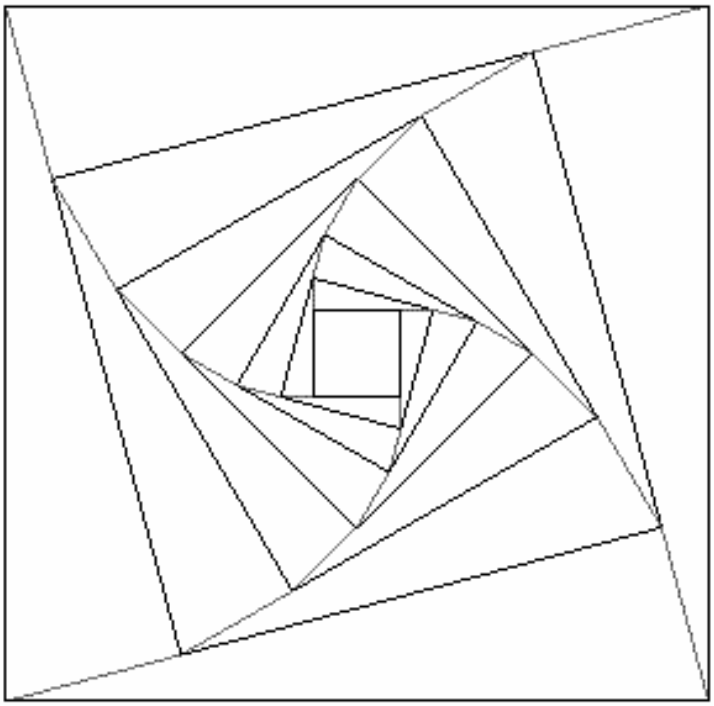
SOCIEDAD «PUIG ADAM»
DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 99
FEBRERO DE 2015

ÍNDICE

Págs.

Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2015 4

XXXIII Concurso de Resolución de Problemas……..…...……...… 5

XIV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid,
por *Joaquín Hernández* y *Juan Jesús Donaire* 6

Mínimo de la suma de distancias a cuatro puntos del plano euclídeo,
por *Francisco J. Baena* ……..…… 16

Sobre sumas y diferencias de cubos
por *Ricardo Moreno Castillo*…….…… 26

Un camino heurístico hacia el punto de Fermat de un triángulo,
por *José Alberto García Suárez*,……..….. 31

Números primos formados únicamente por un dígito repetido,
por *Sergio Falcón Santana* …… 39

Dibujando caleidoscopios con una coreografía de tortugas,
por *Eugenio Roanes Lozano* ……..……...……. 44

Sistemas antiguos de numeración,
por *Mª Concepción Romo Santos* …….……...……. 63

El rendimiento escolar en secundaria: estudio del impacto de
algunas variables de factores de riesgo
por *Juan José Prieto Martínez* ……. 73

La Real Academia de Matemáticas de Barcelona y el progreso
de la Ingeniería,
por *José Aldeguer Carrillo*…….. 83

Reseña de libros ……..……... 88

Anuncio de la III Olimpiada Estadística …… 91

Instrucciones para el envío de originales …..... 93

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín 95

Boletín de inscripción 96

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE
ENTRE LOS SOCIOS DE LA
SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen ahora en "MathEduc", es decir, en lo que antes era Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), que ha cambiado su nombre.

La confección de este número ha estado a cargo de Antonio Hernando, Eugenio Roanes Lozano y Eugenio Roanes Macías.

ISSN: 1135-0261
Depósito Legal: M-7762-1995
Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Telf.: 91 611 59 94 – e-mail:loureiro@graficasloureiro.es

En la portada de este número aparece la figura adoptada como logotipo de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado "La Matemática y su enseñanza actual", publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Algebra) Despacho 3215
Rector Royo Villanova, s/n - 28040 - Madrid
Teléf.: 91 394 62 48

Página web de la Sociedad "Puig Adam":
http://www.sociedadpuigadam.es

Todo lo relativo a publicación en el Boletín (de artículos, etc), debe hacerse a través del correo electrónico: puigadam@mat.ucm.es

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:
JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:
EUGENIO ROANES MACÍAS
F. JAVIER PERALTA CORONADO
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

ENRIQUE RUBIALES CAMINO	(Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO	(Gestión de publicaciones)
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ	(Actividades y concursos)
JUAN JESÚS DONAIRE MORENO	(Redacción de Publicaciones)

Secretario:
JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

Vicesecretaria:
MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:
FERNANDO LISÓN MARTÍN

Bibliotecario:
ANTONIO HERNANDO ESTEBAN

Mantenedoras página web:
BEATRIZ BARRERO DÍAZ
CAROLINA BRAVO SANZ

Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2015

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas correspondiente al año 2015 para el *sábado día 11 de abril de 2015*, en los locales de la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, Ciudad Universitaria, a las 11:30 en primera convocatoria y a las 12:00 en segunda, con el siguiente:

ORDEN DEL DIA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.
2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.
3. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Elección de nuevos cargos directivos.
5. Asuntos de trámite.
6. Ruegos y preguntas.

Cuotas del año 2015 y siguientes

Se recuerda a nuestros socios que en la Asamblea General Ordinaria de 2014 se aprobó que los recibos anuales sean pasados al cobro en el mes de enero de cada año (véase Boletín nº 97), ya que hemos de pagar a primeros de año la cuota a la Federación de Sociedades Matemáticas, por la que recibimos la revista SUMA.

XXXIII Concurso de Resolución de Problemas

convocado por

la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas

(con la colaboración del Colegio de Doctores y
Licenciados en Filosofía y Letras y en Ciencias)

BASES DEL CONCURSO

Primera: Los alumnos podrán participar en el Concurso en tres niveles:

a) *Primer nivel*: alumnos de 3º de E.S.O.
b) *Segundo nivel*: alumnos de 4º de E.S.O.
c) *Tercer nivel*: alumnos de 1º Bachillerato

Segunda: Las pruebas consistirán en la resolución de Problemas de Matemáticas (los mismos para todos los concursantes de un mismo nivel) y se realizarán en la mañana del *sábado 13 de junio del 2015* a partir de las 10 horas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Tercera: A los mejores de cada nivel, se concederán diplomas y premios.

Cuarta: Los Centros que deseen presentar alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del día 20 de Mayo del 2015, dirigiéndose por correo electrónico, carta o fax al presidente de nuestra Sociedad:

Prof. Javier Etayo Gordejuela
Departamento de Algebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
28040-Madrid *Fax: 91 394 4662*
Correo electrónico : `jetayo@mat.ucm.es`

En la preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

Quinta: Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 2014-2015.

XIV Concurso Intercentros

"Seguimos en la brecha"

La Sociedad Puig Adam, a pesar de sus dificultades de financiación, sigue patrocinando este Concurso Intercentros junto con el tradicional de la Sociedad que tiene lugar en el mes de junio.

En esta ocasión, sesenta y cuatro equipos, compuestos por seis estudiantes de diferentes edades y niveles cada uno, pertenecientes a treinta y ocho centros de enseñanza, tanto públicos como privados, participaron en esta ocasión en el XIV Concurso Intercentros con resultados similares a los de años anteriores.

Estos, casi cuatrocientos, estudiantes disfrutaron durante toda la mañana del sábado 22 de noviembre resolviendo problemas de matemáticas de diferentes dificultades y contenidos.

Muchos de ellos habían participado dos días antes en la primera fase de la 51ª Olimpiada Matemática Española y se preparaban para la siguiente fase que tendría lugar en el siguiente mes de diciembre.

Las características de este concurso lo hacen más atractivo que otros debido a que algunas de las pruebas se hacen en equipo y otras con relevos y por otra parte no solamente compiten de forma individual, ellos también representan al centro en el que realizan sus estudios.

Incluimos a continuación la relación de los centros ganadores y todos los problemas propuestos en esta ocasión.

Las soluciones pueden encontrarse buscando en Internet en las páginas correspondientes a los Concursos de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas.

PRUEBA POR EQUIPOS (45 minutos)

NIVEL I (1º y 2º de E.S.O.)

1. Si x e y representan cifras distintas de cero, encuentra todos los números de siete cifras de la forma $yxyxyxy$ divisibles por 18 y que verifican que el número formado por las cinco cifras centrales, es decir, el $xyxyx$ es divisible por 3.

2. Encuentra el número de tres cifras $N = [abc]$, $a \neq 0$, tal que dicho número N sea igual a $b\cdot(10c + b)$ y tanto b como $(10c + b)$ sean números primos.

3. El rectángulo $ABCD$ (Figura 1) está dividido en cuatro rectángulos como muestra la figura. Los perímetros de tres de estos rectángulos son 11, 16 y 19 cm y el cuarto no es ni el de mayor ni el de menor perímetro de los cuatro. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo $ABCD$?

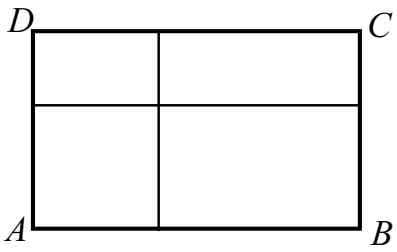


Figura 1

NIVEL II (3º y 4º de E.S.O.)

1. La Figura 2 muestra una estrella simétrica de cuatro puntas. Las cuatro puntas de la estrella son los vértices de un cuadrado de 24 cm de lado y los otros cuatro vértices de la estrella están en una circunferencia. Si el área de la estrella (sombreada) es un tercio del área del cuadrado, calcula el radio de la circunferencia.

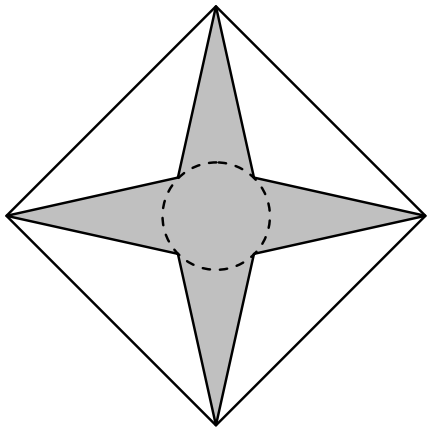


Figura 2

2. Halla un número de tres cifras, N = [*abc*], tal que al multiplicarlo por 3 y sumarle 1, resulte el número leído al revés, es decir, 3N + 1 = [*cba*].

3. En la Figura 3 se observa un triángulo *ABC* y una circunferencia de centro *O* tangente al lado *BC* y a las prolongaciones de los lados *AB* y *AC* de dicho triángulo. Si el ángulo $B\hat{A}C$ es de 22º, calcula la medida del ángulo $x = B\hat{O}C$.

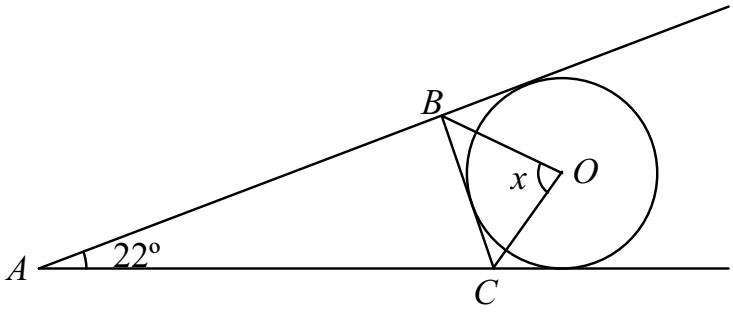


Figura 3

NIVEL III (Bachillerato)

1. La circunferencia inscrita a un triángulo rectángulo toca a la hipotenusa en un punto *P*. Este punto divide a la hipotenusa en dos segmentos de longitudes *a* y *b*. Calcula, en términos de *a* y *b*, el área de dicho triángulo.

2. Si a y b son números mayores que 1, con $a < b$, encuentra el menor valor de b para que no haya ningún triángulo de lados 1, a y b ni de lados $\frac{1}{b}, \frac{1}{a}$ y 1.

3. Antonio, Beatriz y Carolina juegan seis partidas de un determinado juego en el que en cada partida solo puede haber un ganador. Si la probabilidad de que gane Antonio en cada partida es $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de que gane Beatriz es doble de la que gane Carolina, calcula la probabilidad de que Antonio gane 3 partidas, Beatriz 2 y Carolina 1.

PRUEBA INDIVIDUAL (90 minutos)

NIVEL I (1º y 2º de E.S.O.)

1. En un concurso de problemas participaron solamente estudiantes de 1º, 2º y 3º de la ESO. El cociente entre el número de participantes de 3º y de 1º fue de $\frac{5}{3}$, el cociente entre el número de participantes de 3º y de 2º fue de $\frac{8}{5}$. ¿Cuántos estudiantes, como mínimo, participaron en dicho concurso?

2. En la Figura 4 se observan tres cuadrados iguales estando el de arriba justo en medio de los otros dos. Calcula el cociente entre el área de la región sombreada y la suma de las áreas de los tres cuadrados.

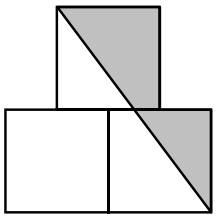


Figura 4

3. Cuando dividimos 113 744 y 109 417 entre el número de tres cifras *N*, obtenemos de restos 119 y 292, respectivamente. Calcula el número *N*.

4. En el rectángulo *ABCD* de la Figura 5, de dimensiones 40 y 30 cm, hemos dibujado el paralelogramo *AECF* en el que los lados *AF* y *EC* son perpendiculares a la diagonal *BD* de dicho rectángulo. Calcula el área del paralelogramo *AECF*.

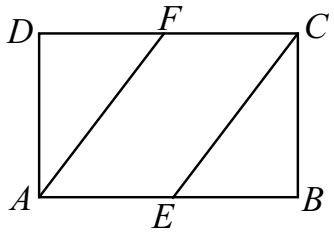


Figura 5

5. Escribe todas las parejas de enteros positivos, x e y, tales que $x^2 \cdot y^3 = 6^{12}$.

NIVEL II (3º y 4º de E.S.O.)

1. ¿Cuántas parejas de capicúas de tres cifras verifican que su suma es un capicúa de cuatro cifras?
(Por ejemplo, 232 y 989 sería una de ellas ya que 232 + 989 = 1221).

2. En un sistema de coordenadas dibujamos un cuadrado de vértices $A(a, 0)$, $B(b, 1)$, $C(c, 5)$ y $D(d, 4)$. Calcula su área.

3. ¿Cuántos números de cuatro cifras verifican que el producto de ellas es 60?

4. En el rectángulo *ABCD*, con $AB = 20$ y $BC = 10$ marcamos un punto *E* en el lado *CD* de manera que el ángulo $C\hat{B}E$ sea de 15º. Calcula la longitud del segmento *AE*.

5. Los números positivos *p, q* y *r* verifican que $pq + pr = 80$ y $pq + qr = 425$. Calcula $p + q + r$.

NIVEL III (Bachillerato)

1. En el triángulo equilátero de lado $2014\sqrt{3}$ se traza la circunferencia inscrita. Calcula el diámetro del mayor de los círculos que cabe en una de las regiones comprendidas entre dicho triángulo y la circunferencia inscrita.

2. ¿Cuántas fracciones positivas, menores que 1, verifican que al escribirlas en forma irreducible resulta que la suma del numerador y del denominador es 1000?

3. Calcula el número de enteros positivos x que verifican que $\lg_{10}(x-40)+\lg_{10}(60-x)<2$.

4. Alicia puede pintar, ella sola, una habitación en 15 horas, Beatriz es el 50 % más rápida que Alicia pintando y Carlos es el doble de rápido que Alicia. Empieza Alicia a pintar la habitación, al cabo de una hora y media se le suma Beatriz y, cuando llevan pintada la mitad de la habitación, entra Carlos y las ayuda hasta que entre los tres terminan de pintar la habitación. ¿Cuánto tiempo transcurrió desde que empezó Alicia hasta que terminaron de pintar la habitación?

5. Si *a, b, c* y *d* son enteros positivos que suman 63, calcula el máximo valor para *ab* + *bc* + *cd*.

PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

NIVEL I (1º y 2º de E.S.O.)

1A.- Calcula el valor de la cifra *A* si el número de cinco cifras 12*A*3*B* es divisible por 4 y por 9 y *A* es distinta de *B*.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1B.- Sea "*T*" la respuesta del problema 2B
Si *a, b, c* y *d* representan enteros positivos diferentes, con $a + b + 2c = 9$ y $a + c + d = 10$, calcula el valor de *d* sabiendo que $b = \frac{T}{4}$.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1C.- Sea "*T*" la respuesta del problema 2C.

En el cuadrado *ABCD* de la figura de lado $\frac{T}{50}$, *E* es el punto medio del lado *AD* y *EF* es perpendicular a la diagonal *AC*. Calcula el área del triángulo *EFC*.

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

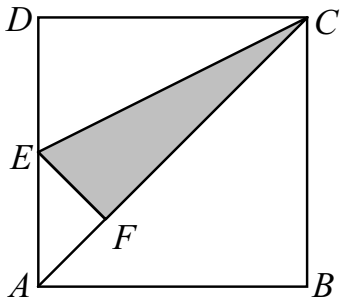


Figura 6

NIVEL II (3º y 4º de E.S.O.)

2A.- Sea "*T*" la respuesta del problema 3A y *r* la suma de las cifras de *T*.

En el interior del rectángulo *ABCD* de la figura, con *AB* = 27 y *AD* = 24, hay dos circunferencias tangentes entre sí y a los lados del rectángulo, como muestra la figura. Si el radio de la pequeña es *r*, calcula el radio de la mayor.

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

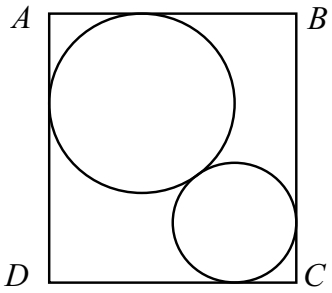


Figura 7

2B.- En una recta marcamos, de izquierda a derecha, los puntos *A, B, C, D* y *E* en ese orden. Si $\frac{AB}{BC}=\frac{1}{3}$, $\frac{BC}{CD}=\frac{1}{4}$ y $\frac{CD}{DE}=\frac{1}{2}$, calcula el numerador de la fracción irreducible $\frac{AC}{BE}$.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

2C.- Sea "*T*" la respuesta del problema 3C.

El ángulo formado por la mediana *CM* y la hipotenusa, *AB*, del triángulo rectángulo *ABC* es de 30º. Si la altura *CH* es $\sqrt[4]{T}$, calcula el área de dicho triángulo.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

NIVEL III (Bachillerato)

3A.- Sea "*T*" la respuesta del problema 1A.

En el rectángulo *ABCD* de la Figura 8, *AB* = 100T y *E* es el punto medio de *AD.* Si las rectas *AC* y *BE* son perpendiculares, calcula el mayor entero menor que *AD*. *(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)*

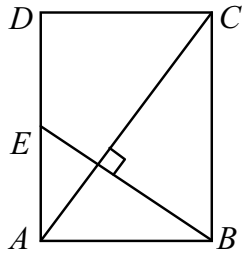


Figura 8

3B.- Sea "*T*" la respuesta del problema 1B.

Las gráficas de las funciones $y=3(x-h)^2+j$; $y=(T-3)(x-h)^2+k$ cortan al eje de ordenadas en los puntos (0, 2013) y (0, 2014), respectivamente. Si ambas funciones tienen dos raíces enteras, calcula *h*.

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

3C.- A partir de una determinada fecha, el número de habitantes de una ciudad crece en 1200 personas y, al año siguiente, decrece en un 11 %, teniendo entonces 32 habitantes menos que al principio. Calcula la población inicial de la ciudad.
(*Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)*

Centros ganadores

1. *Colegio Alemán de Madrid*
2. *IES San Juan Bautista (Equipo A)*
3. *IES Diego Velázquez*

Estudiantes ganadores

NIVEL I (1º, 2º ESO)

1. *Pablo Soto Martín* *(IES José Luis Sampedro)*
2. *María Moya Gómez* *(Colegio Fray Luis de León)*
2. *Noryne Riobuane* *(IES Manuel Fraga)*

NIVEL II (3º, 4º ESO)

1. *Francisco Tomás-Valiente* *(IES Ramiro de Maeztu)*
2. *Alejandro Ruiz de la Puente* *(IES Fortuny)*

NIVEL III (1º, 2º Bachillerato)

1. *Gonzalo Gómez Abejón* *(IES Ramiro de Maeztu)*
2. *Javier González Domínguez* *(IES San Juan Bautista)*

Relación de los 10 centros con mayor puntuación

1. *Colegio Alemán de Madrid* *48,1*
2. *IES San Juan Bautista A* *38*

3.	*IES Diego Velázquez*	*33,1*
4.	*IES Ramiro de Maeztu A*	*32,1*
5.	*Colegio King College Soto de Viñuelas A*	*31*
6.	*IES San Juan Bautista B*	*30,79*
7.	*IES La Estrella A*	*29,3*
8.	*Colegio Fray Luis de León A*	*27,2*
9.	*IES José Luis Sampedro A*	*26,4*
10.	*Colegio Fray Luis de León B*	*25,8*

Y, como siempre, enhorabuena a todos y un agradecimiento especial a los profesores que se brindaron para ayudarnos a vigilar las pruebas. Con su ayuda hemos llegado hasta aquí y con su ayuda seguiremos muchos años.

Joaquín Hernández Gómez

y Juan Jesús Donaire Moreno

Mínimo de la suma de distancias a cuatro puntos del plano euclídeo

Francisco J. Baena
Departamento de Matemáticas
IES El Brocense de Cáceres
frcobaena@gmail.com

Abstract

This article is intended to be complementary of the one published in number 97 of this same Newsletter under the title "On the Theorem of Viviani, the Principle of Reflection and other milestones along the way to Fermat's point" in which there were two proofs of the existence and uniqueness of Fermat's point of a triangle, that is, the only point of the Euclidean plane that minimizes the sum of the distances to the three vertices of a triangle. We deal here with the problem of determining the minimum of the sum of the distances starting from a point of the Euclidean plane to four given points of the above mentioned plane which depends on the relative position of such four points.

Introducción

Dados cuatro puntos A, B, C y D del plano euclídeo, se trata aquí el asunto de minimizar la suma de las distancias de un punto cualquiera del plano a dichos cuatro puntos. Se demostrará que tal mínimo siempre existe, independientemente de cuál sea la posición relativa de los cuatro puntos y que, salvo en el caso en que A, B, C y D están alineados, dicho mínimo se alcanza en un único punto que se determinará.

En la sección 1 se estudia el caso de cuatro puntos alineados, en la sección 2 se supone que tres de los cuatro puntos están alineados y que el cuarto no está en la recta que pasa por los otros tres; en la sección 3 se parte de cuatro puntos que forman un cuadrilátero convexo, y en la sección 4 se demuestra un lema que se utiliza en la demostración de la sección 5, donde se trata el caso de cuatro puntos con los que no puede formarse cuadrilátero convexo alguno.

1. Suma mínima de distancias a cuatro puntos alineados del plano

Sean A, B, C y D cuatro puntos alineados del plano euclídeo ordenados de esa manera en la recta que los une (Figura 1). *Entonces, la suma de las distancias de un punto P del plano a los puntos A, B, C y D es la mínima posible si y sólo si P es un punto del segmento BC. Dicha suma mínima de distancias es* $AD + BC$.

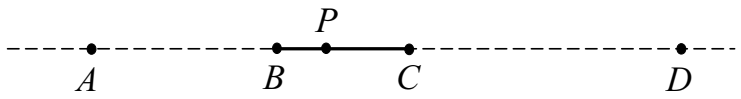


Figura 1

Demostración

Si P es un punto del segmento *BC*, la suma de sus distancias a los cuatro puntos es independiente de su posición sobre el citado segmento, pues como son $PB + PC = BC$ y $PA + PD = AD$, se tiene:

$$PA + PB + PC + PD = AD + BC$$

que no depende de la posición de P . Sea ahora *X* un punto cualquiera del plano que no está en el segmento *BC* (Figura 2).

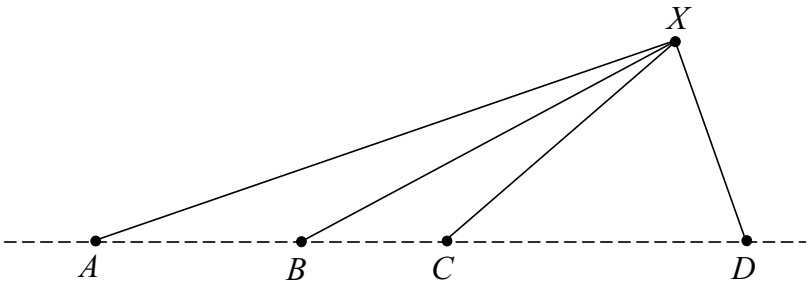


Figura 2

Entonces, $XB + XC > BC$, y como también es $XA + XD \geq AD$, resulta que:

$$XA + XB + XC + XD > AD + BC$$

Queda así probado que la suma de distancias a cuatro puntos alineados del plano sólo es mínima cuando dichas distancias se miden desde un punto cualquiera del segmento cuyos extremos son los dos puntos intermedios entre los cuatro, y que dicha suma mínima de distancias es $AD + BC$, supuesta la ordenación *A*, *B*, *C*, *D* en la recta que los une.

2. Suma mínima de distancias a cuatro puntos del plano, tres de los cuales están alineados

Sean A, B y C tres puntos del plano euclídeo alineados en ese orden sobre una recta y sea D un punto que no es de dicha recta (Figura 3). *Entonces, el único punto P del plano cuya suma de distancias a A, B, C y D es la mínima posible es* $P = B$ *y dicha suma mínima de distancias es* $AC + BD$.

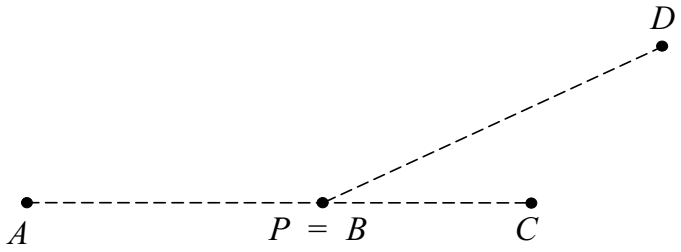


Figura 3

Demostración

Si *X* es un punto del plano cualquiera distinto de B (Figura 4), entonces

$$XA + XC \geq AC \text{ y } XB + XD \geq BD$$

y alguna de las dos desigualdades es estricta, pues si ambas fueran igualdades, *X* estaría en los segmentos *AC* y *BD*, es decir, sería $X = B$, en contra de lo supuesto.

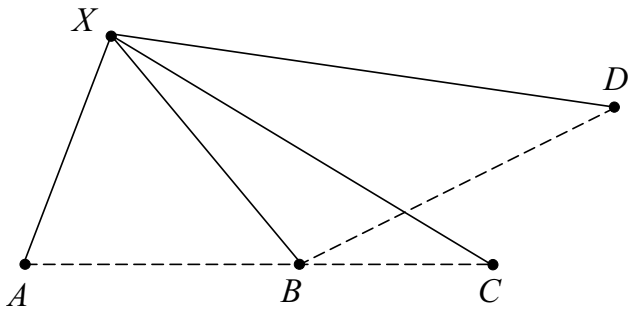


Figura 4

Por tanto,

$$XA + XB + XC + XD > AC + BD$$

y como además es $AC = BA + BC$, la desigualdad anterior se escribe:

$$XA + XB + XC + XD > AC + BD = BA + BB + BC + BD$$

Supongamos ahora cuatro puntos distintos A, B, C y D del plano entre los que no hay tres que estén alineados. Si ninguno de los cuatro puntos es interior al triángulo formado por los otros tres, con ellos puede formarse un único cuadrilátero simple que, además, es convexo. Para los puntos A, B, C y D de la Figura 5, se trata del cuadrilátero $ABCD$ que aparece dibujado en ella.

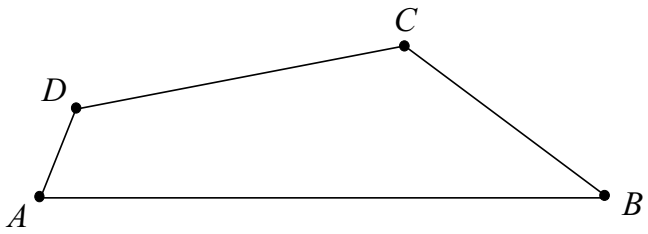


Figura 5

Si, en cambio, alguno de los cuatro puntos A, B, C o D es interior al triángulo formado por los otros tres (sólo puede haber uno), con dichos cuatro puntos pueden formarse tres cuadriláteros simples, ninguno de los cuales es convexo.

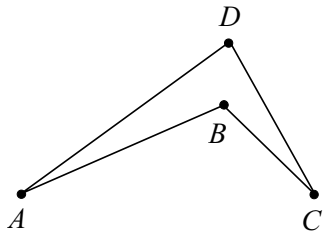


Figura 6

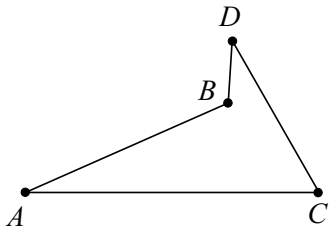


Figura 7

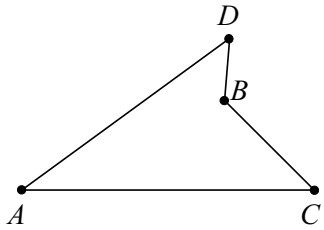


Figura 8

Para los puntos *A*, *B*, *C* y *D* que aparecen marcados a continuación, son los cuadriláteros *ABCD* (Figura 6), *ACDB* (Figura 7) y *ACBD* (Figura 8) que se han dibujado.

Abordamos en primer lugar el problema de la obtención del mínimo de la suma de distancias a cuatro puntos que son vértices de un cuadrilátero convexo.

3. Suma mínima de distancias a cuatro puntos del plano que son vértices de un cuadrilátero convexo

Sean A, B, C y D cuatro puntos del plano euclídeo que son vértices del cuadrilátero convexo ABCD (Figura 9)*. Entonces, la suma de las distancias de cualquier punto P del plano a los cuatro puntos A, B, C y D es la mínima posible si y sólo si P es el punto (interior al cuadrilátero ABCD) donde se cortan sus dos diagonales. Dicha suma mínima es la suma* $AC + BD$ *de las longitudes de dichas diagonales.*

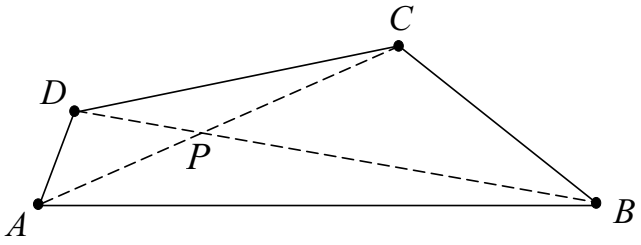


Figura 9

Demostración

Si P es el punto donde se cortan las dos diagonales AC y BD del cuadrilátero $ABCD$, dada la convexidad de éste, el punto P es interior al cuadrilátero y la suma de sus distancias a los cuatro puntos A, B, C y D es:

$$PA + PB + PC + PD = (PA + PC) + (PB + PD) = AC + BD$$

que no es sino la suma de las longitudes de las dos diagonales del cuadrilátero. Ahora, si se toma cualquier punto $X \neq P$, para él se cumplen las desigualdades $XA + XC \geq AC$ y $XB + XD \geq BD$, siendo alguna de ellas estricta, pues si las dos fuesen igualdades, X estaría en el segmento AC y también en el segmento BD y, en consecuencia, sería $X = P$, contra la hipótesis. Por tanto,

$$XA + XB + XC + XD = (XA + XC) + (XB + XD) > AC + BD = PA + PB + PC + PD$$

Esto prueba que la suma de distancias a los cuatro puntos A, B, C y D sólo es mínima cuando dichas distancias se miden desde el punto de corte de las dos diagonales del cuadrilátero convexo $ABCD$.

El siguiente lema elemental se utilizará en la sección 5 para la demostración de la existencia y unicidad del punto que minimiza la suma de distancias a cuatro puntos del plano euclídeo, entre los que no hay tres que estén alineados y con los que no puede formarse cuadrilátero convexo alguno.

4. Lema

Dado un triángulo ABC del plano euclídeo, si X es un punto de dicho plano distinto de C que es interior al triángulo o está sobre sus lados, entonces:

$$AX + XB < AC + CB$$

Demostración

Sea $X \neq C$ un punto del plano que es interior al triángulo ABC o que está sobre sus lados y sean P y Q los puntos donde la recta paralela al lado AB por el punto X corta a los lados AC y BC, respectivamente (Figura 10).

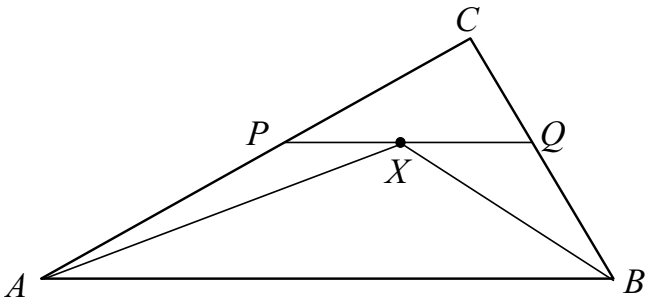


Figura 10

En tal caso son $AX \leq AP + PX$ y $XB \leq XQ + QB$, luego

$$AX + XB \leq AP + PX + XQ + QB = AP + PQ + QB$$

Ahora bien, como es $PQ < PC + CQ$, resulta que:

$$AX + XB \leq AP + PQ + QB < AP + PC + CQ + QB = AC + CB$$

5. Suma mínima de distancias a cuatro puntos del plano entre los que no hay tres alineados y que no forman cuadrilátero convexo alguno

Sean A, B, C y D cuatro puntos del plano euclídeo entre los que no hay tres alineados y tales que uno de ellos, pongamos D, es interior al triángulo formado por los otros tres (Figura 11). *Entonces, la suma de las distancias de cualquier punto P del plano a los cuatro puntos A, B, C y D sólo es la mínima posible cuando* $P = D$. *Dicha suma mínima de distancias es* $DA + DB + DC$.

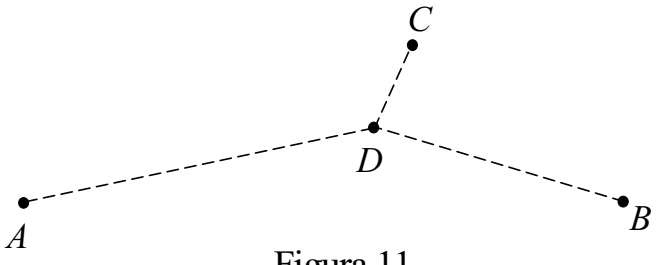


Figura 11

Demostración

Sea X un punto cualquiera del plano distinto de D. Distinguimos los siguientes tres casos según la posición relativa del punto X respecto del cuadrilátero $ABCD$:

1. Si X está en la región que comprende el ángulo opuesto al ADB por el vértice D, incluidos sus bordes (Figura 12), D es un punto interior al triángulo AXB o está sobre alguno de sus lados, así es que por el Lema 4 se tiene que $XA + XB > DA + DB$ por ser $X \neq D$. Como también es $XC + XD \geq DC$, se deduce que:

$$XA + XB + XC + XD > DA + DB + DC$$

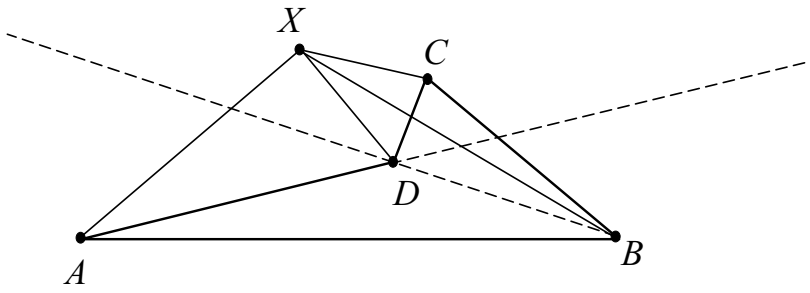


Figura 12

2. Si X está en la región que comprende el ángulo opuesto al BDC por el vértice D (Figura 13), este punto D, o es interior al triángulo BXC o está sobre alguno de sus lados, así es que como $X \neq D$, del Lema 4 se sigue que $XB + XC > DB + DC$. Dado que también es $XA + XD \geq DA$, resulta que

$$XA + XB + XC + XD > DA + DB + DC.$$

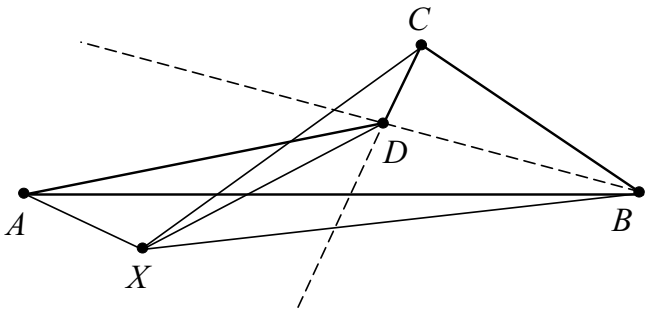


Figura 13

3. Si X es un punto de la región que comprende el ángulo opuesto al ángulo CDA por el vértice D (Figura 14), el punto D no es exterior al triángulo CXA y, como $X \neq D$, en virtud del Lema 4 es $XA + XC > DA + DC$. Como también es $XB + XD \geq DB$, resulta que

$$XA + XB + XC + XD > DA + DB + DC .$$

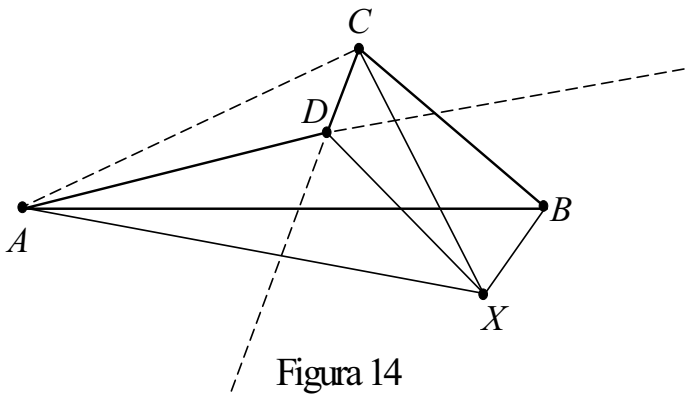


Figura 14

Agradecimientos

Mi más cariñoso agradecimiento a mis compañeros del Departamento de Matemáticas del IES El Brocense, a quienes literalmente obligué a leer este artículo y por supuesto a mi familia, que tiene la santa paciencia de soportar mis ausencias y sin la cual nada tendría sentido.

Bibliografía

[1] Courant, R. y Robbins, H. *¿Qué son las Matemáticas?* Fondo de Cultura Económica. 2002.

[2] Coxeter, H. S. M. *Fundamentos de Geometría*. Limusa-Wiley. 1971.

[3] De Diego, B.; Llerena, A.; Baena, F.; Rodríguez, B.; Gamboa, J. M.; Lorenzo, J.M.; Salgueiro, B. *Problemas de Oposiciones, Volumen* 5. Deimos. 2013.

Sobre sumas y diferencias de cubos

Ricardo Moreno Castillo
Catedrático de Instituto jubilado
moreno_castillo@hotmail.es

Abstract

This is an article about integer numbers that can be written as an addition or a difference of cubes

1. Diferencia de cubos

Sea *a* un número entero. Entonces la condición necesaria y suficiente para que la ecuación $x^3 - y^3 = a$ tenga solución consiste en que:

$$a = uv \text{, con } 12v - 3u^2 = t^2 \text{ y } 3u < t$$

(si *a* es un número primo, la condición se reduce a que $12a - 3 = t^2$).

Si se da esta condición, existe solución, siendo ésta:

$$x = \frac{t + 3u}{6} \qquad y = \frac{t - 3u}{6}$$

En efecto:

$$\left(\frac{t+3u}{6}\right)^3 - \left(\frac{t-3u}{6}\right)^3 = \frac{18t^2u + 54u^3}{216} = \frac{u(t^2 + 3u^2)}{12} = \frac{12uv}{12} = uv = a$$

Si tiene solución, entonces $a=(x-y)(x^2+xy+y^2)$, y $a=uv$ con $u=x-y$ y $v=x^2+xy+y^2$. Despejando *y* en la primera y sustituyendo en la segunda, llegamos a la ecuación $3x^2-3xu+u^2-v=0$, cuyo discriminante es $12v-3u^2$. Para que existan soluciones enteras, éste ha de ser un cuadrado, y ya tenemos la condición.

Las soluciones así obtenidas siempre son enteras. En primer lugar, porque *t* siempre es múltiplo de 3, y en segundo porque *t* y *u* son de la misma paridad. Entonces los numeradores $t+3u$ y $t-3u$ son siempre pares.

Ejemplo: $x^3-y^3=98$
Hay tres descomposiciones posibles:

$$98=1\times 98,\ 98=2\times 49 \text{ y } 98=7\times 14,$$

pero solo la segunda cumple la condición: $12\times 49-3\times 2^2=24^2$, luego la ecuación tiene la solución: $x=5$, $y=3$.

2. Suma de cubos

Siendo *a* un número entero, consideremos la ecuación diofántica $x^3+y^3=a$. Haciendo $u=x+y$ y $v=x^2-xy+y^2$, se llega a la misma condición anterior, con la diferencia de que hay que exigir que $3u>t$. En este caso:

$$x=\frac{3u+t}{6} \qquad y=\frac{3u-t}{6}$$

También ahora las soluciones son enteras. Y es evidente que si *a* es primo, la ecuación carece de solución.

Ejemplo: $x^3+y^3=91$.
De las dos descomposiciones posibles:

$$91=1\times 91 \text{ y } 91=7\times 13,$$

solamente cumple la condición la segunda: $12\times 13-3\times 7^2=3^2$, que proporciona las soluciones $x=4$ e $y=3$.

3. Sobre cuadrados que son suma de cubos

Se abordará a continuación la ecuación diofántica $x^3 + y^3 = a^2$. Previamente, se harán algunas consideraciones sobre la ecuación $x^3 + y^3 = z^2$ (Problema 1 del Libro IV de la versión árabe de la *Aritmética* de Diofanto).

Ahora bien, si $x^3 + y^3 = z^2$ entonces $(xr^2)^3 + (yr^2)^3 = (zr^3)^2$ (para cualquier número entero *r*). Esto quiere decir que si (x, y, z) es una solución, (xr^2, yr^2, zr^3) también lo es. De estas soluciones diremos que son *dependientes*. Pues bien, es fácil de comprobar que todas las soluciones del problema, o bien tienen la siguiente forma:

$$x = p(p^3 + q^3) \quad y = q(p^3 + q^3) \; z = (p^3 + q^3)^2$$

o bien son dependientes de otra solución que sí tiene esa forma. Entonces solo hay que dar a *p* y *q* todos los valores posibles primos entre sí, y dividir los números obtenidos entre el mayor divisor común que sea un cuadrado (caso de que lo haya) para tener todas las soluciones de la ecuación.

Por ejemplo, para $p = 1$ y $q = 3$, tenemos las soluciones $x = 28$, $y = 84$ y $z = 784$. Pero *x* e *y* son múltiplos de 4 y *z* lo es de 8, de modo que podemos encontrar otra solución dependiente más sencilla: $x = 7$, $y = 21$ y $z = 98$:

$$7^3 + 21^3 = 343 + 9261 = 9604 = 28^2$$

En cambio, si $p = 1$ y $q = 4$, tenemos las soluciones $x = 65$, $y = 260$ y $z = 4225$, para las cuales no hay otra dependiente más simple:

$$65^3 + 260^3 = 274625 + 17576000 = 17850625 = 4225^2$$

(todo esto se puede ver más desarrollado en [2]).

Retomamos ahora la ecuación $x^3 + y^3 = a^2$. Si tiene solución, han de suceder una de las dos cosas, o bien que:

$$a = (p^3 + q^3)^2$$

(en cuyo caso $a = b^2$ y $b = p^3 + q^3$, lo cual quiere decir que $b = uv$, con $12v - 3u^2 = t^2$ y $3u > t$), o bien para un cierto número *r* sucede que:

$$ar^3 = (p^3 + q^3)^2$$

(en cuyo caso $ar^3 = b^2$, con *b* cumpliendo la condición anterior).

<u>*Ejemplo I*</u>: $x^3 + y^3 = 4225^2$

Vamos a resolver esta ecuación, que ya sabemos que tiene solución. Se tiene:

$$a = 4225,\ a = b^2, \text{ con } b = 65.$$

$$65 = 13 \times 5, \text{ y } 12 \times 13 - 3 \times 5^2 = 156 - 147 = 81 = 9^2$$

Entonces sabemos que $65 = 4^3 + 1^3$, y que podemos calcular la solución de la ecuación con $p = 1$, $q = 4$.

<u>*Ejemplo II*</u>: $x^3 + y^3 = 98^2$

Se tiene $98 = 2 \times 7^2$, luego no es un cuadrado. Pero si lo multiplicamos por 8 (que es un cubo) da lugar a 784, que es el cuadrado de 28:

$$28 = 4 \times 7, \text{ y } 12 \times 7 - 3 \times 4^2 = 84 - 48 = 36 = 6^2.$$

Entonces $28 = 3^3 + 1^3$, y calculamos la solución a partir de $p = 1$, $q = 3$, que resulta ser $x = 28$, $y = 84$, pero que son solución de la ecuación $x^3 + y^3 = 784^2$. Ahora bien, los números son múltiplos del cuadrado del número por cuyo cubo multiplicamos a 98. Los dividimos por dicho cuadrado y ya tenemos los números $x = 7$, $y = 21$, que ya resuelven nuestra ecuación.

Naturalmente, las dos condiciones posibles se reducen a una: un cuadrado, a^2, es suma de dos cubos, si existe cierto número *r* (que puede ser uno) tal que

$$ar^3 = b^2, \text{ y } b = uv, \text{ con } 12v - 3u^2 = t^2 \text{ y } 3u > t$$

Agradecimiento

Dejo constancia de mi gratitud a mi compañero Juan A. Delgado Pérez, que leyó pacientemente estas notas y corrigió algún que otro error.

Bibliografía

[1] Diofanto de Alejandría (2007), *La Aritmética y el libro sobre los números poligonales*. Editorial Nivola.

[2] Moreno Castillo, R. (2011), "Algunos problemas diofánticos", en *Boletín de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, nº 88, págs. 64-71.

Un camino heurístico hacia el punto de Fermat de un triángulo

José Alberto García Suárez
jalgasu@mundo-R.com

Abstract

The aim of this note is the determination of the Fermat point for a triangle from a heuristic point of view. So, we begin with the particular cases of equilateral and isosceles triangles, with the aid of which we will later on be able to extend the proof in a natural way to the general case.

Introducción

Esta nota viene motivada por el artículo de Francisco J. Baena [1] sobre la existencia y unicidad del punto de Fermat en un triángulo (punto que minimiza la suma de sus distancias a los vértices), publicado en el número 97 del *Boletín*. La demostración que aquí se expone, la desarrollé en los cursos de didáctica de las matemáticas que durante años impartí en el Curso de Aptitud Pedagógica de la Universidad de Santiago de Compostela, buscando ilustrar, utilizando caminos a ser posible inéditos, la aplicación del protocolo heurístico de Polya [2] sobre estrategias para la resolución de problemas.

En consonancia con el citado protocolo, se deduce primero que en el triángulo equilátero sólo su centro puede ser punto de Fermat, dada la necesidad de que este pertenezca a sus tres mediatrices, así como en el triángulo isósceles a la del lado desigual. Esto implicará de inmediato que ese centro es también el único posible punto de Fermat de cada uno de los tres triángulos isósceles iguales que lo tienen como vértice común, cuya unión es el equilátero. Y se demuestra, más en general, que si el ángulo desigual de un triángulo isósceles es mayor o igual que $2\pi/3$, el vértice es, efectivamente, su único punto de Fermat; hecho que permite probar, a

su vez, que en el triángulo equilátero lo es su centro, y en el isósceles de ángulo desigual menor que $2\pi/3$ el centro del triángulo equilátero formado sobre su lado opuesto, es decir, el punto de intersección de los arcos capaces de los lados bajo el ángulo $2\pi/3$.

En el triángulo escaleno, se demuestra que el punto de Fermat es también, como en el isósceles según la medida de sus ángulos, el punto común a los arcos capaces de los lados, correspondientes a $2\pi/3$, o el vértice del ángulo mayor que $2\pi/3$; se procede para ello a su "inclusión" o "extensión" en un triángulo isósceles apropiado.

1. Triángulos equilátero e isósceles de ángulo desigual $\hat{A} \geq 2\pi/3$

En primer lugar, es fácil comprobar que cualquiera que sea la forma del triángulo ABC, el punto de Fermat no puede ser exterior al mismo, ya que, como se observa en la Figura 1, si un punto, P, pertenece a una de las regiones del plano limitadas por la prolongación de dos lados con vértice común, A, se verifica que $PB+PC > AB+AC$; y si Q pertenece a una de las limitadas por un lado AB y la prolongación en sus extremos de los otros dos, y Q' es la intersección de AB con QC, es evidente que $QA+QB+QC > Q'A+Q'B+Q'C$.

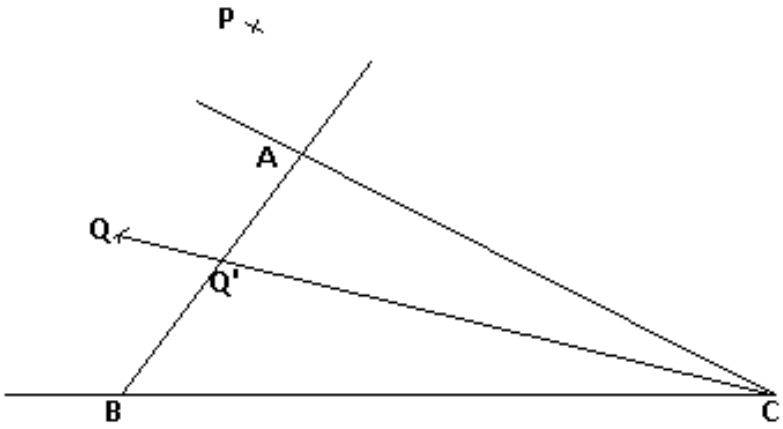


Figura 1

Dado pues el triángulo equilátero *ABC*, sean *P* un punto abarcado por él (interior o sobre un lado), distinto del centro, y *P'* su proyección ortogonal sobre una mediatriz a la que no pertenezca (en la Figura 2, la del lado *BC*, cuyo punto medio, *M*, es la proyección de *P* = *B* y obviamente verifica la desigualdad *BA*+*BB*+*BC* > *MA*+*MB*+*MC*). Teniendo en cuenta el Principio de Reflexión, se deduce que

$$PA+PB+PC > P'A+P'B+P'C\ ,$$

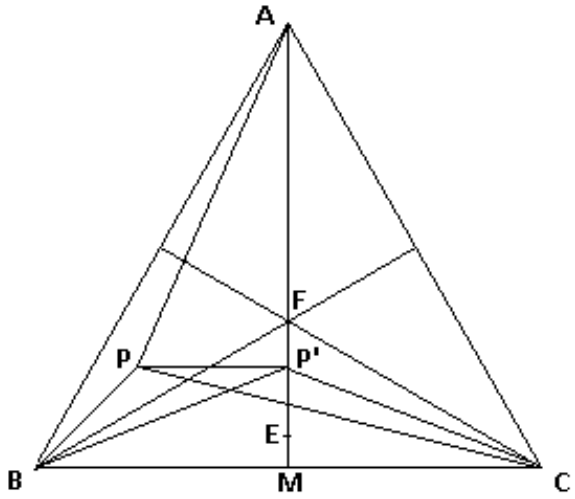


Figura 2

y que análogas desigualdades se obtienen en relación con las mediatrices de los otros lados (si el triángulo sólo es isósceles, en relación con la del lado desigual si *P* no está sobre ella); por consiguiente, el de intersección de las mediatrices será el único posible punto de Fermat, *F*, del triángulo equilátero, y también del triángulo isósceles *FBC* contenido en él, puesto que si para este lo fuera $E \neq F$ - necesariamente perteneciente a su altura *FM* - no lo sería *F* para el primero, ya que se tendría que

$$FB+FC > EF+EB+EC,$$

y por lo tanto,

$$FA+FB+FC > FA+EF+EB+EC = EA+EB+EC.$$

Probemos en la siguiente proposición – de alcance más general – que, efectivamente, F es el único punto de Fermat para FBC; de donde se deducirá que también lo es para el triángulo equilátero en el que está contenido.

Proposición 1. *En un triángulo isósceles ABC de ángulo desigual* $\hat{A} \geq 2\pi/3$, *el vértice A es su único punto de Fermat.*

Demostración.

Como quedó establecido, el punto de Fermat solo puede estar en la altura AM (Figura 3). Se probará que coincide con el vértice A, y que por lo tanto para cualquier punto $P \neq A$ de dicho segmento es $AB+AC < AP+BP+CP$, es decir,

$$2AB < AP+2BP,\ \ AB - BP < AP/2.$$

Si $P = M$, se tiene:

$$(AB - BM).(AB + BM) = (AB)^2 - (BM)^2 = (AM)^2,$$

de donde

$$AB - BM = (AM)^2/(AB + BM) < (AM)^2/2(AM) = AM/2.$$

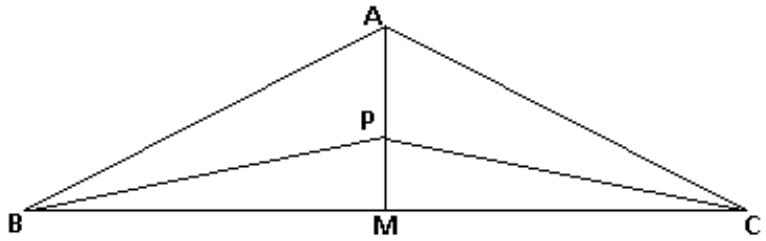


Figura 3

Y si $P \neq M$, aplicando el teorema del coseno al triángulo ABP resulta:

$$(AB)^2 = (AP)^2 + (BP)^2 + 2AP.BP.\cos B\hat{P}M = (AP)^2 + (BP)^2 + 2AP.PM =$$

$$= (AP)^2 + (BP)^2 + 2AP.(AM - AP) = (AP)^2 + (BP)^2 + 2AP.AM - 2(AP)^2 =$$

$$= (BP)^2 + 2AP.AM - (AP)^2 = (BP)^2 + AP.(2AM - AP) \leq (BP)^2 + AP.(AB - AP) <$$

$$< (BP)^2 + AP.BP,$$

la primera desigualdad por ser el ángulo $A\hat{B}M$ menor que $\pi/6$. Se obtiene así:

$$(AB)^2 - (BP)^2 < AP.BP;\ (AB - BP).(AB + BP) < AP.BP;$$

$$AB - BP < AP.BP/(AB + BP) < AP/2,$$

como se quería demostrar.

Volviendo al triángulo equilátero ABC (Figura 2), dado P perteneciente a su interior o a un lado, sea P' su proyección ortogonal sobre la altura del triángulo isósceles FBC (si un punto no tiene proyección ortogonal sobre esta altura, necesariamente la tendrá sobre la de FAB o la de FCB, y se razonaría análogamente). Se verifica, por ser F el punto de Fermat para este último triángulo,

$$PA+PB+PC > P'A+P'B+P'C = FA+P'F+P'B+P'C > FA+FB+FC,$$

es decir, F es también el único punto de Fermat de ABC.

2. Triángulo isósceles de ángulo desigual $\hat{A} < 2\pi/3$

Sea ABC isósceles, con ángulo desigual $\hat{A} < 2\pi/3$, sea F el punto de su altura sobre BC desde el cual se ve este lado bajo el ángulo $2\pi/3$, y sea $A'BC$ el triángulo equilátero de su misma base con F como punto de Fermat.

Si $\pi/3 < \hat{A} \leq 2\pi/3$ (Figura 4), para cualquier punto P de la altura AM se tiene:

$$A'P+BP+CP \geq A'F+BF+CF,$$

y puesto que $A'P = A'A+AP$ y $A'F = A'A+AF$, resulta finalmente:

$$AP+BP+CP \geq AF+BF+CF.$$

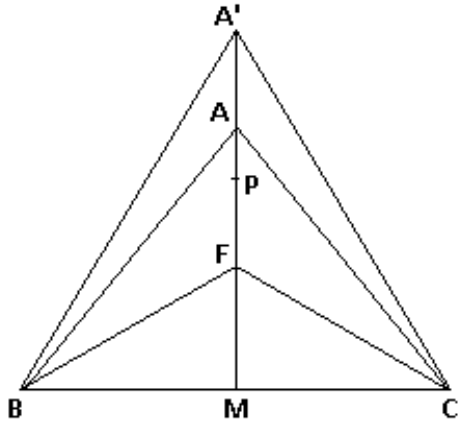


Figura 4

Sea ahora $\hat{A} < \pi/3$ (Figura 5) y P perteneciente al segmento AA'; se verifica:

$$PB+PC > PM+BC = A'P+A'M+BC = A'P+A'M+BM+CM >$$

$$> A'P+A'F+BF+CF = PF+BF+CF,$$

y por lo tanto

$$PA+PB+PC > PA+PF+BF+CF = AF+BF+CF.$$

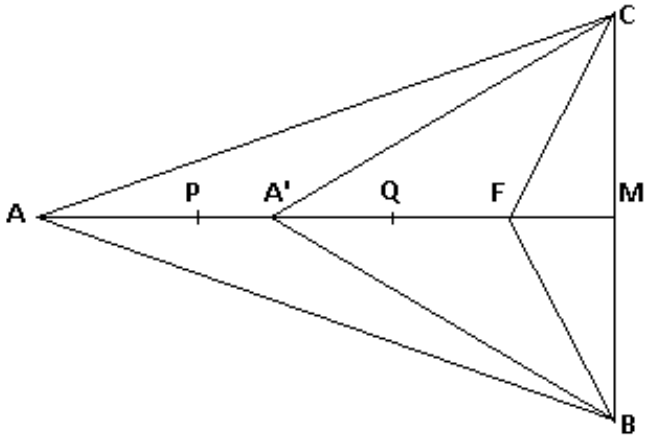


Figura 5

Y si Q pertenece a $A'M$, entonces

$$AQ+BQ+CQ = AA'+A'Q+BQ+CQ > AA'+A'F+BF+CF = AF+BF+CF.$$

3. Triángulo escaleno

Vista la caracterización del punto de Fermat en los triángulos isósceles, es natural conjeturar que si los tres ángulos del triángulo escaleno ABC son menores que $2\pi/3$ (Figura 6), y es F el punto de intersección de los arcos capaces de sus lados bajo ese ángulo, ese es el único punto de Fermat del triángulo; y que si tiene un ángulo $\hat{A} \geq 2\pi/3$, lo es su vértice.

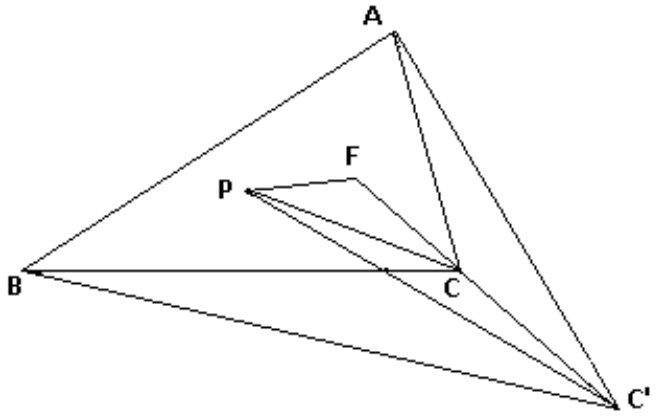


Figura 6

Para probar la conjetura en el primer supuesto, se prolonga el segmento FC hasta formar el triángulo isósceles ABC', cuyo punto de Fermat es F. Tomando P comprendido en ABC se verifica:

$$FA+FB+FC' = FA+FB+FC+CC' \leq PA+PB+PC' \leq PA+PB+PC+CC',$$

es decir, $FA+FB+FC \leq PA+PB+PC$.

Y en el caso de un ángulo $\hat{A} \geq 2\pi/3$ (Figura 7), prolongando el lado menor AC hasta C' para formar el triángulo isósceles ABC', cuyo punto de Fermat es A, se tiene, cualquiera que sea P comprendido en ABC:

$$AB+AC' = AB+AC+CC' < AP+BP+C'P \leq AP+BP+CP+CC',$$

es decir, $AB+AC < AP+BP+CP$.

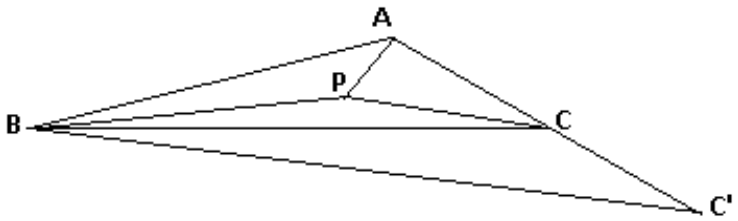


Figura 7

Bibliografía

[1] Baena, Francisco J., Del Teorema de Viviani, del Principio de Reflexión y de otros hitos camino del punto de Fermat. *Boletín de la Soc. Puig Adam, núm. 97 junio 2014*.

[2] Polya, G., *Como plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas, México 1965 (traducción de *How to solve it*, Princeton University Press, U.S.A.).

Números primos formados únicamente por un dígito repetido

Sergio Falcón Santana
Departamento de Matemáticas
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
sergio.falcon@ulpgc.es

Abstract

A very curious prime numbers are those which are formed by a repeated digit only. Obviously, this digit can be only one and in this paper we indicate how to find them. We finish this paper with the question of whether there is a finite or infinite number of these primes.

Resumen

Unos números primos bastante curiosos son aquéllos que están formados por un sólo dígito repetido. Evidentemente, este dígito sólo puede ser el uno y en este artículo indicamos la forma de hallarlos. Acabamos el artículo con la duda de saber si existe una cantidad finita o infinita de estos primos.

Introducción

De la infinidad de números primos existentes, hemos escogido para nuestro estudio aquéllos que sólo poseen un dígito repetido. Evidentemente, el primero de estos primos es el 11. Pero a partir de éste, el dígito repetido no puede ser ninguno comprendido entre 2 y 9 pues si el número tuviera uno sólo de estos dígitos,

entonces sería divisible por él. En consecuencia, si un número primo sólo posee un dígito repetido, éste ha de ser el 1.

Además: el total de "unos" de este número no puede ser múltiplo de 3 porque entonces el número sería múltiplo de 3 y tampoco puede haber un número par de "unos" pues en tal caso el número sería múltiplo de 11. En consecuencia, el total de "unos" de este número ha de ser un número impar y no múltiplo de 3.

Si representamos por $1^{(n}$ el número que sólo posee *n* "unos" para $n \geq 1$, entonces se puede expresar $1^{(n}$ como

$$P(n) = \sum_{j=0}^{n-1} 10^j \tag{1}$$

Los primeros números primos con sólo "unos" que hemos encontrado hasta el momento con ayuda del sistema de cómputo algebraico *MATHEMATICA* son los siguientes:

$$\left\{11, 1^{(19}, 1^{(23}, 1^{(317}, 1^{(1031}, 1^{(49081}\right\}$$

1. Construcción de los números primos de la forma $1^{(n}$

En esta sección se indicarán las condiciones que debe cumplir *n* para que el número *P(n)* sea primo.

Al estudiar estos números primos, vimos que si *n* es primo y mayor que 3, al dividir *P(n)* entre *n* el resto siempre es 1. De ahí el siguiente teorema.

1.1 Teorema

Si *n* es un número primo mayor que 3, entonces $P(n) \equiv 1 \pmod{n}$.

Demostración:

El teorema es evidente para $n = 5$ por lo que lo demostraremos para *n* > 5 y tras aplicar el siguiente lema.

1.2 Lema

Si *n* es primo, entonces *P(n – 1)* es múltiplo de *n*.

Demostración:

La demostración de este Lema se basa en el Pequeño Teorema de Fermat: *si n es primo y primo con a, entonces* $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$. Entonces:

$$P(n-1) = \sum_{j=0}^{n-2} 10^j = \frac{10^{n-2} \cdot 10 - 1}{10 - 1} = \frac{10^{n-1} - 1}{9} \equiv \frac{1-1}{9} \pmod{n}$$

puesto que todo número primo mayor que 5 es primo con 10. Por lo tanto:

$$P(n) = \sum_{0}^{n-1} 10^j = 10^{n-1} + \sum_{0}^{n-2} 10^j = 10^{n-1} + P(n-1) \equiv 1 + 0 \pmod{n}$$

sin más que tener en cuenta que *P(n)* es la suma de los *"n"* términos de una progresión geométrica de razón 10.

1.3 Corolario

Si $n > 3$ es primo, entonces

$$P(k\,n) \equiv 1 \pmod{n}.$$

Demostración:

En primer lugar,

$$P(n+1) = \sum_{0}^{n} 10^j = 10^n + \sum_{0}^{n-1} 10^j = 10 \times 10^{n-1} + P(n) \equiv 10 \times 1 + 1 \pmod{n}$$

Repitiendo este proceso, obtendríamos que

$$P(n+r) \equiv 1^{(r+1} \pmod{n}$$

y de aquí el corolario propuesto.

En consecuencia, para estudiar si $1^{(n}$ es primo, no es necesario estudiarlo para todo valor de *n,* sino tan sólo para cuando *n* es primo.

1.4 Corolario

Si *P(n)* es primo, entonces *n* es primo.

Demostrar este teorema es equivalente a demostrar que si *n* no es primo, tampoco lo es P(n). Si *n* no es primo, entonces será de la forma $n = k \times m$ siendo *m* un número primo por lo que, aplicando el Corolario anterior, resulta:

$$P(n) = \frac{10^n - 1}{9} = \frac{10^{k \times m} - 1}{9} \equiv \frac{1-1}{9} \pmod{n}$$

Evidentemente, si *n* es primo no se puede asegurar que *P(n)* también lo sea, pero sí que si aseguramos que si *n* no es primo tampoco lo es *P(n)*. Por lo tanto, para hallar los números *P(n)* primos, se estudiarán sólo los que cumplan que *n* es primo.

2. Cálculos

Hemos calculado los primeros números primos formados por un solo dígito repetido, el 1, con ayuda del sistema de cómputo algebraico *MATHEMATICA*, mediante una orden bastante sencilla, con total seguridad, muy mejorable:

$$P[n_] := \sum_{j=0}^{n} 10^j$$

```
Do[If[PrimeQ[n+1],
{Print[n+1],If[PrimeQ[P[n]],Print["PRIMO   n = ",n+1]]}],{n,6,55000,2}]
```

Los cinco primeros números primos de este tipo se obtuvieron de forma casi inmediata, pero el sexto sólo se obtuvo tras 20 días de funcionamiento de un ordenador personal con un procesador *i3* de 3,4 GHz.

Y naturalmente, cuanto mayor es *n*, mayor es el tiempo que tarda el programa en averiguar si *P(n)* es o no primo. De hecho, para un valor de *n* determinado y mayor que 50.000 el programa tarda unos cuatro minutos en comprobar si *P(n)* es primo o no.

Esta tardanza nos lleva a plantearnos una duda: ¿Es finita o infinita la cantidad de números primos de la forma $1^{(n}$?

Conjetura

No creo que estos seis números encontrados sean los únicos, pero tampoco estoy seguro de que haya una infinidad de números primos de la forma $1^{(n}$.

Dibujando caleidoscopios con una coreografía de tortugas

E. Roanes Lozano
Instituto de Matemática Interdisciplinar (IMI) y
Departamento de Algebra, Facultad de Educación
Universidad Complutense de Madrid
eroanes@mat.ucm.es

Resumen

The author claims the suitability of the nowadays almost abandoned "turtle graphics" for a very specific purpose: periodic tilings drawing using multiple "turtles" (that move in a perfect choreography). Although "turtle graphics" have previously been used for periodic tilings drawing, the approach in this paper is, as far as we know, completely innovative, and the "turtle" exceeds in this task. The corresponding algorithms and a simple environment for drawing kaleidoscopes in FMSLogo are detailed in the paper, that also includes some nice examples. The approach is not restricted to Logo language but to any implementation of "turtle graphics" including multiple turtles. In the author's opinion, issues such as the suitability of software for a certain task should be beyond fashion and tendencies. For example, a simple and flexible approach such as the one presented here cannot be developed using Cartesian or polar coordinates.

Conservaremos de lo antiguo todo lo sagrado, todo lo bello y todo lo útil y aplicable a la construcción que propongo... Lo demás ¡fuera! Lo antiguo, sólo por ser antiguo, no merece ni una lágrima siquiera.

Cuentos del día (1868)
Ventura Ruiz Aguilera

1. Introducción

1.1. Sobre el lenguaje *Logo* y la *geometría de la tortuga*: la decadencia

El lenguaje *Logo* se recuerda principalmente por su peculiar "geometría de la tortuga" [1] y su uso con niños [31]. La "tortuga" es un cursor gráfico para dibujos 2D, cuyos movimientos básicos (avanza, retrocede, gira derecha, gira izquierda) no están relacionados con las habituales coordenadas cartesianas, sino con la posición y orientación de la tortuga en cada momento. De hecho, la "tortuga" es introducida frecuentemente a los niños como un animalito que "vive" en la pantalla, lo que es mucho más intuitivo que las coordenadas cartesianas. Y en las primeras versiones, la "tortuga" era un móvil mecánico que se desplazaba por el suelo.

A pesar de su extraordinario éxito en los '80s, *Logo* es ahora raramente usado y se considera obsoleto, excepto para algunas aplicaciones como robótica o dibujo de fractales (Figura 1) [20, 21, 25] y otras curvas especiales [47].

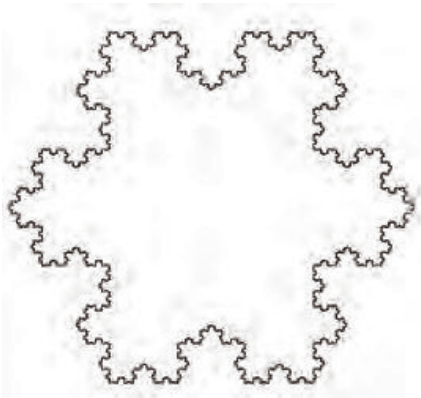


Figura 1: Un ejemplo bien conocido de fractal dibujado con *Logo*: la curva de Koch.

En mi opinión hay tres razones principales para esta decadencia.

i) Uno de sus objetivos ha desaparecido.
Lo que parecía un axioma en los '80: "todo el mundo necesita saber

programar", no es ya la opinión general. *Logo* es un lenguaje de programación muy amigable, fácil de usar y realmente sencillo para principiantes. Introducir a los niños a la programación era uno de los objetivos de *Logo*, pero saber programar ya no se considera una necesidad.

ii) Los usuarios de otros lenguajes de programación siempre han mirado por encima del hombro a los usuarios de *Logo*.
Coincido plenamente con el comentario de Brian Harvey (desarrollador de *UCBLogo* [24]) en el "Preface" de [23]:

> "Logo has been the victim of its own success in the elementary schools. It has acquired a reputation as a trivial language for babies. Why, then, do I use it as the basis for a series of books about serious computer science? Why not Pascal or C++ instead?
>
> The truth is that Logo is one of the most powerful programming language available for home computers. (...)"

Este comentario se incluye en ese libro probablemente porque la potencia y posibilidades de *Logo* suelen ser subestimadas.

iii) El rango, la disponibilidad y la difusión del software matemático ha crecido enormemente.
Hoy en día los sistemas de geometría dinámica (DGS) en general y, más concretamente, el software libre *GeoGebra*, han ocupado posiblemente el lugar dejado por el lenguaje *Logo* en la enseñanza de la geometría con la ayuda de tecnología. Otras áreas de la enseñanza de la matemática, como álgebra y análisis, son cubiertas por los sistemas de cálculo simbólico (CAS). Actualmente están disponibles potentes CAS de software libre como *Maxima*, *Reduce*, *Axiom*, *CoCoA*, *Xcas*,...

1.2. Sobre el lenguaje *Logo* y la *geometría de la tortuga*: situación actual

Actualmente hay muchas implementaciones de *Logo* disponibles. Una completa lista de implementaciones de *Logo* y software relacionado, incluyendo

más de 250 referencias a diferentes dialectos, se puede encontrar en [11]. Podríamos subrayar *FMSLogo* [5], *StarLogo* [7, 36] y *NetLogo* [49]. De cualquier modo, el lenguaje *Logo* no es muy usado hoy en día.

Implementaciones de la *geometría de la tortuga* sobreviven en algunos de los lenguajes que podríamos calificar de "modernos". Algunos ejemplos son:

- *Scratch* [28], que incluye una versión de la *geometría de la tortuga* [35],
- *PythonTurtle* [33], un entorno de aprendizaje para *Python* inspirado por Logo,
- *Haskell* (un lenguaje funcional) [4], donde se han implementado versiones simplificadas de la *geometría de la tortuga* [6, 10],
- *Java*, donde se han realizado diferentes implementaciones de la *geometría de la tortuga*, como *Java TurtleGraphics* [22], *Jurtle* [30] y *Pencil Code Online* [8] (esta última implementada en *CoffeeScript*).

También hay software matemático, como el CAS *Xcas* [9], que incluye implementaciones más o menos standard de la *geometría de la tortuga*.

Hay también intentos recientes de coordinar diferentes aproximaciones computacionales, como la potencia de razonamiento de *ProLog* con las posibilidades gráficas de la *geometría de la tortuga* [43] (donde las tortugas se consideran "agentes").

También subrayaremos el posible uso de la *geometría de la tortuga* con estudiantes con discapacidades leves [34].

Finalmente destacaremos que el proyecto *One Laptop per Child* incluye actividades de tortuga [48]. Y, por ejemplo, *Berkeley Logo (UCB Logo)* [24] está disponible para el ordenador *XO*.

1.3. Mi experiencia con la *geometría de la tortuga*, los mosaicos periódicos y la geometría dinámica

Aunque mi principal campo de investigación son las aplicaciones del algebra computacional [32, 39], normalmente usando bases de Gröbner [12], soy un fan de la *geometría de la tortuga* [1].

Hemos desarrollado implementaciones de la *geometría de la tortuga* en *Pascal* y *C* [41] y en los CAS *Maple* [40, 42] y *Derive* [27] (la penúltima fue

incorporada a la *Share Library* de *Maple*). Otros autores han desarrollado posteriormente implementaciones similares para el CAS *Reduce* [14] y la calculadora *TI-92* [26, 46]. Subrayemos que, en los '80s, incluso lenguajes de programación lógica como *Turbo-Prolog* [3] incluían implementaciones de la *geometría de la tortuga*.

Usamos nuestra implementación en *Pascal* mencionada más arriba para desarrollar un paquete de simulación de transformaciones del plano que preservan la forma (semejanzas) [41].

También fui el codirector de una tesis doctoral sobre el dibujo de mosaicos periódicos usando la *geometría de la tortuga* [15], donde se desarrollaba un paquete para el dibujo de los grupos cíclico y dihédrico, frisos y grupos cristalográficos planos [16, 17, 18, 19]. A diferencia de otras aproximaciones al dibujo de mosaicos periódicos, el diseño no se guardaba como un conjunto de pixels coloreados (en consecuencia, de un modo dependiente de la resolución), sino como una lista de órdenes de tortuga y un modo de replicar estas órdenes, guardando el grupo por el que se tiene que replicar (independiente pues de la resolución de pantalla). Ello posibilitaba que las descripciones de los mosaicos peródicos diseñados fueran extremadamente breves.

Tengo una larga experiencia con el DGS *The Geometer's Sketchpad*, como beta-tester, usuario [38, 41] y profesor (he enseñado asignaturas optativas en la Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid usando DGS desde 1996). También he impartido cursos usando *Logo* desde 1987.

1.4. Extensiones de *Logo*

Muchas implementaciones de *Logo* incluyen extensiones a 3D. Hay, incluso, extensiones de la *geometría de la tortuga* a geometrías esférica [13], elíptica e hiperbólica [44].

Algunas implementaciones de *Logo* incluyen tortugas múltiples. De cualquier modo, el uso intensivo de tortugas múltiples, aunque existente [20, 29, 37], es raro. Cuando hay tortugas múltiples disponibles, el usuario puede activar una cierta tortuga y los comandos subsiguientes serán obedecidos por las tortugas activas. Ejemplos de implementaciones de *Logo* con tortugas múltiples son *FMSLogo* [5], *StarLogo* [7, 36] y *NetLogo* [49].

1.5. La idea principal de este artículo

La aproximación presentada en este artìculo para dibujar grupos cíclicos y dihédricos es paralelizable y completamente diferente a las seguidas en [15, 16, 17, 18, 19]. Está basada en usar tortugas múltiples que actúan todas de la misma forma (o de formas simétricas). De esta forma se pueden dibujar sin esfuerzo y con un código muy breve bonitos diseños cíclicos y dihédricos (del tipo de los de un caleidoscopio). Este tratamiento, que sepamos, es una novedad.

Observemos que los comandos de tortuga pueden ser introducidos uno a uno, en bloques (como sucesiones de comandos) o usando un procedimiento (invocando su nombre). Todo el código necesario se incluye en las secciones siguientes.

2. Implementación de los grupos cíclico y dihédrico

Hemos elegido *FMSLogo* [5], una versión actualizada del *MSWLogo* de George Mills, que es, a su vez, una versión mejorada del *Berkeley Logo*. *FMSLogo* permite el uso simultáneo de hasta 1024 tortugas.

2.1. Algoritmo para grupos cíclicos

En este caso cada célula se replica por giros. Todas las tortugas realizan exactamente los mismos movimientos, comenzando en el centro del rosetón, pero en distintas direcciones.

Observemos que el algoritmo entra en un bucle, y el usuario puede por ello escribir tantos comandos como desee. El algoritmo se detalla a continuación:

Input: número de sectores circulares (células): K.

Paso 1. Borra la pantalla y activa K tortugas.

Paso 2. Gira las tortugas de modo que los ángulos entre ellas sean iguales.

Paso 3. Lee un comando, sucesión de comandos o nombre de procedimiento desde teclado.

Paso 4. SI la entrada del Paso 3 no es o no acaba en "FIN", ENTONCES ordenar a cada tortuga ejecutar la entrada del Paso 3 y volver al Paso 3, EN OTRO CASO, para.

Observemos que el "volver" del Paso 4 se consigue con un procedimiento recursivo.

2.2. Algoritmo para grupos dihédricos

En este caso, cada célula, replicada por giros, consiste de dos dominios fundamentales simétricos. La mitad de las tortugas, por ejemplo las impares, tienen que llevar a cabo los movimientos introducidos como input, mientras que las pares tienen que realizar los mismos movimientos, pero intercambiando giros a la derecha por giros a la izquierda y viceversa.

Observemos que el algoritmo entra en un bucle, y el usuario puede por tanto escribir tantos comandos como desee. El algoritmo se detalla a continuación:

Input: número de sectores (células): K (esto es, 2K domínios fundamentales).

Paso 1. Borra la pantalla y activa 2K tortugas.

Paso 2. Gira las tortugas de modo que los ángulos entre cada par de tortugas sean iguales.

Paso 3. Lee un comando, sucesión de comandos o procedimiento desde teclado.

Paso 4. SI la entrada del Paso 3 no es o no acaba en "FIN", ENTONCES ordenar a cada tortuga impar ejecutar la entrada del Paso 3 y a cada tortuga par ejecutar los mismos movimientos pero intercambiando giros a la derecha por giros a la izquierda y viceversa y volver al Paso 3, EN OTRO CASO, para.

2.3. Implementación de grupos cíclicos en *FMSLogo*

Esta implementación es muy directa. El procedimiento principal es `CIC`, que inicializa la pantalla y las tortugas y llama al procedimiento recursi-

vo SUBROSETONC. SUBROSETONC lee la(s) orden(es) desde el teclado, las almacena en la variable ORD y ejecuta el subprocedimiento SUBSUBROSETONC. SUBSUBROSETONC hace que cada tortuga ejecute las órdenes almacenadas enn ORD. Cualquier comando de tortuga, como, por ejemplo, SETPENCOLOR o SHOWTURTLE pueden ser introducidos durante el proceso.

```
PARA CIC :K
BP BT OT
HAZ "N 0
REPITE :K [HAZ "N :N+1
           ACTIVA :N
           GD :N * 360 / :K]
(ES [ROSETON CÍCLICO DE ORDEN] :K)
SUBROSETONC :K
FIN

PARA SUBROSETONC :K
ES [SIGUIENTE ORDEN:]
HAZ "ORD LL
SI NO :ORD=[FIN] [SUSBSUBROSETONC :K :ORD SUBROSETONC :K]
FIN

PARA SUSBSUBROSETONC :K :ORD
HAZ "N 0
REPITE :K [HAZ "N :N+1
           ACTIVA :N
           EJECUTA :ORD]
FIN
```

2.4. Implementación de grupos dihédricos en *FMSLogo*

Esta implementación es similar a la anterior, pero incluye un truco en el subprocedimiento SUBSUBROSETONC: los comandos "auténticos" RIGHT y LEFT se almacenan en RECHTS y LINKS (la traducción al alemán de "derecha" e "izquierda"). De acuerdo con la paridad del número de la tortuga, el significado de los comandos de tortuga GIRADERECHA y GIRAIZQUIERDA, así como sus

abreviaciones, GD y GI, se intercambian o no. El comando COPIADEF se usa para ello (después de desproteger los comandos internos con HAZ "REDEFP "CIERTO).

Observemos que la tortuga comienza en la dirección de la bisectriz del domínio fundamental.

```
PARA DIH :K
HAZ "REDEFP "CIERTO
COPIADEF "RECHTS "GD
COPIADEF "LINKS  "GI
BP BT OT
HAZ "N 0
REPITE 2*:K [HAZ "N :N+1
             ACTIVA :N
             GD :N * 360 / (2 * :K) - 360 / (4 * :K)]
(ES [ROSETON DIHÉDRICO DE ORDEN] :K)
SUBROSETOND :K
FIN

PARA SUBROSETOND :K
ES [SIGUIENTE ORDEN:]
HAZ "ORD LL
SI NO :ORD=[FIN] [SUBSUBROSETOND :K :ORD SUBROSETOND :K]
FIN

PARA SUBSUBROSETOND :K :ORD
HAZ "N 0
REPITE :K [HAZ "N :N+1
           ACTIVA :N
           EJECUTA :ORD
           HAZ "N :N+1
           ACTIVA :N
           COPIADEF "GIRADERECHA   "LINKS
           COPIADEF "GIRAIZQUIERDA "RECHTS
           COPIADEF "GD "LINKS
           COPIADEF "GI "RECHTS
```

```
            EJECUTA :ORD
            COPIADEF "GIRADERECHA   "RECHTS
            COPIADEF "GIRAIZQUIERDA "LINKS
            COPIADEF "GD "RECHTS
            COPIADEF "GI "LINKS]
FIN
```

3. Galería de ejemplos

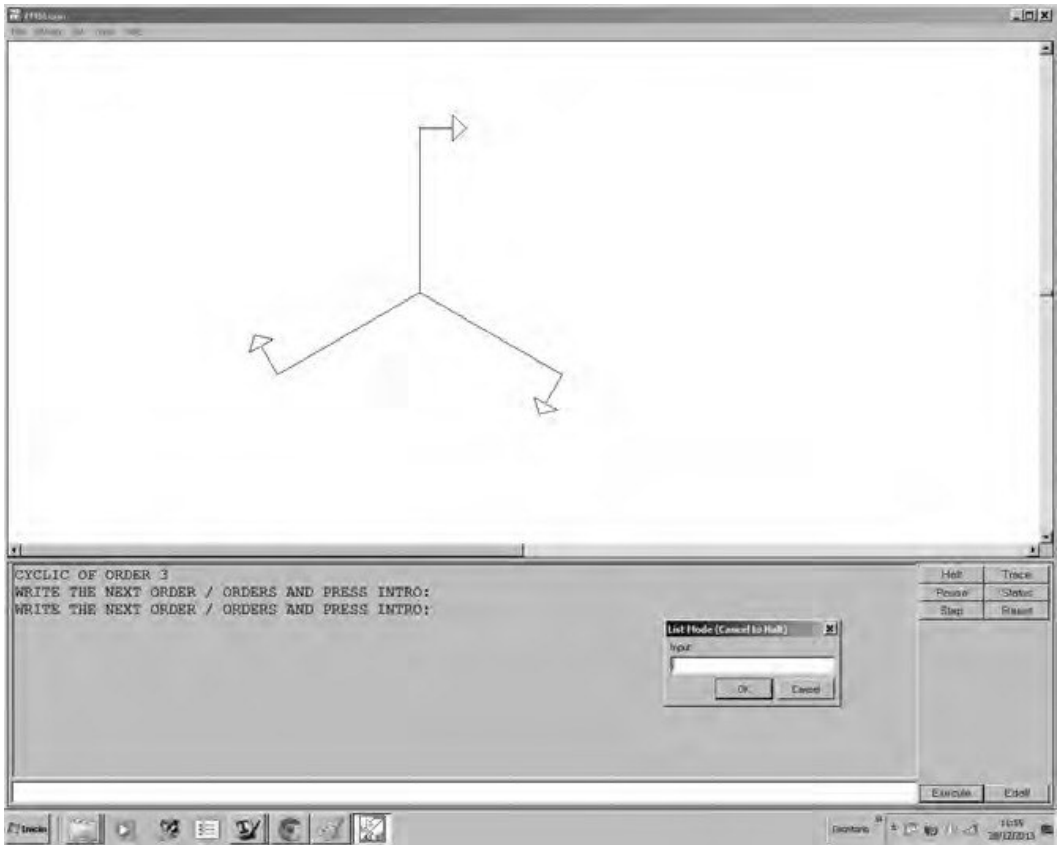


Figura 2: Ejemplo trivial del grupo C3. Observemos que los pequeños triángulos representan la posición y orientación de las "tortugas".

Ejemplo 1. Los dos sencillos ejemplos de las capturas de pantalla de las

Figuras 2 y 3 se consiguen escribiendo:

`AVANZA 200 GIRADERECHA 90 AVANZA 40`

después de ejecutar, respectivamente, `CIC 3` y `DIH 3`.

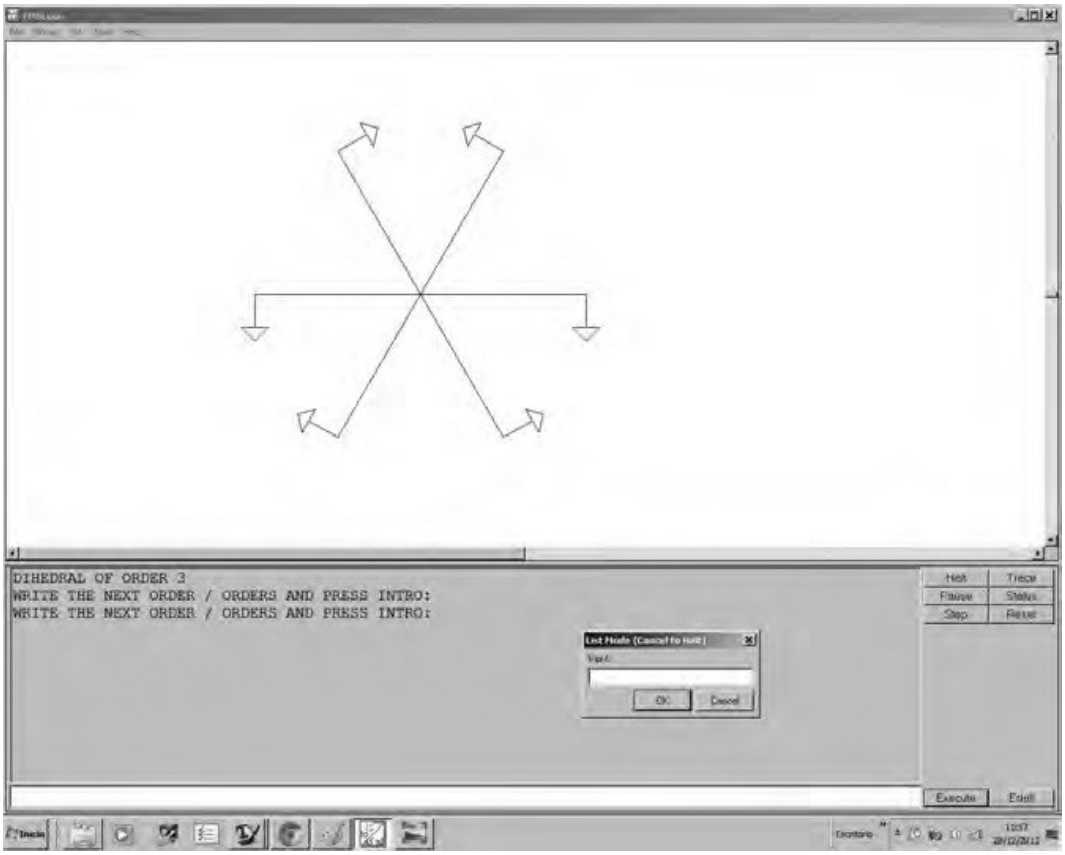


Figura 3: Ejemplo trivial del grupo D3.

Ejemplo 2. El dibujo a la derecha de la Figura 4 fue construido dibujando los dos medios hexágonos a la izquierda de esta figura y replicándolos por el grupo D12. El código es el siguiente:

```
PONGROSOR 2 GD 7.5 GD 30 OT
SL AV 120 GD 90 BL AV 30
REPITE 2 [GD 60 AV 60] GD 60 AV 30 GD 90
```

```
SL AV 312 GD 90 BL AV 60
REPITE 2 [GD 60 AV 120] GD 60 AV 60 GD 90
```

Observemos que `GD`, `OT`, `SL`, `AV` y `BL` son las abreviaciones de `GIRADERECHA`, `OCULTATORTUGA`, `SUBELAPIZ`, `AVANZA` y `BAJALAPIZ` (respectivamente).

Notemos que se incluye `GD 7.5` al comienzo pues las células en los grupos D12 son sectores de 30^0, por lo que los dominios fundamentales son sectores de 15^0 y, en consecuencia, las bisectrices de los dominios fundamentales están desviadas $\frac{15}{2}^0$ con respecto a las semirrectas borde.

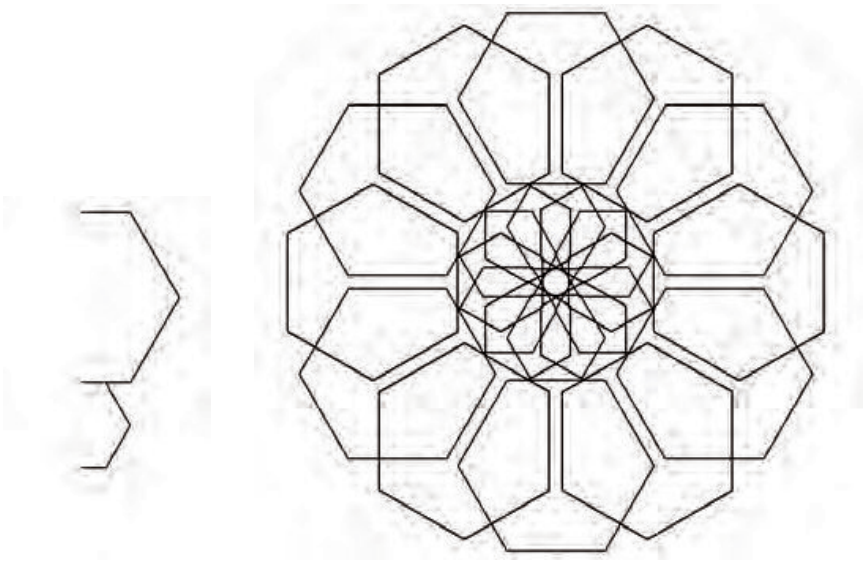


Figura 4: Un diseño (dos medios hexágonos) replicados por el grupo D12.

Ejemplo 3. El dibujo de la Figura 5 fue construido dibujando una inflorescencia multicolor con:

```
OT
PONGROSOR 1
PONCL 0
AV 150
PONGROSOR 4
HAZ "A 1
```

```
REPITE 15 [PONCL :A AV 50 RE 50 GD 24 HAZ "A :A+1]
```

y replicándola por el grupo cíclico de orden 8. Observemos que `RE` quiere decir `RETROCEDE`, `PONCL` impone el color del lápiz y `HAZ` es el comando de asignación en *Logo*.

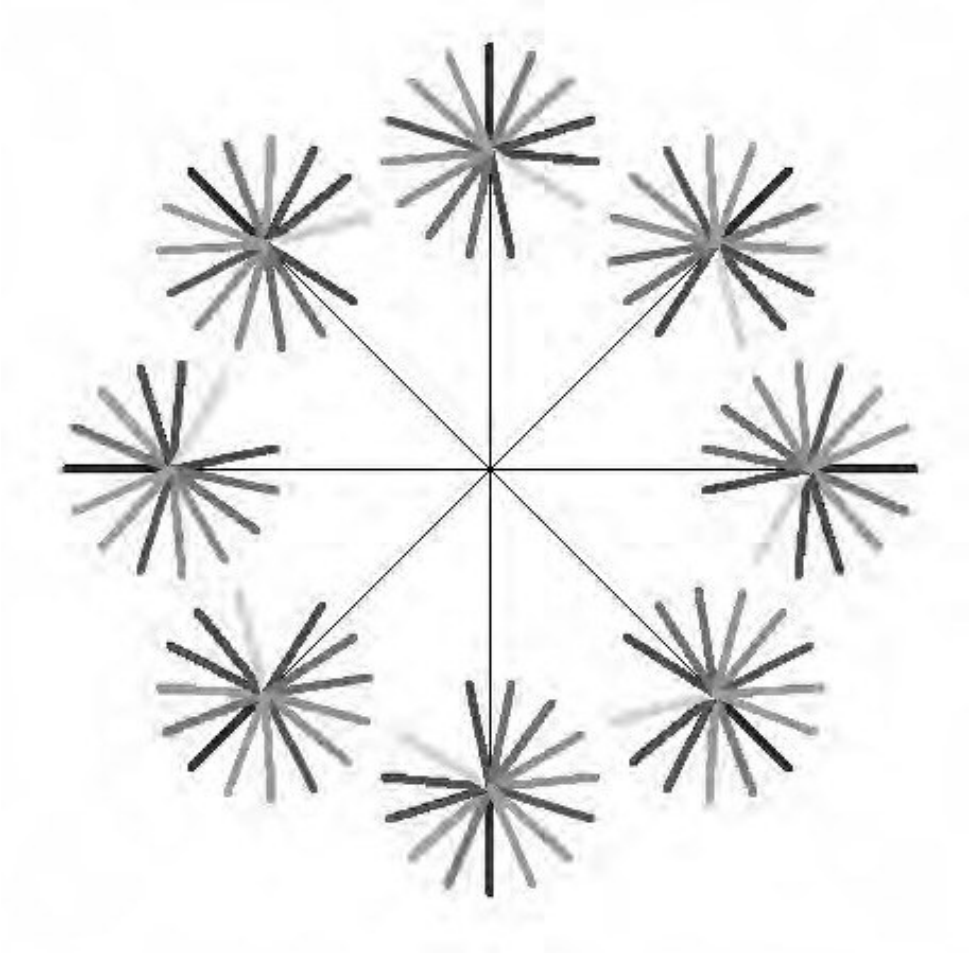


Figura 5: Una inflorescencia obtenida replicando la célula por el grupo C8.

Ejemplo 4. En la Figura 6 un diseño (izquierda) se replica ejecutando `CIC 6` (centro) y `DIH 6` (derecha).

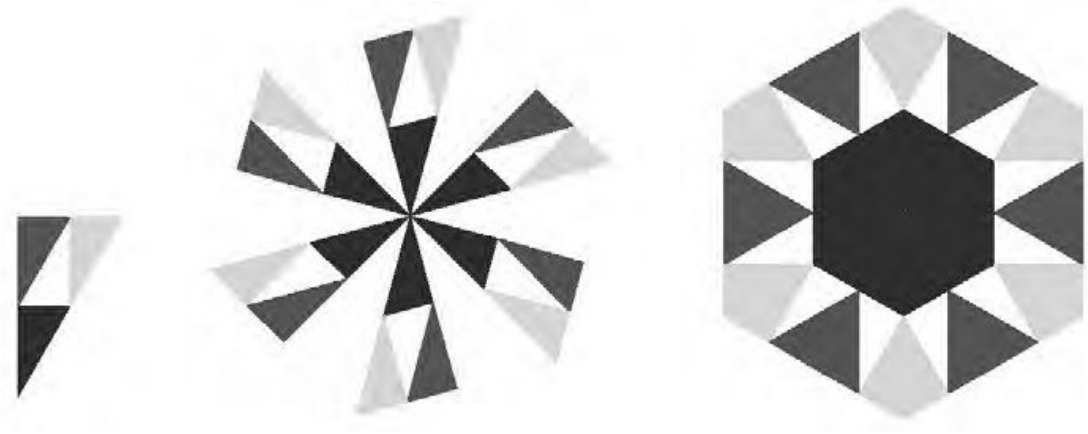


Figura 6: Un diseño replicado por los grupos C6 y D6.

Agradecimientos

Este trabajo está parcialmente subvencionado por los proyectos de investigación *TIN2012–32482* (Gobierno de España), *S2013/ICE-2845 (CASI-CAM)* (Comunidad de Madrid) y el Grupo de Investigación *ACEIA*.

4. Conclusiones

Aunque no sea el único fan de la *geometría de la tortuga* [2, 45], apoyar la *geometría de la tortuga* en 2015 es posiblemente remar contra corriente. Pero, en mi humilde opinión, la tortuga es excelente para ciertas aplicaciones como la presentada aquí (dibujo de grupos cíclicos y dihédricos). Creo que las cosas (y las personas) no deberían ser olvidadas o ignoradas sólo por ser antiguas (viejas). Podemos aprender de nuestros mayores (en los campos que dominan), y podemos todavía sacar provecho del "buen software antiguo" (en las aplicaciones en que destaquen).

Obviamente, un trabajo futuro puede ser extender esta idea a los siete grupos de frisos y a los diecisiete grupos cristalográficos planos.

Otro posible trabajo futuro es comparar la implementación en *FMSLogo* incluida aquí con implementaciones en otros dialectos *Logo* que soporten tortugas múltiples, como *StarLogo* [7, 36] y *NetLogo* [49].

Referencias

[1] H. Abbelson and A. diSessa. *Turtle Geometry. The Computer as a Medium for Exploring Mathematics*. The MIT Press, Cambridge, MA, 1981.

[2] D. Ajoy. http://neoparaiso.com/logo/, November 22nd 2013. Accedido el 17 de Marzo de 2014: `http://neoparaiso.com/logo/`.

[3] Anónimo. *Turbo PROLOG the natural language of artificial intelligence*. Borland Int. Inc., Scotts Valley, CA, 1986.

[4] Anónimo. The Haskell Programming Language, September 9th 2013. Accedido el 17 de Marzo de 2014: `http://www.haskell.org/haskellwiki/Haskell`.

[5] Anónimo. FMSLogo: An Educational Programming Environment, 2014. Accedido el 17 de Marzo de 2014: `http://fmslogo.sourceforge.net/`.

[6] Anónimo. Graphics.X11.Turtle, 2014. Accedido el 17 de Marzo de 2014: `http://hackage.haskell.org/package/xturtle-0.1.5/docs/Graphics-X11-Turtle.html`.

[7] Anónimo. Introduction to StarLogo, 2014. Accedido el 17 de Marzo de 2014: `http://education.mit.edu/starlogo/`.

[8] Anónimo. Pencil Code Online Guide, 2014. Accedido el 17 de Marzo de 2014: `http://guide.pencilcode.net/`.

[9] Anónimo. Presentation of Xcas, the swiss knife for mathematics, 2014. Accedido el 17 de Marzo de 2014: `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac.html`.

[10] E. Boiten. Turtle Graphics: Exercises in Haskell. Technical Report No. 11-04, University of Kent, Canterbury, 2004.

[11] P. Boytchev. Logo Tree Project, 2014. Accedido el 15 de Marzo de 2014, `http://www.elica.net/download/papers/LogoTreeProject.pdf`.

[12] B. Buchberger. Bruno Buchberger's PhD thesis 1965: An algorithm for finding the basis elementals of the residue class ring of a zero dimensional polynomial ideal. *J. Symb. Comp.*, 41/3–4:475–511, 2006.

[13] J. Cabezas and L. Hernández-Encinas. Geometría esférica en Logo. *Gac. Mat.*, 1:13–24, 1988.

[14] C. Cotter. Turtle Graphics Interface for REDUCE Version 3, 1998. Accedido el 15 de Marzo de 2014, `http://reduce-algebra.com/docs/turtle.pdf`.

[15] M. Garbayo. *Automatización e Implementación de algunas Técnicas de Almacenamiento de Procesos en Problemas Geométricos y de Clasificación Automática.* Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, 2000.

[16] M. Garbayo and E. Roanes-Lozano. Implementación de un paquete de dibujo de rosetones (Grupos de Leonardo). *Bol. Soc. "Puig Adam"*, 37:87–96, 1994.

[17] M. Garbayo and E. Roanes-Lozano. Implementación de un paquete de dibujo de frisos. *Bol. Soc. "Puig Adam"*, 40:39–53, 1995.

[18] M. Garbayo and E. Roanes-Lozano. Implementación de un paquete de dibujo de grupos cristalográficos planos. *Bol. Soc. "Puig Adam"*, 43:71–77, 1996.

[19] M. Garbayo, E. Roanes-Lozano, and E. Roanes-Macías. Tort–Decó: A "Turtle Geometry"–Based Package for Drawing Periodic Designs. *Math. Comp. Mod.*, 33:321–340, 2001.

[20] Y. S. Give'on. Teaching recursive programming using parallel multi-turtle graphics. *Comput. Educ.*, 16/3:267–280, 1991.

[21] R. Goldman, S. Schaefer, and T. Ju. Turtle geometry in computer graphics and computer–aided design. *Comp. Aid. Des.*, 36/14:1471–1482, 2004.

[22] G. M. Haas. BFOIT. Introduction to Computer Programming. Java TurtleGraphics, 2014. Accedido el 17 de Marzo de 2014: `http://www.bfoit.org/itp/JavaTurtleGraphics.html`.

[23] B. Harvey. *Computer Science Logo Style. Vol. I: Symbolic Computing*. The MIT Press, Cambridge, MA, 2nd edition, 1997. Disponible en: `http://www.cs.berkeley.edu/~bh/v1-toc2.html`.

[24] B. Harvey. Berkeley Logo (UCBLogo), 2014. Accedido el 17 de Marzo de 2014: `http://www.cs.berkeley.edu/~bh/logo.html`.

[25] T. Ju, S. Schaefer, and R. Goldman. Recursive turtle programs and iterated affine transformations. *Comput. Graph.*, 28/6:991–1004, 2004.

[26] B. Kutzler and D. R. Stoutemyer. *Great TI-92 Programs (Vol. 1)*. bk teachware, Hagenberg, Austria, 1997.

[27] J. Lechner, E. Roanes-Lozano, E. Roanes-Macías, and J. Wiesenbauer. An Implementation of "Turtle Graphics" in Derive 3. *The Bull. DERIVE User Group*, 25:15–22, 1997.

[28] Lifelong Kindergarten. MIT Media Lab. Create stories, games, and animations. Share with others around the world, 2014. Accedido el 17 de Marzo de 2014: `http://scratch.mit.edu/`.

[29] E. Neuwirth. Turtle Ballet: Simulating Parallel Turtles in a Nonparallel LOGO Version. In G. Futschek, editor, *European Logo conference Eurologo 2001, a turtle odyssey*, pages 263–270. Österreichische Computer Gesellschaft, 2001.

[30] Otherwise. Jurtle. A Gentle Introduction to Java, 2009. Accedido el 17 de Marzo de 2014: `http://www.otherwise.com/Jurtle/index.html`.

[31] S. Papert. *Mindstorms: Children, Computers, And Powerful Ideas*. Basic Books, New York, 1980.

[32] J. Piury, L. M. Laita, E. Roanes-Lozano, A. Hernando, F. J. Piury-Alonso, J. M. Gómez-Argüelles, and L. Laita. A Gröbner bases–based rule based expert system for fibromyalgia diagnosis. *RACSAM Rev. R. Acad. A*, 106/2:443–456, 2012. DOI: 10.1007/s13398-012-0064-8.

[33] R. Rachum. PythonTurtle, 2011. Accedido el 17 de Marzo de 2014: `http://pythonturtle.org/`.

[34] C. C. Ratcliff and S. E. Anderson. Reviving the Turtle: Exploring the Use of Logo with Students with Mild Disabilities. *Computers in the Schools: Interdisciplinary Journal of Practice, Theory, and Applied Research*, 28/3:241–255, 2011.

[35] Redware. Lesson Plan. Turtle Graphics, 2014. Accedido el 17 de Marzo de 2014: `http://scratch.redware.com/lessonplan/turtlegraphics`.

[36] M. Resnick. New Paradigms for Computing, New Paradigms for Thinking. In A. A. et al. diSessa, editor, *Computers and Exploratory Learning*, pages 31–43. Springer, NATO ASI Series 146, Berlin Heidelberg, 1995.

[37] M. Resnick. *Turtles, Termites, and Traffic Jams. Explorations in Massively Parallel Microworlds*. The MIT Press, Cambridge, MA, 1997.

[38] E. Roanes-Lozano, A. García-Álvarez, and A. Hernando. A geometric approach to the estimation of radial railway network improvement. *RACSAM Rev. R. Acad. A*, 106:35–46, 2012. DOI: 10.1007/s13398-011-0050-6.

[39] E. Roanes-Lozano, A. Hernando, J. A. Alonso, and L. M. Laita. A logic approach to decision taking in a railway interlocking system using Maple. *Math. Comput. Simul.*, 82/1, 2011. DOI: 10.1016/j.matcom.2010.05.024.

[40] E. Roanes-Lozano and E. Roanes-Macías. An Implementation of "Turtle Graphics" in Maple V. *MapleTech*, 1994 Special Issue:82–85, 1994.

[41] E. Roanes-Lozano and E. Roanes-Macías. *Nuevas Tecnologías en Geometría*. Ed. Complutense, Madrid, 1994.

[42] E. Roanes-Lozano and E. Roanes-Macías. "Turtle Graphics" in Maple V. In R. J. Lopez, editor, *Maple V: Mathematics and Its Applications*, pages 3–12. Birkhäuser, Boston Basel Berlin, 1994.

[43] F. Sancho. NetProLogo, March 19th 2012. Accedido el 17 de Marzo de 2014: http://www.cs.us.es/~fsancho/NetProLogo/?p=about.

[44] H. Sims-Coomber and R. R. Martin. A non-Euclidean implementation of LOGO. *Comput. Graph.*, 15/1:117–130, 1991.

[45] The Logo Foundation. Logo Foundation. Welcome to the Logo Foundation web site, 2014. Accedido el 17 de Marzo de 2014: http://el.media.mit.edu/logo-foundation/index.html.

[46] ticalc org project. TI-92 Turtle Graphics v1.0, 2012. Accedido el 17 de Marzo de 2014: http://www.ticalc.org/archives/files/fileinfo/13/1376.html.

[47] M. Trott. "Turtle-Graphics", 2014. Del "Wolfram Demonstrations Project". Accedido el 17 de Marzo de 2014: http://demonstrations.wolfram.com/TurtleGraphics/.

[48] Wikipedia. LOGO, July 25 2011. Accedido el 17 de Marzo de 2014: http://wiki.laptop.org/go/LOGO.

[49] U. Wilensky. NetLogo 5.0.5 User Manual, December 19 2013. Accedido el 17 de Marzo de 2014: http://ccl.northwestern.edu/netlogo/docs/NetLogo%20User%20Manual.pdf.

Antiguos Sistemas de Numeración

Mª Concepción Romo Santos
Departamento de Álgebra. Facultad de Matemáticas.
Universidad Complutense de Madrid
romosan@mat.ucm.es

Abstract

Ancient numeration systems (Egiptian, Babylonian, Greek, Roman, Mayan, Chinese and Hindu-Arabic) are revisited in this paper. Emphasys is put on their positional character.

Resumen

En este artículo se revisan antiguos sistemas de numeración: egipcio, babilónico, griego, romano, maya, chino e indoarábigo, poniendo especial atención en su carácter posicional.

A la memoria de D. Alberto Aizpún,
con agradecimiento por su buen hacer,
su calidad humana y sobre todo,
por su enorme entrega a la docencia.

Introducción

Mucho antes de que se inventara la escritura el hombre empezó a rayar las rocas y las paredes de las cuevas y a tallar muescas en varas para indicar "cuántos". Tales marcas fueron el inicio de los sistemas de numeración pero fue mucho más tarde cuando los hombres fusionaron los nombres hablados de los números y sus incisiones creando un sistema de símbolos representativos de ellos.

Estudiaremos los principales sistemas de numeración.

El sistema egipcio

Los antiguos egipcios que vivían en el valle del Nilo alcanzaron un alto nivel de civilización antes del año 3.000 A.C. El sistema de numeración egipcio era decimal (de base 10), pero carecía del concepto de valor de posición. En la Figura 1 se muestran esquemáticamente los símbolos que utilizaban.

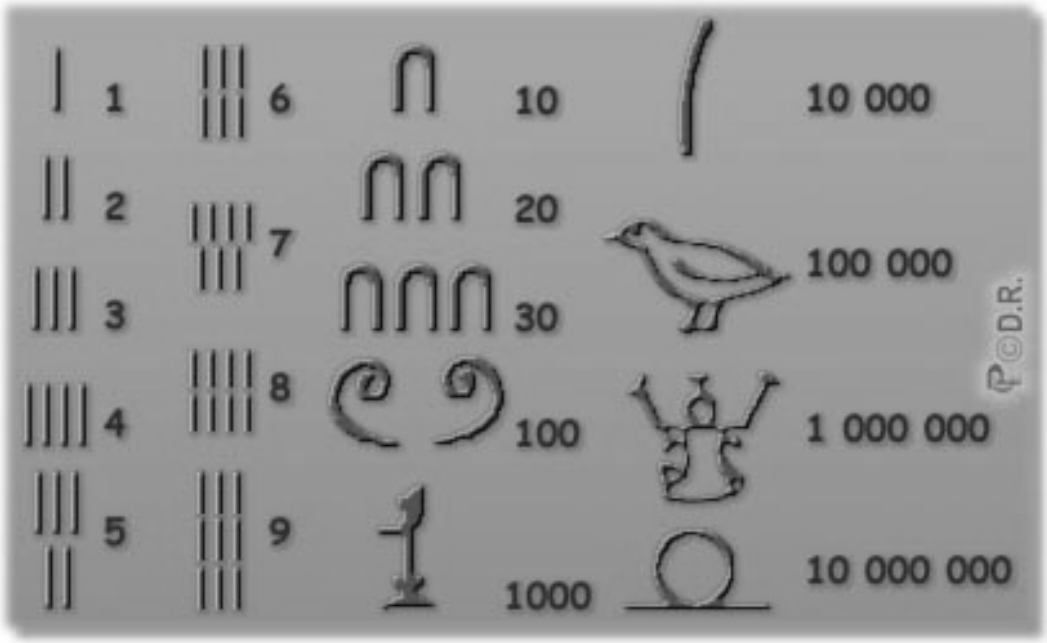


Figura 1

El sistema babilónico

En otro valle, que se encuentra entre los ríos Tigris y Eufrates del Irak de hoy en día, floreció otra civilización antigua. Aquí vivieron los babilonios aproximadamente 2000 años A.C. La escritura en Babilonia se hacía sobre pequeñas tablas de arcilla con la ayuda de un estilete que producía caracteres en forma de cuña llamados caracteres cuneiformes. Este sistema de numeración era decimal, como se muestra en la Figura 2.

Los babilonios usaron también un sistema de numeración sexagesimal (de base sesenta). Este sistema tan sólo necesitaba un símbolo definido para el cero, para convertirse en un sistema de valores de posición completa.

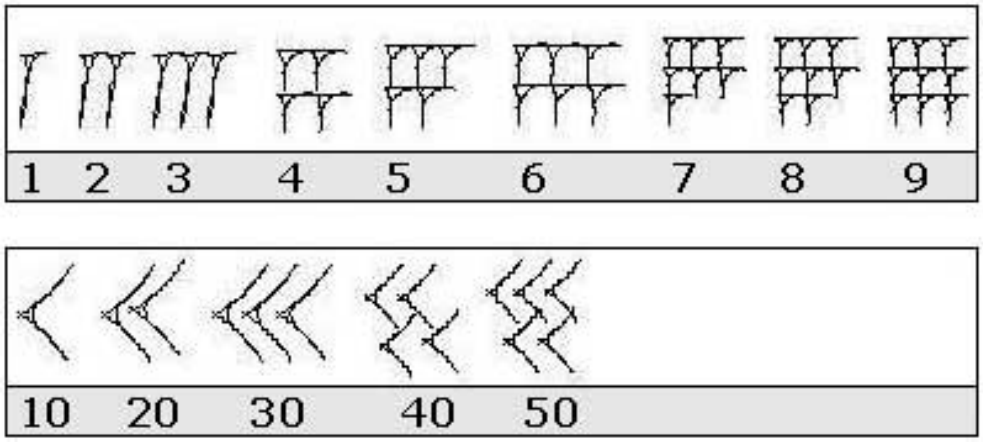


Figura 2

Los sistemas griegos

El más antiguo de los sistemas de numeración griegos se obtuvo asignando valores numéricos a las veinticuatro letras del alfabeto griego. Este sistema era prácticamente inútil en el trabajo.

Otro sistema era el sistema jónico, en él se agregaban tres signos al alfabeto y así había veintisiete letras. Las nueve primeras representaban los números del 1 al nueve, las nueve siguientes representaban los nueve primeros múltiplos de 10, es decir, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 y el tercer grupo de nueve letras representaba a los nueve primeros múltiplos de 100, es decir: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900 (Figura 3).

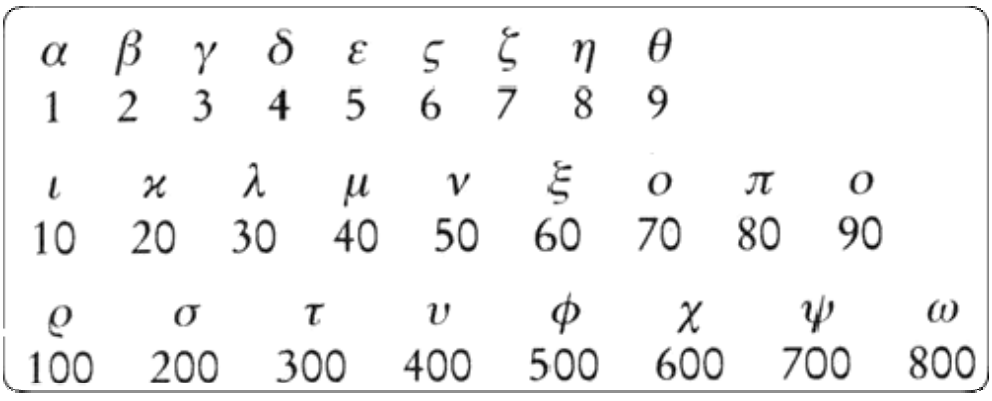


Figura 3

Los múltiplos de un millar se representaban por medio de las nueve primeras letras con una raya cada una indicando su nuevo valor.

Sistema de numeración romano

Hay siete símbolos básicos en el sistema romano, tal como los conocemos hoy en día. Son los siguientes:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

El sistema romano puede ser considerado como un sistema decimal. Los romanos usaban el principio de adición para escribir todos los números, exceptuando aquellos que comprendían cuatros y nueves. De este modo, se tiene:

XXIII = 20 + 3 = 23

MDCCCVII = 1000 + 500 + 300 + 5 + 2 = 1807

El principio de sustracción opera específicamente en relación con los cuatros y los nueves, del siguiente modo:

IV = 5 – 1 = 4 ; XL = 50 – 10 = 40 ; CD = 500 – 100 = 400

IX = 10 – 1 = 9 ; XC= 100-10 = 90 ; CM = 1000 – 100 = 900

resultando la siguiente tabla (Figura 4):

I	1	VIII	8
II	2	IX	9
III	3	X	10
IV	4	L	50
V	5	C	100
VI	6	D	500
VII	7	M	1.000

Figura 4

El sistema maya

La civilización maya de la parte sur de Méjico y de Centroamérica fue la primera que empleó el principio de valor de posición a la vez que un símbolo para el cero en un sistema de numeración. El sistema maya se desarrolló independientemente de las civilizaciones del Viejo Mundo y se cree que estuvo en uso durante cinco o seis siglos antes que cualquiera de los sistemas de los países asiáticos.

El sistema de numeración de los mayas que se encuentra en sus calendarios y relaciones astronómicas, no es decimal sino vigesimal (de base veinte).

Los 19 primeros números aparecen en la tabla de la Figura 5.

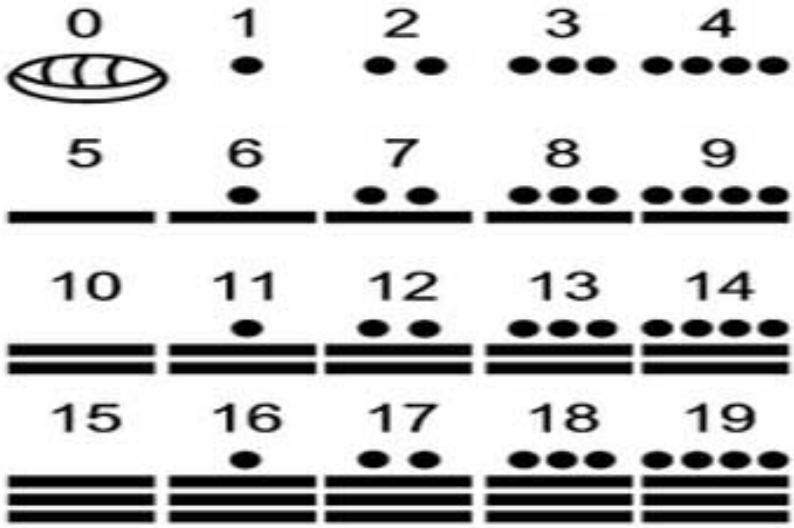


Figura 5

El sistema chino

Nuestros conocimientos acerca del inicio de la civilización china son muy vagos. Los numerales chinos constituyen uno de los sistemas de numeración más antiguos que hay en el mundo y se siguen empleando actualmente (Figura 6).

Claro que las firmas de negocios en China emplean en la actualidad nuestro sistema de numeración indoarábigo.

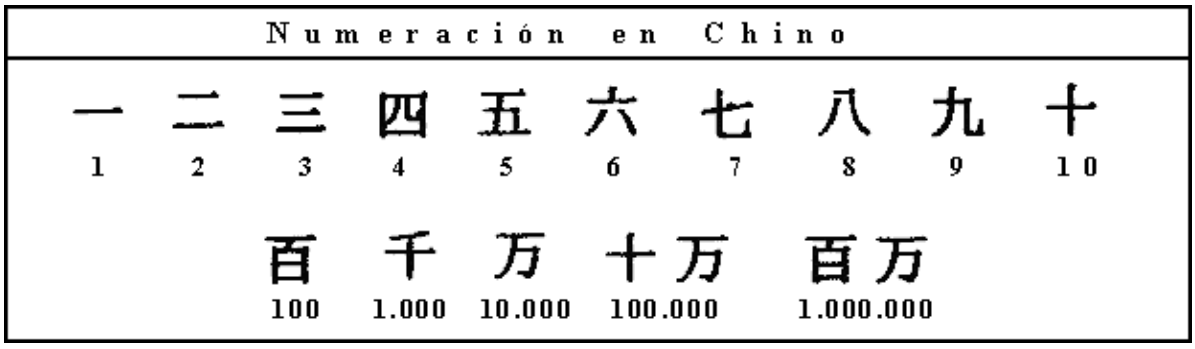


Figura 6

Los numerales indoarábigos

Existen varias teorías y mucha incertidumbre acerca del origen de nuestros numerales comunes, llamados indoarábigos. La teoría más ampliamente aceptada es la que dice que tuvieron su origen en la India, y siendo una invención de los hindúes, estos numerales fueron traídos a España en el siglo VIII o IX D.C. por los árabes y difundidos más tarde por la Europa cristiana.

En el año 711 los árabes invadieron España y la dominación musulmana duró ocho siglos. Ellos nos introdujeron el nuevo método para escribir símbolos numéricos que habían aprendido de los hindúes.

Los numerales en su forma presente, no aparecerían hasta el siglo XV o el XVI. El manuscrito europeo más antiguo en el cual aparecen símbolos muy parecidos a nuestros numerales modernos fue escrito en España en 976 D.C. Este manuscrito se encuentra en el convento de Albelda, un monasterio del norte de España y es conocido con el nombre de Codex Vigilanus. Fue copiado por un monje de nombre Vigila. El pasaje relevante dice así:

> *"Debemos tener en cuenta que los indios tenían la inteligencia más penetrante, y otras naciones marcharon por detrás de ellos en el arte de calcular, en geometría y en otras ciencias libres. Y esto es evidente a partir de los nueve símbolos con los que ellos representaban cada categoría de número a cada nivel"* (Figura 7).

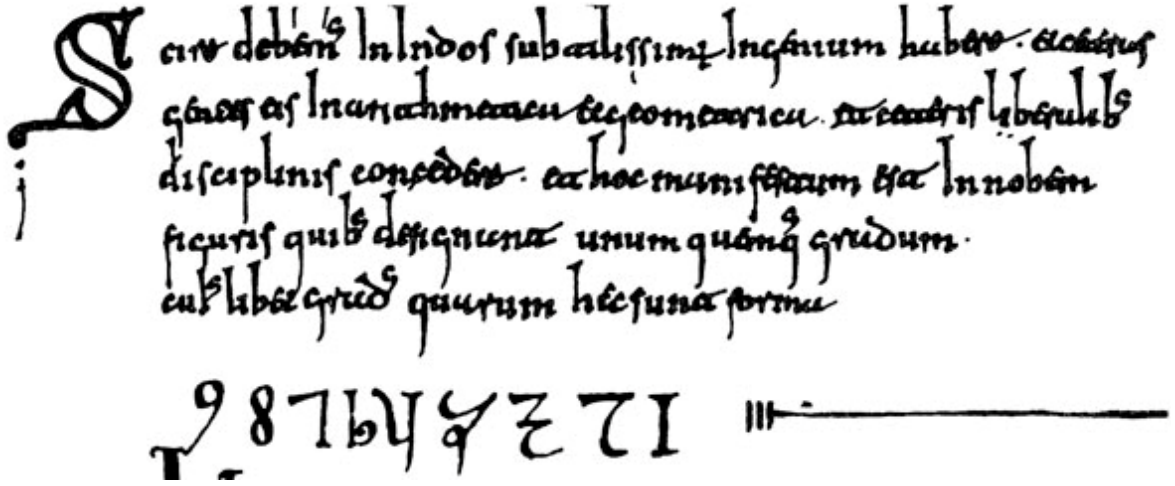


Figura 7

Una influencia importante en la introducción de los numerales indoarábigos en Europa la ejerció un libro escrito por Al-Khovarizmi, un matemático árabe, en el año 825 D.C. Este libro fue posteriormente traducido al latín con el título Liber Algorismi de Numero Indrum (El libro de Al-khowarizmi acerca del número hindú). El hecho de haber sido traducido este libro del árabe pudo haber influido en la adopción del término "numerales arábigos" al referirse a nuestros numerales. Además de esto, podemos ver una semejanza entre nuestros numerales y los signos arábigos.

Al-Khowarizmi fue matemático, astrónomo y geógrafo. Quizás fue uno de los matemáticos más destacados que han vivido en la Edad Media. Su trabajo en álgebra fue destacado, pues él no sólo inició el tema en forma sistemática, sino que también lo desarrolló para dar solución analítica a ecuaciones lineales y cuadráticas, lo que le establece como fundador del Álgebra.

El desarrollo de tablas astronómicas por él fue una contribución significante a la ciencia de la Astronomía. La contribución de Al-Khowarizmi a la geografía es también destacada, ya que no sólo revisó los puntos de vista de Ptolomeo en geografía, sino que los corrigió en detalle, así como su mapa del mundo. Sus otras contribuciones incluyen originales trabajos relacionados con relojes, astrolabios y relojes de sol.

La influencia de Al-Khowarizmi (Figura 8) en el desarrollo de la ciencia en general y de la matemática, astronomía y geografía en particular, está claramente establecida en la historia. Muchos de sus libros fueron prontamente traducidos a numerosas lenguas y, de hecho, constituyeron los textos universitarios hasta el siglo XVI.

Figura 8

Durante muchos siglos se prefirió la notación romana a los signos indoarábigos. El uso de los numerales indoarábigos levantó, de hecho, una gran oposición. En 1299, por ejemplo se prohibió en Florencia a los mercaderes el uso de ellos y se ordenó la escritura de los nombres verbales para los números o la notación romana. En muchas partes se prohibió el uso de numerales indoarábigos en la redacción de documentos oficiales. Este prejuicio en contra de los símbolos

indoarábigos se debía, probablemente, al hecho de que los símbolos romanos eran conocidos por cualquiera y respondían a las necesidades ordinarias.

El uso de un símbolo cero fue un logro grandioso de los hindúes, y pudo haber sido inventado 100 años A.C. El cero es probablemente uno de los más grandes aciertos de la ciencia. Permitió a los calculadores hindúes abandonar las columnas del ábaco y desarrollar métodos de cálculo escrito. El símbolo empleado usualmente por los hindúes en sus cálculos escritos, para indicar la columna vacía del ábaco, era un punto que llamaban sunyabindu o sindu. No pensaban en este punto como en un símbolo para un número, sino como en un símbolo que denotaba una columna vacía. El uso más temprano que se conoce de un símbolo para el cero es una inscripción de Gwalior que data de 876 D.C.

El numeral "0" fue el último de los numerales en ser inventado, y el número cero fue el último de los números en ser descubierto. Sin cero el sistema indoarábigo de numeración no hubiese sido más eficiente para los cómputos que los sistemas egipcio o romano.

Es notable el hecho de que fueran necesarios miles de años para que el hombre llegara a inventar una manera realmente sencilla de representación de los numerales. Son muchos los años de esfuerzo y lucha que hay detrás del sistema de numeración que tomamos gratuitamente y usamos con tanta facilidad.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Siglo XII	1	2 3	3 3	4	5 5	6 6	7 7	8	9	0
Siglo XIII	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Hacia 1524	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Figura 9

Esta invención humana, profundamente humana, es la más universal. En más de un sentido podemos decir que fusiona a la humanidad. No ha habido ninguna Torre de Babel de los números. Mientras que existen más de 4000 lenguas y varias decenas de alfabetos y de sistemas de escritura para transcribirlos, hoy sólo existe un sistema único de numeración escrita. Sistemas cuyos signos básicos constituyen, por así decirlo, un esperanto visual: el hecho de que personas de muy distintos lugares geográficos (europeos, asiáticos, africanos u oceánicos), que no pueden comunicarse entre sí mediante la palabra, se entienden fácilmente en cuanto escriben los números con las cifras 0,1,2,3,4…, es uno de los rasgos más notables de nuestro sistema de numeración actual.

En una palabra, las cifras constituyen hoy en día el único y auténtico lenguaje universal. Los que consideran a las cifras como algo completamente inhumano deberían reflexionar sobre ello.

Bibliografía

G. Ifrah (1985), *Las cifras*. Alianza. Madrid.

G. Ifrah (1997), *Historia universal de las cifras*. Espasa. Madrid.

J. Peralta (1995), *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la Matemática*. Huerga y Fierro Editores. Madrid.

M.C. Romo Santos (1994), Al-Andalus, la ciencia islámica en España. *Boletín de la Sociedad Puig Adam,* nº 37, págs. 61-65.

El rendimiento escolar en secundaria: Estudio del impacto de algunas variables de factores de riesgo

Juan José Prieto Martínez
Dpto. Estadística e Investigación Operativa I
Fac. CC. Matemáticas. Universidad Complutense de Madrid
jjprieto@mat.ucm.es

Abstract

Poor performance in school is a serious social problem with personal, family and social repercussions. You need to know the context of the students, as well as to deeper in their knowledge and analysis of the academic performance. This article presents a study on the variables of the risk factors involved in the academic performance of students of Obligatory Secondary Education (ESO). The research focuses on a statistical study during the academic year 2012-2013. The data are processed by a binary logistic regression model, which estimates the probability of promotion to the 4th year of ESO with no subject failed. The results show the importance of having interest in studies as well as effort and dedication by them.

1. Qué es el rendimiento escolar

El rendimiento académico es la comprensión del contenido de los programas de estudio, los cuales son evaluados dentro una escala convencional. Por ser cuantificable, el rendimiento académico determina el nivel de conocimiento alcanzado, y es tomado como único criterio para medir el éxito o el fracaso escolar a través de un sistema de calificaciones (de 0 a 10 en la mayoría de los centros públicos y privados). Un buen rendimiento escolar se produce cuando el estudiante es capaz de demostrar sus capacidades cognitivas, actitudes, conceptos y aptitudes aprendidas en la escuela. Por consiguiente, es una medida que expresa lo que el estudiante ha aprendido a lo largo del proceso formativo. Ver, por ejemplo, [1] y [3].

El rendimiento escolar es un término relativamente moderno cuya aparición fue precedida de algunos hechos entre los que se puede destacar la obligatoriedad de la enseñanza, dando lugar a la asistencia a las aulas de personas muy diferentes (tanto en clase social y cultural como en características individuales y familiares). La poca motivación, el desinterés o la desidia dificultan la comprensión de los conocimientos y termina afectando en el rendimiento.

España es el país de la Unión Europea en 2012 con mayor tasa de abandono escolar (24,9), y tiene un fracaso escolar del 25,9%. En particular, la Comunidad de Madrid tiene una tasa de abandono escolar del 22,3% y un fracaso escolar del 23,8%. Ver, por ejemplo, el informe de [4]. Llegado a este punto cabría preguntarse ¿qué está provocando verdaderamente el fracaso escolar?, ¿se está estudiando como debiera?, ¿se está tomando medidas para su solución exclusivamente teniendo en cuenta las investigaciones realizadas?

Por otra parte, es muy importante analizar qué factores de riesgo influyen en el bajo rendimiento escolar, ya que éste puede acompañarnos de por vida, incluso puede provocar la deserción de los estudios. A la hora de delimitar los factores que están incidiendo en el éxito o fracaso escolar, no es extraño en encontrarse con algunas dificultades debido a que éstos están constituidos a su vez por una red entrelazada de variables de tipo personal, contextual…, que resultan difícil delimitarlas por atribuir efectos claramente discernibles.

Las investigaciones dirigidas al estudio de dichos factores en estudiantes de secundaria son numerosas e incorporan una amplia variedad de posibles determinantes. Ver, por ejemplo, [2] y [5]. Desde los factores de carácter personal (género, edad, situación socio-familiar, etc.), pasando por los factores académicos (tipo de enseñanza, formación del profesorado, etc.), actúan a menudo de forma interactiva y pueden que no sean claramente identificables como responsables del rendimiento académico.

2. Algunos factores de riesgo

Los factores de riesgo que pueden afectar al binomio éxito-fracaso pueden ser:

a) **Fisiológicos o ergonómicos** (físicos-mecánicos, biológicos, psicosociales,…)
b) **Pedagógicos** (métodos de enseñanza, ambiente en la escuela, profesorado,…)
c) **Ambientales (e**spacios de estudio, tipo de familia, hábitos de vida,…)
d) **Psicológicos** (problemas de personalidad, hábitos de estudio…)

Al conjunto de variables de cada uno de los factores de riesgo que inciden en el éxito o fracaso se le denomina *condicionantes del rendimiento académico.* Nó-

tese, por ejemplo, que las condiciones del centro escolar no solo están determinadas por el proyecto educativo que se desarrolla sino por la filosofía del centro, sus valores y el estilo de relación entre todas las personas que allí conviven. Un clima de centro positivo está presente en las relaciones de todos sus miembros favoreciendo el respeto, la comunicación, la solidaridad, la convivencia, la participación, etc.

Tabla 1. Factores de riesgo y variables asociadas			
Factor personal	**Factor Familiar**	**Factor Comunitario**	**Factor Colegio**
Sexo	Con quién vive	Clase social	Tipo de centro
Edad	Deserción con los hermanos	Participación de la familia	Método de enseñanza
Repite	Estudios de los Padres	Participación en pandillas	Tareas y actividades del centro
Horas de estudio diarias	Expectativa de los padres	Acoso escolar	Uso de ordenador y TIC
Aptitud	Clima familiar	Actividades extraescolares	Clima escolar
Metas a conseguir	Posesiones en el hogar	Clases particulares	Formación del profesorado
Estilos de aprendizaje	Nivel socioeconómico	Voluntariado en actividades sociales	Clima Institucional
Falta de conocimientos previos	Uso del ocio Familiar		Equipo directivo
Autoestima	Ayuda de los padres en los estudios		Instalaciones
Horas diarias de TV			

Si se acota las variables por un solo tipo de factor, por ejemplo el de tipo *personal,* las variables asociadas pueden agruparse a su vez en tres niveles tal como se refleja en el esquema. Obsérvese que algunas de estas variables son considera-

das como explicativas del rendimiento académico En la Tabla 1 se presentan factores de riesgo con algunas de las variables asociadas que pueden influir a la hora de estimar un buen rendimiento escolar.

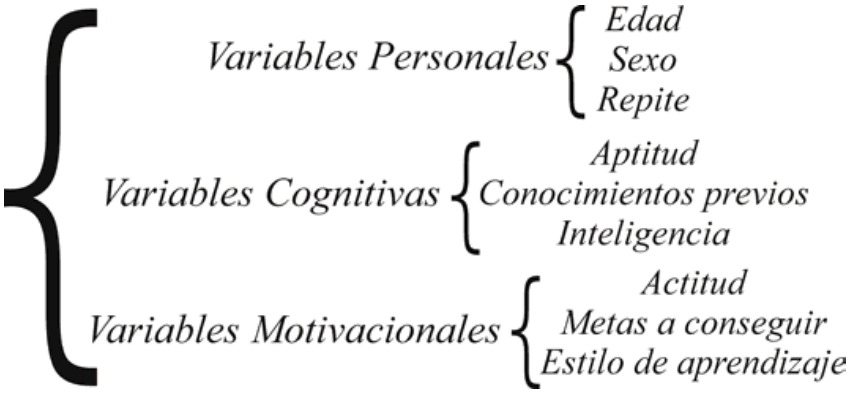


Figura 1. Esquema de variables asociadas al factor personal

Ahora bien, pueden ser muchas las variables que afectan al aprendizaje y rendimiento académico y pertenecen a diferentes factores de riesgo. Sin embargo, no todas lo hacen de la misma forma ni en la misma proporción. Por ejemplo, las desigualdades en rendimiento en función del sexo de los estudiantes es objeto de interés en la comunidad científica desde hace varias décadas, habiéndose desarrollado una volumen considerable de investigación. El meta-análisis de [6], muestra superioridad en las mujeres en fluidez verbal, cálculo aritmético y memoria espacial para la localización de objetos; ellos, por su parte, superarían a las mujeres en analogía verbal, problemas matemáticos, memoria para la configuración geométrica y el ambiente. La autora destaca que estas diferencias no implican una ventaja a favor de los hombres en las áreas de matemáticas y ciencias.

En la Tabla 2 se presentan algunas variables del conjunto de factores de riesgo. Se muestra además una posible dimensión de las mismas, pudiendo formar parte de un cuestionario.

Tabla 2. Variables de factores de riesgo dimensionadas	
Variables	***Dimensiones***
Sexo	o Varón o Hembra
Estudios de los padres	o Sin estudios o Estudios elementales (EGB, ESO) o Bachillerato o F.P. o Estudios Universitarios o Doctorado / Máster
Horas de estudio diarias	o Menos de 1 hora o Entre 1 y 2 horas o Entre 2 y 3 horas o Entre 3 y 4 horas o Más de 4 horas diarias
Repite	o Si o No
Ha repetido con anterioridad	o Si o No
Hábito de lectura	o Poco o Regular o Mucho
Posesiones del hogar	o Cantidad de libros en el hogar o Ordenador o Tablet o Propia habitación o Conexión a Internet en el hogar
Gusto por el estudio	o Disfruto aprendiendo, en general, casi todas las materias o Me gustaría no tener que estudiar algunas materias o Las materias son todas muy aburridas o Me gustan todas las materias o Es importante ir bien en todas las materias
Percepción sobre los estudios	o Se lo que el profesor espera que haga en clase o Pienso en cosas no relacionadas con las clase o Es fácil entender a los profesores o Me interesa lo que dicen mis profesores o Mis profesores me da actividades interesante para realizar
Autoestima en los estudios	o Mis profesores dicen que cambie de actitud o Las asignaturas son más difíciles para mí que para otros o Normalmente voy bien en todas las asignaturas o No soy buen estudiante aunque me esfuerzo o Apruebo rápido los contenidos que me enseñan
Uso de ordenador Y TIC	o Me siento a gusto utilizando el ordenador en clase o Recibo apoyo por parte del profesorado y mis padres para estudiar con el ordenador o No me gusta nada utilizar las nuevas tecnologías para estudiar
Expectativa de los padres sobre su hijo	o Obligatorio o Bachillerato o Universitario

3. Aplicación del estudio

La inquietud por conocer qué variables pueden incidir en el rendimiento académico ha llevado a la realización de un estudio estadístico de campo, en concreto en la región de la Comunidad de Madrid.

Se pretende buscar un *modelo estadístico-matemático* basado en un ajuste ponderado de variables independientes o explicativas que son utilizadas como predictivas de la variable dependiente "*rendimiento académico*", con el interés último de poder estimar la probabilidad de que un estudiante apruebe o no.

El estudio que aquí se presenta tiene dos objetivos básicos: (1) Obtener una estimación no sesgada o ajustada de la relación entre las variables independientes y la variable dependiente; (2) Construir un modelo y obtener una ecuación con fines de predicción. Es decir, se pretende caracterizar la influencia de variables asociadas a los diferentes factores de riesgo sobre la variable dependiente, el cual está medido en términos de promociona o no. Como es habitual en este tipo de estudio se ha aplicado un cuestionario de contexto, el cual tiene un diseño de investigación apropiado similar al de la Tabla 2. Se puede realizar previamente un estudio piloto con el fin de validar, codificar y asegurar que se trata de un instrumento fiable, aunque en el presente estudio no se ha realizado por motivos de coste. Se ha seleccionado una muestra mediante un muestreo bietápico; primero se selecciona de forma estratificada los centros educativos y posteriormente las unidades individuales mediante un muestro aleatorio simple.

El estudio se ha llevado a cabo en la Comunidad de Madrid, la cual está dividida en 5 zonas: Dirección de Área Territorial (DAT) Madrid Capital, DAT Norte, DAT Sur, DAT Oeste y DAT Este.

En la Tabla 3 se presentan los municipios de la Comunidad de Madrid que han formado parte del muestreo bietápico.

Tabla 3. Municipios de la Comunidad de Madrid por DAT	
Norte	Tres Cantos, San Sebastián de los Reyes, Colmenar Viejo, La Cabrera y Alcobendas
Sur	Móstoles, Leganés, Fuenlabrada, San Martín de la Vega y Getafe.
Este	Arganda, Chinchón, Villarejo de Salvanés, Alcalá de Henares y Torrejón de Ardoz
Oeste	Pozuelo de Alarcón, Las Rozas, Boadilla del Monte, Majadahonda y Torrelodones

De la población total de alumnos de secundaria, la muestra está compuesta por los grupos de etapa pertenecientes a 25 centros de educación secundaria (5 centros por cada Dirección de Área Territorial). La etapa elegida para la investigación es

la de Educación Secundaria Obligatoria, concretamente en el nivel de 4º curso de educación secundaria. El motivo de esta elección no es otro que el intento de anticipar el problema de posible fracaso (no aprobar o no titulación) antes de tomar la importante decisión de qué hacer cuando se finalizan estos estudios (pudiendo elegir entre los diferentes itinerarios académicos y profesionales). Recogidos los datos y utilizando el software SPSS, se ha estimado las variables con más incidencia sobre la variable independiente.

El modelo elegido es una transformación logit, ya que es el que mejor responde a la necesidad de estimar un fenómeno cualitativo de elección binaria (titula o no). Por este motivo, se define la variable dependiente dicotómica Y_i que tomaría el valor 1 si el estudiante *i-ésimo* ha promocionado a 4º curso de ESO sin ninguna suspensa, y tomaría el valor 0 si ha promocionado a 4º curso de la ESO con alguna asignatura suspensa. Además, se toma un vector X, de dimensión k, que comprendería las variables dependientes o exógenas, supuestamente predictivas del comportamiento de Y_i. Así, el modelo logístico establece que:

$$P(Y_i = 1) = \frac{1}{1 + e - \beta_0 - \beta_2 X_2 - \cdots - \beta_n X_n}$$

donde $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ son los parámetros a estimar por máxima verosimilitud y $X_1, \ldots, X_n$ son las variables explicativas de los diferentes factores.

Otra forma de presentar esta relación es:

$$Log\ (P(Y_i=1)) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_n X_n$$

Una de las características que hace interesante el modelo propuesto es la relación que guarda los coeficientes de cuantificación de riesgo (llamados "*odds ratio*"), definidos como:

$$odds = \frac{P}{1-p}, \quad p = P(Y_i = 1)$$

Valorando todos los cuestionarios y eligiendo las variables más homogéneas en cuanto a las respuestas obtenemos la siguiente selección de variables: (Ver Tabla 4).

Tabla 4. Selección y descripción de posibles Variables para el modelo logístico	
Variables	***Descripción***
Sexo (S)	0 Si es Varón 1 Si es Hembra
Estudios de los padres (EP)	0 Sin estudios ó estudios elementales (EGB, ESO) 1 Bachillerato, F.P. ó estudios Universitarios
Horas de estudio diarias (HE)	0 Menos de 2h diarias 1 Más de 2h diarias
Repite (R)	0 Sí. 1 No
Ha repetido en etapas o niveles anteriores (RA)	0 Sí 1 No
Hábito de lectura (HL)	0 Nada o poco 1 Regular o bastante
Consulta en el hogar (CH)	0 No consulta libros. Tampoco ordenador 1 Consulta libros y utiliza el Ordenador
Gusto por el estudio (GE)	0 Las materias son aburridas 1 Me gustan casi todas las materias
Uso de ordenador y TIC en el aula (TIC)	0 No utilizo las TIC en el aula 1 Sí utilizo las TIC en el aula
Expectativa de los padres del nivel educativo a alcanzar por el hijo (EXP)	0 ESO 1 Bachillerato y Universitario
Expediente académico del estudiante (EA)	0 Pasa de curso con suspensas 1 Pasa sin suspensos
Implicación de los padres en los estudios del hijo (IP)	0 Los padres no ayudan a su hijo 0 Los padres ayudan a su hijo
Interés del estudiante por lo explicado en clase (IE)	0 El estudiante no está interesado 1 El estudiante está interesado

4. Interpretación de los resultados

Se ha encuestado a 314 alumnos de los centros educativos seleccionados con la siguiente información:

Tabla 5. Resultados previos			
Estados posibles	Y_i	*Frecuencia*	*Porcentaje*
Estudiantes que promocionan con todas las asignaturas aprobadas	0	207	66%
Estudiantes que promocionan con alguna asignatura suspensa	1	107	34%

Los resultados obtenidos de una regresión logística binaria mediante el programa SPSS se muestran en la Tabla 6. Se presentan las variables principales seleccionadas para la predicción junto con los coeficientes estimados (B), el error estándar (E.T.), el valor de la estadística de Wald y su significado (Sig.), los grados de libertad (gl), el valor odd estimado (Exp(B)) así como un intervalo de confianza para estos valores.

De la Tabla 6 se interpreta que:

1. La ecuación de regresión logística es:

$$Logit(p)=3,719+2,936*(HE)+1,935*(GE)+1,875*(IE)+0,831*R+0,721*S$$

siendo $logit(p)=ln\{p/(1-p)\}$. O alternativamente

$$P(Y_i=1)=\frac{1}{1+\exp\{-3,719+2,936*(HE)+1,935*(GE)+1,875*(IE)+0,831\times R-0,721*S\}}$$

Tabla 6. Resultados de la Regresión Logística

								I.C.95% para EXP(B)	
		B	E.T.	Wald	gl	Sig.	Exp(B)	Inferior	Superior
Paso	HE	2,936	0,914	12,371	1	0,004	8,234	2,414	22,381
1a	GE	1,935	0,671	7,824	1	0,009	6,482	1,982	17,187
	IE	1,875	0,662	7,221	1	0,016	5,721	1,473	15,243
	R	0,831	0,427	4,229	1	0,01	2,364	1,114	6,236
	S	-0,721	0,411	3,991	1	0,024	1,222	0,428	5,012
Constante		-3,719	1,311	3,472	1	0,002	0,099		

1a. Variable(s) introducida(s) en el paso 1:HE, GE, IE, R,S.

2. La posibilidad de aprobar cuando el alumno estudia más de dos horas es 8,234 veces mayor que la de los alumnos que estudien menos de dos horas diarias. Es decir, la ventaja a favor de los estudiantes que se esfuerzan, realizan sus deberes y estudian diariamente es superior en un 8,23 a la que corresponde a los estudiantes que menos o nada se esfuerzan.

3. Los estudiantes que tienen gusto por sus estudios y se motivan con esfuerzo y estudio aumentan en un 6,482 las posibilidades de aprobar frente a los que lo hacen con disgusto y desidia.

4. Los estudiantes con interés por lo explicado multiplica por 5,721 la ventaja respecto de aquellos que no tienen por lo que explica el profesor.

5. Los alumnos que no han repetido en cursos anteriores tienen más ventaja sobre los que han repetido (2,364 veces).
6. Ser chica tiene *cierta ventaja* sobre ser chico (0,82 veces) a la hora de obtener un mejor rendimiento académico.

Bibliografía

[1] Edel, R. (2003). *EL rendimiento académico, concepto, investigación y desarrollo*. Revista electrónica Iberoamericana sobre calidad, eficacia y cambio en educación, **1**, artículo 7.

[2] Fullana, Judit (1996). *La investigación sobre las variables relevantes para la prevención del fracaso escolar*. Revista de Investigación Educativa, **14(1)**, 63-90.

[3] Mella, O, & Ortiz, I. (1999). *Rendimiento escolar. Influencias diferenciales de factores externos e internos.* Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, **29**, 69-92.

[4] SGEE. Subdirección General de Estadísticas y Estudios. *Explotación de las variables educativas de la Encuesta de Población.* 2012. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

[5] Smorowski, Paul R.; Reynollds, Arthur J.; Bezrucko, Nikolano. (1999). *Resilience and Protective Factors in Adolescent. An Autographical perspective from Disadvantaged Youth*. Journal of Scholl Psychology, **37(4)**, 425-428.

[6] Spelkee, S. (2005) *Sex Differences in Intrinsic Aptitude for Mathematics and Science: A Critical Review*. American Psychologist, **60(9)**: 950-958.

La Real Academia de Matemáticas de Barcelona y el progreso de la Ingeniería

José Aldeguer Carrillo
Dr. Ingeniero de Construcción
Universidad Politécnica de Valencia
jaldegue@upvnet.upv.es

Abstract

This work pretends to highlight the activity of Barcelona´s Royal Academy of Mathematics in the professional training of engineers.

Hacia 1582 Felipe II fundó la Real Academia de Matemáticas de Madrid, pero debido a dificultades de funcionamiento, se cerró hacia 1634 (o, mejor dicho, fue absorbida por el Colegio Imperial de la Compañía de Jesús). En esa misma época en distintas zonas de España, empezaron a funcionar centros de similares características. Bajo el reinado de Carlos II, se creó la Real Academia de Barcelona, en 1697; cerrando su actividad en 1705, y después de una espera de 15 años, en 1720 , se volvió a abrir , con una característica muy especial, que fue la de incluir entre el alumnado, un grupo que no era de procedencia militar pero que cumplía en su ingreso y carrera las altas condiciones intelectuales, exigidas al personal militar.

La iniciativa de crear la Academia de Matemáticas de Barcelona, se atribuye precisamente en 1720 a Jorge Próspero de Verboom. Fomentó la edición de textos y traducciones extranjeros, de aquellas materias que podían contribuir a la formación de los futuros ingenieros. El primer director fue Mateo Calabro, militar, lo

fue de 1720 a 1738, aunque siempre gozó de la protección académica de Jorge Próspero de Verboom; llegó a la conclusión de que en todas las Academias se debían enseñar Matemáticas tomando como básicas la Aritmética y Geometría, tanto en su enfoque teórico como práctico. Se llegó a añadir lo que actualmente conocemos como Ciencias Físicas, en sus ramas de Estática, Cosmografía y Óptica, todo tendente a conseguir un Ingeniero Militar.

En 1738 entra a dirigir la Academia, Pedro Lucuze y Ponce, que añade con una gran visión de futuro una formación cultural para complementar los conocimientos científicos e integrarlos socialmente. Publicó en 1779 los "Principios de Fortificación", que sirvió casi como un libro de texto, en el que ciudades que eran proyectadas como fortificaciones, en su funcionamiento se comportaban como ciudades abiertas. Una de las principales características era la determinación de las dimensiones ideales para el objetivo que se pretendía. Figura al frente de la Academia hasta 1779.

La movilidad de las circunstancias militares establece unas sustituciones temporales por Claudio Martel entre 1756 y 1760 que actúa como director provisional, entrando ya realmente Juan Calabro Arigorri hasta 1784, militar también. La formación de los ingenieros militares es matemática, desarrollando el enfoque geométrico, matizando la división entre proyecto y obra realizada, significando la dirección de obra. Hay que hacer notar que la redacción del proyecto, va ligada a lo que llamamos programa de necesidades. Está claro que en las fechas en que tienen lugar el funcionamiento de la Real Academia de Matemáticas de Barcelona, en los programas de necesidades está, la defensa de los territorios bajo el dominio hispano. Miguel Sánchez Tazames dirige la Academia de 1784 a 1789, siguiéndole la labor Félix Arriete hasta 1793, terminando la labor Domingo Balestá y Pared hasta 1802, todos de formación militar.

Queda constancia del trabajo realizado como académicos, en la bibliografía y archivos, de la Real Academia de Matemáticas, significando una respuesta a las necesidades planteadas. Se tocan los temas de fortificación, urbanísticos, comunicaciones y estéticos de cada momento, encontrando en términos generales las soluciones más adecuadas. Cabe destacar que tiene lugar en ese periodo la llamada Ilustración o ideas renovadoras del siglo XVIII. Son ejemplos Puerta Tierra en Cádiz, el barrio de la Barceloneta, la fábrica de tabacos en Sevilla, parte de la Ciudadela de Pamplona y el castillo de Montjuic entre otros.

Los ingenieros militares formados en la Academia Militar de Matemáticas de Barcelona formularon proyectos y su ejecución, que hoy llamaríamos en algunos de sus aspectos como obras urbanas. Citamos como ejemplos: San Carlos de la Rápita, Puerto de Salou, Nueva Población de Tarragona, Puerto de Águilas e incluso Nueva Tabarca en Alicante. De la isla de Nueva Tabarca, podemos añadir que se fortificó, incluyendo una población de permanencia dentro de la zona amurallada. La población fue traída de la isla de Tabarca situada entre Argelia y Marruecos, muy maltratada por su situación fronteriza. A los habitantes se les condicionó su permanencia dotándolos de algunos privilegios entre los que se nominaban: el derecho de pesca y la no obligación de incluirlos en operaciones militares fuera de la isla. Privilegios que se han conservado siempre. También recibe el nombre de Isla Plana por sus condiciones geográficas muy especiales. Su proximidad a Santa Pola y Alicante han asegurado su abastecimiento de provisiones y agua, está convertida actualmente en una excelente zona de visita turística.

En los proyectos de reconstrucción del castillo de San Fernando en Figueras aparecen composiciones de Geometría Descriptiva, notándose en ellas una gran influencia de las Escuelas Españolas de Fortificación de los Países Bajos y de la Real y Militar Academia de Matemáticas de Barcelona. Se aprecia la regulación de una normativa que se respeta actualmente, apoyada por estudios de posibles variaciones con proyectos complementarios. Puede fijarse como en 1718 se determina el estudio y realización de nuevos trazados de caminos, en sustitución de los ya trazados, en su mayoría de tipo romano. Cabe destacar que el Rey Carlos III influyó notablemente en la estimulación de nuevos trazados, incluyendo los puentes cuya normalización ha llegado hasta nuestros días, conservando en muchos de ellos la perpendicularidad a la línea de trazado a cubrir. Se proyectaron entre otros: los trazados de Madrid a Barcelona, de Barcelona a Valencia pasando por Tarragona y de Barcelona a Francia pasando por El Pertús, tomando como referencia la Vía Augusta romana.

La seguridad va muy ligada al respeto a la normativa a seguir en la construcción. Esa normativa se va fijando con el tiempo y el estudio de los posibles casos a considerar. El estudio de la Mecánica del Suelo, se desarrolló de una forma muy lenta, llegando hasta nuestros días. Se cita que el murciano Conde de Floridablanca ordenó las construcciones de Puentes y Valdeinfierno en Lorca. La ingeniería intervino en las cimentaciones, pero en 1802 una lluvias muy fuertes destrozaron la presa de Puentes, al fallar la cimentación, construida según las normas al uso. La seguridad no existe totalmente, el riesgo de fracaso existe, pero hay que con-

seguir que sea lo más pequeño posible. La noción de coeficiente de seguridad se va desarrollando, en la reglamentación de las normativas a seguir y de obligado cumplimiento.

Posteriormente se crearía la Escuela de Caminos, Canales y Puertos, exigiendo para su admisión conocimientos de Álgebra, Aritmética, Geometría, Cónicas y Cuádricas, Trigonometría Plana y Esférica y Cálculo Diferencial e Integral. Materias todas ellas trabajadas en la Real Academia de Matemáticas de Barcelona, a los niveles exigidos en la época que tuvo lugar. En 1802 teniendo la dirección Domingo Balestá y Pared, se cierra la Real Academia pasando a Madrid. Iniciándose para las Matemáticas e Ingeniería lo que podemos calificar de Ingeniería Civil Moderna.

Vaya el reconocimiento a la Real Academia de Matemáticas de Barcelona, por su enorme labor realizada en unos tiempos muy difíciles de organización y desarrollo, y sobre todo su contribución al progreso de la Ingeniería.

Agradecimientos

Se manifiesta el agradecimiento a los Ingenieros Industriales Ignacio Arcas Muñoz y Rosina Pérez López por sus valiosas colaboraciones en la redacción del presente trabajo.

Bibliografía

[1] Quesada Gómez, Agustín; De Sequera Martínez, Luis; ….;Zamorano García, Carlos; Anciones de la Torre, Rafael. *Estudio-Historia del Arma de Ingenieros. Tomo I.* Ministerio de Defensa, 1997.

[2] Carrillo de Albornoz y Galbeño, Juan; Ferrandis Poblaciones, José Antonio; Cerón Martínez, Honorio. *Memorial del Arma de Ingenieros, nº 86.* Ministerio de Defensa, 2011.

[3] Bono Martínez, José; Boyero Delgado, Francisco; Muñoz Corbalán, Juan Miguel; Díaz Capmany, Carlos; Rodríguez-Villasante Prieto, Juan Antonio; Carrillo de Albornoz y Galbeño, Juan;…;González Tascón, Ignacio;.... *La Academia de Matemáticas de Barcelona, el legado de los ingenieros militares.* Edita Secretaría General Técnica del Ministerio de Defensa. Novatesa. S. L ; 2004.Impreso por: Novatesa. C/Enric Granados, 94. 08008-Barcelona.

[4] Aldeguer Carrillo, José. Reflexiones sobre la fundación de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. *Boletín de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, nº 97, págs. 58-62.

Reseña de libros

Estructuras Algebraicas: Divisibilidad en anillos conmutativos. *José F. Fernando, José Manuel Gamboa.* Ed. Sanz y Torres. Madrid, 2014, 306 págs. ISBN: 978-84-15550-66-2.

Se ha dado en denominar *Estructuras Algebraicas* la primera asignatura dedicada al álgebra no lineal en los planes de estudio de los Grados en Matemáticas. Es usual que la Teoría de Galois no tenga cabida en esta asignatura, por lo que se suele exponer en la llamada *Ecuaciones Algebraicas*. Bajo estas premisas los autores del libro que nos ocupa han redactado un texto que, junto con el titulado *Estructuras Algebraicas. Teoría elemental de grupos,* que publicaron en 2013, cubre ampliamente los contenidos de la asignatura Estructuras Algebraicas.

Como sucede con muchos textos de carácter elemental, y éste lo es, tiene un doble objetivo. Por un lado introducir al lector en los rudimentos de la noción de divisibilidad en anillos conmutativos y, por otro, preparar el terreno para la exposición en un curso posterior de la teoría de extensiones de cuerpos y la teoría de Galois.

Los cuatro primeros capítulos se dedican al primero de los objetivos anteriores, en los que se introducen los dominios de factorización única, de ideales principales y los dominios euclídeos. La presentación es clásica, aunque no exenta de algunas pinceladas menos habituales: el estudio de algunos subanillos distinguidos del cuerpo **C** de los números complejos, un criterio de Hasse que permite asegurar que todos los ideales de un dominio son principales, y una exposición muy detallada de un ejemplo de dominio de ideales principales que no es dominio euclídeo.

Los restantes tres capítulos se dedican a los anillos de polinomios. En los capítulos 5 y 6 se prueba el Teorema Fundamental del Álgebra, que el anillo de polinomios con coeficientes en un DFU es también un DFU, y varios criterios de irreducibilidad de polinomios; entre ellos uno menos conocido que los restantes: el denominado Criterio de Cohn. En el capítulo 7 se estudian anillos de polinomios en varias variables, poniendo énfasis en los polinomios simétricos, la resultante de dos polinomios, y el discriminante.

El libro contiene, además, algunas nociones y resultados que usualmente suelen ser expuestos en los cursos de Álgebra Conmutativa; en particular los anillos noetherianos y el Teorema de la base de Hilbert, los subconjuntos algebraicos de $\mathbf{C}^n$ y una elegante y sencilla demostración del teorema de los ceros debida al Prof. Enrique Arrondo.

Una parte esencial del libro es la selección de 151 ejercicios, todos ellos resueltos. La mayor parte están elegidos para que quien lo estudia pueda comprobar que ha adquirido los conceptos y las técnicas que se presentan en el texto. La resolución de otros pocos, más difíciles, constituye un reto para los lectores más aventajados.

José Javier Etayo Gordejuela

Problemas de Oposiciones. Matemáticas. Tomo 6. *Braulio de Diego, Francisco Baena, Agustín Llerena, Mª Belén Rodríguez, José Manuel Gamboa, José Mª Lorenzo y Bruno Salgueiro.* Editorial Deimos. Madrid, 152 págs, 2014, ISBN: 978-84-86379-87-2.

Con el título de "Problemas de Oposiciones. Matemáticas. Tomo 6", la Editorial Deimos ha publicado un volumen que recoge las soluciones presentadas por los siete autores a los problemas propuestos en las oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaría celebradas en el año 2014. Completan así el camino iniciado por los profesores Braulio de Diego y Elías Gordillo en el año 1969. Este tomo presenta una diferencia sustancial respecto de los anteriores, todos ellos muy voluminosos y en los que se exponían las soluciones a los problemas propuestos en periodos largos de tiempo.

Creemos que la decisión adoptada en este caso es acertada, pues el volumen es de fácil manejo (apenas ocupa 150 páginas) y su precio es muy asequible. Ambos aspectos animan al lector a consultar las soluciones después de intentar obtenerlas por sí mismo. En el texto se pone especial empeño en presentar varias soluciones de un mismo problema cuando éstas son sustancialmente distintas, y la exposición suele venir acompañada, si el problema así lo requiere, de la fundamentación teórica en la que se apoya.

Como todos los libros que configuran esta colección, éste ha sido escrito con la intención de ayudar al que se presenta a las oposiciones a encontrar las “líneas maestras” en la resolución de problemas de esta naturaleza.

La exposición es clara, y en la misma se emplean numerosas y muy cuidadas figuras que resultan útiles para una mejor comprensión.

José Javier Etayo Gordejuela

Anuncio de la "III Olimpíada Estadística"

Organizada por el Instituto Nacional de Estadística (INE),
la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa (SEIO) y
la Facultad de Estudios Estadísticos (FEE)
de la Universidad Complutense de Madrid

Pueden participar estudiantes de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Ciclos Formativos de grado medio en grupos (entre 1 y 3 estudiantes).

Los participantes han de realizar una serie de pruebas eliminatorias en dos fases. La **primera fase** consta de tres pruebas:

i) la primera es una *Prueba de conocimientos básicos*, consistente en responder un cuestionario de 10 preguntas sobre comprensión de medidas estadísticas, interpretación de gráficos, cálculos elementales de probabilidad, etc;

ii) la segunda es una *Prueba de uso de fuentes de datos estadísticos oficiales*, consistente en responder a un cuestionario de 10 preguntas sobre información estadística, para lo que será necesaria la navegación por la página web del INE y de otros organismos oficiales;

iii) la tercera es una *Prueba de interpretación de informes estadísticos*, consistente en responder a un cuestionario de 10 preguntas sobre los resultados de los trabajos ganadores en la IV Fase Nacional del Concurso Tipo "Incubadora de Sondeos y Experimentos" publicados en la web de la SEIO: `http://www.seio.es`.

La **segunda fase** es una *Prueba de investigación estadística*, consistente en realizar un trabajo de análisis y explotación de un conjunto de datos en formato Excel que será facilitado por el comité organizador. El trabajo realizado será remitido en formato pdf por correo electrónico a la dirección y en el plazo que se indique.

La puntuación de la primera fase computará en el cálculo de la calificación final con una ponderación del 25% y la de la segunda fase con una ponderación del 75%. Tanto los estudiantes del equipo ganador, como su profesor tutor, recibi-

rán como premio una tableta, un lote de publicaciones estadísticas y material promocional.

Para participar en la Olimpiada Estadística es necesario inscribirse del 8 al 29 de enero de 2015, utilizando el formulario habilitado al efecto en la página web: `www.ine.es/olimpiada`.

Los participantes podrán consultar sus dudas a través del correo electrónico: `olimpiada.estad@ucm.es`.

Nota: pedimos disculpas por no haber anunciado esta III Olimpíada Estadística con más antelación (en el nº anterior de nuestro *Boletín*), como consecuencia de no haber tenido conocimiento de la misma hasta el mes de enero de 2015.

Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el Boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, congresos, etc., deben enviarse *en formato electrónico*, del modo especificado a continuación.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex.

En caso de usar Word

El formato de texto debe ser 17cm(alto) x 12.8cm(ancho), exactamente como este archivo. Configuración de página con márgenes: superior 3cm; inferior 9,7cm; izquierdo 4,1cm; derecho 4,1cm; encuadernación 0cm. Todo en el estilo de letra Times New Roman.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos en el estilo de letra usual; debajo el nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en estilo de letra negrita; debajo la referencia de su departamento o institución de trabajo en 11 puntos en el estilo de letra usual; y debajo la dirección de correo electrónico en estilo de letra Courier New en 11 puntos.

A continuación la palabra Abstract, en minúsculas de 12 puntos en estilo de letra negrita y debajo su contenido en inglés el tamaño de letra de texto 11 puntos en estilo itálica o cursiva, estrechado a ambos lados aproximadamente 1 cm.

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto. La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como en estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

En caso de usar Latex

Usar estilo "article" en 11 puntos y, por lo demás, tener en cuenta lo indicado para usuarios de Word. Para la dirección de correo electrónico usar el tipo de letra \tt.

Si se usan paquetes específicos de Latex distintos de los usuales, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

En caso de usar otro procesador (distinto de Word o Latex)

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTex, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato 17cm(alto) x 12.8cm(ancho), exactamente como este archivo, pues habría de ser escaneado. En todo caso, siguiendo en lo posible las instrucciones indicadas para caso de usar Word.

Respecto de las Figuras

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser impresas.

Las figuras deben llevar debajo numeración (Figura 1, Figura 2, …), para referirse a ellas en el texto.

No debe escribirse texto a ninguno de los lados de la figura, ni a la izquierda ni a la derecha (es decir, las figuras no deben intercalarse en el texto).

Reseñas de libros

Las reseñas de libros, se enviarán como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Envío de originales

Se enviará en formato electrónico a nuestra cuenta `puigadam@mat.ucm.es` o bien en un CD o disquete formateado para PC compatible.

De otro modo, también puede enviarse impreso en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, cuya dirección que figura en la página 2 del Boletín. Pero, una vez aceptado para su publicación, se ha de enviar el correspondiente archivo en formato electrónico en la forma anteriormente indicada.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de diez euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56

57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70,71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78

79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98 y 99

El importe puede ser abonado enviando un cheque a nuestra Sede (citada en la página 2) a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o también mediante transferencia a la cuenta corriente de la Sociedad, número

ES13-3025-0006-2414-0000-2948

al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella *la dirección a donde se han de enviar* y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia*.

BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN EN LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

D. .....Teléf.: .....
Dirección: .....
Ciudad: ..... Cod. Postal: .....E-mail: .....
Centro de trabajo: .....

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NÚMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco: .....
Dirección de la Sucursal: .....
para que cargue en mi cuenta: ..... / ..... / ..... / ..... /.
los recibos de las cuotas correspondientes al año 2015 y siguientes.

Fecha: ..... de ..... de 2015

Firma:

La cuota anual fue establecida en la Asamblea 2012 (como ya se anunció en el Boletín nº 91) en 51 euros para socios individuales y 62 para institucionales (que incluyen la cuota de la Federación de Sociedades, que envía a nuestros socios la revista SUMA).
Quienes prefieran abonar la cuota mediante transferencia pueden hacerlo a la c.c. de nuestra Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

CAJA DE INGENIEROS
c/. Carranza, 5 - 28004 Madrid
cc. ES13 3025-0006-24-1400002948

ORDEN DE DOMICILIACIÓN EN LA ENTIDAD BANCARIA

Fecha: ..... BANCO: .....

Sucursal o Agencia: ..... en: .....

Dirección de esta: .....

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta: ..... / ..... / ..... / ..... /.
los recibos de mi cuota anual de la Sociedad "Puig Adam", de profesores de Matemáticas hasta nueva orden. Les saluda atentamente:

Firma:

Nombre y Apellidos: .....

Dirección: .....

Remítanse ambas partes (toda esta página) a nuestra sede:

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matematicas
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)
C/ Rector Royo Villanova, s/n. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.