$ C) $10S$ D) $S + 29$ E) $S + 145$