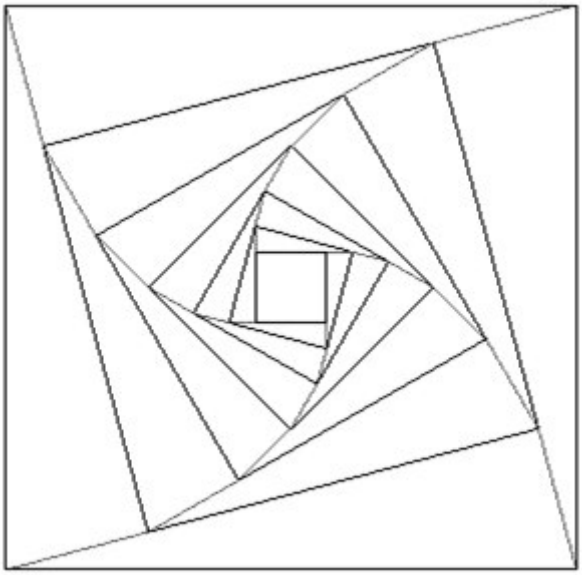
SOCIEDAD «PUIG ADAM»
DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 117
ABRIL DE 2024

Número especial dedicado al Profesor Eugenio Roanes Lozano

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

SEDE: Facultad de Educación. Despacho 3215
Rector Royo Villanova, s/n 28040 – Madrid
Correo electrónico: puigadam@mat.ucm.es

Junta Directiva de la Sociedad "Puig Adam"

Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Vicepresidentes:
Eugenio Roanes Macías
María Gaspar Alonso-Vega
Juan Jesús Donaire Moreno
Vocales:
Enrique Rubiales Camino (Relaciones Institucionales)
Angélica Martínez Zarzuelo (Gestión de publicaciones)
Ricardo Moreno Castillo (Redacción de Publicaciones)
Javier Soler Areta (Actividades y concursos)

Secretario: José María Sordo Juanena
Vicesecretaria: Carmen Escribano Ródenas
Tesorero: José Manuel Gamboa Mutuberría
Bibliotecario: José Luis Galán García

Boletín de la Sociedad "Puig Adam"

ISSN: 1135-0261 Depósito Legal: M-7762-1995
Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis - 28917 Leganés (Madrid).
loureiro@graficasloureiro.es

En la portada aparece la figura adoptada como logotipo de la Sociedad "Puig Adam". Se trata de la figura de portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado "La Matemática y su enseñanza actual".

El Boletín se distribuye gratuitamente a nuestros socios. Las instrucciones para hacerse socio aparecen en la página última del mismo.

Las instrucciones para publicar en el Boletín aparecen en las últimas páginas del mismo. Las propuestas de publicación de artículos, reseñas, etc., deben hacerse a través del correo electrónico de la Sociedad: puigadam@mat.ucm.es

Página web de la Sociedad

`http://www.sociedadpuigadam.es`

Contenido:

Nuestra web contiene varias secciones: *Historia* de la Sociedad, *Boletín* de la Sociedad y *Concursos* de Problemas (el Concurso "Puig Adam" y otros concursos en que colaboran miembros de nuestra Junta Directiva).

Sobre la publicación del Boletín en nuestra web:

Nuestro Boletín se ha publicado ininterrumpidamente desde 1983 en que se fundó nuestra Sociedad. Muchos de los números antiguos están agotados y, con frecuencia se nos pide información sobre artículos publicados en ellos. La incomodidad de copiar reiteradamente dichos artículos por escaneo y de enviarlos nos ha llevado a adoptar la solución indicada a continuación.

Teniendo en cuenta la información solicitada a la Sociedad y, particularmente a algunos de nuestros socios, por parte de profesores y entidades (españolas y también de países sudamericanos) sobre artículos aparecidos en nuestro Boletín, varios de nuestros socios han propuesto incorporar parcialmente el Boletín a nuestra web, al igual que se está haciendo en otras Sociedades Matemáticas que publican revistas.

En respuesta a esta propuesta, se ha acordado que sean colgados en nuestra web en formato pdf los contenidos íntegros de los números de nuestro Boletín con más de cinco años de antigüedad y el índice de contenidos de los números publicados en los cinco últimos años. Ya se ha concluido esa tarea, de modo que los interesados pueden encontrar todos los Boletines en nuestra web.

Cómo acceder a los Boletines

Nuestra pág. web cuelga de la pág. de la Universidad Complutense de Madrid (www.ucm.es) y se puede entrar directamente en nuestra pág., por ejemplo, desde *Google*, tecleando *Sociedad Puig Adam*, seleccionando *Todos los Boletines* y eligiendo *Índices de los Boletines de los últimos cinco años*, o bien *Boletines completos de más de cinco años*.

Comité Editorial del Boletín

Gabriel Aguilera Venegas, Universidad de Málaga
José Antonio Alonso, Universidad de Sevilla
Francisco Baena Muñoz, Profesor de Instituto
Bärbel Barzel, Universität Duisburg-Essen (Alemania)
Michel Beaudin, École de Technologie Supérieure, Montreal (Canadá)
Josef Böhm, Profesor de Instituto (Austria)
Joaquín Borrego, Universidad de Sevilla
Francisco Botana, Universidad de Vigo
Justo Cabezas, Profesor de Instituto y Univ. de Extremadura
Agustín Carrillo de Albornoz Torres, Profesor de Instituto y Univ. de Córdoba
Juan Carlos Cortés López, Universidad Politécnica de Valencia
Juan Jesús Donaire Moreno, Profesor del Instituto "Ramiro de Maeztu", Madrid
Fernando Etayo Gordejuela, Universidad de Cantabria
José Javier Etayo Gordejuela, Universidad Complutense de Madrid
Sergio Falcón, Universidad de las Palmas de Gran Canaria
Jose Luis Galán García, Universidad de Málaga
José Manuel Gamboa, Universidad Complutense de Madrid
José Alberto García Suárez, Profesor de Instituto y Univ. Santiago Compostela
María Gaspar Alonso-Vega, Profesora de Instituto y Univ. Complutense Madrid
Francisco González Redondo, Universidad Complutense de Madrid
Gregorio Hernández Peñalver, Universidad Politécnica de Madrid
Antonio Hernando Esteban, Universidad Politécnica de Madrid
David J. Jeffrey, University of Western Ontario (Canadá)
Nuria Joglar Prieto, Universidad Complutense de Madrid
Wolfram Koepf, Universität Kassel (Alemania)
Zoltán Kovács, Private Pädagogische Hochschule der Diözese Linz (Austria)
Rafael Losada Liste, Instituto GeoGebra de Cantabria
Ricardo Luengo González, Universidad de Extremadura
Edgar Martínez Moro, Universidad de Valladolid
Angélica Martínez Zarzuelo, Universidad Complutense de Madrid

Ricardo Moreno Castillo, Profesor de Instituto y Univ. Complutense Madrid
Gustavo Adolfo Muñoz Fernández, Universidad Complutense de Madrid
Aleksandr Myllari, St. George's University (Grenada)
John Olive, The University of Georgia (USA)
Pavel Pech, University of South Bohemia (República Checa)
Pedro Quaresma, Universidade de Coimbra (Portugal)
Antonio Quesada, Akron University (USA)
Tomás Recio, Universidad de Cantabria
Luis Rico, Universidad de Granada
Eugenio Roanes Macías, Universidad Complutense de Madrid
Ana Romero, Universidad de La Rioja
Enrique Rubiales Camino, Profesor de Instituto y Univ. Complutense Madrid
Julio Rubio, Universidad de La Rioja
José Luis Ruiz Reina, Universidad de Sevilla
Eduardo Sáenz de Cabezón, Universidad de La Rioja
Fernando Sánchez Fernández, Universidad de Extremadura
Tomás Sánchez Giralda, Universidad de Valladolid
Javier Soler Areta, Catedrático de Instituto
José María Sordo Juanena, Universidad Complutense de Madrid
Jon R. Star, Harvard Graduate School of Education (USA)
Stanly Steinberg, University of New Mexico (USA)
Elena Varbanova, Technical University of Sofia (Bulgaria)
Nikolay N. Vassiliev, Russian Academy of Sciences (Rusia)
M. Pilar Vélez, Universidad Nebrija
Michael J. Wester, Cotopaxi and University of New Mexico (USA)

Edición de este número 117

La coordinación de la edición ha estado a cargo de Angélica Martínez Zarzuelo y Eugenio Roanes Macías.

Menciones de los artículos del Boletín

1) Recensiones de los artículos publicados en el Boletín aparecen en "MathEduc"

2) Los abstracts de los artículos están accesibles en el portal Dialnet.

3) El Boletín aparece en las bases de datos de publicaciones periódicas: Google Académico, UlrichsWeb y WorldCat.

Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2024

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas correspondiente al año 2024 para el *sábado día 25 de mayo de 2024*, en los locales de la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, Ciudad Universitaria, a las 11:30 en primera convocatoria y a las 12:00 en segunda, con el siguiente:

ORDEN DEL DIA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.
2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.
3. Informe del Tesorero.
   Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Elección de nuevos cargos directivos.
5. Asuntos de trámite.
6. Ruegos y preguntas.

Nota para los Socios que hayan cambiado de cuenta bancaria

Rogamos encarecidamente a nuestros socios que nos informen cuando cambien de cuenta para la domiciliación de los recibos, y nos indiquen la nueva. Así evitaremos devoluciones de los recibos que suponen el consiguiente gasto para la Sociedad, además de complicar la gestión.

Especial atención deberían prestar quienes tengan la cuenta en *CaixaBank,* facilitándonos la nueva numeración correspondiente al código 2100 que es el de esta entidad, sustituyendo así la antigua numeración de código 2038, de la extinguida *Bankia*

Sesión conjunta del Seminario de Historia de la Matemática y del Seminario del Departamento de Algebra, Geometría y Topología celebrada en la Facultad de CC. Matemáticas de la UCM el 22 de noviembre de 2023 acerca del Prof. Etayo Miqueo

La sesión se realizó en el marco de las actividades, que se citarán a continuación, organizadas por la Biblioteca de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense sobre el Prof. José Javier Etayo Miqueo. En el Acto intervinieron antiguos discípulos y colegas del Prof. Etayo Miqueo, glosando distintos aspectos de su trayectoria como Catedrático de dicha Facultad.

En concreto, y por este orden, José Javier Etayo Gordejuela, Enrique Outerelo Domínguez, Fernando Etayo Gordejuela, José María Montesinos Amilibia y José Manuel Rodríguez Sanjurjo. El acto estuvo moderado por la Profesora María Emilia Alonso García y presidido por el Decano de la Facultad, Prof. Antonio Bru Espino.

En el siguiente enlace se puede encontrar la retransmisión de todo el Acto.

`https://www.youtube.com/watch?v=lNTBht3KF6A`

Exposición bibliográfica sobre el Prof. Etayo Miqueo

La Biblioteca de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid ha organizado dos exposiciones bibliográficas en homenaje al Prof. José Javier Etayo Miqueo. En el enlace

`https://biblioteca.ucm.es/mat/etayo`

se puede encontrar una exposición virtual, en la serie de Biografías de Matemáticos Complutenses, que cuenta con otras dos, dedicadas a los profesores D. Tomás Rodríguez Bachiller y D. Pedro Abelllanas Cebollero.

En ella se recogen los principales datos biográficos del Prof. Etayo, sus publicaciones, tanto libros como artículos, de carácter docente e investigador, las Tesis Doctorales dirigidas y otros datos de interés.

Esta exposición permanente de carácter virtual ha estado acompañada durante los meses de invierno de una temporal, realizada en la Biblioteca de la Facultad, en la que se podían ver varios de los documentos citados, además de su explicación en paneles realizados al efecto.

Nota: El Prof. José Javier Etayo Miqueo fue Presidente de nuestra Sociedad, por lo que nos ha parecido oportuno incluir este resumen de la Sesión del Seminario Conjunto y de la Exposición Bibliográfica en este número 117 de nuestro Boletín.

Mathematics applied to railway traffic and tennis developed by Eugenio with several colleagues

Matemática aplicada al tráfico ferroviario y al tenis desarrollada por Eugenio con varios colegas

Gabriel Aguilera Venegas , José Luis Galán Garcia
gabri@ctima.uma.es , jl_galan@uma.es
Universidad de Málaga
Antonio Hernando Esteban
antonio-hernando@upm.es
Universidad Politécnica de Madrid
Angélica Martínez-Zarzuelo , Eugenio Roanes Macías
angelica.martinez@ucm.es , roanes@ucm.es
Universidad Complutense de Madrid
Fernando Sánchez Fernández , Carmen Solano Macías
fsanchez@unex.es , csolano@unex.es
Universidad de Extremadura

Resumen

Prof. Eugenio Roanes Lozano was the author of a lot of papers on Applied Computational Algebra. Being very fond of model trains and tennis, he also applied computer algebra to railway traffic and also to tennis. Many of these works were developed in collaboration with several mathematical friends. Eugenio died a few months ago and now these friends wish to honor him with a brief summary of these works.

A la memoria de nuestro querido compañero Eugenio Roanes Lozano,
aficionado a matematizar problemas ferroviarios y tenísticos,
que desafortunadamente nos dejó demasiado pronto.

Introducción

Eugenio Roanes Lozano (Eugenio en adelante), desde niño, tuvo dos grandes aficiones: los trenes y el tenis, y las mantuvo durante toda su vida. Así que no es de extrañar, que en su vida profesional de matemático, también aplicara la matemática a cuestiones ferroviarias y tenísticas.

Si veías a Eugenio en la calle con prisa, posiblemente iba o volvía de la pista de tenis. Si lo veías escapándose de una conferencia en un congreso, seguramente iba a ver alguna estación o museo de trenes, próximo al lugar de celebración del congreso. A todos sus congresos matemáticos le acompañaba su raqueta de tenis, porque no podía pasar un día sin jugar.

Eugenio fue autor y/o coautor de más de 170 artículos, gran parte de los cuales versaron sobre Aplicaciones de Álgebra Computacional, y de estas, en mas de 30 el asunto a tratar estuvo relacionado con trenes o tenis.

Y llegó a contagiar a varios de sus amigos matemáticos, que acabaron también interesándose por aplicar la matemática a esas dos aficiones de Eugenio y publicaron con él artículos sobre tráfico ferroviario o tenis.

El objetivo de este artículo es dar a conocer esa matemática aplicada al tráfico ferroviario y al deporte del tenis, desarrollada por Eugenio y algunos de sus amigos matemáticos.

1. Tratando de matematizar el tráfico ferroviario

1.1 La afición a los trenes de Eugenio venía desde niño

Eugenio de niño ya jugaba con un tren de Lego con cambios de vía, y de muchacho ya pasaba muchas horas jugando con un tren de escala HO (Märklin) con cambios de vía y semáforos.

Desde pequeño, cada regalo de premio por estudios o por celebración, pedía que fuera traducido económicamente para poder adquirir algún accesorio para el tren. La afición iba "in crescendo".

De joven iba mucho a la Asociación de Amigos del Ferrocarril, donde se intercambiaban muchas ideas sobre circuitos y telemandos.

Y en una habitación de su casa, podía verse una maqueta de tren donde llegaban a funcionar simultáneamente hasta 13 trenes controlados por telemandos y semáforos.

1.2 Premio Holanda para jóvenes científicos e inventores

Estando Eugenio en segundo curso de la Licenciatura en Matemáticas, a sus 18 años (estudiaba un año adelantado sobre su edad), presentó al Premio Holanda 1981 un trabajo sobre control de tráfico de trenes, titulado *Control de tráfico ferroviario mediante cantones-entorno móviles en líneas de baja intensidad de tráfico.*

La idea era la siguiente: habitualmente, cuando un tren entra en un tramo de vía (*cantón*, en lenguaje ferroviario), se cierran semáforos que impiden que otro tren entre en ese cantón, de modo que los cantones son fijos, ligados al lugar situado en ese tramo de vía. El proyecto de Eugenio consistía en que el cantón fuera determinado por la posición de cada tren mediante una señal que emitía información codificada sobre su posición para ser captada por los trenes próximos, desde un emisor de tamaño parecido a una calculadora manual, que comunicaba su posición codificada a los trenes próximos.

Figura 1: *Acto de Entrega del Premio Holanda en 1981*

La foto de la Figura 1 muestra el acto de entrega del premio a Eugenio por parte del Ministro de Educación y el Embajador de Holanda, entre otros.

Algunas empresas fabricantes de material ferroviario se interesaron por el proyecto, pero finalmente no se fabricó (al parecer por resultar demasiado diferente, respecto de los sistemas usuales, y/o demasiado barato para tener interés comercial).

1.3 Tráfico ferroviario con técnicas de Álgebra Computacional

Eugenio presentó su primera Tesis Doctoral en Algebra (1991), sobre teoremas de ascenso y descenso de Krull-Cohen-Seidemberg al extender ideales desde un anillo de polinomios a una extensión algebraica finita.

Pero su interés por automatizar cálculos algebraicos le llevó a presentar una segunda Tesis Doctoral en Informática (1993). Presidía este tribunal el Prof. Luis Laita, con el que Eugenio ya había cursado una asignatura de doctorado, cuando el Prof. Laita era catedrático de Lógica en la UCM.

A partir de entonces, Eugenio trabajó durante más de 10 años con el Prof. Laita, siendo este catedrático de la UPM.

Un resultado fundamental de esa colaboración consistió en conectar los cálculos propios de las Álgebras de Boole de la Lógica con los propios de las Álgebras de polinomios, como puede verse en [1].

De ese modo se podrían automatizar los cálculos propios de la Lógica mediante sistemas de cómputo algebraico, como Maple, Mathematica, etc.

(Esta conexión se pudo después extender a Lógicas no binarias, como es el caso de la Lógica de Lukasievicz y otras).

Con estas técnicas desarrollaron aplicaciones de Lógica Computacional a otros problemas, han publicando diversos trabajos, varios de los cuales fueron de aplicación al tráfico ferroviario, entre ellos [4, 5, 6, 8, 11].

Eugenio también tuvo mucho contacto con la Fundación de los Ferrocarriles Españoles y, en particular, con su entonces Director, Alberto García Álvarez, con el que publicó varios artículos [7, 9, 12, 13, 15, 16, 18, 21].

Con el tiempo, se fueron incorporando nuevos colegas a ese grupo de matemáticos interesados en aplicaciones ferroviarias, que han publicado otros artículos con Eugenio [10, 14, 17, 19, 20, 22, 26]. Este último, [26], apareció publicado, como artículo póstumo, meses después de su fallecimiento.

Eugenio también fue el Director de la Tesis Doctoral [25], acerca de aplicaciones ferroviarias, leída en la Facultad de Matemáticas de la UCM en el año 2022 (una de las seis tesis leídas ese año en la Facultad).

2. Tratando de matematizar cuestiones de tenis

El tenis era el deporte familiar, y Eugenio se aficionó al tenis desde muy joven, participando en la Liga Juvenil de la Federación Madrileña de Tenis, por el equipo del Canal de Isabel II, hasta los 18 años.

Durante toda su vida continuó participando como *amateur* en campeonatos de tenis, algunos de ellos con premios sustanciosos (de joven, en uno de ellos ganó 30.000 pesetas y en otro un jamón).

En total, llegó a ganar mas de 150 copas, llegando finalmente a participar en un Campeonato Nacional de tenis Superveteranos. (Realmente jugó hasta poco antes de su fallecimiento).

2.1 Algunas aplicaciones de las matemáticas al tenis

No es de extrañar, pues, que Eugenio tratara de sacar partido a su profesión de matemático, en favor de su deporte.

En el artículo [2] se estudia el error producido cuando se juega simples, cuando la red todavía está extendida para jugar dobles, lo que ocurre con mucha frecuencia en los clubes de tenis, realizando los cálculos en DERIVE. Este artículo apareció iniciamente publicado en muestro Boletín [2] y posteriormente el artículo fue extendido y republicado en la revista del *Derive Users Group* [3], que dirigía su amigo austriaco Josef Bohm, también matemático tenista.

Por otra parte, en el artículo [23] se analiza la posición idónea del jugador de tenis que ejecuta el golpe del saque. Uno de los coautores, Fernando Sánchez, es Profesor de Análisis Matemático en la Universidad de Extremadura y compañero del equipo de tenis de Eugenio. Este artículo fue *republicado como capítulo de libro*, como se indica al final de esa misma referencia.

2.2 Una anécdota: ¿era Eugenio realmente Profesor de Tenis?

¡Sí, pero no!. De joven, uno de los amigos del tenis le contó a Eugenio que había tenido una *mili muy cómoda*, como profesor de tenis del Coronel del Regimiento, lo que motivó a Eugenio a hacer el Curso de Monitor de tenis durante el verano en el que acabó la Licenciatura en Matemáticas.

Al terminar Eugenio ese Curso recibió el Certificado de Asistencia y Aptitud, como Entrenador Nacional de Tenis, firmado por Manolo Santana (2

de noviembre de 1984), que conservó siempre. A la siguiente semana, Eugenio se incorporó al Servicio Militar, donde al pasar a destino definitivo, alegó ser matemático y Profesor de Tenis, para aspirar a un cómodo destino. La respuesta del Mando fue: *Nada, nada, tú eres grande y fuerte, así que: ¡A la Guardia de Capitanía del Capitán General!* (en una época de riesgo).

Realmente, solo ejerció como Profesor de Tenis entrenando a su hijo, acompañados de Eugenio padre, que les recogía las pelotas con un tubo de entrenador. Como contrapartida, al final de la sesión de entrenamiento, le invitaban a jugar durante unos 20 minutos, porque realmente la resistencia del abuelo ya no daba para más tiempo (¡He aquí, cómo, con los años, se llega a perder capacidades en el deporte preferido!).

2.3 Homenaje póstumo a Eugenio en su club de tenis

Eugenio jugaba al tenis a diario. Los días lectivos en Madrid en las pistas de la Ciudad Universitaria, y los fines de semana en Badajoz, en el campeonato donde correspondiera participar.

Figura 2: *Homenaje póstumo a Eugenio en su club de tenis en Badajoz*

El domingo 12 de noviembre de 2023 tuvo lugar en su club de tenis de Badajoz un homenaje tenístico en recuerdo de Eugenio, organizado por su amigo J.L. Risquete, Delegado de tenis del Club, con asistencia de numerosos amigos del tenis, en el que, tras los discursos del Presidente de la Federación, del Presidente del Club, del Delegado de Tenis y de varios amigos, se descubrió una estatua dedicada a Eugenio en su *posición de saque* y con la frase que él tanto repetía: *¡Qué bien se está en la pista!*

Y para concluir, se propuso que a los campeonatos de tenis de veteranos del club, denominados *"Björn Borg"* y *"Guillermo Vilas"*, fuera añadido un tercero, denominado *"Eugenio Roanes"* (para los tenistas de menor nivel).

3. A modo de epílogo: algo más que artículos

Eugenio siempre desarrolló su actividad docente en la UCM, durante 33 años en el área de Álgebra y los cuatro últimos años en el área de Didáctica de la Matemática (otro de sus intereses, como alumno que fue de los Profesores Mª Paz Bujanda y Miguel de Guzmán).

Puesto que muchas de sus publicaciones se centraron en el Álgebra Computacional y sus aplicaciones, fue miembro del *Comité Organizador* de varias series de congresos en esa área: *Applications of Computer Algebra (ACA)*, *Artificial Intelligence and Symbolic Computation (AISC)*, *Computer Algebra and Scientific Computing (CASC)*, *International Derive Conference*, *Workshop Computer Algebra Systems and their Applications (CASA)*, *European Seminar on Computing (ESCO)*, etc. siendo *Chairman* y/o miembro del *Comité Científico* en varias de ellas.

Y en cuanto a cuestiones relacionadas con el tenis, cabe señalar que, basándose en la publicación indicada en [23], Fernando Sánchez y Eugenio inscribieron la patente nº 201730051 que lleva por título *Dispositivo de entrenamiento para determinar la posición óptima en el tenis*. Y también que uno de los cuatro Proyectos de Investigación por Artículo 83 en los que participó Eugenio, incluía el problema de la red de tenis descrito en [3].

Eugenio no sólo era incansable trabajador, sino que además implicaba en ello a los que estaban a su alrededor, a varios de sus amigos matemáticos, a su padre, a su esposa, etc. Con esta última, a pesar de ser de otra área de conocimiento muy distinta, publicó, entre otros, el artículo [27].

Vivió aprisa, compatibilizando su vida profesional de profesor, con el tenis, los trenes y la familia. Lo peor es que también se fue aprisa, dejándonos como huérfanos a los más próximos.

Referencias

[1] L.M. Laita, L. de Ledesma, E. Roanes-Lozano, E. Roanes-Macías (1994). An interpretation of the propositional Boolean algebra as a k-algebra: Effective calculus. En J. Calmet, J.A. Campbell (Eds.), *Integrating Symbolic Mathematical Computation and Artificial Intelligence*. AISMC 1994. Lecture Notes in Computer Science, Springer, 255-263.

[2] E. Roanes-Lozano, E. Roanes-Macías (1995). Acerca de la red de tenis (con DERIVE). *Bol. de la Soc. Puig Adam*, 40, 55-60.

[3] E. Roanes-Lozano, E. Roanes-Macías (1996). About the Tennis Net with Derive. *The Bulletin of the DERIVE User Group*, 21, 15-20.

[4] E. Roanes-Lozano, L.M. Laita (1998). An Applicable Topology-Independent Model for Railway Interlocking Systems. *Mathematics and Computers in Simulation*, 45(1-2), 175 -183.

[5] E. Roanes-Lozano, L.M. Laita, E. Roanes-Macías (1998). An Application of an AI Methodology to Railway Interlocking Systems using Computer Algebra. En: A. Pasqual del Pobil, J. Mira, M. Ali (Eds.), *Tasks and Methods in Applied Artificial Intelligence (Springer)*, 687-696.

[6] E. Roanes-Lozano, E. Roanes-Macías, L.M. Laita (2000). Railway interlocking systems and Gröbner bases. *Mathematics and Computers in Simulation*, 51(5), 473-481.

[7] E. Roanes-Lozano, A. Martínez-Zarzuelo, A. García Alvarez, E. Roanes-Macías (2008). Unas reflexiones sobre el reconocimiento de rutas en mapas ferroviarios y la teoría de grafos. *Bol. de la Soc. Puig Adam*, 78, 79-90.

[8] E. Roanes-Lozano, L.M. Laita, E. Roanes-Macías, M.J. Wester, J.L. Ruiz-Lozano, C. Roncero (2009). Evolution of railway network flexibility: The Spanish broad gauge case. *Mathematics and Computers in Simulation*, 79(8), 2317-2332.

[9] A. Hernando, E. Roanes-Lozano, A. García-Alvarez (2010). An accelerated time microscopic simulation of a dedicated freight double-track railway line. *Mathematical and Computer Modelling*, 51(9-10), 1160-1169.

[10] E. Roanes-Lozano, A. Hernando (2011). Estimación de la influencia del carácter inconexo de una red de transporte por ferrocarril. *Bol. de la Soc. Puig Adam*, 87, 69-77.

[11] E. Roanes-Lozano, A. Hernando, J.A. Alonso, L.M. Laita (2011). A logic approach to decision taking in a railway interlocking system using Maple. *Mathematics and computers in simulation*, 82(1), 15-28.

[12] E. Roanes-Lozano, A. Martínez-Zarzuelo, A. García-Alvarez, M.J. Wester, E. Roanes-Macías (2011). Automatically Obtaining Railway Maps from a Set of Historical Events. *Revista de la Real Academia de Ciencias, Serie A*, 105(1), 149-165.

[13] A. Hernando, E. Roanes-Lozano, A. García-Alvarez, L. Mesa, I. González-Franco (2012). Optimal route finding and rolling-stock selection for the spanish railways. *Computing in Science & Engineering*, 14(4), 82-89.

[14] A. Hernando, E. Roanes-Lozano, R. Maestre, J. Tejedor (2012). A logic-algebraic approach to decision taking in a railway interlocking system. *Annals of Mathematics and Artificial intelligence*, 65, 317–328.

[15] E. Roanes-Lozano, A. García-Alvarez, A. Hernando (2012). A geometric approach to the estimation of radial railway network improvement. *Revista de la Real Academia de Ciencias. Serie A*. 106, 35-46.

[16] E. Roanes-Lozano, A. Hernando, A. García-Alvarez, L. Mesa, I. González-Franco (2013). Calculating the exploitation costs of trains in the Spanish railways. *Computing in Science & Engineering*, 15(3), 89-95.

[17] E. Roanes-Lozano, J.L. Galán-García, A. García-Alvarez, L. Mesa (2014). Estimating radial railway network improvement with a CAS. *Journal of computational and applied mathematics*, 270, 294-307.

[18] E. Roanes-Lozano, A. Hernando, A. García-Alvarez, L. Mesa, I. González-Franco (2014). Possibilities of RutasOptiRed package. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 160, 102-111.

[19] E. Roanes-Lozano, R. González (2017). Matrix approach to DC railway electrification verification. *Procedia Computer Science*, 108, 1424-1433.

[20] A. Hernando, R. Maestre, E. Roanes-Lozano (2018). A New Algebraic Approach to Decision Making in a Railway Interlocking System Based on Preprocess. *Mathematical Problems in Engineering*, ID 4982974.

[21] A. Hernando, E. Roanes-Lozano, A. García-Alvarez (2018). A recommender system for train routing: When concatenating two minimum length paths is not the minimum length path. *Applied Mathematics and Computation*, 319, 486-498.

[22] E. Roanes-Lozano, R. González-Martín, J. Montero (2019). An Algebraic Approach to DC Railway Electrification Verification. *Mathematics in Computer Science*, 13(3), 449-457.

[23] E. Roanes-Lozano, F. Casella, F. Sánchez, A. Hernando (2020). Diagnosis in Tennis Hitting Technique. *Algorithms*, 13(5), 106-121. Republicado como capítulo de libro en: V. García-Díaz (Ed.), *Algorithms in Decision Support Systems*, 21-32.

[24] E. Roanes-Lozano, J.L. Galán-García, G. Aguilera-Venegas (2021). A computer approach to overtaking station track layout diagram design using graphs. An alternative track diagram proposal for these stations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 391. ID 113455.

[25] A. Almech (2022). *Unas aplicaciones de la matemática computacional a la Ingeniería del Transporte*. [Tesis doctoral (UCM) dirigida por Eugenio].

[26] A. Hernando, E. Roanes-Lozano, J.L. Galán-García, G. Aguilera-Venegas (2023). Decision making in railway interlocking systems based on calculating the remainder of dividing a polynomial by a set of polynomials. *Electronic Research Archive ERA*, 31(10), 6160–6196.

[27] E. Roanes-Lozano, C. Solano-Macías (2023). Some Reflections About the Success and Bibliographic Impact of the Dynamic Geometry System GeoGebra. *Mathematics in Computer Science*, 17(2), 11.

Mathematical trails with MathCityMap and GeoGebra Discovery: a proposal

Paseos matemáticos con MathCityMap y GeoGebra Discovery: una propuesta

Belén Ariño-Morera
Universidad Rey Juan Carlos
belen.arino@urjc

Angélica Martínez-Zarzuelo
Universidad Complutense de Madrid
angelica.martinez@ucm.es

Claudia Lázaro del Pozo
Universidad de Cantabria
Claudia.lazaro@unican.es

Tomás Recio
Universidad Antonio de Nebrija
trecio@nebrija.es

Abstract

MathCityMap (MCM) is a technological tool, available as an app or as a web portal, facilitating both the creation and the journey through a math trail. GeoGebra Discovery is an experimental version of the dynamic geometry software GeoGebra, featuring extended automatic reasoning tools for geometric statements. In this paper we suggest and illustrate the potential advantages of merging both tools, that is, of using GeoGebra/GeoGebra Discovery to explore posed mathematical queries involving symbolic questions along a MathCityMap math walk that is

being followed through the smartphone MCM app. Thus, for addressing a particular MCM task, we propose starting by taking with the smartphone a photo of the involved object, and then placing the photo on the graphic window of the GeoGebra/GeoGebra Discovery app/web on the same smartphone. In this way, the answer to the MCM posed task could be addressed with the concourse of the automated reasoning features of GeoGebra/GeoGebra Discovery over the captured image. We conclude arguing about the potential advantages of this proposal, and about the need to experiment and evaluate its performance (and consequences, for example, concerning the design of MCM tasks of a certain kind) with different types of MathCityMap users (students, general public, etc.).

A Eugenio Roanes-Lozano, *in memoriam*.
Un gran matemático, un gran maestro.
Y, sobre todo, una gran persona.

1. Dos herramientas tecnológicas

1.1 MathCityMap

MathCityMap (MCM) (https://mathcitymap.eu/en/) es una herramienta tecnológica (app y portal web), desarrollada desde 2012 en la Universidad Goethe de Frankfurt y disponible gratuitamente a través de ordenadores y teléfonos inteligentes. Su objetivo es facilitar y mejorar, tanto en el contexto educativo como en el uso público abierto, la creación y desarrollo de paseos matemáticos al aire libre. Una detallada introducción a esta herramienta puede leerse en [10], mientras que en [13] se desarrolla una descripción más reciente de la misma, en el contexto de la formación de los docentes.

Los artículos [1,7] son dos referencias básicas en español sobre este programa, a cuya difusión y desarrollo ha contribuido en la pasada década la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), como socio de diversos proyectos europeos liderados por la Universidad de Frankfurt.

A través del portal web de *MathCityMap* los usuarios (por ejemplo, profesores) pueden crear sus propias rutas matemáticas, o ver y seguir rutas construidas por otros. El portal ayuda al autor del paseo matemático tanto

automatizando algunos pasos relacionados con la edición de las tareas matemáticas que haya asociado a objetos reales a lo largo del paseo, como también colaborando con el creador del paseo poniendo a su disposición una gran cantidad de actividades y paseos elaborados por otros usuarios, listos para su posible reutilización o, al menos, como fuente de inspiración, para nuevas tareas y rutas matemáticas.

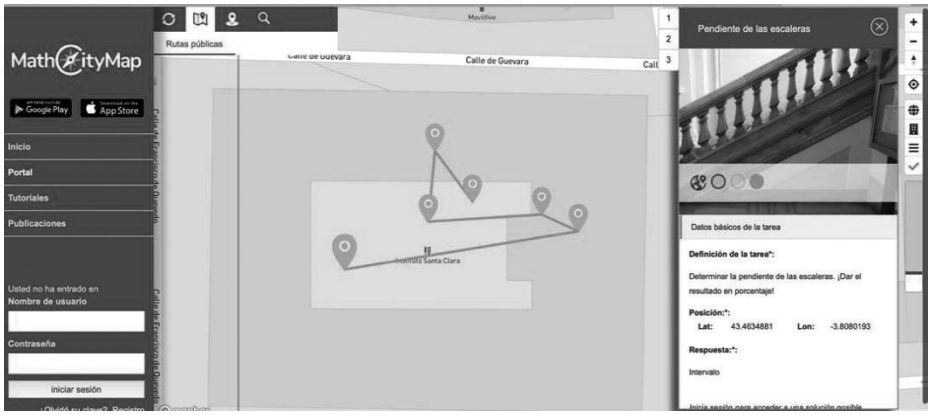


Figura 1: *Un paseo matemático con la web de MathCityMap por el IES Santa Clara, Santander. A la derecha, una de las tareas propuestas.*

A modo de ejemplo, la Figura 1 muestra imágenes de la web de *MathCityMap* relativas a un paseo matemático desarrollado por el Prof. *J.C. Blanco* en el I.E.S Santa Clara, de Santander (véase [3]). Más información sobre la ruta completa puede consultarse en:
https://mathcitymap.eu/es/portal-es/?view=trails&subview=public&id=1065

Por otro lado, en el teléfono móvil, la app *MathCityMa*p guía a los usuarios finales (estudiantes, excursionistas, turistas...) a lo largo de un recorrido matemático ya creado, que pueden elegir entre aquellos cercanos a su ubicación y disponibles en el repositorio de *MathCityMap*. Tras esa elección, los excursionistas tienen dos opciones: una, realizar el recorrido sin conexión a Internet, descargando los datos (recorrido, cuestiones matemáticas que han de resolver en determinados puntos del mismo) del paseo en el smartphone. En segundo lugar, con conexión, la aplicación *MathCityMap* guía al usuario hacia la

ubicación de las diferentes tareas y proporciona sugerencias (si son solicitadas) y comentarios sobre la solución matemática proporcionada por el paseante.

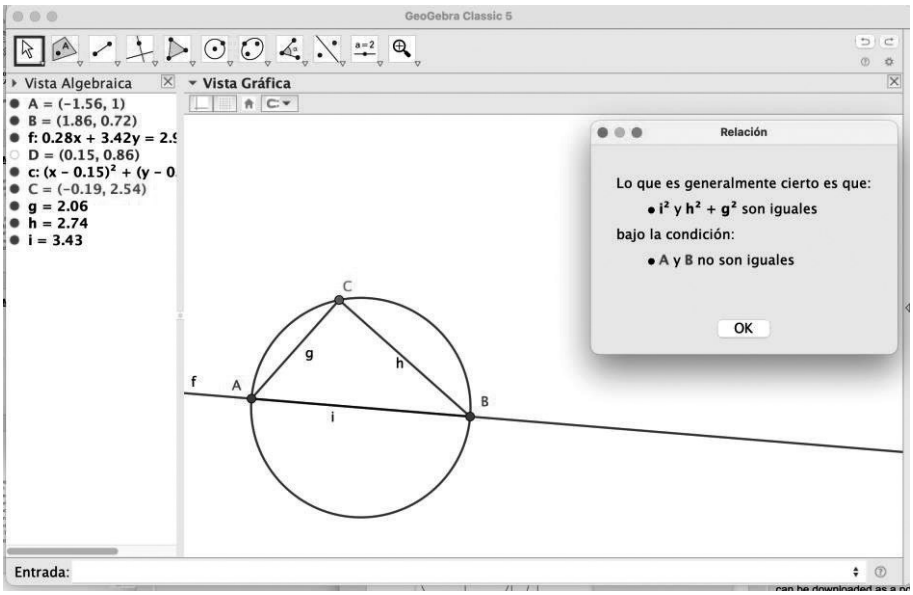
1.2 GeoGebra y GeoGebra Discovery

GeoGebra Discovery (https://kovzol.github.io/geogebra-discovery/) es una versión experimental, libre y gratuita, de GeoGebra (https://www.geogebra.org) que amplía y desarrolla diversas herramientas de ese programa en torno al razonamiento automático en el contexto de la geometría elemental.

Entre otras mejoras, GeoGebra Discovery incluye un conjunto de comandos tales como *Relación, Descubrir, DescubrimientoProgresivo, DemuestraDetalles, Demuestra* o *EcuaciónLugar* (en inglés: *Discover, StepwiseDiscovery, ProveDetails, Prove, LocusEquation, Relation),* que permiten encontrar, automática y rigurosamente, propiedades de los distintos elementos que se van añadiendo a lo largo de una construcción geométrica en GeoGebra; o probar (proporcionando, en su caso, las condiciones de no-degeneración que han de obviarse) la corrección de enunciados introducidos por el usuario; u obtener (algebraica y gráficamente) el lugar geométrico que ha de verificar cierto punto de una construcción para que se cumpla en la misma una propiedad establecida por el usuario, etc.

No siendo el propósito de este artículo el detallar el funcionamiento y las características de estos comandos, en las Figuras 2, 3 y 4 se muestran algunos ejemplos, remitiendo al lector a las referencias [6, 12] para una descripción detallada de estas herramientas. Solo querríamos insistir en que todas las respuestas son el resultado de unos algoritmos simbólicos (no probabilísticos o numéricamente aproximados) que garantizan el rigor matemático de la afirmación.

Y esto es así, por ejemplo, en la verificación de la corrección de una afirmación propuesta por el usuario, como el Teorema de la Altura (Figura 3). O en el establecimiento -es decir, la *invención* del enunciado- por el propio programa informático de una propiedad entre determinados objetos geométricos de una figura propuestos por el usuario (Teorema de Pitágoras, en la Figura 2). O, incluso, cuando se produce esa *invención* pero sin que el usuario haya tenido que indicar siquiera los objetos geométricos involucrados, sólo el hecho de que tales objetos tengan que ver con un punto determinado, véase la Figura 4.



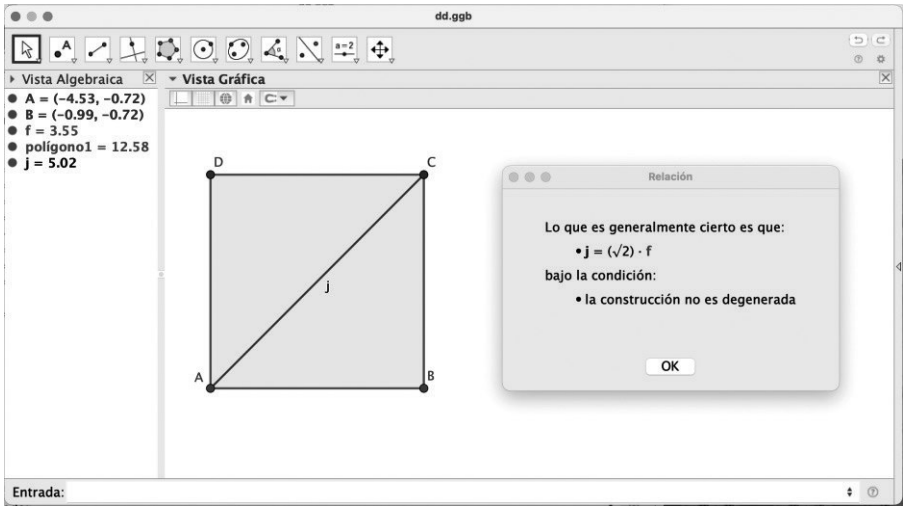


Figura 2: *Arriba, el comando* Relación (i^2, h^2+g^2*) responde aseverando la corrección del teorema de Pitágoras. Abajo*, Relación(j,f) *responde estableciendo la razón entre la diagonal j y el lado f de un cuadrado.*

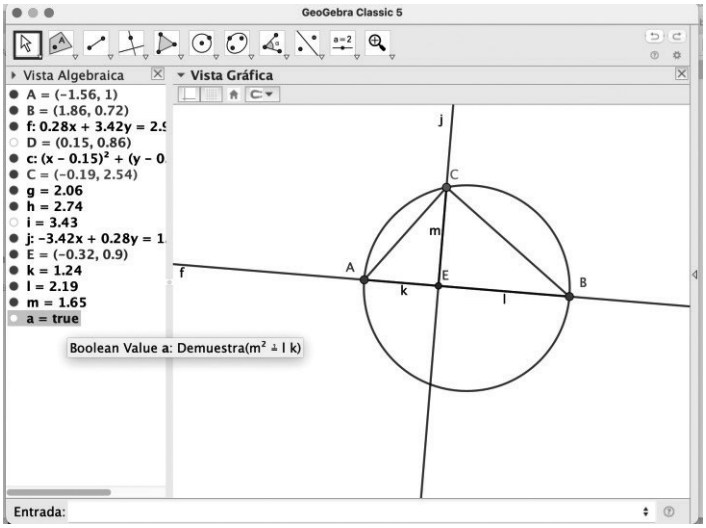


Figura 3: *Confirmación (*Demuestra(m^2=l*k) = true*) del teorema de la altura en un triángulo rectángulo: la altura* m *es media proporcional entre los segmentos* k *y* l *que el pie de la altura forma en la hipotenusa.*

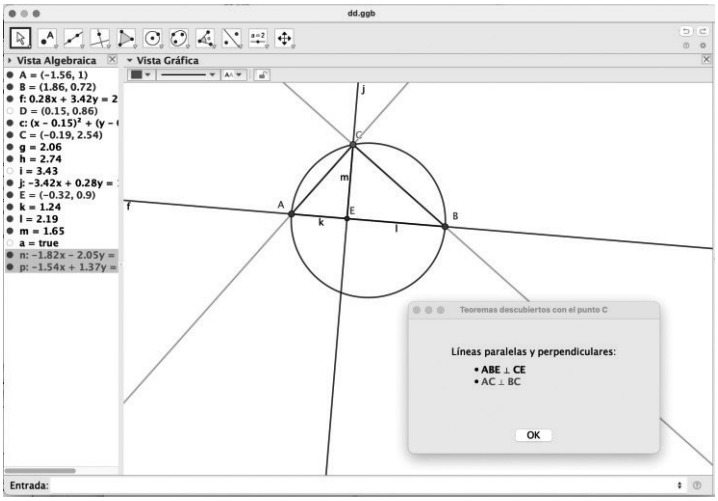


Figura 4: *Descubrimiento automático (comando* Descubre(C)*) del segundo teorema de Tales: si el punto* C *se ubica en una circunferencia que tiene a* AB *como diámetro, entonces las líneas* AC *y* BC *(en verde) son perpendiculares.*

2. Colaboración MathCityMap y GeoGebra

2.1 Antecedentes

Existen numerosos estudios sobre el aprendizaje de las matemáticas con el apoyo de GeoGebra, o de MathCityMap y, más recientemente, sobre la exploración, fuera del contexto escolar, de las matemáticas implicadas en situaciones cotidianas, con la colaboración conjunta de MathCityMap y de ciertas características de GeoGebra. Véanse, en esta línea de propuesta de colaboración, por ejemplo, las publicaciones [2, 4, 5, 9].

Pero, en general, la utilización de GeoGebra en este contexto ha consistido, fundamentalmente, en emplear GeoGebra para responder a cuestiones propuestas acerca de diferentes objetos reales encontrados en los paseos, bien mediante la realización de medidas sobre imágenes de los mismos, o modelando tales objetos con la función de Realidad Aumentada en GeoGebra junto con GeoGebra 3D (véase, como una introducción a esta técnica, el Libro GeoGebra [11]).

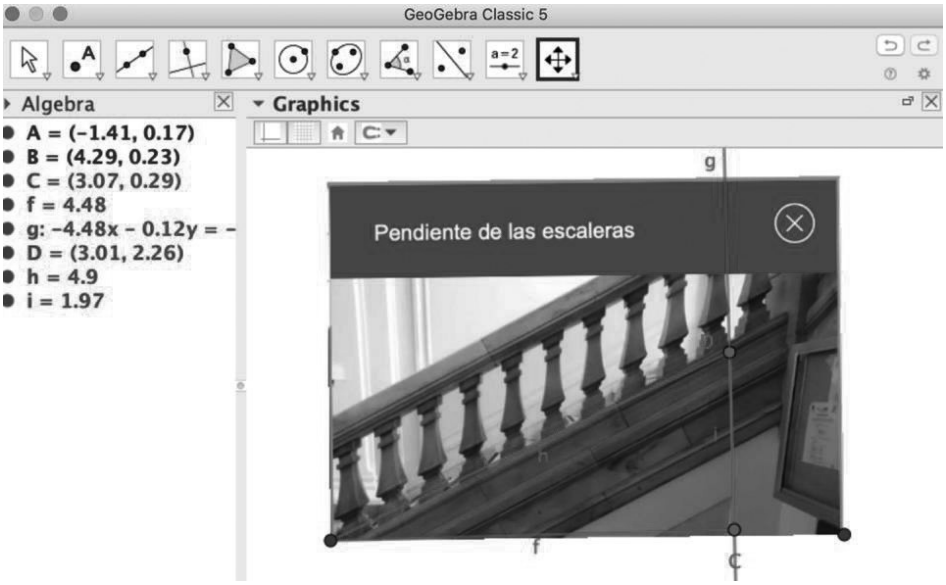


Figura 5: *Resolución de la tarea propuesta por MathCityMap en la Figura 1, usando GeoGebra.*

Como ejemplo de esta colaboración, la Figura 5 (tomada de [5]) muestra la solución de la tarea propuesta (determinar la pendiente de una escalera, dando el resultado en porcentaje) en el paseo de MathCityMap por el IES Santa Clara (Santander) (ver Figura 1), colocando la imagen de la escalera sobre la vista gráfica de GeoGebra y realizando sobre tal imagen unas medidas que proporcionan casi inmediatamente (a través del cociente *i/f*) una estimación de la pendiente buscada. Obviamente, el rol de GeoGebra en este caso no es muy relevante, actuando como una especie de sofisticada cinta métrica y calculadora.

En el caso de la utilización de GeoGebra 3D en combinación con GeoGebra AR (Realidad Aumentada) para abordar tareas matemáticas sobre objetos reales se trata, en la mayoría de los casos, de hacer que el usuario explore diversas opciones hasta encontrar la función o funciones adecuadas que representen unas superficies cuyas gráficas 3D se superpongan de manera precisa a la del cuerpo real que se trata de modelar.

El rol educativo de ambos procesos (medidas, modelización) con ciertas técnicas (fotos, visualización 3D), para el estudio de entes reales por parte de los alumnos, es objeto de un detallado y reciente estudio [8], que muestra las ventajas y diferencias de las diversas aproximaciones, al que remitimos al lector. Pero hemos de advertir que en ese trabajo el uso de fotografías (o impresión 3D) para resolver problemas matemáticos *no* está pensado para combinar, simultáneamente

presencia real ante el objeto,
fotografía del objeto,
exploración con GeoGebra de la fotografía,
evaluación del resultado sobre el objeto real,

es decir, para utilizar *a la vez* realidad e imagen en, por ejemplo, tareas asociadas a paseos matemáticos, sino para utilizarlas como aproximaciones alternativas.

Por el contrario, la colaboración simultánea de realidad e imagen para la modelización y exploración matemática ha sido considerada en trabajos recientes de uno de los coautores de este artículo, tales como [5] o [4] (véase la subsección 2.2 de este último artículo), pero en dos direcciones muy particulares:

limitándose, como ya se ha señalado anteriormente, a realizar aproximaciones numéricas o gráficas al objeto real, usando GeoGebra como instrumento de medida sobre la imagen fotográfica captada *in situ* de dicho objeto, como muestra la Figura 4, o como se describe en las tareas propuestas en [9, 11],

describiendo los distintos pasos que habría que desarrollar en un futuro proyecto de creación automática en GeoGebra de una capa de propiedades matemáticas (numéricas [4], o simbólicas [5]) sobre la imagen de un objeto real recogida *in situ* por la cámara del teléfono móvil, que haya sido transformada, a través de programas de reconocimiento de patrones, en una figura geométrica de GeoGebra. Es decir, percibiendo, a través de la combinación simultánea *móvil* + *GeoGebra*, una Realidad Automáticamente Aumentada.

Remitimos al lector a las citadas referencias para más detalles.

2.2 Paseos matemáticos, GeoGebra y teoremas geométricos

Teniendo en cuenta estos antecedentes, creemos que es preciso enfatizar la novedad de la propuesta que planteamos en el presente artículo. Se trata de recabar del usuario la resolución de una tarea geométrica sobre un objeto real, para lo cual ha de capturar una imagen de dicho objeto, plasmar dicha imagen sobre la vista gráfica de GeoGebra/GeoGebra Discovery y convertir (por el usuario humano, es decir, de manera no automática) la imagen en el resultado (aproximado) de una construcción geométrica (algo similar a lo que muestra la Figura 5), pero de modo que dicha construcción, y su hipotética adecuación al objeto real, requiera al usuario el plantearse y comprobar determinadas conjeturas relativas a propiedades simbólicas (teoremas) de la figura que va a construir.

Por ejemplo, consideremos un paseo matemático que plantee al paseante, ante las ventanas (interiores, del Hospital Universitario Central de Asturias, HUCA) que se muestran en la Figura 6, la búsqueda de la razón matemática que sea la expresión más adecuada de la proporción entre los dos lados del rectángulo que representa cada ventana. Se supone que previamente el caminante ha recibido información específica, por ejemplo, a través de una *pista* asociada a la tarea en MathCityMap, que le remita a unas páginas web donde se detallen varias razones matemáticas populares, tales como la

proporción áurea (https://es.wikipedia.org/wiki/Número_áureo),
plateada (https://es.wikipedia.org/wiki/Número_plateado),
raíz de dos (https://es.wikipedia.org/wiki/Rectángulo_RR), etc.

y a su construcción geométrica (como las que se ilustran, por ejemplo, en https://www.geogebra.org/m/ntdvypse, https://www.geogebra.org/m/KyxMQkcf, o https://www.geogebra.org/m/lPoh8HWb).

Una información que, en el caso de paseos matemáticos impulsados por un profesor o divulgador científico, puede ser recibida por el paseante a través de una clase o una charla previa.

Figura 6: *Ventanas interiores del HUCA. Tarea: describir la razón existente entre los lados de cada rectángulo.*

En cualquier caso, para resolver la tarea propuesta, el paseante podría tomar con su teléfono móvil una fotografía de las ventanas, para a continuación colocar dicha fotografía sobre la vista gráfica de la app de GeoGebra en su teléfono, o en la página web https://autgeo.online de GeoGebra Discovery, iniciando una conjetura sobre dicha tarea y tratando de comprobar su certeza mediante una construcción.

Por ejemplo, como se aprecia en la Figura 7, las ventanas no están en proporción plateada, dado que la construcción de un rectángulo que verifique tal proporción exige que (con la notación de la figura de la izquierda) el círculo *d* que tiene como centro el punto *H* del lado mayor, que es el resultado de girar 90º el vértice *D* del lado menor alrededor del otro vértice *C*, y radio *HD,* corte al lado *CF* en el punto *F*, lo que claramente no ocurre en dicha figura.

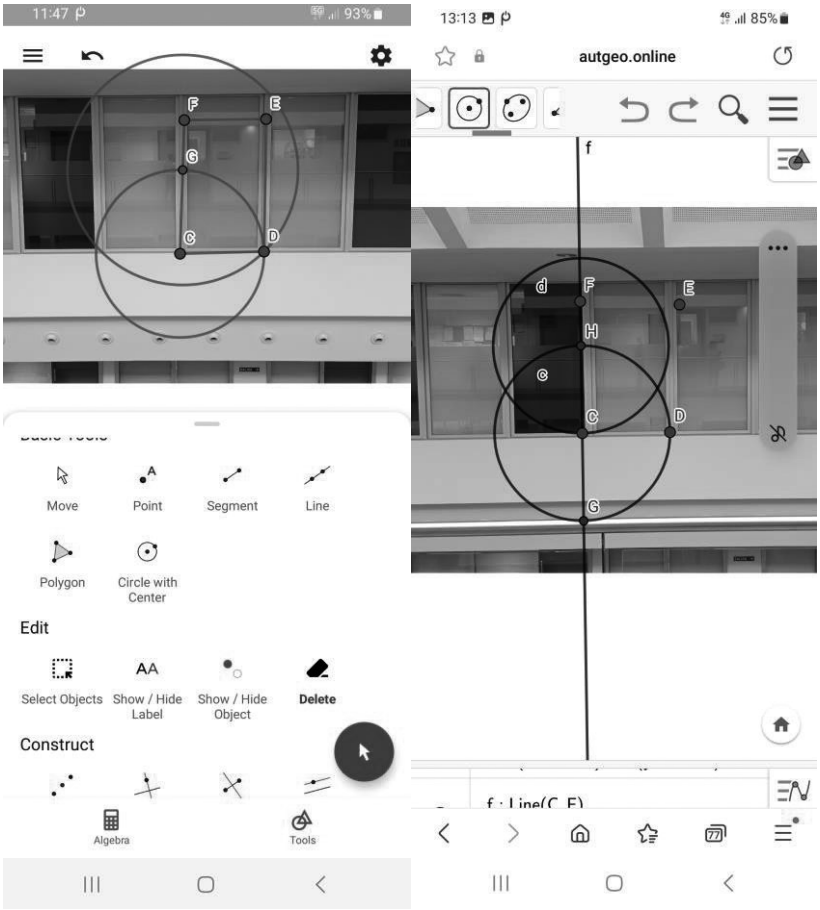


Figura 7: *Las ventanas no están en proporción plateada, como se observa en la imagen de la izquierda (con la app GeoGebra) o de la derecha (con GeoGebra Discovery). Ambas imágenes son capturas de pantalla del mismo teléfono móvil.*

A la vista de este resultado, el usuario puede conjeturar que tal vez la proporción más adecuada sea la áurea, lo que puede comprobar realizando la construcción oportuna, como se aprecia en la Figura 8.

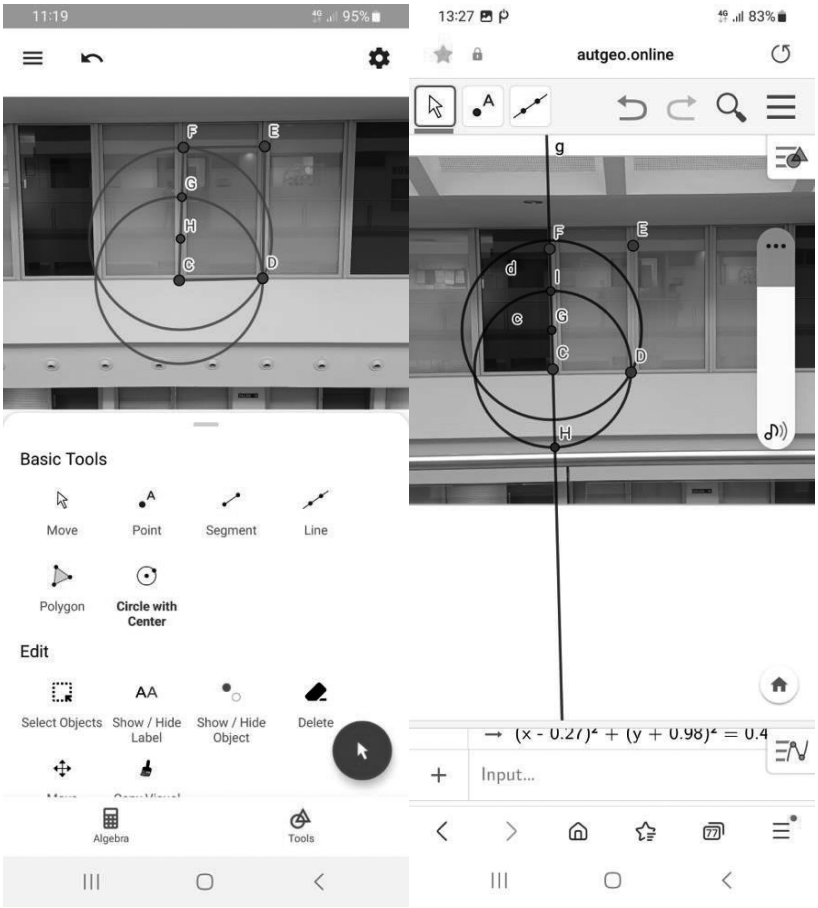


Figura 8: *Las ventanas están en proporción áurea, como se observa en la imagen de la izquierda (con la app GeoGebra) o de la derecha (con GeoGebra Discovery). Ambas imágenes son capturas de pantalla del mismo teléfono móvil.*

Análogamente, la Figura 9 presenta dos imágenes que tratan de verificar que la proporción de una hoja de papel DIN A4 es √2 (ver https://es.wikipedia.org/wiki/Formato_de_papel).

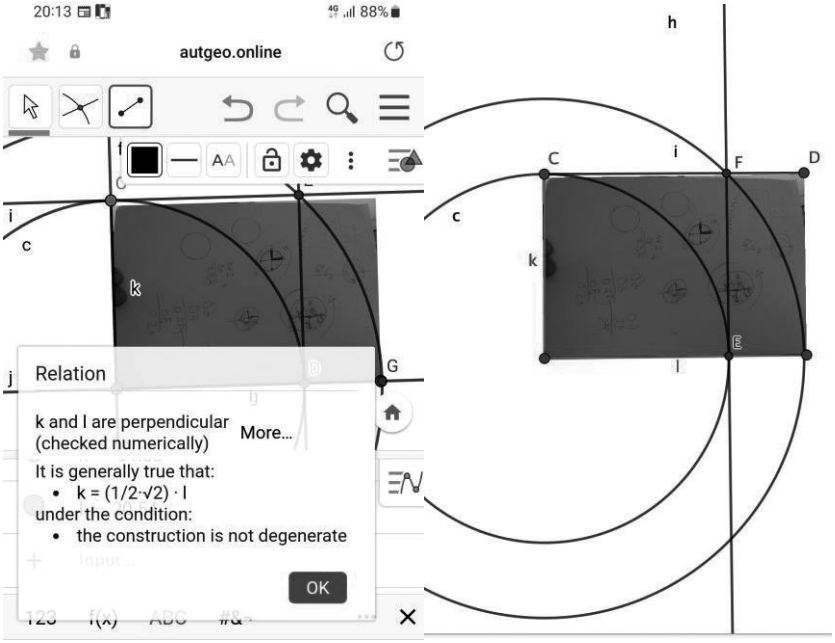


Figura 9: *Verificación de la proporción √2 sobre una hoja de papel DIN A4*.

En la imagen de la derecha se observa la construcción, en la que se verifica que la longitud del lado mayor es igual a la diagonal del cuadrado construido sobre el lado menor. En la imagen de la izquierda (algo densa, por la concurrencia de un mensaje sobre la vista gráfica de GeoGebra Discovery, todo ello en la pantalla del teléfono), GeoGebra Discovery confirma al usuario que la relación entre los dos lados del papel es *k=(1/2*√2)*l,* es decir, *l=2*k/√2=√2*k.*

La posibilidad de consultar a GeoGebra Discovery, desde el móvil, para verificar -con rigor matemático- la corrección de nuestra construcción y conjetura es, de nuevo, uno de los puntos importantes y novedosos de nuestra propuesta.

La Figura 10 proporciona otro ejemplo: tras construir y verificar aproximadamente (dado que los vértices de la pantalla no han sido aquí objeto de construcción como vértices de un rectángulo, sino que son puntos libres ubicados

en los vértices de la pantalla en la fotografía) la conjetura de que la pantalla de dicha aula tiene una proporción √2, se puede realizar una construcción detallada (arriba, a la derecha de la imagen) de un rectángulo verificando la misma propiedad. A continuación, se pregunta a GeoGebra Discovery por la relación existente entre los dos lados de dicho rectángulo y GeoGebra Discovery confirma que se trata de una proporción √2.

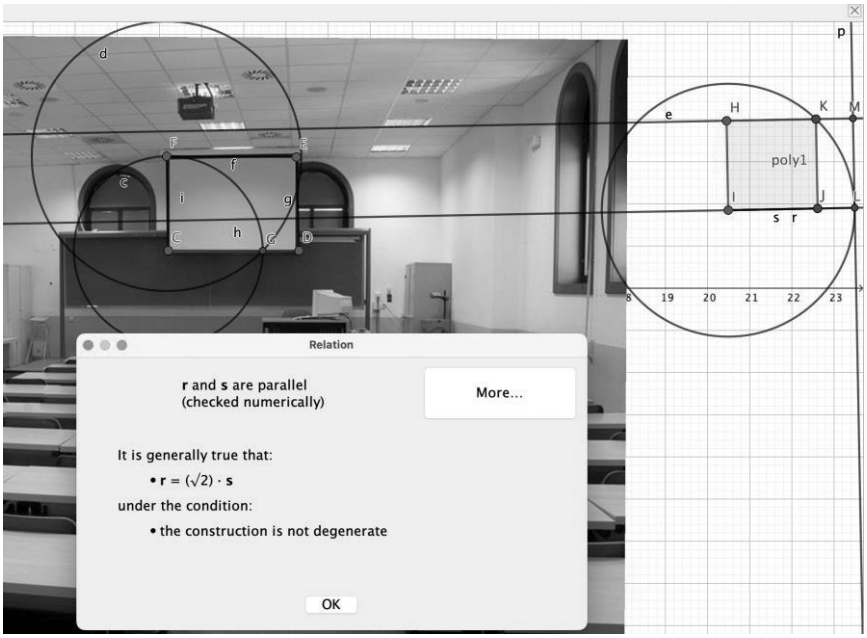


Figura 10: *Pantalla en un aula de la Facultad de Educación-Centro de Formación del Profesorado de la Universidad Complutense de Madrid, en proporción* √2.

Como último ejemplo en este contexto, la Figura 11 muestra la confirmación, por GeoGebra Discovery, de que las ventanas de la fachada principal del I.E.S. Santa Clara de Santander tienen proporciones plateadas (esto es, el segmento *h=CF*, la altura, es *(√2 +1)*i*, donde *i* es el segmento que representa el ancho de dicha ventana).

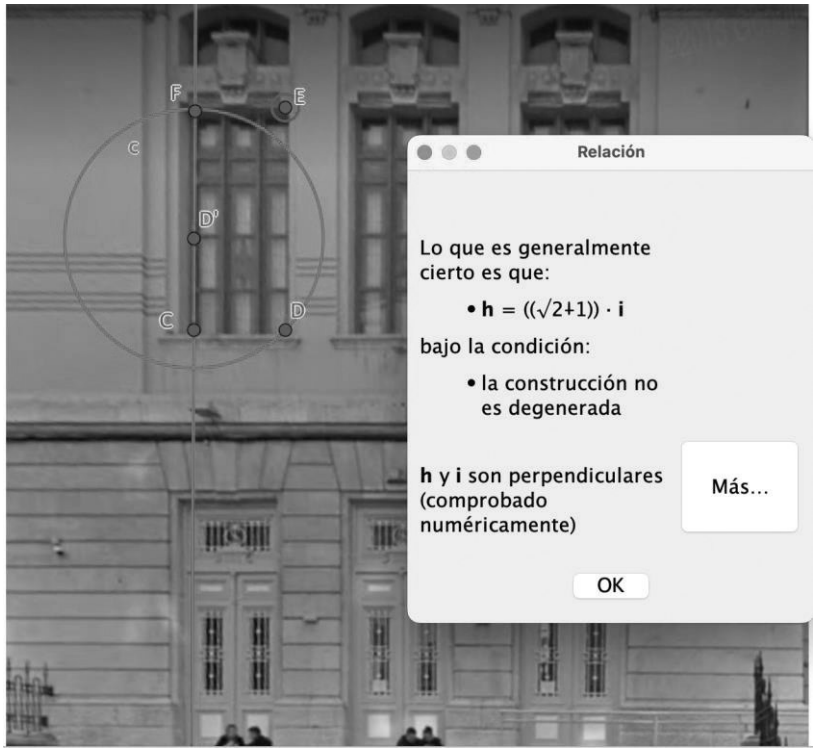


Figura 11: *Fachada principal del I.E.S. Santa Clara (Santander), mostrando ventanas en proporción plateada.*

Naturalmente, este protocolo no se ha de limitar sólo al contexto de la búsqueda de proporciones en objetos del paseo matemático. Como un ejemplo de naturaleza diferente, la Figura 12 plantea la búsqueda de los focos de una elipse que modele cierta mesa de un restaurante. Colocando la fotografía de la misma en GeoGebra, y tras elegir arbitrariamente los extremos *C, D* de una posible elipse y un punto *E* en la misma, ubicado en la mediatriz de *CD,* se construyen los focos *K, L* tomando el círculo de centro *E* y radio el semieje mayor *FD*, e intersecando el círculo con el eje *CD*. La elipse con tales focos y pasando por *E* es obtenida con GeoGebra Discovery (con un comando que requiere los dos focos y un punto de la posible elipse), en rojo, y se aproxima razonablemente a la mesa de la fotografía. Ver Figura 12, arriba.

Figura 12: *Modelización de una mesa elíptica.*

Una vez obtenidos los focos, es posible corroborar (Figura 12, abajo) que la elipse que ha construido GeoGebra Discovery verifica la definición habitual de elipse, hallando con GeoGebra Discovery el lugar geométrico (en verde) de los puntos *M* tales que la suma de las distancias a los focos *K, L* sea igual que el eje mayor *CD*. Lugar geométrico que, como esperado, coincide con la curva obtenida previamente, en rojo.

3. Conclusiones

En la sección precedente hemos ejemplificado nuestra propuesta sobre una forma de colaboración entre MathCityMap y GeoGebra Discovery, usando el teléfono móvil, que siga el siguiente protocolo:

- la captura de una imagen (foto) del objeto real (por ejemplo, una ventana de un edificio),
- una sencilla (cuasi-obvia) modelización matemática del mismo (por ejemplo, un rectángulo), una vez colocada la fotografía sobre la vista gráfica de GeoGebra o GeoGebra Discovery, en el mismo teléfono móvil,
- el planteamiento de una hipotética propiedad geométrica (es decir, de un teorema de geometría elemental, no numérica ni relativa a las coordenadas de los elementos del modelo) sobre dicho modelo (por ejemplo, la proporción entre las medidas del rectángulo modelo),
- la verificación (o refutación) de dicha propiedad realizando una versión simbólica del modelo (por ejemplo, construyendo en GeoGebra un rectángulo con lados en proporción plateada y observando que la imagen del objeto real no se aproxima a dicho rectángulo, mientras que si construimos un rectángulo con proporción áurea resulta muy próximo al objeto real),
- la comprobación de la corrección de la construcción a través de las herramientas de razonamiento automático de GeoGebra/GeoGebra Discovery (como en la Figura 11, donde el comando *Relación* señala que la construcción efectuada verifica la proporción plateada).

Creemos que tal protocolo es suficientemente novedoso en el contexto de los paseos matemáticos y, también, en la aplicación de las herramientas de GeoGebra Discovery, como para merecer su implementación y experimentación en el aula, para lo que recabamos la colaboración de nuestros lectores.

Agradecimientos

El presente artículo es una versión extendida del trabajo “Mathematical trails with MathCityMap and GeoGebra Discovery” presentado por los mismos autores en el congreso International Conference on Math Education and Technology, celebrado

el 2-4 de octubre, 2023, en la Universidad de Aveiro, Portugal (https://icmet.web.ua.pt).

El cuarto autor agradece el apoyo del proyecto PID2020-113192GB-I00 (Visualización Matemática: Fundamentos, Algoritmos y Aplicaciones) del MICINN.

Bibliografía

[1] E. Amaro Parrado, J.C. Blanco Real, C. Lázaro del Pozo & T. Recio (2019). MathCityMap: paseos matemáticos a través de dispositivos móviles. *Actas Congreso Iberoamericano, Formación IB: La educación ante el nuevo entorno digital.* Dic. 2019. ISBN 978-84-948417-1-2. http://formacionib.org/congreso-entorno-digital/actas.html

[2] B. Ariño-Morera, A. Benito, A. Nolla, T. Recio & E. Seoane (2023). Looking at Okuda's artwork through GeoGebra: A Citizen Science experience. *AIMS-Mathematics*, Volume 8, Issue 8, pags. 17433-17447. https://doi.org/10.3934/math.2023890

[3] J.C. Blanco, C. Lázaro & T. Recio (2019). El proyecto MoMaTrE: Paseos matemáticos con móvil por Europa. *Boletín de la Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria,* 19, mayo 2019, pp. 6-8.

[4] F. Botana, Z. Kovács, A. Martínez Sevilla & T. Recio (2019). Automatically Augmented Reality with GeoGebra. En: Theodosia Prodromou (Ed.), *Augmented Reality in Educational Settings*, Brill-Sense. Nov. 2019. https://doi.org/10.1163/9789004408845

[5] F. Botana, Z. Kovács & T. Recio (2020). Automatically Augmented Reality for Outdoor Mathematics. En: Ludwig, M., Jablonski, S., Caldeira A. and Moura A. (Eds.). *Research on Outdoor STEM Education in the digiTal Age. Proceedings of the ROSETA Online Conference in June 2020.* WTM -- Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, Münster 2020. Conference Proceedings in Mathematics Education (6), pages 71-78.
https://doi.org/10.37626/GA9783959871440.0

[6] Z. Kovács, T. Recio & M.P. Vélez (2022). Automated Reasoning Tools with GeoGebra: What are they? What are they good for*?* In Richard, P.R., Vélez, M.P. and Van Vaerenbergh, S. (Eds.). *Mathematics Education in the Age of Artificial*

Intelligence. Series: Mathematics Education in the Digital Era; Springer Nature Switzerland AG, pages 23-44. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_2

[7] S. Jablonski, C. Lázaro del Pozo, M. Ludwig & T. Recio (2020). MathCityMap, paseos matemáticos a través de dispositivos móviles. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas.* No. 87, enero 2020, págs. 47-54. https://www.grao.com/es/producto/mathcitymap-paseos-matematicos-a-traves-de-dispositivos-moviles-un08797755

[8] S. Jablonski (2023). Is it all about the setting? — A comparison of mathematical modelling with real objects and their representation. *Educ. Stud. Math* 113, pages 307–330. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10215-2

[9] Z. Lavicza, B. Haas & Y. Kreis (2020). Discovering everyday mathematical situations outside the classroom with MathCityMap and GeoGebra 3D. In: Ludwig, M., Jablonski, S., Caldeira A. and Moura A. (Eds.). *Research on Outdoor STEM Education in the digiTal Age. Proceedings of the ROSETA Online Conference in June 2020.* WTM -- Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, Münster 2020. Conference Proceedings in Mathematics Education (6), pags. 23-30. https://doi.org/10.37626/GA9783959871440.0

[10] M. Ludwig & J. Jesberg (2015). Using Mobile Technology to Provide Outdoor Modelling Tasks—The MathCityMap-Project. *Procedia—Soc. Behav. Sci.* 191, pages 2776–2781. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.04.517

[11] J.L. Muñoz Casado, Realidad Aumentada con GeoGebra. *Libro GeoGebra* https://www.geogebra.org/m/kcwfax5a

[12] T. Recio, S. Van Vaerenbergh & M.P. Vélez (2020). Herramientas de Razonamiento Automático en GeoGebra: qué son y para qué sirven. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. Año XVI - Número 59, págs. 08-15. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/202

[13] E. Taranto, S. Jablonski, T. Recio, C. Mercat, E. Cunha, C. Lázaro, M. Ludwig & M.F. Mammana (2021). Professional Development in Mathematics Education—Evaluation of a MOOC on Outdoor Mathematics, *Mathematics* 2021, Volume 9, Issue 22, 2975. https://doi.org/10.3390/math9222975

A comparative between evolution algebras and other related algebras

Comparando álgebras de evolución con otras álgebras relacionadas

Juan Núñez Valdés
Lorena Rodríguez González
Belén Carrasco Moya

Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Sevilla

jnvaldes@us.es
lorenarodriguezg00@gmail.com
belenjabugo17@gmail.com

Resumen

Although a particular type of algebras which were introduced by Tian in his doctoral thesis in 2004 is currently known under the name of evolution algebras, there are other types of algebras that generically are also known under this name. These last ones have a greater or lesser relationship with the first mentioned and emerged in years prior to them. This article presents a comparison between all these algebras, emphasizing in each case their most relevant properties. Some novel results of Tian evolution algebras are also shown.

Esta contribución está dedicada a la memoria del profesor español Eugenio Roanes Lozano.

Introducción

Las denominadas *álgebras genéticas* en general fueron introducidas entre los años 1920 y 1940. Fue Serebrowski el primer autor que en 1934 dio una interpretación algebraica del signo $\times$, que indicaba la reprodución sexual, y también aportó una formulación matemática a las leyes de la reproducción de Mendel [23]. De manera independiente, Kostitzin, en 1938, también introdujo una multiplicación simbólica para expresar estas leyes [15].

Sin embargo, fue Etherington quien en 1939 inició el estudio sistemático de la utilización de las álgebras no asociativas para explicar procesos genéticos, al dar una precisa formulación matemática de las leyes de Mendel en términos de estas álgebras [4].

Más tarde, el estudio de varias cuestiones de Biología, Física y Matemáticas, incluyendo aspectos de Topología y procesos estocásticos en Estadística, produjo el desarrollo de la teoría de las denominadas *álgebras genéticas* en general, hasta la aparición, en 2004, de las denominadas *álgebras de evolución*.

George Petiau publicó en 1939 [19] el primer artículo que llevaba las palabras "ecuaciones de evolución" en el título. Ese artículo ocasionó que en ese mismo año esas ecuaciones dieran lugar a la aparición de las llamadas "álgebras genéticas", que inmediatamente fueron tratadas por varios autores. Los dos primeros trabajos que se publicaron sobre estas álgebras fueron un artículo de Etherington en ese año [4] y la tesis doctoral de Shannon, al año siguiente [24].

De alguna manera y a pesar de que hay diferencias entre unas y otras, las álgebras genéticas pueden ser consideradas como las precursoras de las álgebras de evolución, pues fue en esas álgebras genéticas en las que Tian se apoyó para introducir las de evolución casi 70 años más tarde [26, 27].

El objetivo principal de este artículo es mostrar una amplia panorámica de las álgebras genéticas en general, y de las de evolución en particular, y presentar algunos resultados novedosos referidos a los operadores de evolución de estas últimas.

Para ello, la estructura del artículo es la siguiente. Tras esta Introducción, en la sección 1 se comentan las definiciones y resultados más importantes

de los diferentes tipos de álgebras, llamadas en conjunto *álgebras genéticas*, que, como se ha indicado, pueden ser consideradas como las precursoras de las *álgebras de evolución*, cuyo tratamiento ampliamente desarrollado puede verse en la sección 2. La sección 3 está dedicada a mostrar resultados novedosos relacionados con los operadores de evolución de estas últimas álgebras citadas. Finalmente, el artículo se completa con una extensa bibliografía, que puede ser muy útil para todos aquellos investigadores que puedan estar interesados en este tema.

En lo que sigue, únicamente nos referiremos con el nombre de álgebras de evolución a las introducidas por Tian en su tesis doctoral en 2004.

1. Álgebras genéticas y otras álgebras relacionadas con las álgebras de evolución

La lista de las álgebras no asociativas que han atraído el interés de los genetistas es muy extensa, por lo que resulta nuy difícil hacer una relación exhaustiva de todas ellas. Entre las más conocidas pueden ser mencionadas las álgebras mendelianas, las gaméticas, cigóticas, báricas, copulares, las denominadas álgebras "train"(no tienen una traducción propia en español) y las álgebras de Bernstein. A todas ellas, y en general a todas las álgebras que se han utilizado para modelizar las cuestiones de la herencia en Genética, se les ha dado el nombre de *álgebras genéticas*, si bien esta última denominación se le da actualmente y de manera específica solo al tipo de álgebras que se muestran en esta sección con este nombre, que fueron introducidas en el contexto de la teoría de la Genética de Poblaciones.

Sea A un álgebra no asociativa y conmutativa, de dimensión $n+1$, definida sobre un cuerpo K. Sea L una extensión algebraica de K y A_L la extensión de A sobre L. Sea $\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$, con constantes de multiplicación λ_{ijk}, una base de A, definida según:

$$c_i\, c_j = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{ijk}\; c_k, \quad i, j = 0, 1, \ldots n,$$

que tenga las siguientes propiedades:

1. $\lambda_{000} = 1$.

2. $\lambda_{0jk} = 0$, para todos $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, tales que $k < j$.

3. $\lambda_{ijk} = 0$, para todos $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$, tales que $k \leq \text{máx}\,\{i, j\}$.

Bajo estas condiciones, A es llamada *álgebra genética* y $\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$ se dice *base canónica* de ella. Las constantes de multiplicación $\lambda_{0ii} = 0$, para $i = 0, 1, \ldots, n$, son invariantes del álgebra genética y se les denomina las *raíces train* de A [11].

Relacionadas con estas álgebras se encuentran varias otras, que se comentan a continuación.

Un álgebra A se dice *álgebra bárica* si existe un homomorfismo de álgebras no trivial entre A y el cuerpo base K, es decir, un homomorfismo $\omega : A \mapsto K$. Dicho homomorfismo ω se dice un *homomorfismo weight* o simplemente un *weight* (la traducción de la palabra inglesa "weight" a la palabra española "peso" tampoco es usada habitualmente). Toda álgebra genética es bárica, con ω definido como $\omega(c_0) = 1$, $\omega(c_i) = 0$, $i = 1, \ldots n$, y $ker(\omega)$ es un ideal n-dimensional de A.

Sea $T(A)$ el *álgebra de transformación* del álgebra A, es decir, el álgebra generada por las transformaciones a la izquierda $L_\alpha : A \mapsto A$, $x \mapsto \alpha\, x$, $x \in A$, y la identidad. Un álgebra no asociativa y conmutativa A es un álgebra genética si y solo si los coeficientes del polinomio característico de cada $T \in T(A)$ son funciones solo de $\omega(\alpha_1), \ldots, \omega(\alpha_n)$.

El primer autor que definió las álgebras genéticas a partir de esta propiedad fue Schafer [22], aunque actualmente está reconocido que estas tuvieron su origen en varios artículos previos de Etherington entre 1939 y 1941 [5].

Un álgebra bárica A con weight ω se dice *álgebra train* si los coeficientes del polinomio de rango de las potencias principales del elemento x dependen solo de $\omega(x)$, es decir, si este polinomio tiene la forma $x^r + \beta_1\, \omega(x)\, x^{r-1} + \ldots + \beta_{r-1}\, \omega^{x-1}(x)\, x = 0$ (véase [20] para mayor información).

Un álgebra bárica A con weight ω se denomina *álgebra train especial* si $N = ker(\omega)$ es nilpotente y las potencias principales N^i, con $i \in \mathbb{N}$, son

ideales de A. Las álgebras báricas fueron introducidas por Etherington en [4] al tratar distintas cuestiones de genética matemática.

Un álgebra A se dice *dibárica* si existe un homomorfismo entre ella y el álgebra de diferenciación de sexos, donde esta última es un álgebra conmutativa de dimensión 2, con base $\{m, f\}$, tal que $m^2 = f^2 = 0$ y $mf = fm = (f + m)/2$.

Holgate probó que si un álgebra cualquiera A es dibárica, entonces A^2 es un álgebra bárica, y también que las álgebras báricas tienen un ideal de codimensión 1 y las dibáricas uno de codimensión 2 [11, 12].

Un álgebra bárica A con weight ω se denomina *álgebra de Bernstein* si todos sus elementos $x \in A$ satisfacen la identidad $x^2\, x^2 = \omega^2(x)\, x^2$. Estas álgebras fueron introducidas por Bernstein en [1] como una generalización de la ley de Hardy-Weinberg, que establece que la composición genética de una población permanece en equilibrio mientras no actúe la selección natural ni ningún otro factor y no se produzca ninguna mutación, es decir, que la herencia mendeliana, por sí misma, no engendra cambio evolutivo (esta ley recibe su nombre del matemático inglés G. H. Hardy y del médico alemán Wilhelm Weinberg, quienes establecieron este resultado independientemente en 1908).

Toda álgebra de Bernstein posee un elemento idempotente e, que permite una descomposición del álgebra según $A = E \bigoplus U \bigoplus V$, donde $E = e.K$, $U = ImL_{E_{|N}}$ y $V = ker(L_E)$. Los números enteros $p = dim(U)$ y $q = dim(V)$ son invariantes de A y al par $(p + 1, q)$ se le denomina *tipo* del álgebra de Bernstein.

Walcher dio una condición necesaria y suficiente para que un álgebra de Bernstein fuese un álgebra de Jordan [28] (recuérdese que un álgebra de Jordan es un álgebra no asociativa cuyos elementos, aparte de la ley conmutativa, satisfacen la siguiente condición: $(a.b).(a.a) = a.(b.(a.a))$, denominada *identidad de Jordan*, para cada pareja de elementos a, b del álgebra).

Finalmente, es también conveniente indicar que con posterioridad a los trabajos de Jennings en 1917 [14], Serebrovski en 1934 [23] y Glivenkov en 1936 [10], muchos autores han hecho contribuciones muy importantes a la Genética valiéndose para ello de las álgebras no asociativas, razón por la cual

estas álgebras constituyen un adecuado marco de trabajo como herramientas en el estudio de la Genética.

2. Álgebras de evolución

Las *álgebras de evolución* son álgebras generalmente no asociativas, de naturaleza dinámica, que no están definidas por una identidad, a diferencia de lo que ocurre con otras álgebras no asociativas, como pueden ser las de Lie, Malcev, Leibniz o Jordan, por ejemplo.

Su introducción es bastante reciente pues aparecieron por primera vez en la tesis doctoral de Jin Jung Paul Tian, leída en 2004 [25] y dos años más tarde volvieron a ser tratadas en un artículo conjunto de Tian con su director de tesis, Petr Vojtechovsky, en el que se mostraban sus propiedades más notables [27]. En 2008, cuatro años más tarde de su tesis, Tian publicó un libro en el que realizaba un estudio más profundo sobre ellas y completaba su tesis con algunos nuevos resultados [26].

En ese libro, Tian señalaba que estas álgebras tienen muchas conexiones con otros campos y ramas de las Matemáticas diferentes al Álgebra, como pueden ser las teorías de grupos, de nudos o de grafos, los sistemas dinámicos (con especial aplicación a las disciplinas de Biología, Física e Ingeniería), los procesos estocásticos (en Estadística) o las 3-variedades diferenciables (en Geometría). Tian basaba estos asertos en que los generadores de una base de estas álgebras pueden ser considerados indistintamente como los alelos en genética, los estados en un proceso estocástico (en Estadística) o los vértices de un grafo o de una estructura combinatoria (en Matemática Discreta). De hecho, estas álgebras de evolución tienen su fundamento en las reglas de auto-reproducción de la genética no Mendeliana [13].

Como Tian expuso en [26], matemáticos y genetistas utilizaron álgebras no asociativas para estudiar la genética mendeliana. Fue Gregor Johann Mendel quien usó por primera vez símbolos que son algebraicamente sugerentes para expresar sus leyes genéticas [16].

Tian definió un *álgebra de evolución* n-dimensional E sobre un cuerpo K, con respecto a una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ (llamada *base natural*), como

aquella álgebra que verifica $e_i \cdot e_j = 0$, para todo $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$ y $e_i \cdot e_i = \sum_k a_{ik}\, e_k$, para todo i. Los coeficientes $a_{ik} \in K$ son denominados *constantes de estructura* de E y se dice que la matriz $n \times n$ formada por todos ellos, $M = (a_{ij})$, es la matriz de estructura del álgebra de evolución E. Esta matriz codifica de alguna manera las leyes de la herencia como propiedades algebraicas del álgebra.

Existen dos tipos de álgebras de evolución *triviales*: las triviales *cero* y las triviales *no cero*. Si las relaciones de definición del álgebra están dadas por $e_i \cdot e_j = 0$, para $i \neq j$ y $e_i^2 = e_i \cdot e_i = 0$, para todo i, el álgebra de evolución es el álgebra trivial cero, mientras que si $e_i \cdot e_j = 0$, para $i \neq j$ y $e_i^2 = k\, e_i$, entonces el álgebra de evolución es la trivial no cero.

En [26], Tian probó que las álgebras de evolución tienen las siguientes propiedades:

1. En general, son no asociativas.
2. Son álgebras conmutativas y flexibles (recuérdese que un álgebra es flexible si verifica que $x \cdot (y \cdot x) = (x \cdot y) \cdot x$, para todo par de elementos x, y del álgebra).
3. Son no asociativas en potencias en general, es decir la propiedad $(e_i \cdot e_i) \cdot (e_i \cdot e_i) = ((e_i \cdot e_i) \cdot e_i) \cdot e_i$ no siempre se verifica.
4. La suma directa de álgebras de evolución es también un álgebra de evolución. La dimensión del álgebra suma es la suma de las dimensiones de las álgebras sumandos.
5. Tienen un elemento unitario si y solo si no son las álgebras triviales no cero.
6. Son álgebras de Banach, es decir, álgebras definidas sobre el cuerpo real o el complejo o sobre un cuerpo no arquimediano normado y completo, tales que son espacios de Banach.

Un elemento a de un álgebra de evolución E se dice *nil* si existe $n(a) \in \mathbf{N}$ tal que el producto de los n elementos $((a\, a)\, a) \cdots a$ es 0. Un álgebra de evolución E es llamada *nil* si todos sus elementos son nil.

Para un álgebra de evolución E se define $E^1 = E$, y $E^{k+1} = E^k\, E$, para $k \geq 1$. Bajo estas condiciones, se dice que el álgebra de evolución E es *nilpotente por la derecha* si $E^s = 0$, para algún $s \in \mathbf{N}$.

Nótese que si E es un álgebra de evolución nilpotente por la derecha, entonces es inmediato ver que E es una nil álgebra. De hecho, las propiedades de ser nil y nilpotente por la derecha son equivalentes en el caso de estas álgebras y son también, a su vez, equivalentes a que la matriz M de estructura del álgebra sea triangular superior tras una adecuada permutación de los generadores de la base.

Tian introdujo en su libro el concepto de *álgebra graficable*: un álgebra conmutativa y no asociativa se dice *graficable* si admite un conjunto de generadores $V = \{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ cuyos elementos verifican las dos siguientes condiciones:

$$e_i^2 = \sum_{e_k \in V_i} e_k, \quad e_i \cdot e_j = 0,\ i \neq j;\ i, j = 1,\, 2, \ldots, r,$$

donde V_i es un subconjunto de V. Es inmediato ver que toda álgebra graficable es un álgebra de evolución, aunque el recíproco no es cierto en general.

Haciendo ahora un inciso y refiriéndonos a la Teoría de Grafos, Tian mostró en su libro cómo asociarle a un grafo dado un álgebra de evolución. Para ello dio las dos siguientes definiciones [26]:

Definición 2.1. *Sean $G = (V, Ed)$ un grafo, V el conjunto de sus vértices y Ed el conjunto de sus aristas. Se define un álgebra $A(G) = \langle V | R \rangle$ como sigue: tomamos $V = \{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ como el conjunto de generadores del álgebra y*

$$R = \left\{ e_i^2 = \sum_{e_k \in \Gamma(e_i)} e_k; \quad e_i \cdot e_j = 0, \begin{array}{c} i \neq j; \\ 1 \leq i, j \leq r \end{array} \right\}$$

como las relaciones de multiplicación, donde $\Gamma(e_i)$ es el conjunto de vértices adyacentes a e_i.

Es inmediato ver que el álgebra $A(G)$ así definida es un álgebra de evolución. Sin embargo, Tian no mostró en su libro cómo asociarle a un álgebra de evolución un grafo. Esto último fue introducido por Núñez, Silvero y Villar en [17] a partir de la siguiente definición:

Definición 2.2. *Dada un álgebra de evolución finita n-dimensional E, la matriz asociada a E es la matriz $L(E)$ cuyos elementos son, por columnas, los coeficientes respectivos de los generadores de E en las expresiones de las leyes e_j^2, para $1 \leq j \leq n$.*

A partir de esta definición se prueba en [17] que un álgebra de evolución dada E tiene asociado un grafo dirigido ponderado, posiblemente con lazos, $G(E) = (V, Ed)$, en el que V es el conjunto de generadores del álgebra y Ed es el conjunto de las aristas incidentes con e_i para cada índice i. El peso de cada arista es el coeficiente en la respectiva ley de multiplicación del álgebra. Más aún, en el caso particular de las álgebras de evolución graficables, que es el que se estudia en la sección 3, estos pesos son todos iguales a 1, lo cual implica que para estas álgebras en particular, la matriz de adyacencia de su grafo asociado es binaria.

Volviendo ahora a las álgebras de evolución, tratamos ahora algunos aspectos de las denominadas álgebras de evolución *de una población bisexual*, que son álgebras de evolución con un conjunto de hembras, dividido en un número finito de tipos diferentes, y el conjunto de machos, de un solo tipo, que describe la población identificando los coeficientes de herencia con las constantes de estructura del álgebra.

Estas álgebras se definen como las álgebras reales generadas por el conjunto $\{e_1^{(f)}, \ldots, e_n^{(f)}, e_1^{(m)}, \ldots, e_\nu^{(m)}\}$, donde los $e_i^{(f)}$ representan hembras, para $i = 1, 2, \ldots, n$ y los $e_i^{(m)}$ representan machos para $i = 1, 2, \ldots, \nu$, dotados del producto dado por:

$$e_i^{(f)}\, e_k^{(m)} = e_k^{(m)}\, e_i^{(f)} = \frac{1}{2}\,(\sum_{j=1}^{n} P_{ik,j}^{(f)}\; e_j^{(f)} + \sum_{l=1}^{\nu} P_{ik,l}^{(m)}\; e_l^{(m)}),$$

$$e_i^{(f)}\, e_j^{(f)} = 0, \qquad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

$$e_k^{(m)}\, e_l^{(m)} = 0, \qquad k, l \in \{1, 2, \ldots, \nu\},$$

donde $P_{ik,j}^{(f)} \geq 0$ y $\sum_{j=1}^{n} P_{ik,j}^{(f)} = 1$ e igualmente, de manera similar, $P_{ik,l}^{(m)} \geq 0$ y $\sum_{j=1}^{n} P_{ik,l}^{(m)} = 1$. Por tanto, los coeficientes de la herencia $P_{ik,j}$ y $P_{ik,l}$

denotan la probabilidad de que una descendencia femenina sea del tipo j y, respectivamente, que una descendencia masculina sea del tipo l, cuando el par parental es ik, para $i = 1, \ldots, n$ y $k = 1, \ldots, \nu$.

Finalmente, es conveniente indicar que existen algunos tipos de álgebras que no son propiamente álgebras de evolución en el sentido de Tian, pero que están bastante relacionadas con ellas. Dos de estos tipos son los formados por las *álgebras de evolución de una población de pollos* y por las *álgebras de evolución de una población de mosquitos*. Para obtener una información bastante completa sobre ambos tipos de álgebras pueden consultarse [3] y [21], respectivamente.

3. El operador de evolución de un Álgebra de evolución

Referente al operador de evolución de un álgebra de evolución, Tian introdujo en su libro las siguientes definiciones:

Definición 3.1. *Sean E_1 y E_2 dos álgebras de evolución y sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base natural de E_1. Una aplicación lineal $\phi : E_1 \mapsto E_2$ se dice homomorfismo de álgebras de evolución si $\phi(a\,b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$, para todos $a, b \in E_1$, y el conjunto $\{\phi(e_i)\}$ es una base natural de E_2. Más aún, si la aplicación ϕ es biyectiva, entonces se denomina* isomorfismo *de álgebras de evolución.*

Definición 3.2. *Sea E un álgebra de evolución con un conjunto de generadores $\{e_i \mid i \in \Lambda\}$. La aplicación lineal $L : E \mapsto E \mid L(e_i) = e_i^2 = \sum_k a_{ki} e_k$, para todo $i \in \Lambda$ se denomina* operador de evolución *de E.*

En esta sección, a partir de estas dos definiciones, se introduce un operador de evolución de un álgebra de evolución distinto al definido por Tian en su libro, que generaliza a este e igualmente permite dotar a estas álgebras de una norma, siempre que sean graficables. Para ello se hace uso de la función N, ya definida por Tian en ese libro, entre el álgebra E y su cuerpo subyacente K, y de la representación de un álgebra de evolución mediante

su grafo asociado obtenido a partir de la matriz de estructura del álgebra, representación también considerada por Tian en el libro [26].

Recordemos que Tian dio también la siguiente definición para la función N.

Definición 3.3. *Sea E un álgebra de evolución con conjunto generador $\{e_i \mid i \in \Lambda\}$. Se define la función*

$$N : E \mapsto \mathbb{K}, \quad N(x) = \sum_i |a_i|,$$

para todo elemento x de E expresado como $x = \sum_i a_i\, e_i$.

Esa función, denotada por Tian como $N(x) = \|x\|$, permitió a Tian probar que E es un álgebra normada [26].

A partir de esa definición, un nuevo operador de evolución del álgebra de evolución E puede ser definido según:

Definición 3.4. *Sea E un álgebra de evolución con conjunto generador $\{e_i \mid i \in \Lambda\}$. Se define el operador $Op(E)$ según: $Op(E) = \sum_{i\in\Lambda} N(e_i^2)$.*

Es fácil ver que este operador verifica los siguientes resultados:

Lema 3.5. *Sea E un álgebra de evolución cuyas constantes de estructura son no negativas y sea G su grafo asociado (que pudiera ser un multigrafo en ocasiones). Entonces, $Op(E)$ es el doble del tamaño de G.*

Demostración. Ciertamente, como $N(e_i^2)$ representa el número de vértices adyacentes al generador e_i, $N(e_i^2) = \delta(v_i)$, donde $\delta(v_i)$ es el número de aristas incidentes a v_i y v_i es el vértice inducido en el grafo G por e_i, el resultado es una consecuencia inmediata del Primer Teorema Fundamental de la Teoría de Grafos, que establece que la suma de los grados de todos los vértices de un grafo coincide con el doble del tamaño del grafo, es decir, con el doble del número de sus aristas. □

Lema 3.6. *$Op(E) \leq \frac{hn(n+1)}{2}$ es una cota superior de $N(E)$, donde a_{ij} son las constantes de estructura de E y $h = \text{máx}_{ij}\, |a_{ij}|$.*

Demostración. Este resultado es una consecuencia inmediata del concepto de jerarquía de las álgebras de evolución (se entiende finitas), también introducido por Tian en su libro (páginas 46-49) [26]. □

Para probar ahora que el operador $Op(E)$ es una norma damos la siguiente definición:

Definición 3.7. *Sea V un K espacio vectorial y $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ un conjunto de generadores de V. Llamemos $\mathcal{AE}(V)$ al espacio de todas las posibles álgebras de evolución que puedan ser definidas por las leyes $e_i^2 = \sum_k a_{ik}\, e_k$ definidas sobre V.*

En este espacio se definen las siguientes operaciones. Sean $E, \bar{E}$ álgebras de evolución y $\lambda \in K$:

- *$E + \bar{E}$ es el álgebra de evolución definida por las constantes de estructura b_{ik} tales que $b_{ik} = a_{ik} + \bar{a}_{ik}$.*
- *$\lambda\, E$ es el álgebra de evolución definida por las constantes de estructura $b_{ik} = \lambda\, a_{ik}$.*

Nótese que es fácil ver que $\mathcal{AE}(V)$ es un espacio vectorial respecto de ambas operaciones.

Proposición 3.8. *$(\mathcal{AE}(V), +, \cdot)$ es un espacio vectorial normado bajo $Op(\cdot)$.*

Demostración. Sea $E \in \mathcal{AE}(V)$ un álgebra de evolución definida por las leyes $e_i^2 = \sum_k a_{ik}\, e_k$. Entonces,

$$Op(E) = \sum_i N(e_i^2) = \sum_i \sum_k |a_{ik}| = \sum_{i,k} |a_{ik}| \geq 0,$$

y la igualdad se alcanza si y solo si $|a_{ik}| = 0$, para todo i, k.

Consideremos $\lambda \in \mathbb{K}$. Se tiene que

$$Op(\lambda E) = \sum_{i,k} |\lambda a_{ik}| = \sum_{i,k} |\lambda|\, |a_{ik}| = |\lambda| \sum_{i,k} |a_{ik}| = |\lambda|\, Op(E).$$

Sea ahora $\bar{E} \in \mathcal{AE}(V)$ dado por los productos $e_i^2 = \sum_k b_{ik}\, e_k$. Entonces, según las dos expresiones previas, se obtiene:

$$Op(E + \bar{E}) = \sum_{i,k} |a_{ik} + b_{ik}| \leq \sum_{i,k} |a_{ik}| + \sum_{i,k} |b_{ik}| = Op(E) + Op(\bar{E}),$$

lo cual completa la demostración. □

Una consecuencia inmediata de esta propiedad es el siguiente resultado:

Teorema 3.9. *Si V es un espacio vectorial real de dimensión finita, entonces $\mathcal{AE}(V)$ es de dimensión finita y, por tanto, $(\mathcal{AE}(V), Op(\cdot))$ es un espacio de Banach.*

Resumen

El estudio de las álgebras de evolución se ha intensificado de manera notable en los últimos años debido a la amplia utilización de estas álgebras como herramientas en el tratamiento de diferentes ramas de las Matemáticas e incluso de otras disciplinas, siendo muy numerosos los investigadores que las consideran y publican actualmente sobre ellas. En particular, el autor varón de este artículo, en aportaciones conjuntas con otros colaboradores, ha tratado la equivalencia de estas álgebras con las estructuras combinatorias, en particular con grafos y digrafos, en [17] y [18] y con las cadenas de Markov. También ha considerado aplicaciones de las mismas a la Biología, en [6], [7] y [8] o a la obtención de nuevas propiedades [9] o de nuevos aspectos algebraicos, como la jerarquía de las mismas, por ejemplo [2].

En este artículo se ha realizado un estudio comparativo entre las diferentes álgebras en un principio denominadas *genéticas*, que pueden considerarse precursoras de las de evolución y estas últimas, mencionándose los principales resultados, los aspectos más notables y las características de cada una de ellas y también, como cuestión más novedosa, se ha introducido un nuevo operador de evolución de las álgebras de evolución que permite ratificar el hecho de que estas álgebras son también álgebras de Banach, uniendo así conceptos de Análisis Matemático con los puramente algebraicos, dado que a partir de ese operador se puede construir también una nueva norma sobre estas álgebras.

Nota Final

El aprecio mutuo que se estableció entre el autor varón de este artículo (JNV), quien ya conocía de antes a Eugenio Roanes (padre), y Eugenio (hijo) empezó a gestarse a consecuencia de las tesis doctorales de cada uno de ellos, que tuvieron lugar en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla, en junio de 1991, ambas de forma consecutiva, en el mismo Salón de Grados, con el mismo tribunal e incluso siendo seguidas de una celebración conjunta. A raíz de esa fecha, este autor y Eugenio (hijo) coincidieron posteriormente en varios congresos, tanto de Geometría y Álgebra Numérica o Lineal como de Educación Matemática (pasiones igualmente comunes de ambos) con lo que la amistad entre ellos siguió consolidándose. Estas son las razones por las que dicho autor desea rendir tributo a la memoria de Eugenio (hijo), con este texto sobre un tema relacionado con la investigación algebraica de este. Vaya desde aquí el recuerdo y admiración de dicho autor por Eugenio (hijo), en atención a sus excelentes cualidades, tanto personales como profesionales.

Referencias

[1] S. Bernstein (1923), Principe de stationarité et gènèralisation de la loi de Mendel, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **177**, 581-584.

[2] F.J. Cruz, A. del Valle, J. Núñez Valdés, M. Pena (2021), The concept of hierarchy of algebras and graphs, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **67**, 233-255.

[3] A.S. Dzhumadil'daev, B.A. Omirov, U.A.Rozikov (2014), On a class of evolution algebras of "chicken"population, *Internat. J. Math.*, **25**:8, 1450073, 19 pp.

[4] I.M.H. Etherington (1939), Genetic algebras, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **59**, 242-258.

[5] I.M.H. Etherington (1941), Non-associative algebra and the symbolism of genetics, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh B*, **61**, 24-42.

[6] O.J. Falcón, R. M. Falcón, Juan Núñez (2017), Classification of asexual diploid organisms by means of strongly isotopic evolution algebras defined over any field, *Journal of Algebra*, **472**, 573-593.

[7] O.J. Falcón, R. M. Falcón, Juan Núñez (2018), Algebraic computation of genetic patterns related to three-dimensional evolution algebras, *Applied Mathematics and Computation*, **319**, 510-517.

[8] O.J. Falcón, R. M. Falcón, Juan Núñez (2019), An application of totalcoloured graphs to describe mutations in non-Mendelian Genetics, *Special issue Graph-Theoretic Problems in Non-Mendelian Genetics of Mathematics*, **7**:11, 1-11.

[9] D. Fernández-Ternero, V.M: Gómez-Sousa and J. Núñez Valdés (2022), The evolution operator of evolution algebras, *Linear and Multilinear Algebra*, **70**:19, 4377-4396.

[10] V. Glivenkov (1936), Algebra Mendelienne, *Comptes rendus de Acad. des Sci. de URSS*, **4**:13, 385-386.

[11] P. Holgate (1972), Characterizations of genetic algebras, *J. London Math. Soc.* **2**:6, 169-174.

[12] P. Holgate (1987), The interpretation of derivations in genetic algebras, *Linear Algebra Appl.* **85**, 75-79.

[13] D. Isaacson, R. Madsen (1976), *Markov Chains Theory and Applications*, John Wiley and Sons, New York.

[14] H.S. Jennings, H.S. (1917), Observed changes in hereditary characters in relation to evolution, *Journal of the Washington Academy of Sciences* **7**:10, 281-301.

[15] V.A. Kostitzin (1938), Sur les coefficients mendeliens d'heredite, *Comptes rendus de Acad. des Sci. de URSS*, **206**, 883-885.

[16] G. Mendel (1959), *Experiments in plant-hybridization*, Classic Papers in Genetics, Prentice-Hall Inc.

[17] J. Núñez Valdés, M. Silvero Casanova, M.T. Villar Liñán (2014), Mathematical tools for the future: Graph Theory and graphicable algebras, *Applied Mathematics and Computation*, **219**:11, 6113-6125.

[18] J. Núñez Valdés, M.L. Rodríguez-Arévalo, M.T. Villar Liñán (2014), Certain particular families of graphicable algebras, *Applied Mathematics and Computation*, **246**:1, 416-425.

[19] G. Petiau (1939), Sur la reprèsentation de l'équation d'ondes et l'évolution des grandeurs èlectromagnètiques dans la thèorie du photon (in French), *J. Phys. Radium*, **10**, 413-419.

[20] C.G. Reyes (2000), *Train Algebras: representaciones e identidades*, Tesis Doctoral, Universidad de Chile.

[21] U.A. Rozikov, M.V. Velasco (2019), A discrete-time dynamical system and an evolution algebra of mosquito population, *J. Math. Biol.* **78**:4, 1225-1244.

[22] R.D. Schafer (1949), Structure of genetic algebras, *Amer. J. Math.*, **71**, 121-135.

[23] A. Serebrowsky (1934), On the properties of the Mendelian equations (in Russian), *Doklady ANSSSR*, **2**, 33-36.

[24] C.E. Shannon (1940), *Álgebra for theoretical genetics*, Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 26 pp.

[25] J.P. Tian (2004), *Evolution algebra theory*, Ph.D. Thesis, University of California, Riverside. 145 pp.

[26] J.P. Tian (2008), Evolution algebras and their Applications, *Lecture Notes in Mathematics*, **1921**, Springer-Verlag, Berlín.

[27] J. P. Tian, P. Vojtechovsky (2006), Mathematical concepts of evolution algebras in non-mendelian genetics, *Quasigroups Related Systems*, **14**:1, 111-122.

[28] S. Walcher (1988), Bernstein algebras which are Jordan algebras, *Arch. Math.*, **50**, 218-222.

Could a theorem be acyclic?
¿Puede un teorema ser acíclico?

Jesús Aransay
Laureano Lambán
Julio Rubio
Departamento de Matemáticas y Computación
Universidad de La Rioja
jesus-maria.aransay@unirioja.es
lalamban@unirioja.es
julio.rubio@unirioja.es

Abstract

In this short paper, an unexpected link between logic and algebraic topology is outlined. We do not claim any contribution on the results presented (they are well-known, indeed), but we narrate them under an original point of view, by asking if a theorem could be acyclic.

Dedicated to our friend and colleague Eugenio.

Introduction

Eugenio's research interests were large and in particular they covered computational logic, computer algebra and the relations between both. In this paper, an unexpected link between propositional logic and homology is presented. Namely, we explain how the fast evaluation of Boolean functions is related to the algebraic and topological property of being acyclic, through the notion of *evasiveness*. Furthermore, another field where Eugenio contributed

was that of automated theorem proving. Even if this topic is not dealt with in this short paper, we have formalized in the Isabelle/HOL proof assistant some fragments related to these notions (see [1]). The results presented in this paper are well-known and can be found, for example, in [3].

We want to believe that Eugenio would have enjoyed this paper.

This work has been partially supported by projects PID2020-115225RB-I00 and PID2020-116641GB-I00 financed by MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

1 Does the title make sense?

In principle, the title of our paper does not seem to make much sense, because:

- Theorems are stated and proved by mathematicians.
- Being acyclic is a property of certain mathematical objects (namely, *topological spaces*).

We will show in the next sections how logic can build a bridge between these two apparently distant worlds.

2 Cycles and simplicial complexes

In its full generality the notion of being acyclic needs to be defined by using homological algebra. For the purposes of this paper, it will be enough to give a combinatorial insight. For instance, in the case of graphs, being acyclic is equivalent to be connected and having no closed paths (a closed path is called, coherently, a *cycle*). That is to say, acyclic graphs are exactly trees (see Figure 1). On the contrary, if a graph contains a closed path (see Figure 2) is not acyclic.

Graphs can be considered one-dimensional *simplicial complexes*. Simplicial complexes are one of the combinatorial models for topological spaces. Given a set V of vertices, each subset of $\mathcal{P}(V)$ is called a *hypergraph* over V (here $\mathcal{P}(V)$ is the power set of V). Then, a simplicial set is a hypergraph closed by the operation of taking subsets. In Figure 3, we present a graphical representation of the simplicial complex with the following set of *simplexes* (a simplex is an element of a simplicial complex):

$\{\{\},$
$\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\},\{g\}$ # 0-simplexes (There are n=7 vertices.)
$\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{c,e\},\{e,f\},\{e,g\},\{f,g\}$ # 1-simplexes
$\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{d,e,f\}$ # 2-simplexes
$\}$

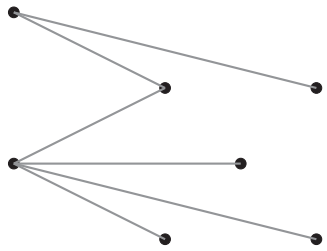


Figure 1: *A tree.*

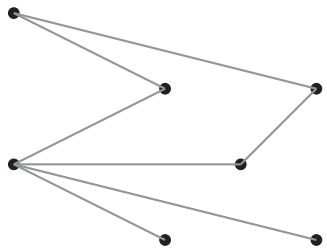


Figure 2: *A graph with a cycle.*

It is a *subcomplex* of the *standard simplex* of dimension 6, usually denoted as Δ^6. In general, the standard simplex of dimension n is $\Delta^n := \mathcal{P}(V)$, where V is a set with $n+1$ elements.

The notion of being acyclic can be extended to simplicial complexes: a simplicial complex is acyclic if it has no "hole" of any dimension. The simplicial complex of Figure 3 is not acyclic because there is a (1-dimensional) cycle given by the vertices a, b and d.

Enough for the moment on acyclic issues; let us come back to theorems.

3 Meta-mathematics: theorems as mathematical objects

Meta-mathematics is the part of Logic that studies the formal systems for reasoning. In this paper our focus is on Propositional Logic. For instance, one of the De Morgan Laws can be expressed as: $(a \vee b) \leftrightarrow (\neg((\neg a) \wedge (\neg b)))$. Thanks to the theorems

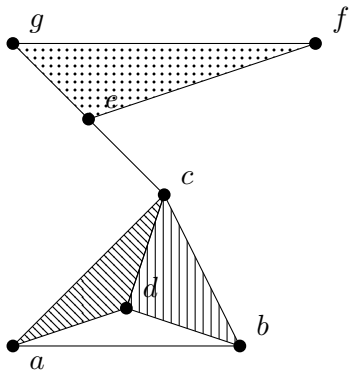


Figure 3: *A simplicial complex.*

of completeness and soundness in Propositional Logic, we know that theorems are exactly tautologies. For example, the formula $(a \vee b) \leftrightarrow (\neg((\neg a) \wedge (\neg b)))$ is a theorem, because one can directly write down its truth table and then check that its values are always true. The important point here is that a theorem as $(a \vee b) \leftrightarrow (\neg((\neg a) \wedge (\neg b)))$ can also be seen as a mathematical object: for instance, like a tree with symbols in its nodes.

We focus on simplicial complexes again, to propose the reader a game.

4 A game

The main ingredients of the game are as follows.

- **H**illary is one of the players (she is the **h***ider*).
- **S**onya is the second player (she is the **s***eeker*).
- **S** asks questions to **H** and **H** answers them.
- Each time a question is asked, **S** gives an euro to **H**.
- **H** and **S** share the knowledge of a simplicial complex $\mathcal{K}$ with $n+1$ vertices (thus, it is a subcomplex of Δ^n).
- **H** thinks of (**h**ides) a simplex in Δ^n.
- **S** guesses (**s**eeks) whether the simplex **H** is thinking of belongs or does not belong to $\mathcal{K}$.

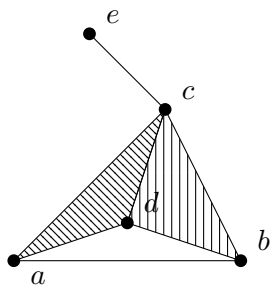


Figure 4: *A smaller simplicial complex to play with.*

- The unique kind of questions that **S** can ask is: does the vertex v belong to the simplex you are thinking of?
- (Caution: **S** must not guess which the simplex hidden by **H** is; she must only guess whether it belongs to $\mathcal{K}$.)
- (Caution: **H** can change which simplex she is thinking of, according to the different questions that **S** asks; in other words, she can choose a different simplex, which satisfies the already defined constraints, but increasing the difficulty for **S**.)
- The goal of **S** is to pay as few euros as possible, and **H**'s goal is to win as many euros as possible ...

You can play the game with the simplicial complex of Figure 4, where the simplexes are:
$\{\{\},$
$\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},$ # 0-simplexes, n=5 vertices
$\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{c,e\},$ # 1-simplexes
$\{a,c,d\},\{b,c,d\}$ # 2-simplexes
$\}$
It is a subcomplex of the standard simplex of dimension 4: Δ^4.

But, meanwhile, let us consider two extreme cases that, in some sense, describe the essence of the game.

4.1 Two extreme cases

Let us consider the simplicial complex displayed in Figure 5.

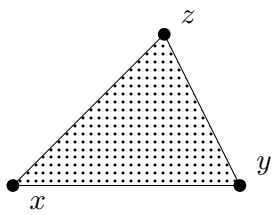


Figure 5: *An acyclic simplicial complex.*

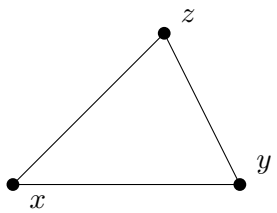


Figure 6: *A simplicial complex with a cycle.*

- It is the standard 2-simplex Δ^2.
- Every simplex belongs to it!
- Sonya does not need to ask for any vertex, because she knows the answer will be: **yes**, it belongs to the complex.

We turn now our attention to the simplicial complex in Figure 6, an empty triangle.

- Hillary thinks of the full triangle: $\{x, y, z\}$ which is the unique simplex in Δ^2 not belonging to the complex in Figure 6.
- To any question posed by Sonya, Hillary answers **yes**, so Sonya is forced to ask for the three vertices before being able to decide the simplex does not belong to the simplicial complex.
- If Hillary chooses "wrongly" and answered **no** to one of the vertices, Sonya is able to decide from this unique question.
- Let us note that, in this extreme case, Hillary does not need to change dynamically the simplex depending on Sonya's strategy.

4.2 Evasive simplicial complexes

A simplicial complex $\mathcal{K}$ is called *evasive* if Hillary has a winning strategy (as in the case of Figure 6), i.e., if Hillary can choose a simplex ρ in Δ^n in such a way that Sonya is forced to ask about the $n+1$ vertices in order to decide whether ρ belongs to $\mathcal{K}$.

And... what is this for?

5 Boolean functions

A propositional formula as $(a \vee b) \leftrightarrow (\neg a)$ can be interpreted as a function over 2 variables $\mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}$, where $\mathcal{B} = \{0, 1\}$. Generally speaking, a Boolean function over n variables is any function $\mathcal{B}^n \to \mathcal{B}$. This kind of function can be represented by means of a *truth table* with 2^n rows. Therefore, the number of rows explodes exponentially when the number of variables grows. Can the evaluation of a Boolean function be faster than by constructing its truth table? Answering that question takes us into the realm of Complexity Theory. In fact that question is in the core of Complexity Theory, since the SAT(isfiability) problem was the first instance of an NP-complete problem. This problem is also a very good example of the limits of Complexity Theory. Even if all the known (deterministic) algorithms solving the SAT problem are of exponential nature, SAT solvers have relevant industrial applications involving tens of thousands of variables and millions of constraints. And this implies that the following question is an important one: how fast a Boolean function can be evaluated in practice?

6 Decision trees

Let us consider a (directed) tree labelled as in Figure 7. The labels in the internal nodes are variables (of a Boolean function or expression). The left branches mean that the corresponding variable takes the value *false* (denoted by 0), and the right ones that it takes the value *true* (1). The values in the leaves (0 or 1) represent the value of the Boolean function in the valuation defined by the corresponding branch from the root of the tree. This is called a *decision tree* and it is a compressed way (note that branches can finish before reaching their maximal length) of representing the truth table of a Boolean function. For instance, in the example of Figure 7, the evaluation of $f(a, b, c, d)$ in $(0, 0, 0, 0)$ and $(0, 0, 0, 1)$ is in both cases 0 (that is to say, $f(0, 0, 0, 0) = 0$ and $f(0, 0, 0, 1) = 0$), even if it is not explicitly stated in that decision tree.

Some pertinent facts and notions around decision trees are the following.

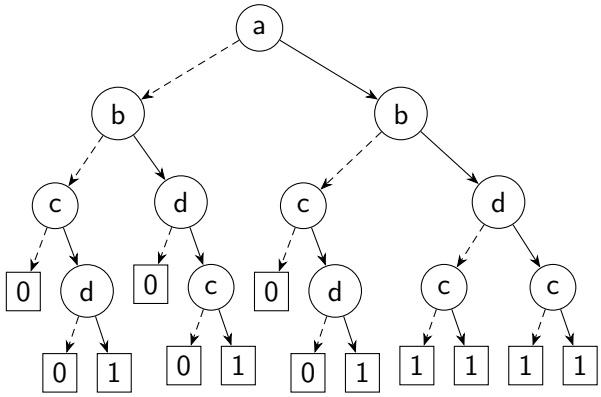


Figure 7: *A decision tree.*

- Each decision tree represents a Boolean function.
- A Boolean function can be represented by many decision trees.
- The *depth of a decision tree* is the maximum of the lengths of branches from the root to any leave.
- The *depth of a Boolean function* is the minimum of the depths of the decision trees representing that function.
- A Boolean function over n variables is *evasive* if its depth is n.

7 Boolean functions as test functions

Let us consider the propositional formula $(a \vee b) \leftrightarrow (\neg a)$. This expression defines a Boolean function f such that: $f(0,0) = 0$, $f(0,1) = 1$, $f(1,0) = 0$, $f(1,1) = 0$. As a *test function* (or *characteristic function*) f defines this set: $\{\{b\}\}$. In general, each Boolean function defines a subset of $\mathcal{P}(V)$, where V is the set of variables. That is to say, each Boolean function defines a *hypergraph* (and vice versa). Furthermore, if a Boolean function is *monotonically decreasing*, it defines a simplicial complex. To consider whether a Boolean function is monotonic, we need to define an order over its inputs $\mathcal{B}^n$ and over its outputs $\mathcal{B}$; to this aim we consider a total order over $\mathcal{B}$ (namely $0 < 1$) and we consider the componentwise order over sequences of Boolean values, defining a *partial* order over $\mathcal{B}^n$, the input set of the Boolean function. Furthermore the test function of a simplicial complex is a monotonically

decreasing Boolean function. Then, it is not difficult to prove that a simplicial complex is evasive (with respect to the game) if and only if its Boolean function is evasive (with respect to the depth).

8 Answering the question in the title

Thus, given a monotonically decreasing Boolean function, one can ask for its topological properties. For example: is null the fourth homotopy group of *this* Boolean function? Therefore the question in the title (Could a theorem be acyclic?) is legitimate. Now, there is a result (see, for instance, [3]) stating that every non-evasive simplicial complex is acyclic. To give an intuitive idea of why it is true, think of our second extreme example in Subsection 4.1: if there is a cycle, **H** could always guide **S** to that cycle, and there it will be necessary to ask for every vertex to determine the simplex; that is to say, in presence of a cycle, the simplicial complex will be evasive. Since tautologies are non-evasive (think of the first extreme example in Subsection 4.1: **S** can simply answer "yes" without asking for any vertex), they are acyclic. In fact, without using the previous theorem, it is clear that a tautology (which is a theorem) with $n+1$ variables corresponds to the simplicial complex Δ^n, which is not only acyclic but also collapsible (and then contractible).

Verdict: **Every theorem is acyclic**.

Conclusions

In this paper we have presented some interesting relation between logic and topology. The results are well known (see, for instance, [3]), but have been described in, we hope, an innovative way. The field, anyway, is far from being closed. Let us finish the paper by stating an open problem in which we are working in.

First, let us observe that truth tables can be compressed even more than with decision trees, by means of the so-called *Binary Decision Diagrams* (or simply *BDDs*), paying the price of passing from trees to directed acyclic graphs (for all these concepts, see the classical approach by Knuth in [2]). Another related concept is that of *Ordered* BDD (or *OBDD*), when a sorting of the variables $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ is fixed and at level i the variable v_i is evaluated in any branch. Finally, two other reduction mechanisms are introduced (see [2]) to obtain *Reduced* OBDDs (or *ROBDDs*).

Now the question we are interested in is: can evasiveness be characterized through ROBDDs? This problem has been studied and certain partial results have been formalized in the Isabelle/HOL proof assistant, as described in [1]. Our current belief is that the question should be answered in the negative: there would

be non-evasive simplicial complexes where all their ROBDDs would be of maximal depth.

References

[1] J. Aransay, L. Lambán, J. Rubio (2023), Evasiveness Through Binary Decision Diagrams. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, **14101**, 37-52.

[2] D. E. Knuth (2009), The Art of Computer Programming, vol. 4, fascicle 1, Bitwise Tricks & Techniques; Binary Decision Diagrams. *Addison-Wesley.*

[3] N. A. Scoville (2019), Discrete Morse theory. *Student Mathematical Library, vol. 90, American Mathematical Society.*

Mathematics Education and didactic games
La Edu**cac**ión Matemática y los juegos didácticos

Mª Carmen Escribano Ródenas
Departamento de Matemáticas y Ciencia de Datos, CEU
escrod@ceu.es

Abstract

The teaching of mathematics is currently very complex for teachers. Motivation and learning situations based on the context of the students are not easy to design. It is proposed to use didactic games and gamification, both with new technologies and with handmade manipulative materials to build more traditional games with mathematical concepts with the students themselves

Dedicado a Eugenio Roanes Lozano, compañero de profesión
y amigo entrañable

Introducción

La situación de la educación en España es preocupante desde hace muchos años. Existe una tasa altísima de fracaso escolar, una baja puntuación en los informes internacionales que miden la calidad de la educación y un número enorme de reformas y nuevas leyes educativas que están lejos de contribuir a la mejora de los resultados académicos. Estos problemas, a la larga, desembocan en una alta tasa de desempleo juvenil, debido a que la falta de cualificación (entre otros factores) impide a nuestros jóvenes acceder al mundo laboral en unas condiciones de mínima estabilidad [1].

A pesar de que existen multitud de factores que explican la alta tasa de abandono escolar temprano, uno de los más importantes es la falta de motivación de los alumnos. Aparte de influir en el fracaso escolar, una baja motivación también obstaculiza de forma clara el proceso de enseñanza-aprendizaje, lo que a

su vez también contribuye en la falta de efectividad del proceso y a los bajos indicadores en los informes internacionales.

Por ser las Matemáticas una de las asignaturas más problemáticas para los alumnos, es de vital importancia mantener la motivación del alumnado con respecto a la asignatura de cara a optimizar el entendimiento y los posibles resultados.

En la actualidad, la sociedad se encuentra sumergida en la era de las nuevas tecnologías, en la que buscan la inmediatez, la visualización de imágenes, los juegos, en definitiva, todo lo que les trasmite la curiosidad y su atención a través de estas [2].

Nuestro principal objetivo será demostrar que, mediante una serie de actividades y juegos didácticos matemáticos con la utilización de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), se puede mejorar la motivación de los alumnos, el clima escolar y el aprendizaje de los contenidos de Matemáticas.

1. Metodología Matemática

La metodología es un factor importante en el clima en clase y por consiguiente en la motivación del alumnado en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Los docentes son los encargados de seleccionar la metodología más adecuada en cada momento, así como conocer diferentes tipologías y poder alternarlas en base al contenido a impartir y a los alumnos concretos a los que va dirigida, para conseguir un buen ambiente en el aula y que el alumnado este motivado para aprender.

Es frecuente encontrar alumnos que crean aversión u odio al estudio de las Matemáticas, tras la dificultad para entenderlas se produce un aburrimiento y un rechazo. Para evitar este proceso es necesario hacer el estudio de las Matemáticas más sencillo y ameno, creando la motivación necesaria y evitando el rechazo. Para solucionar este problema las metodologías educativas deben adaptarse y proporcionar al profesor una serie de recursos y estrategias que actúen sobre la parte sensible, sobre la inteligencia emocional, de forma que permita al alumno superar la dificultad, no llegar al aburrimiento y favorezca la motivación de los estudiantes por aprender.

La gamificación consiste en emplear elementos como mecanismos, diseño visual y técnicas cognitivas, con el objetivo de captar la atención de las personas, estimular su participación, fomentar el aprendizaje y resolver dificultades [3].

La motivación se define como el grado de interés que presenta el estudiante hacia su propio proceso de aprendizaje o hacia las actividades que lo propician [4]. Dicho interés puede ser generado, mantenido o incrementado a partir de factores internos o externos al individuo. Considerando esta perspectiva, el docente debe establecer una triple meta en su labor motivadora: despertar el interés, dirigir y sostener el esfuerzo y alcanzar el objetivo de enseñanza previamente establecido [5]. Deben tenerse en cuenta tanto la motivación del alumnado, como su edad, relaciones sociales, personalidad de estos, procedencia sociocultural, etc.

Existen multitud de metodologías, como son la clase magistral, la cooperativa, la colaborativa, los talleres, etc., pero podríamos englobarlas en grandes rasgos, en dos grandes grupos:

-Enseñanza pasiva: donde el alumnado es más pasivo y el docente realiza una clase de tipo magistral. Este grupo se puede asimilar a la enseñanza conductista.

-Enseñanza activa: donde el alumno es más participativo, proactivo durante la clase. Este grupo se puede asemejar a las distintas metodologías de enseñanza cognitiva y/o constructivista.

Para analizar la metodología más adecuada para favorecer el clima en el aula de Matemáticas y, por tanto, la relación entre los alumnos y alumnos-profesores, debemos entender y estudiar la actitud hoy en día de los alumnos, es decir, "el mundo que les mueve hoy en día". Este mundo de los alumnos se encuentra relacionado con las nuevas tecnologías, juegos, móviles, videos, la inmediatez, etc. Es necesario conseguir las condiciones que propicien los cambios metodológicos para que el alumno sea un elemento activo en el proceso de aprendizaje. No se puede forzar a los estudiantes a aprender en contra de su voluntad y deseos, en su lugar debemos centrar nuestros esfuerzos en fomentar y mantener su curiosidad y ganas de aprender [6]. De esta forma, los estudiantes se sentirán más motivados y comprometidos en su proceso educativo. Se ha de tener en cuenta que el alumno de hoy vive inmerso en una espiral de estímulos desde que se levanta hasta que se acuesta, a través de sus smartphones y ordenadores.

Las estrategias de aprendizaje conocidas como metodologías activas o activo-participativas tienen como característica principal colocar al estudiante en el centro del proceso educativo. Esto implica un cambio en la dinámica del aula, en la que el protagonismo deja de estar en manos del profesor para ser asumido por el alumno, quien se involucra en mayor medida en su propio proceso de

aprendizaje. Las metodologías activas [7] son procesos interactivos de comunicación entre alumnado-profesorado, alumnado-alumnado, alumnado-material didáctico y alumnado-contexto, como procesos interactivos de enseñanza-aprendizaje basados en la intercomunicación entre el profesor, los alumnos y el material didáctico. En estas metodologías, se considera el aprendizaje como un proceso en el que el estudiante construye activamente su conocimiento, en lugar de simplemente recibir información.

Existen múltiples métodos de enseñanza activa como el debate dirigido o discusión guiada, Phillips 66, seminario, mesa redonda, el role-playing, juego de roles o dramatización, metaplán o tormenta de ideas (brainstorming) [8], o las mencionadas en [9]: Gamificación, Montessori, Waldorf, Reggio Emilia, Frainet, Aprendizaje-servicio, Aula Invertida (Flipped Classroom), Aprendizaje Cooperativo, Aprendizaje Basado en Problemas, Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP).

2. Los juegos y las Matemáticas

Desde tiempos inmemoriales el hombre ha deseado jugar y divertirse. En la época de la Grecia clásica el juego y el ejercicio físico eran considerados como una fuente de satisfacción. En toda la historia de la humanidad aparecen juegos y conocimientos matemáticos en paralelo, que establecen el recorrido del hombre en la historia. En la actualidad, el juego se considera una herramienta en la metodología educativa y es fundamental para el aprendizaje de los niños y adolescentes. Las últimas investigaciones demuestran que los máximos beneficios que se obtienen sobre los juegos se encuentran durante la infancia. El juego bueno, que no depende de la fuerza o maña físicas, el juego que tiene bien definidas sus reglas y que posee cierta riqueza de movimientos, suele prestarse muy frecuentemente a un tipo de análisis intelectual cuyas características son muy semejantes a las que presenta el desarrollo matemático [10]. Las diferentes partes de las Matemáticas tienen sus piezas, los objetos de los que se ocupa, bien determinados en su comportamiento mutuo a través de las definiciones de la teoría. Las reglas válidas de manejo de estas piezas son dadas por sus definiciones y por todos los procedimientos de razonamiento admitidos como válidos en el campo. La Matemática así concebida es un verdadero juego que presenta el mismo tipo de estímulos y de actividad que se da en el resto de los juegos intelectuales. Primero se aprenden las reglas, en segundo lugar se estudian las jugadas fundamentales, experimentando en partidas sencillas y se observan a

fondo las partidas de los grandes jugadores, sus mejores teoremas. La actividad matemática siempre ha tenido una composición lúdica, puesto que por su naturaleza en sí es un juego que implica otros aspectos como son el filosófico, científico e instrumental. Las Matemáticas y el juego tienen muchos rasgos en común en lo que se refiere a su finalidad y a su naturaleza profunda, como también participan de la misma estructura esencial. Un juego cualquiera comienza con la introducción de unas cuantas reglas, algunos objetos iniciales, piezas, cuya función queda definida por dichas reglas, exactamente del mismo modo que los objetos de una teoría matemática quedan determinados por su definición implícita.

Las Matemáticas recreativas proporcionan el mejor camino para captar el interés de los jóvenes durante la enseñanza de la Matemática elemental [11]. Un buen rompecabezas matemático, una paradoja o un truco de apariencia mágica pueden excitar mucho más la imaginación de los niños que las aplicaciones prácticas, sobre todo cuando estas aplicaciones se encuentran lejanas de las experiencias vividas por ellos en su contexto cercano.

El inicio de la gamificación en la educación coincide con la expansión de la industria del ocio, del juego y entretenimiento [12]. Aunque en realidad se ha reflexionado y analizado su práctica docente desde hace ya más de un cuarto de siglo, pues la introducción de juegos y pasatiempos en las clases puede servir para romper el auténtico bloqueo de muchos de nuestros alumnos, sortear el rechazo hacia todo lo matemático y hacer que estos lleguen a experimentar un cierto placer en lo que para ellos es sobre todo jugar [13].

En la actual sociedad, a los niños y adolescentes se les puede considerar como la generación de las TIC y por tanto la docencia debe adecuarse a las mismas, no como una herramienta sustitutiva sino como una herramienta complementaria en la enseñanza. Para que su introducción sea satisfactoria, son necesarias actividades, acciones novedosas en el proceso de enseñanza-aprendizaje, asegurando una utilización apropiada y eficaz de las TIC. Pero no es hasta estos últimos años, cuando se ha enfocado el proceso para la implantación de las TIC en el sistema de educativo, proceso que se ha acelerado debido a la pandemia acaecida con el Covid-19. Por ello, así como introducir una mejor cooperación entre los alumnos y como guía el docente, se propone la realización de una serie de actividades a través de juegos didácticos matemáticos, es decir, haciendo partícipe al alumno de la elaboración, desarrollo y resolución de estos, así como la realización de “partidas didácticas” con los mismos.

El iniciar una clase con un juego lleva al interés, a la diversión, en definitiva, es una llamada a la motivación y curiosidad del alumno [21]. Todo ello fomentará una mejora del clima en el aula, así como que aprendan "jugando" y también con la utilización de las TIC se estará "acomodando" la metodología a la sociedad actual.

3. Juegos y Gamificación

Es imposible hablar del ser humano sin hablar de juego y, por tanto, merece que reconozcamos la función del *homo ludens*, el hombre que juega, entre las funciones del homo sapiens [14]. El hombre es solo plenamente hombre cuando juega. Desde los albores de la humanidad, ha sido evidente la predilección del ser humano por los juegos, y como se sabe que algunos animales también juegan, se puede establecer que el juego es una práctica que existía antes de la aparición de nuestra especie. A diferencia de otras criaturas, el ser humano es capaz de disfrutar de juegos durante todo su ciclo vital, no solamente en la niñez, sino también en la vida adulta, manteniendo su capacidad para el juego intacta.

A diario y en todo momento, se llevan a cabo juegos en todas las partes del planeta [15]. Los juegos son una de las pocas actividades humanas que logran superar las enormes barreras sociales, culturales, lingüísticas y geográficas que separan a los distintos pueblos del mundo. El juego siempre ha formado parte de la enseñanza, debido a su capacidad para motivar y favorecer el aprendizaje. Aunque los enfoques didácticos pueden variar, su inclusión se justifica por su habilidad para crear un ambiente afectivo, emocional y relacional basado en la confianza, seguridad y aceptación. De esta forma se fomenta el desarrollo de la curiosidad, la capacidad de sorpresa, el interés por el conocimiento y la interacción con los demás.

Al uso del juego para el aprendizaje ha venido a sumarse la gamificación como una técnica que se sirve del uso del juego para contextos que no son propiamente lúdicos. El concepto de gamificación guarda una estrecha relación con los juegos. A pesar de que no existe una definición científica común y universal para la gamificación, se entiende como el empleo de juegos con la finalidad de motivar al alumnado [16]. Parece que la palabra gamificación la utilizó por primera vez Brett Terril en 2008 en su blog, donde describía el término como la acción de tomar las mecánicas del juego y aplicarlas a otras propiedades. La gamificación es una técnica de aprendizaje que emplea las mecánicas de los juegos con el fin de mejorar el rendimiento tanto en el ámbito educativo como en el profesional. Esta

técnica se emplea para mejorar la adquisición de conocimientos, habilidades y reforzar conductas específicas mediante incentivos [17]. El enfoque lúdico de la gamificación es una tendencia en aumento en la educación debido a su capacidad para crear experiencias positivas que generan motivación y facilitan la comprensión de los contenidos de manera divertida, aprovechando las emociones positivas que se generan durante el juego para mejorar el aprendizaje.

A menudo, los jóvenes no encuentran la escuela como una experiencia interesante, a pesar de comprender su relevancia en su educación. Es por ello por lo que se han desarrollado métodos de aprendizaje más atractivos como la gamificación, que combinan entretenimiento y conocimiento para hacer de la escuela un lugar más interesante para ellos [18]. La efectividad del modelo de juego radica en su capacidad para estimular o motivar a los estudiantes y fomentar su participación, además de promover su deseo de superarse [17]. Los desafíos, la creatividad y el interés que los juegos generan en los participantes pueden ser un factor clave en su compromiso con el proceso de aprendizaje. La Matemática es un juego en su esencia más profunda, aunque abarca otros aspectos como los científicos, instrumentales o filosóficos [19].

Ninguna metodología didáctica es completamente perfecta y, en consecuencia, la gamificación presenta algunas desventajas, como la motivación transitoria, un nivel de competitividad excesivo, un enfoque excesivo en la obtención de recompensas, la dificultad de lograr un equilibrio entre lo lúdico y lo educativo... Es indudable que los juegos y los ambientes de aprendizaje del alumno presentan considerables divergencias en términos de apariencia, funcionamiento y enfoque. Cada vez más personas diversas y de distintos ámbitos están utilizando entornos virtuales en los procesos de aprendizaje, y persiste, en casi todos los casos, el gran valor que estos entornos ofrecen para el aprendizaje a lo largo de toda la vida, siendo un desafío en casi todos reducir las tasas significativas de abandono. Los juegos tienen una gran influencia ya que logran generar adicción y proporcionar entretenimiento a las personas. Por su parte, la teoría de juegos emplea técnicas cuantitativas para evaluar los contenidos aprendidos por el alumno, y a partir de ahí, decidir la estrategia a tomar.

Mediante la gamificación, es posible capturar la atención de los estudiantes a través de la incorporación de elementos lúdicos, cuyo propósito es brindar diversión, fidelizar y optimizar la experiencia en el desarrollo del proceso educativo [20]. La utilización de la gamificación tiene múltiples ventajas, como aumentar la motivación por el aprendizaje, obtener una retroalimentación

constante o generar un aprendizaje más significativo permitiendo una mayor retención en la memoria al ser más atractivo. También favorece el compromiso con el aprendizaje, creando una vinculación del estudiante con el contenido y con las tareas en sí. Puede generar competencias adecuadas, desarrollar aprendizajes más autónomos y crear competitividad a la vez que colaboración.

La gamificación busca incrementar la motivación intrínseca de los estudiantes hacia el aprendizaje, la cual se caracteriza por el interés personal hacia el estudio o el trabajo, y se manifiesta con una actitud de superación constante para alcanzar objetivos, aspiraciones y metas. Un sistema gamificado puede ayudar a superar obstáculos como dificultades en la concentración, factores emocionales o físicos, o simplemente la falta de motivación para abordar el estudio o el aprendizaje de determinados temas [21].

Para los educadores, puede resultar un reto elaborar una actividad de juego que involucre, divierta y aporte significativamente al proceso de aprendizaje de sus estudiantes. Es importante tener en cuenta que la gamificación puede ser criticada por generar únicamente motivación extrínseca basada en recompensas, en la cual, si no está bien diseñada, se puede perder interés a largo plazo por los alumnos [22] y [23].

Al desarrollar un juego educativo, es importante considerar la intención y objetivo educativo con el cual se lleva a cabo, las reglas y condiciones del juego que se establecerán para su correcto funcionamiento, así como la edad y cantidad de estudiantes a los cuales va dirigido [28]. Es esencial enfocarse en que los estudiantes disfruten el juego y se produzcan momentos emocionantes. Y también se debe enseñar a los estudiantes la importancia del trabajo en equipo y fomentar un ambiente competitivo [24].

La diversión en el diseño de la experiencia lúdica es la principal causa de motivación que lleva a la persona a desear jugar [25].

La Consejería de Educación y Universidades del Gobierno de Canarias [26] en un kit de pedagogía y TIC, explica los elementos que considera necesarios para el diseño de un proceso gamificado.

4. Matemáticas/ Juegos/ Gamificación

“El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de las Matemáticas. Si los matemáticos de todos los tiempos se lo han pasado tan bien jugando y

contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprenderla y comunicarla a través del juego y de la belleza?" [27].

Si bien en el pasado, los investigadores se han centrado principalmente en examinar la conexión entre el rendimiento y factores cognitivos como habilidades y conocimientos, en tiempos recientes se ha empezado a investigar el papel de las emociones en los logros o fracasos en la Matemática [28]. La comprensión de las Matemáticas requiere un esfuerzo significativo y la aplicación de estrategias cognitivas avanzadas. Además, es importante tener en cuenta que el aprendizaje matemático es progresivo y que las dificultades también se acumulan [12].

La mayoría (92%) de los estudiantes tienen una actitud negativa hacia las Matemáticas, pero esta cifra disminuye a la mitad (46%) después de aplicar metodologías específicas, tales como charlas-coloquio sobre la importancia de las Matemáticas, conocimiento de la programación didáctica por parte del alumno, combinación de métodos expositivos y activos, diversidad de materiales de trabajo, entre otros. En [29] se respaldan estos hallazgos, al establecer que los métodos participativos logran un mejor rendimiento estudiantil que los métodos tradicionales, como las clases magistrales. Es posible aplicar la técnica de gamificación a cualquier actividad que pueda ser enseñada, medida y para la que se pueda proporcionar retroalimentación al estudiante realizando un análisis del contexto en el que se pretende implementar la experiencia gamificada, definiendo el público objetivo o jugadores a los que se dirigirá el trabajo y considerando aspectos como el nivel de habilidad, la motivación, los intereses y la forma de interactuar.

Gardner [11] dijo que un rompecabezas matemático desafiante, una paradoja intrigante o un truco de ilusionismo cautivador pueden estimular la imaginación de los niños de manera más efectiva que las aplicaciones útiles, especialmente si estas últimas están alejadas de su propia experiencia. Además, si se selecciona y prepara cuidadosamente la gamificación, puede conducirlos gradualmente hacia ideas matemáticas fundamentales.

La mayoría de los juegos tradicionales tienen un potencial enorme para conectar con el mundo y desarrollar habilidades, aunque no estén diseñados específicamente para enseñar conocimientos o comportamientos. En cambio, al practicarlos, generan un deseo de explorar, descubrir y comprender la vida. Proporcionar una selección de juegos apropiados para cada etapa educativa puede ofrecer a todos los estudiantes la oportunidad de aprender Matemáticas de diferentes maneras, incluyendo la comprensión de conceptos numéricos, la

práctica de técnicas de cálculo mental y la aplicación de estrategias de resolución de problemas. Además, el uso de juegos en el aula fomenta el trabajo en equipo y ayuda a los estudiantes a desarrollar gradualmente su independencia y autonomía [30].

Se puede distinguir entre juegos lúdicos y "juegos serios" o "juegos de propósito" que son aquellos que ofrecen contenidos específicos para capacitar a sus usuarios en una actividad particular [31]. Para llevar a cabo el proceso de *aprendizaje gamificado* de Matemáticas, podemos clasificar los numerosos juegos en clásicos o tradicionales y modernos; otra clasificación sería según los recursos didácticos, como por ejemplo programas informáticos, materiales manipulativos, cartas, libros, folletos, etc. y también existen en el mercado distintas herramientas y App, algunas de ellas "online".

Se puede hacer una clasificación por objetivos educativos y mecánicas de juego, que dentro de gamificación para Matemáticas podrían ser de resolución de problemas, de estrategias, de simulación, de habilidades numéricas, de lógica y pensamiento crítico o de visualización matemática.

No pretendemos hacer una relación pormenorizada de juegos por lo que de entre todos ellos podemos mencionar varios que creemos son utilizados con más frecuencia actualmente. Entre los juegos, algunos de los más conocidos, definidos en [32] y [33] son: la yincana, el salto de la rana, bingo de operaciones, cuatro en raya algebraico, juego radical, Cramerland (con la plataforma de Genially), Brain Age, Math Quest, Math Duel, MathsTris, DragonBox y Mathbreaker.

Algunas de las aplicaciones más usadas son: Genially, GeoGebra, Kahoot, Math Games, Prodigy Math Game, Mathletics, Khan Academy, ClassDojo, Prezzi, Canva y Power Point para creación de presentaciones. En [33] se enumeran numerosos recursos TIC para la gamificación.

También son interesantes los juegos matemáticos manipulativos que se pueden crear artesanalmente con materiales reciclables como son:

- Mancala uno de los más antiguos conocidos en el mundo, parece ser procedente de África (Egipto). Se puede realizar con cartones para huevos y algunas semillas.
- Puzles planos y espaciales: Tangram de siete piezas, de ocho piezas, …, con curvas (ovoide, corazón, …), Cubos, Pirámides, … Son ideales para su construcción materiales como cartón, cartulina, goma Eva, madera y Poliespán.

- Adaptaciones de juegos clásicos: dominós (geométricos, de fracciones, algebraicos, …), cartas (aritméticas, geométricas, de fracciones, algebraicas, trigonométricas, …), bingo (aritmético, algebraico, …) Los materiales para su construcción son cartón, cartulina, goma Eva, madera y Poliespán.
- Juegos lógicos: Quién es quién (geométrico, algebraico, de fracciones equivalentes, de funciones, …), El Cuarto, acertijos, ….
- Juegos topológicos con cuerdas, madera, metal, …
- De estrategia: Torres de Hanoi, Pirámides con bolas, … Los materiales para su construcción son diversos aunque recomendamos cartón, cartulina, madera, goma Eva y Poliespán.

Durante las últimas décadas, la enseñanza de las Matemáticas ha experimentado cambios significativos y se siguen realizando esfuerzos por encontrar modelos adecuados. Actualmente, la filosofía de enseñanza se centra en la incorporación efectiva de herramientas tecnológicas y se espera una reforma significativa en la metodología y contenidos de enseñanza, incluyendo la motivación del alumno, aprendizaje activo, heurística, trabajo en grupo, conexión con otras ciencias y situaciones del mundo real, el uso del juego y el fomento del gusto por las Matemáticas [34].

En el marco de la enseñanza de las Matemáticas, es necesario crear ambientes de aprendizaje auténticos que se basen en el juego y en la experiencia gamificada del alumno en el aula. De esta forma, podemos lograr que el proceso de aprendizaje sea motivador para nuestros estudiantes jóvenes. Para lograrlo, es importante recordar que los estudiantes necesitan ser motivados, tener tiempo para consolidar los conocimientos adquiridos y experimentar en diferentes contextos [35].

El rol del profesor es actuar como un orientador que facilita y guía al alumno utilizando una metodología que permita al estudiante desarrollar sus habilidades y adquirir conocimiento. Es importante que el profesor tenga habilidades para crear metodologías activas utilizando diversos materiales, como guías impresas o digitales, medios audiovisuales y presentaciones digitales, y puede utilizar las TIC para apoyar la enseñanza y aclarar dudas durante la discusión de los temas de estudio. Además, los profesores pueden crear espacios virtuales para que los estudiantes puedan aprender a su propio ritmo y estilo de aprendizaje, lo que crea un ambiente de aprendizaje cómodo y sin limitaciones.

Conclusiones

Los alumnos tienen problemas de motivación en general y más concretamente a la hora de interesarse por las asignaturas científico-matemáticas y de aprenderlas.

Se propone que la enseñanza de los contenidos o saberes básicos se realice mediante una metodología basada en actividades y situaciones de aprendizaje mediante el uso de juegos didácticos, incorporando las TIC que están al alcance del alumnado para que sea partícipe activo de manera constante. Estos juegos matemáticos buscarán tanto el progreso individual del alumno como el colectivo, desarrollando las competencias clave.

El juego es una estrategia perfectamente válida para intentar conseguir el objetivo de mantener al alumno motivado y que eso se traduzca en buenos resultados. La gamificación es una estrategia educativa que dista mucho de ser una mera tendencia, sino que su adopción va en línea con la adaptación del currículo a las necesidades e intereses de los alumnos.

En particular para los niños y los adolescentes, los juegos ofrecen un atractivo lúdico especial, ya que los niños desean, por naturaleza, divertirse y descubrir nuevas sensaciones.

La opinión generalizada de los profesores y docentes es que la actividad lúdica matemática es una manera innegable de aprender con una fuerte motivación.

La utilización de juegos multimedia con software específico suele ser cara y difícil de manejar por el docente sin formación. La construcción de juegos matemáticos para la educación no es difícil de realizar, incluso con la ayuda de los niños y adolescentes, que también pueden colaborar en algunas fases de la fabricación de juegos artesanales con materiales sencillos y baratos. Existen muchos juegos susceptibles de elaborar con materiales básicos, de reciclaje asequibles para todos. En este trabajo se relacionan algunos a modo de ilustración para incentivar la creatividad.

Bibliografía

[1] J. Calero, S. Waisgrais y A. Choi (2010), Determinantes del riesgo de fracaso escolar en España. Una aproximación a través de un análisis multinivel aplicado a PISA 2006. *Revista de Educación*, vol. Extra, 225-256.

[2] S. D. Rodríguez y M.F. González (2018), Análisis de la implantación de las TIC en la Educación Secundaria. Tendencias tecnológicas actuales. *Revista de estilos de aprendizaje*, 11(22),109-136.

[3] K.M. Kapp (2012). La gamificación del aprendizaje y la instrucción: métodos y estrategias basados en juegos para la formación y la educación. *John Wiley & Sons*. San Francisco (USA): https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=M2Rb9ZtFxccC&oi=fnd&pg=PR12&dq=Kapp,+K.+M.+(2012).+&ots=JyPc42cAbK&sig=6_htzY11aXKIMLSHtRpXTeKg5LU

[4] E. Martínez Salanova Sánchez, Enrique. (2003). La motivación en el aprendizaje. *Revista Educomunicación*. Consultado 28-9-2023 de: https://www.uhu.es/cine.educacion/didactica/0083motivacion.htm

[5] M. Conchillo García (2017). *¿Cómo motivar a nuestros alumnos? La gamificación*. Universidad de Almería, repositorio. Consultado el 6-9-2023 de http://repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/5911/17002_Como%20motivar%20a%20nuestros%20alumnos.%20La%20gamificacion.pdf?sequence=1

[6] J. Carbonell Sebarroja (2008). *Una educación para mañana*. Barcelona. Editorial Octaedro.

[7] F. López Noguero (2005). *Metodologías participativas en la enseñanza universitaria*. Narcea, S.A. Ediciones, 2007.

[8] Instituto Nacional de Administración Pública (INAP) (2020), *Métodos de aprendizaje.* Ministerio de Hacienda y Administraciones Públicas. Consultado el 4-10-2023 de: https://www.inap.es/documents/10136/1709393/Metodologias-aprendizaje.pdf/483443fa-4df3-3464-02ca-79f9942d0e83

[9] A. García (2017). *Otra educación ya es posible: una introducción a las pedagogías alternativas.* Albuixech: Litera libros editorial.

[10] M. de Guzmán (1989). Juegos y matemáticas. *Revista Suma, 4 (1989), 61-62*. Consultado el 20-9-2023 de: https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/4/SUMA_4.pdf

[11] M. Gardner (1985). *Circo Matemático*. Alianza Editorial.

[12] J. Muñoz, J. A. Hans y A. Fernández, A. (2019). Gamificación en matemáticas, ¿un nuevo enfoque o una nueva palabra? Revista Epsilon, 101, 29-45. Consultada el 18-9-2023 de: http://funes.uniandes.edu.co/16924/

[13] A. García Azcárate (1999). Pasatiempos y juegos en clase de Matemáticas: Números y Universidad Autónoma de Madrid.

[14] J. Huizinga (2007). *Homo Ludens.* Traductor E. Imaz. Alianza Editorial. (6.a ed.) Obra original publicada en 1972.

[15] J. Botermans, T. Burrett, P. Van Delft y C. Van Splunteren (1998). *El libro de los juegos*. Madrid, España: Edimat Libros.

[16] M. Sailer, J. Ulrich Hense, S. Katharina, S. Mayr y H. Mandl (2017). Cómo motiva la gamificación: un estudio experimental de los efectos de elementos específicos del diseño de juegos en la satisfacción de necesidades psicológicas. *Computers in Human Behavior. Elsevier,* 69, 371 – 380. Universität Gießen.

[17] V. Gaitán (2013). *Gamificación: el aprendizaje divertido. Consultado el 30-9-2023* de: https://www.educativa.com/blog-articulos/gamificacion-el-aprendizaje-divertido/

[18] S. Montaner Villalba (2016). Reseña" Gamificación: Como motivar a tu alumnado y mejorar el clima en el aula". Edutec. *Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, (55), a332-a332. Universitat Politècnica de València.

[19] M. de Guzmán Ozámiz, M. (2000). Matemáticas y estructura de la naturaleza. *Revista Ábaco*, 25, 24-45.

[20] J. L. Ramírez Cogollor (2014). Gamificación. Mecánicas de juegos en tu vida personal y profesional. SC Libro, 174 *Revista de marketing y publicidad*

[21] F. Teixes (2015). *Gamificación. Motivar jugando*. Gamificación, 1-128. Barcelona: Editorial UOC, Torrossa

[22] I. Furdu, C. Tomozei y U. Kose (2017). Pros y contras de la gamificación y el juego en el aula. Discovery Service for Univ of South Carolina. *Broad Research in Artificial Intelligence & Neuroscience*, 8(2), 2017, 56-62

[23] M. Amigo Gómez, M. (2020). Nuevos enfoques metodológicos en la enseñanza de las matemáticas en ESO: Gamificación. Universidad de Valladolid. Facultad de Ciencias. Consultado el 13-10-2023 de: https://uvadoc.uva.es/handle/10324/43439

[24] P. Chacón (2008). El Juego Didáctico como estrategia de enseñanza y aprendizaje ¿Cómo crearlo en el aula? *Nueva aula abierta*, *16*(5), 1-8.

[25] J. R. Calvo Ferrer (2018). Juegos, videojuegos y juegos serios: Análisis de los factores que favorecen la diversión del jugador. *Miguel Hernández Communication Journal*, Universitat d'Alacant. Nº 9, 191-226.

[26] Consejería de Educación y Universidades del Gobierno de Canarias (2018). *Gamificación: Elementos para el diseño de un proceso gamificado. Kit de pedagogía y TIC.* Consultado el 14-12-2023 de: https://cutt.ly/n6eHggV

[27] M. de Guzmán Ozámiz (1986). Juegos matemáticos en la enseñanza. *Boletín de la Sociedad Puig Adam de profesores de matemáticas*, (10), 25-44.

[28] S. Hidalgo Alonso, A. Morato Sáez y A. Palacios Pico (2005). El perfil emocional matemático como predictor de rechazo escolar: relación con las destrezas y los conocimientos desde una perspectiva evolutiva. *Educación matemática*, 17(2), 89-116.

[29] J.M. Chamoso Sánchez, P. Martín Huerta, J.C. Pereña Moro y F.L. Revuelta Domínguez (1997*). Algunos materiales para su utilización en el aula de matemáticas*. Ediciones Universidad de Salamanca (España).

[30] M. Edo, J. Deulofeu, y E. Badillo (2007). Juego y matemáticas: Un taller para el desarrollo de estrategias en la escuela. *Actas XIII JAEM, Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*.

[31] S. Deterding (2012). Gamificatión: Designing for motivation. *Interactions* 19(4), 14-17.

[32] F. Merchán (1994). El salto de la rana. *Revista SUMA,* 14, 50-59.

[33] F. Posada Prieto (2017). *Gamifica tu aula: experiencia de gamificación TIC para el aula.* Comunicación presentada en V Congreso Internacional de Videojuegos y Educación (CIVE'17). Congreso organizado por la Universidad de La Laguna. Consultado el 9-10-2023 de: https://riull.ull.es/xmlui/handle/915/6791

[34] M. de Guzmán (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista iberoamericana de educación, 43*, 19-58.

[35] C. Tamayo (2008). *El juego: un pretexto para el aprendizaje de las matemáticas*. Consultado el 15-10-2023 de: http://funes.uniandes.edu.co/995/

Transposición informática y formación del profesorado en matemáticas

Inés M. Gómez-Chacón
Departamento de Álgebra, Geometría y Topología e Instituto de Matemática Interdisciplinar, Universidad Complutense de Madrid
igomezchacon@mat.ucm.es

Abstract

An implementation research is presented based on the project ESCEMMAT in mathematics. The research strategy is framed inside a Design- Based Research (DBR). It describes the methodology used in initial teacher training, multimedia learning scenarios to help high school teacher-students learn to teach algebraic systems with technology. The results allow us to identify how the attitudes and the instrumental reasoning play a role in the construction of mathematical knowledge to be taught and affect how the computational transposition is developed.

In memoriam del profesor Eugenio Roanes Lozano

Introducción

Las investigaciones sobre el uso de las TIC en la enseñanza de las matemáticas desde diversas perspectivas teóricas son numerosas, muestra de ello son las publicaciones del National Council of Teachers of Mathematics ([1],[2]), el 17th ICMI study ([3]), y los libros de la editorial Springer serie denominada *Mathematics Education in the Digital Era* (por ejemplo, [4], [5]), así como las actas de la *International Conference on Technology in Mathematics Teaching (ICTMT).* Estos estudios han puesto de manifiesto que

- el diseño de tareas matemáticas potenciadas por las TIC es una cuestión delicada y heterogénea, y

- el área educativa con apoyo tecnológico está cambiando rápidamente y ofrece nuevas formas de abordar el pensamiento matemático, pero el desarrollo teórico didáctico apenas sigue el ritmo del progreso tecnológico, ni aborda la necesaria formación del profesorado.

La formación del profesorado se destaca en distintas investigaciones sobre todo en la necesidad de prestar atención a los procesos de *transposición informática* ([6], [7]) y especialmente a nivel universitario en lo referente al conocimiento didáctico ([8], [9]) y pedagógico de la tecnología (PTK) ([10]). En la actualidad sigue siendo un reto la extensión de la transposición didáctica a los contextos computacionales dando lugar a la *transposición informática, entendida como el* reconocimiento de las ventajas y limitaciones de los contextos informáticos y el análisis de cómo el conocimiento matemático se transforma a partir del uso de estos ([11], [7]).

Este artículo busca apoyar los estudios de implementación de la transposición informática presentando resultados de una investigación en Educación Matemática pionera en el área realizada en colaboración con el profesor Eugenio Roanes Lozano, colega en el área y compañero del departamento de Álgebra de la Facultad de Ciencias Matemáticas. El proyecto al que nos referiremos es el que tiene por título *Escenarios Multimedia en Formación de Futuros Profesores de Matemáticas de Secundaria (ESCEMMAT)* (UCM-2007-463) aprobado por la Universidad Complutense de Madrid (UCM) en el 2007. En el que participaron seis investigadores de la UCM (Rafael Carballo Santaolalla (†), María José Fernández Díaz, Inés M. Gómez-Chacón (investigadora principal, coordinadora), Nuria Joglar Prieto, Eugenio Roanes Lozano (†), Eugenio Roanes Macías).

También esta línea de transposición informática y de formación del profesorado la pude seguir desarrollando desde 30-10-2009 hasta el 27-4-2017 como miembro del Grupo de Investigación UCM: 910563- *Álgebra Computacional e Inteligencia Artificial* con vigencia desde 22.12.2004 (GR201/04) y dirigido por el profesor Eugenio Roanes Lozano. Se pueden consultar las publicaciones que realizamos en colaboración con Miguel. A. Abánades, Francisco Botana, Jesús Escribano sobre *distintas herramientas informáticas para el Concepto de Lugar Geométrico* poniendo el acento en la génesis de utilización personal y profesional (ver por ejemplo [12]). En este estudio, con base en sistemas de geometría dinámica, se comparan tres herramientas, las diferentes representaciones matemáticas de los lugares geométricos generadas por ellas, tanto desde la perspectiva de su dinámica matemática como de sus funcionalidades didácticas. Los resultados ponen de relieve la necesidad de articular en el trabajo geométrico los niveles epistemológico y cognitivo a través de diferentes génesis de razonamiento (visual-discursiva, instrumental y discursiva).

En lo que sigue se describe el proyecto ESCEMMAT (Escenarios multimedia para el aprendizaje de las matemáticas) y se precisa la colaboración con el profesor Roanes Lozano sobre transposición informática y formación de profesores en el tema de Sistemas ecuaciones algebraicas.

2. Formación del profesorado de matemáticas y tecnología

El trabajo del docente en entornos informáticos es complejo, requiriendo nuevas competencias técnicas, didácticas y matemáticas ([6] en la formación inicial del profesorado. Los supuestos que guiaron esta propuesta de formación fueron los siguientes:

> *H1*: como estudiante, el uso de software para resolver problemas matemáticos durante los estudios universitarios no conduce espontáneamente al desarrollo de un método, como profesor, para integrar el software en la enseñanza situaciones de enseñanza;
> *H2*: la influencia positiva que tiene la formación en el uso de las TIC en la actividad del estudiante para profesor tiene como base la articulación entre la génesis instrumental y la dimensión profesional del profesor en sus componentes cognitiva, mediática, personal e institucional.

De acuerdo con estas hipótesis, se realizaron diversos experimentos de enseñanza, en situaciones de formación en el marco del desarrollo curricular de la enseñanza superior del Grado en Matemáticas. Estos escenarios se diseñaron para que los estudiantes universitarios, posibles futuros profesores de matemáticas en secundaria, adquirieran las competencias necesarias para enseñar matemáticas utilizando las TIC. El material curricular de estos escenarios está en formato multimedia (sitio web con vídeos y documentos).

3. Fundamentación teórica y metodología

Para el establecimiento de las competencias, el análisis de las prácticas docentes y las situaciones específicas de formación, hemos utilizado como marco conceptual el enfoque de la Doble Aproximación definido por Robert y Rogalski ([13]), que combina la ergonomía cognitiva con un enfoque didáctico de la actividad del profesor con el enfoque de la aproximación instrumental ([6]). La idea principal de este último enfoque es la génesis instrumental, a través de la cual los seres humanos construyen patrones instrumentales para manejar herramientas.

El trabajo de la detección y desarrollo de competencias para aprender a enseñar matemáticas con TIC's que aquí se presenta está ligado a la combinación de los siguientes cuatro aspectos:

1. *Aspecto tecnológico*: uso de tecnología en el aula, control de la transposición informática,
2. *Aspecto pedagógico-didáctico*: control de la transposición didáctica y de los recursos docentes,
3.*Aspecto conceptual*: dominio del contenido matemático,
4. *Aspecto profesional*: control de la componente socio-institucional y de la componente personal del profesor de matemáticas de secundaria.

Para más detalles y desarrollo se puede consultar algunas publicaciones sobre este proyecto ([14], [15], [16]).

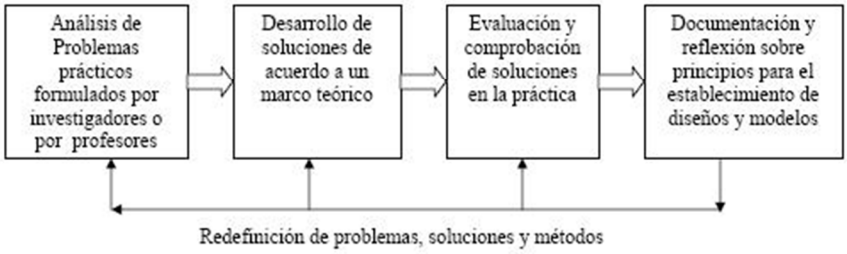


Figura 1: *Metodología Design based Research*

Se ha utilizado la noción de escenario de aprendizaje y la metodología de investigación *Design-Based Research* para el diseño, desarrollo e implementación de los escenarios, siempre teniendo en cuenta los cuatro aspectos mencionados.
El *concepto escenario* es un concepto teórico-práctico en el que se desarrollan unos objetivos educativos y de aprendizaje matemático determinados. Además, se define un plan activo vinculado a los dos objetivos principales de la investigación citados en la introducción de este trabajo, con sugerencias sobre las herramientas informáticas a utilizar en el aula, la secuencia didáctica, los roles del profesor y de los alumnos, las características del grupo, el plan de actividades, la aproximación epistemológica, las características del ambiente de aprendizaje, etc.

La metodología *Design-based Research* (Figura 1) es una metodología de investigación sistemática y flexible que tiene por finalidad la mejora de la práctica educativa a través de un análisis iterativo del diseño, desarrollo e implementación, basado en la colaboración entre investigadores y docentes ([17]). Los estudios tienen lugar en situaciones reales dentro de la práctica diaria organizados en dos fases: fase de anticipación y fase de reflexión. Las fases se combinan en distintas

etapas temporales de manera cíclica y recursiva en espiral. Esta metodología permite mejorar la manera en la que un diseño opera en la práctica ya que contempla la revisión de los aspectos que no funcionan adecuadamente y su modificación durante el proceso del estudio. Además, permite por lo tanto complementar y usar simultáneamente la investigación teórica en el área de la formación inicial de profesores y la experiencia educativa en la práctica.

Los escenarios están concebidos como material curricular de formación. Por esta razón, es importante subrayar que hay que distinguir entre dos tipos de situaciones: una situación de formación y las situaciones de enseñanza. Estas situaciones implican varios niveles de actividad y práctica, tanto para el formador (profesor universitario) como para el estudiante futuro profesor de secundaria. En la situación de formación, hay dos niveles de actividad: las actividades del formador (A1) y las actividades del estudiante futuro profesor durante la formación (A2). En las situaciones de formación, el enfoque de la doble aproximación y el enfoque instrumental dan acceso al nivel de la etapa práctica: P1, la del formador, y la etapa P2, la del estudiante-profesor en prácticas. Las tareas de éste están vinculadas al desarrollo de las matemáticas en la medida en que construye sus competencias profesionales para aprender a enseñar utilizando la tecnología. En este nivel de práctica (P2) el estudiante-profesor tendrá que realizar diversas tareas relacionadas con el manejo instrumental de software para el aprendizaje de las matemáticas, así como tareas relacionadas con la creación de tareas para la enseñanza de los alumnos de secundaria. La aproximación instrumental nos permite analizar la génesis instrumental propuesta al estudiante-profesor. En la situación de enseñanza encontramos los siguientes niveles de actividad: el nivel de actividad del formador, el nivel de actividad del estudiante-profesor y el nivel de los alumnos de secundaria.

4. Implementación Escenario: Aprender a enseñar sistemas algebraicos. Usos del Derive

4.1 Presentación

En esta sección se presenta el *Escenario 1*, con el tema *Sistemas de Ecuaciones Lineales y Algebraicas con Derive*, experimentado con alumnos de la Facultad de Matemáticas de la UCM, en la asignatura Metodología Matemática. Los objetivos del Escenario 1 eran: a) reconocer el valor del uso de las TIC; b) mejorar el conocimiento de la profesión de profesor; c) reconocer técnicas y recursos específicos para la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales en secundaria; d) potenciar la reflexión auto-formativa sobre la enseñanza de los

sistemas de ecuaciones en los futuros profesores tras trabajar con los materiales elaborados. Todo ello basándonos en el análisis del trabajo práctico del estudiante-profesor tras recibir la formación tanto de Matemáticas como en Educación Matemática. En la Figura 2 recoge las distintas actividades de fundamentación teórica y desarrollo práctico.

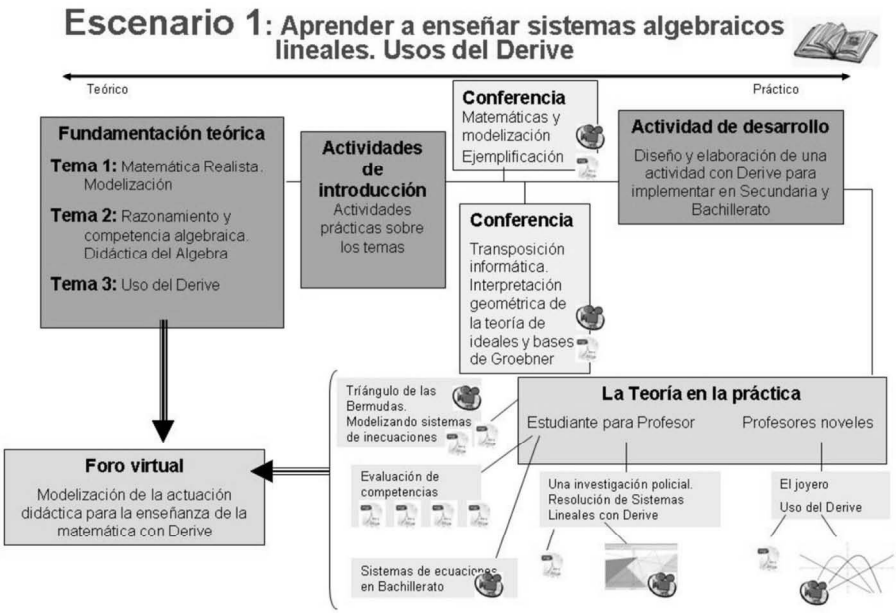


Figura 2: *Escenario secuencia de actividad*

4.2 Fundamentación matemática y trasposición informática

En la propuesta se trabajó la modelización de competencias del estudiante para profesor desde la interacción que supone distintos dominios de conocimiento para su actuación didáctica: contenido matemático, tecnología y modelización de procesos de aprender a enseñar (véase Figura 3). Esto exigió que los conocimientos que los estudiantes-profesores tenían que transformar para preparar la tarea descrita en el Escenario 1 (ver caso), involucraran ambas formaciones didáctica y matemática. Por tanto, la profesora Gómez-Chacón responsable de la asignatura *Metodología Matemática* en la que se desarrolló la experiencia fortaleció la *formación didáctica* articulada en tres bloques (Figura

3): Enfoque realista en la Didáctica de la Matemática, Didáctica del Álgebra y competencia en razonamiento algebraico y usos del programa Derive ([18]); y la *formación matemática*, focalizando en la transposición didáctica del tema matemático *Sistemas de Ecuaciones Algebraicas* conectando la formación universitaria: Álgebra lineal (sistemas lineales) y Estructuras Algebraicas (sistemas algebraicos) y estructuró de la siguiente forma: 1. Introducción y planteamiento del problema (sistemas de ecuaciones lineales: método de eliminación de Gauss, y notación vectorial), 2. Sistemas de ecuaciones lineales (teorema de Rouché-Fröbenius, Regla de Cramer, visualización. problemas geométricos: ecuaciones de subespacios vectoriales); 3. Sistemas de ecuaciones algebraicas.

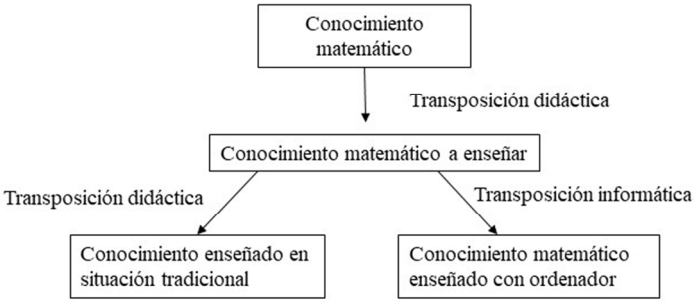


Figura 3: *Transposición didáctica e informática en matemáticas*

En este contexto, la contribución que realizamos en colaboración con Roanes Lozano fue en la articulación para este tema de la *transposición informática* que conlleva el tema *Sistemas de ecuaciones algebraicas* mediante las herramientas informáticas de *Derive y las bases de Groebner.*

Es sabido que la mayoría de los problemas en Matemáticas, Ciencias e Ingeniería son no lineales: se pueden modelizar con sistemas de ecuaciones polinomiales (no lineales). Las herramientas entonces para resolver estos sistemas son mucho más complejas y modernas que las utilizadas en el caso lineal descritas en las secciones anteriores. Una de las herramientas clave para encontrar las soluciones a un conjunto de ecuaciones polinomiales son las bases de Groebner.
Ejemplos de ecuaciones algebraicas no lineales en dos y tres variables son por ejemplo: $y - x^2 = 0$ y $x^2 + 2y^2 - z = 0$. El conjunto de soluciones de las ecuaciones citadas en el plano real y en el espacio de tres dimensiones real son, respectivamente, una parábola y un paraboloide elíptico. Vemos entonces que,

intuitivamente hablando, los conjuntos de soluciones de ecuaciones algebraicas no lineales están curvados, no son planos como en el caso lineal descrito anteriormente.

El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales es la intersección del conjunto de soluciones de cada ecuación por separado (hipersuperficie). Dichos conjuntos reciben el nombre de variedades algebraicas. Como en el caso lineal, los sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales pueden tener solución única, infinitas soluciones o ninguna solución. Además, una cuarta posibilidad surge en el caso no lineal: el conjunto de soluciones puede tener varias componentes conexas. Dichas variedades algebraicas vienen representadas entonces como conjuntos de soluciones de ecuaciones algebraicas. Cuando se consideran combinaciones algebraicas lineales de polinomios (es decir sumas de polinomios con coeficientes polinomiales) se generan unas estructuras algebraicas llamadas ideales dentro del anillo de los polinomios en n variables con coeficientes reales. Un conjunto de polinomios que genera un ideal (en términos de combinaciones algebraicas lineales) se llama base del ideal. La noción de base de un ideal es similar a la de conjunto de generadores de un espacio vectorial. Hay que observar que no todas las bases de un ideal tienen el mismo número de elementos, incluso cuando los no necesarios se eliminan. Cada variedad tiene entonces un ideal de polinomios asociado: el ideal generado por las ecuaciones que la definían.

	#67: GROEBNER_BASIS($[x^2 + y^2 - z - 1, z - 1]$, [x, y, z]) #68: $[z - 1, x^2 + y^2 - 2]$ The polynomial *ideal* generated by a set of polynomials is the set of linear al combinations of the given polynomials. The polynomials of the algebraic system g an ideal that can be generated by different *bases* (sets of generators). For instan previous input and output are two different ways of generating the same ideal.

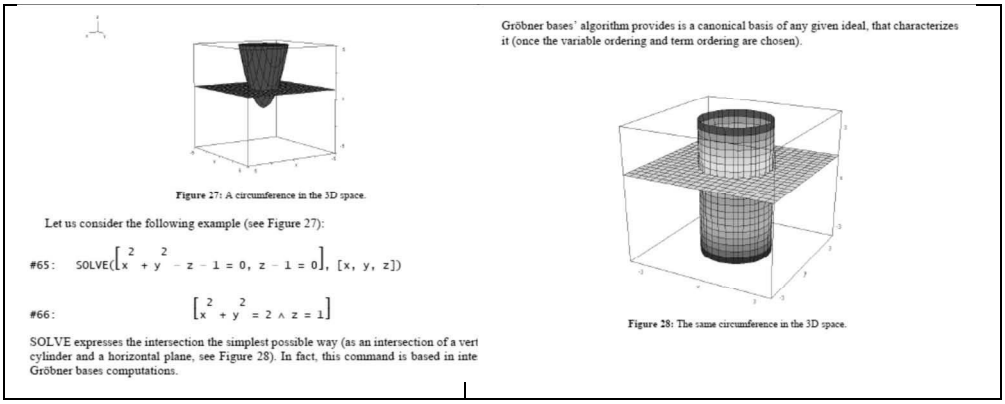


Figure 27: A circumference in the 3D space.

Let us consider the following example (see Figure 27):

#65: SOLVE([x^2 + y^2 - z - 1 = 0, z - 1 = 0], [x, y, z])

#66: [x^2 + y^2 = 2 ∧ z = 1]

SOLVE expresses the intersection the simplest possible way (as an intersection of a vert cylinder and a horizontal plane, see Figure 28). In fact, this command is based in inte Gröbner bases computations.

Gröbner bases' algorithm provides is a canonical basis of any given ideal, that characterizes it (once the variable ordering and term ordering are chosen).

Figure 28: The same circumference in the 3D space.

Figura 4: *Extracto de la sesión de clase impartida el 20/11/2007, Derive Bases de Groebner ([19])*

Durante décadas, geómetras algebraicos conjeturaron que cada ideal de polinomios (cada variedad algebraica) tenía una base que le identificaba completamente. A principios de los años 60 del siglo pasado, H. Hironaka y B. Buchberger demostraron, de manera independiente, que este resultado era cierto. Llamaron a sus bases "bases estándar" y "bases de Groebner" respectivamente. Las últimas tienen la ventaja adicional de incluir un algoritmo para su construcción (el algoritmo de Buchberger). Dicho algoritmo está implementado en Maple ([20]).

La Fig. 4 muestra un extracto de la sesión impartida por el profesor Roanes en la que se muestran ejemplos de variedades algebraicas y bases de Groebner. Para más detalle del contenido de esta sesión ver artículos: ([21], [22]) y (*[19]*), que contiene los ejemplos que se desarrollaron en noviembre 2007 en clase.

Para ampliación de la información sobre bases de Groebner y la teoría de ideales dimos a la clase, además de estos artículos, la referencia el libro de Cox, Little y Donal O'Shea ([23]).

5. Algunos resultados en la práctica docente en el aula de secundaria

Siguiendo la metodología de investigación *Design Based Research* las fases se combinaron en varias etapas temporales, de forma cíclica y recursiva. Se reseña la de etapa temporal 1, curso 2006-2007 (69 alumnos del segundo ciclo de la licenciatura de matemáticas matriculados en la asignatura Metodología Matemática y Práctica Docente y futuros profesores de Secundaria) que conllevó las siguientes fases:

Fase I: análisis inicial del problema (fase de anticipación). Creación de actividades formativas primera versión del *Escenario 1 (aprender a enseñar sistemas de ecuaciones algebraicas con Derive*). Elaboración de cuestionarios de evaluación y diagnóstico de los profesionales.

Fase II: experimentación e implementación en dos asignaturas del grado de matemáticas Metodología Matemática y Práctica Docente. El formador desarrolla sesiones de formación sobre modelización en matemáticas y sobre el uso del software Derive para sistemas algebraicos y polinómicos. Los alumnos-profesores que participan en esta primera etapa del proyecto crean un módulo para explicar sistemas de ecuaciones algebraicas para el nivel de secundaria, utilizando el programa de cálculo simbólico Derive como herramienta de apoyo (Escenario 1).

La tarea propuesta en este Escenario 1, tras recibir los estudiantes previamente la formación descrita, fue la siguiente:

> *Formula y resuelve con Derive una actividad para ser implementada en el aula con alumnos de Bachillerato basada en aplicaciones de resolución de sistemas de ecuaciones polinomiales en los ámbitos de la Biología, Medicina, Economía, Astronomía, Ciencias Sociales, etc. Trata de plantear actividades donde se haga especial hincapié en el paso de la ecuación algebraica a la visualización geométrica. La actividad debe cubrir una hora de clase y será impartida en un laboratorio informático (aula TIC). Plantea una guía de introducción de 15 minutos y una tarea práctica para ser trabajada por los alumnos en 35 o 40 minutos. Describe con todo detalle la modelización del problema que plantees. El formato de presentación de esta actividad debe ser en word, con capturas de pantalla de Derive y adjunta los archivos de Derive también. Se valorará especialmente la creatividad.*

Después de redactado el módulo, se revisó y corrigió. A continuación, el alumno profesor lo imparte, en una clase real de un centro de secundaria local que colabora con nosotros. Las sesiones de clases se graban en vídeo para su posterior evaluación e incorporación a los materiales multimedia del escenario.

Fase III: Evaluación inicial (fase de reflexión) por parte del equipo de investigación. Análisis del experimento de enseñanza y estudio de los efectos del escenario de formación sobre las competencias profesionales del estudiante para profesor. Realización de estudios de casos. Incorporación de los resultados para mejorar los materiales del curso de formación correspondiente al escenario en el curso 2007-2008).

Del gran grupo total (69 estudiantes-profesor) se eligió cuatro de ellos para la realización de un estudio de casos. De ellos, tres han preparado una memoria para una clase de 1º de Bachillerato sobre métodos de resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas, especialmente lineales, y uno que lo ha hecho sobre la función exponencial. Los cuatro imparten, tras la corrección y revisión de su memoria escrita, esa clase en un aula real de bachillerato usando las TIC's acordadas en el enunciado propuesto de la tarea. Los estudiantes ponen en práctica su clase en centros de enseñanza secundaria de la Comunidad de Madrid. Se recogieron los datos de los centros, y de los evaluadores: en vivo o en vídeo ([15]).

A modo de ejemplo, incluimos brevemente los detalles de la actividad desarrollada por uno de los estudiantes, María. Se incluye en breve comentario sobre la situación inicial del estudiante extraído de una entrevista personal y de sus trabajos en las asignaturas de didáctica matemática.

Situación inicial del Estudiante 1: María es una estudiante de 5º curso de la licenciatura en Ciencias Matemáticas que ha cursado las asignaturas Metodología Matemática y Prácticas de enseñanza en el curso 2006-07. Es una buena estudiante con vocación docente. Constata como necesidad de formación como futuro profesor el aprender a evaluar a los alumnos y el conseguir una buena atención a la diversidad. Durante el período de prácticas en el instituto en el que ella había estudiado, echa de menos recursos informáticos como Derive, GeoGebra y el acceso a Internet. Por otro lado, valora especialmente el aprender de los alumnos durante el período en prácticas de 3 meses.

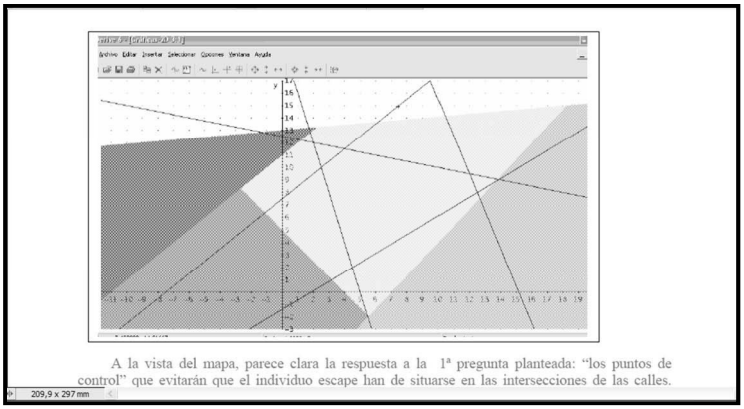


Figura 6: *Captura de Derive de la actividad de Estudiante 1*

Actividad real planteada por el Estudiante 1: Matemáticas y actuación policial (basada en la serie televisiva norteamericana Numb3rs). En la actividad propuesta se trata de localizar a un criminal conociendo pistas de testigos que le han visto en diferentes lugares de un barrio recientemente. Los datos recopilados corresponden con calles donde se ha visto al sospechoso que se modelizan con ecuaciones lineales y con ellas se localiza el perímetro de la zona ya reducida donde se cree que está el sospechoso.

María plantea además una actividad más avanzada con ecuaciones de grado 2 para acceder a un artefacto enterrado en una zona limitada por superficies concretas. María da indicaciones para el profesor sobre la planificación de la actividad en el aula y especifica los requisitos de los alumnos necesarios para seguir con éxito la actividad. Usa adecuadamente el editor de ecuaciones e incluye buenas capturas de pantalla del Derive en su memoria (Fig. 6). La actividad planteada es original y puede llamar la atención de los estudiantes, aunque basada en la serie televisiva.

Modificaciones y sugerencias a la actividad realizada en papel: Simplificar y reducir las actividades propuestas, son muy largas para el tiempo estipulado. Mejorar el formato para que la propuesta quede más clara. Revisar la gramática y la ortografía de todo el documento y utilizar el registro formal adecuado.

Comentarios sobre la implementación en el aula extraídos de los cuestionarios de evaluación: María muestra un dominio alto de los contenidos matemáticos tratados, plantea bien el problema para incitar la reflexión de los alumnos y usa de manera precisa en el aula el lenguaje y las operaciones simbólicas (4 sobre 5 puntos). Usa el programa Derive en el aula TIC con soltura. No planea adecuadamente la distribución temporal de la sesión en el aula y no prevé los resultados de su actuación. Motiva a los alumnos a participar y se adapta a las necesidades del grupo razonablemente. Maneja las funcionalidades básicas de Derive para representar regiones planas. No da referencias.

6. A modo de conclusión

En la primera implementación del proyecto ESCEMMAT que se describe en este artículo, se detectó la necesidad de una mayor comprensión de pre-condiciones matemáticas sobre las nuevas tecnologías para poder aplicarlas de una forma más adecuada y establecerlas como contenido curricular a nivel universitario.

Se confirmó que el nivel de éxito del estudiante en formación para profesor de matemáticas a la hora de conseguir enseñar un tema usando TIC's en el aula logrando una buena transposición informática depende claramente de las

actitudes y competencias instrumentales del aprendiz y estas deben estar articuladas con la transposición didáctica del conocimiento matemático que ofrece el formador. El prestar atención a la transposición informática ha ayudado a significar herramientas permiten, median y dan forma al pensamiento matemático, siendo ellas mismas, al menos hasta cierto punto, un producto de estos procesos. Para el tema matemático específico de Sistemas de ecuaciones algebraicos se ha puesto de manifiesto la importancia de alinear las técnicas matemáticas que emergen en la situación problemática con las técnicas disponibles en la herramienta informática.

Estos son resultados que aún permanecen abiertos tal como ha sido reseñado para la enseñanza universitaria ([8]) y que siguen requiriendo investigación.

Para terminar, se puso de manifiesto durante la elaboración de ESCEMMAT, que la composición interdisciplinar del grupo de investigadores fue muy positiva. La participación de profesores de secundaria expertos fue fundamental para la buena implementación del proyecto.

Referencias

[1] G. W. Blume y M. K. Heid, (Eds.) (2008), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Volume 1*. Research syntheses. Information Age Publishing.

[2] M. K. Heid y G.W. Blume (Eds.) (2008), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Volume 2*. Cases and perspectives. Information Age Publishing.

[3] C. Hoyles, C. y J.-B. Lagrange (Eds.) (2010), *Mathematics education and technology: Rethinking the terrain*. Springer. doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0

[4] P. R. Richard, M. P. Vélez, S. Van Vaerenbergh (Eds) (2022), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence. How Artificial Intelligence can Serve Mathematical Human Learning*. Mathematics Education in the Digital Era: Vol.17. Springer Nature: Cham, Switzerland. DOI: 10.1007/978-3-030-86909-0

[5] A. Clark-Wilson, O. Robutti, N. Sinclair (Eds) (2022), *The Mathematics Teacher in the Digital Era. International Research on Professional Learning and Practice*. Mathematics Education in the Digital Era: Vol.16. Springer Nature: Cham, Switzerland. DOI: 10.1007/978-3-031-05254-5.

[6] M. Artigue, M. (2002), Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical

and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 7 (3), 245–274.

[7] J.-B. Lagrange (2004), Transposing computer tools from "mathematical sciences" into teaching. Some possible obstacles, In D. Guin; K. Ruthven, L. Trouche (eds), *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computacional device into a mathematical instrument*. Kluwer.

[8] A. Heck y L. Másilko (2021), Creating Teaching Units for Student Inquiry, In I. M. Gómez-Chacón, R. Hochmuth., B. Jaworski, J. Rebenda, J. Ruge, S. Thomas (Eds), *Inquiry in University Mathematics Teaching and Learning: The Platinum Project.* (pp. 93-126). Brno: MUNI, Masaryk University Editor. https://doi.org/10.5817/CZ.MUNI.M210-9983-2021-6

[9] A. Bacelo, I. M. y Gómez-Chacón, (2023). Characterising algorithmic thinking: a university study of unplugged activities, Thinking skills and creativity, vol 48, 101284, https://doi.org/10.1016/j.tsc.2023.101284

[10] M.O.J. Thomas y Y.Y. Hong (2005), Teacher factors in integration of graphic calculators into mathematics learning. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), Proceedings of the 29th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 257–264). University of Melbourne.

[11] N. Balacheff, (1994), Didactique et Intelligence Artificielle, *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 14, vol 1-2, 9-42.

[12] I.M. Gómez-Chacón, F. Botana, J. Escribano, M.A. Abánades, (2016), The concept of locus. Genesis of personal and professional use with different tools, *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, 30(54), pp. 67-94. DOI: 10.1590/1980-4415v30n54a04

[13] A. Robert y J. Rogalski (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Revue Canadienne de l'enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies*, 2 (4).

[14] D. Butlen, F. Labroue, C. Asselain-Missenard, D. Perrin y I.M. Gómez Chacón (2008) Autour de la formation des enseignants, In C. Ouvrier-Buffet & M.-J. Perrin-Glorian (éd.) *Approches plurielles en didactique des mathèmatiques. Apprendre à faire des mathèmatiques du primaire au supérieur : quoi de neuf* ?

Actes colloque DIDIREM, (pp. 344-351). Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) Université Paris Didederot-Paris 7

[15] I. M. Gómez-Chacón y N. Joglar (2008), Escenarios mutltimedia para aprender a enseñar con nuevas tecnologías. Estudio de casos. *V Congreso Iberoamericano de Docencia Universitaria*. (pp. 380-383).

[16] I.M. Gómez-Chacón y N. Joglar (2010), Developing competencies to teach exponential and logarithmic functions using GeoGebra from a holistic approach, *Educação Matemática Pesquisa* (Monográfico en Tecnología y Educación Matemática), 12 (3), 485-513

[17] P. Cobb, J. Cofrey, A. di Sessa, R. Lehrer & L. Schauble (2003), Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32 (1), 9-13.

[18] M. de Guzmán (2002), Experiment, conjecture and proof in geometry with Derive, In J. Bohn (Ed.) *Proceedings of Vienna International Symposium Integrating Technology in Mathematics Education* (CD Rom), BK, teachware

[19] E. Roanes-Lozano (2004), Pictures at a DERIVE's exhibition (interpreting DERIVE's SOLVE command), Congreso Technology and its Integration into Mathematics Education (TIME-2004) Actas del Congreso, p. 15 (abstract). Actas con artículos completos publicadas eb CD-ROM por bk teachware Schriftenreihe, Nr. SR-41, J. Boehm (ed.), ISBN 3-901769-59-5, Montreal (Canada)

[20] E. Roanes M. y E. Roanes L. (1999), *Cálculos matemáticos por ordenador con Maple*, ed. Rubiños.

[21] E. Roanes-Lozano, L.M. Laita y E. Roanes-Macías (2004), Geometry of Algebraic Systems and its Exact Solving using Gröbner Bases. Computing In Science and Engineering 6/2, 76-79.

[22] E.Roanes-Lozano, L.M.Laita y E Roanes-Macías (2004), Some Applications of Gröbner Bases. Computing In Science and Engineering 6/3, 56-60.

[23] D. Cox, J. Little y D. O'Shea (1997), *Ideals, Varieties and Algorithms: An Introduction to Computacional Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Springer.

Reseña de libros

CLAUDI ALSINA: *Los matemáticos serios son los que no se ríen nunca* (241 págs.) ISBN: 978-84-344-3732-6. Editorial ARIEL, 2024.

Claudi Alsina, matemático y autor de numerosas obras de popularización de las matemáticas, ha publicado un nuevo libro *Los matemáticos serios son los que no se ríen nunca*. Como precedentes, cabe mencionar que el autor publicó con Miguel de Guzmán *Los matemáticos no son gente seria* y, más tarde, *El club de la hipotenusa*, obras centradas en anécdotas sobre matemáticos. Esta última obra incluye nuevas historias, una visión panorámica sobre el quehacer matemático y más de cincuenta anécdotas que el autor ha vivido con colegas del gremio.

El libro consta de siete capítulos independientes pudiéndose disfrutar, por tanto, en cualquier orden. Incluye, además, veinticinco retos recreativos con solucionario.

En el primer capítulo el autor hace referencia a virtudes y características personales y profesionales de la gente dedicada a las matemáticas. Habla de la paciencia matemática, la generosidad matemática, la elegancia matemática, la asociación entre inteligencia y matemáticas, los símbolos matemáticos, las igualdades, el despiste como característica común entre la comunidad matemática, la afición por viajar de los matemáticos, el desinterés económico, la obsesión por la precisión, mujeres matemáticas, matrimonios entre matemáticos, epitafios de matemáticos, el interés por lo imposible, impresiones falsas de matemáticos y biografías míticas, entre otras.

El segundo capítulo se centra en el elogio de la matemática recreativa, describiendo el humor matemático y presentando problemas clásicos de la matemática recreativa, juegos de azar, problemas de ajedrez, rompecabezas geométricos, puzles, crucinúmeros, cuentos, chistes, adivinanzas, etc.

El tercer capítulo trata de los errores matemáticos, haciendo alusión, entre otras cuestiones, a la exageración de la exactitud en el uso social de los números, a errores cometidos en pinacotecas o galerías, a valores próximos al número de oro, a errores en la correspondencia entre la realidad y su modelización, a errores en la aproximación decimal de pi y a errores en las demostraciones de teoremas.

El cuarto capítulo expone la presencia de los pecados capitales en el ámbito matemático haciendo una breve aproximación a la gula, la pereza, la envidia y la soberbia. Se tratan, además, los suicidios de algunos matemáticos destacados.

En el quinto capítulo, dedicado a la maldad, se describen algunos escándalos curiosos propios del mundo matemático como terrorismo, prostitución, traiciones, robos intelectuales, discriminaciones, vetos, etc.

El sexto capítulo versa sobre virtudes y defectos del profesorado de Matemáticas. Se tratan, entre otros, aspectos como los tipos de docentes, el papel de la pizarra, el asociacionismo, el anumerismo social, las fobias matemáticas, los escándalos de la evaluación y la política educativa.

En el séptimo y último capítulo el autor comparte una colección de recuerdos personales de matemáticos que ha conocido, resaltando anécdotas curiosas y memorables.

Esta nueva obra de Claudi Alsina, centrada en el valor de los rasgos humanos de las matemáticas, es de lectura muy agradable y aconsejable para todas las personas interesadas en las matemáticas o dedicadas a ellas.

Angélica Martínez-Zarzuelo

Información sobre artículos recibidos para ser publicados en el número especial y que aún no aparecen en este número 117

Comunicamos a los autores de artículos recibidos para el número especial y que aún no han aparecido publicados, que ello se debe a la gran cantidad de artículos recibidos. La explicación detallada ya se indicó en el anterior número 116 del Boletín.

Está previsto que en el próximo número 118 se incluyan tales artículos que están sufriendo retraso en su aparición.

Nota sobre el Concurso Intercentros "Joaquín Hernández" de la Comunidad de Madrid de este año

En los últimos años venimos publicando en el número de abril de nuestro Boletín la Crónica del Concurso Intercentros, pero en el presente año su fecha de celebración va a coincidir con la prevista para distribuir este número de abril de nuestro Boletín.

En consecuencia, y para no retrasar la distribución de este número de abril, se ha decidido trasladar la publicación de dicha Crónica al siguiente número 118 del Boletín.

Instrucciones para el envío de originales para publicar

Los originales de artículos deben enviarse al email de la Sociedad, utilizando procesador Word o LaTeX, organizados del siguiente modo:

Encabezamiento: título del artículo en inglés e, inmediatamente debajo, en español; nombres de autores; departamento o institución, direcciones de correo electrónico y, finalmente. el Abstract (Resumen) en inglés.

Desarrollo: La Sección de Introducción sin numerar, las demás secciones numeradas y las subsecciones numeradas con dos dígitos. No usar pies de página.

Figuras: deben ir numeradas (Figura 1, Figura 2, …) y no debe escribirse texto a ninguno de los dos lados de la figura, es decir, no deben intercalarse en el texto.

Terminación: Conclusiones y Bibliografía citada.

En caso de usar Word

El formato de texto debe ser 17 cm (alto) x 12.8 cm (ancho). Para ello, hacer uso del *Diseño de página*, y en *Configurar Página*, elegir estos márgenes: superior 3 cm; inferior 9,7 cm; izquierdo 4,1 cm; derecho 4,1 cm; encuadernación 0 cm. Usar letra *Times New Roman* con "Interlineado sencillo" (no múltiple).

El título (en inglés y español) en minúsculas de 16 puntos; el nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en estilo de letra negrita; la referencia de departamento o institución de trabajo en 11 puntos en el mismo estilo de letra; y la dirección de correo electrónico en estilo de letra *Courier New* de 11 puntos.

La palabra Abstract (o Resumen), en minúsculas de 12 puntos en letra negrita y su contenido, en inglés, en tamaño de 11 puntos en estilo itálica o cursiva.

Los títulos de secciones en minúsculas de 12 puntos en letra negrita, sin punto final. Las subsecciones en minúsculas negritas en tamaño 11 puntos. La primera línea posterior al título de sección o subsección se empezará al borde.

Plantilla para facilitar la redacción usando Word

Entrando en la página web de la Sociedad, se puede descargar una plantilla, para facilitar a los autores el seguimiento de las normas tipográficas indicadas.

En caso de usar LaTeX

El formato de texto debe ser 17 cm (alto) x 12.8 cm (ancho). Para ello, hacer uso del estilo "article", eligiendo: *textheight=17cm* (alto), *textwidth=12.8cm* (ancho) y *hoffset=0.3cm*. Por lo demás, tener en cuenta lo antes indicado para usuarios de Word. Para direcciones de correo electrónico usar tipo de letra `\texttt`.

Si se usan paquetes específicos de *Latex* distintos de los usuales, deberán adjuntarse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Plantilla para facilitar la redacción usando LaTex

Entrando en la página web de la Sociedad, se puede descargar una plantilla que puede facilitar a los autores el seguimiento de estas normas tipográficas.

Selección de originales

Los artículos recibidos para su publicación serán evaluados por miembros del Comité Editorial (mencionados en las páginas 4-5 de los últimos números del Boletín), que decidirán sobre la adecuación a la línea general del Boletín. En casos especiales, se acudirá a revisores externos.

Una vez concluido dicho proceso de revisión de un artículo y adaptación a las normas de publicación anteriormente indicadas, el artículo podrá ser aceptado para su publicación, lo que se comunicará a sus autores.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de diez euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son del 39 en adelante.

El importe puede ser abonado mediante transferencia a la cuenta de la Sociedad, ES58 3025 0006 2114 3326 8241, domiciliada en la entidad bancaria *Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28003*.

La carta o mensaje de correo electrónico de petición se enviará a la Sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En ella se indicará el número o números a adquirir, incluyendo la *dirección* a donde se han de enviar y el correspondiente *resguardo de transferencia*.

INSCRIPCIÓN DE NUEVOS SOCIOS EN LA SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

SOLICITUD DE INSCRIPCIÓN

D. ..... Teléf.: .....

Dirección: .....

Ciudad: ..... Cod. Postal: ..... E-mail: .....

Centro de trabajo: .....

Solicita el ingreso como socio de número de la sociedad:

Con esta fecha autorizo al Banco: .....

Dirección de la Sucursal: .....

para que cargue en mi cuenta: ..... / ..... / ..... / ..... /.

los recibos de las cuotas correspondientes al año 2024 y siguientes.

Fecha: ..... de ..... de 2024

Firma:

Dicha solicitud se enviará por correo postal a la dirección:
Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas
Facultad de Educación Despacho 3215 28040 Madrid
o bien al email de la Sociedad: puigadam@mat.ucm.es

Los nuevos inscritos en la Sociedad que elijan abonar la cuota anual mediante domiciliación en su entidad bancaria, deberán comunicarlo a su banco, para que sean aceptados los recibos, que serán pasados en el mes de enero de cada año.

La cuota anual fue establecida en la Asamblea 2012 (véase el Boletín nº 91) en 51 euros para socios individuales y 62 para institucionales (que incluyen la cuota de la Federación de Sociedades, que envía a nuestros socios la revista SUMA).

Quienes prefieran abonar la cuota mediante transferencia pueden hacerlo a la c.c. de nuestra Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

CAJA DE INGENIEROS c/. Carranza, 5 28004 Madrid
cc. ES58 3025 0006 2114 3326 8241

ÍNDICE

	Págs.
Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas	2
Comité Editorial del Boletín	4
Asamblea General Ordinaria de 2024	6
Nota para los Socios que hayan cambiado de cuenta bancaria	6
Sesión conjunta del Seminario de Historia de la Matemática y del Seminario del Departamento de Algebra, Geometría y Topología de la UCM, acerca del Prof. Etayo Miqueo	7
Exposición bibliográfica sobre el Prof. Etayo Miqueo	8
Matemática aplicada al tráfico ferroviario y al tenis desarrollada por Eugenio con varios colegas, por *G. Aguilera, J.L. Galán, A. Hernando, A. Martínez-Zarzuelo, E. Roanes Macías, F. Sánchez* y *C. Solano*	9
Paseos matemáticos con MathCityMap y GeoGebra Discovery: una propuesta, por *Belén Ariño-Morera, Angélica Martínez-Zarzuelo, Claudia Lázaro del Pozo y Tomás Recio*	19
Comparando álgebras de evolución con otras álgebras relacionadas, por *Juan Núñez Valdés* , *Lorena Rodríguez González* y *Belén Carrasco Moya*	38
¿Puede un teorema ser acíclico?, por *Jesús Aransa, Laureano Lambán y Julio Rubio*	54
La Educación Matemática y los juegos didácticos, por *Mª Carmen Escribano Ródenas*	64
Transposición informática y formación del profesorado en matemáticas, por *Inés M. Gómez-Chacón*	79
Reseña de libros	94
Información sobre artículos recibidos aun no publicados	96
Nota sobre el Concurso Intercentros "Joaquín Hernández" de este año	96
Instrucciones para el envío de originales	97
Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín	98
Boletín de inscripción en la Sociedad "Puig Adam"	99