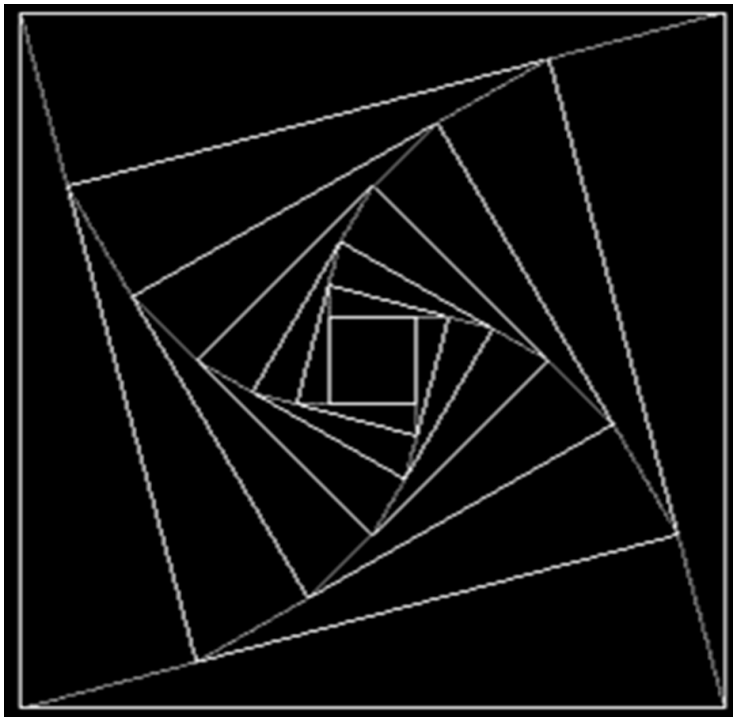
SOCIEDAD «PUIG ADAM»
DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 112
OCTUBRE DE 2021

ÍNDICE

Págs.

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas 2

Comité Editorial del Boletín 4

Suspensión de la Asamblea General Ordinaria de 2020 y del XXXVIII Concurso "Puig Adam" 6

Redescubriendo y extendiendo algunos lugares geométricos clásicos con ayuda de GeoGebra, por *Eugenio Roanes Macías y Eugenio Roanes Lozano* 7

Generalización de un problema diofántico, por *Ricardo Moreno Castillo* 27

Mirando a los cuadros a través de los ojos de Voronoi, por *Rafael Losada* y *Tomás Recio* 32

Una aplicación del teorema del valor medio para estudiar la convergencia de series numéricas, por *Clara Burgosa, Julia Calatayud, Juan Carlos Cortés* y *Marc Jornet* 54

Curvas paralelas a un trifolium regular, por *Thierry Dana-Picard y Zoltan Kovacs* 63

Exposición sobre construcción de poliedros, que incluye una variante del Omnipoliedro, por *Roberto Cardil* 82

Reseña de libros 87

Competición Estadística Europea 91

Instrucciones para el envío de originales 92

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín 94

Boletín de inscripción en la Sociedad "Puig Adam" 95

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

SEDE: Facultad de Educación. Despacho 3215
Rector Royo Villanova, s/n 28040 – Madrid
Correo electrónico: puigadam@mat.ucm.es

Junta Directiva de la Sociedad "Puig Adam"

Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Vicepresidentes:
Eugenio Roanes Macías
María Gaspar Alonso-Vega
Juan Jesús Donaire Moreno
Vocales:
Enrique Rubiales Camino (Relaciones Institucionales)
Eugenio Roanes Lozano (Gestión de publicaciones)
Ricardo Moreno Castillo (Redacción de Publicaciones)
Javier Soler Areta (Actividades y concursos)

Secretario: José María Sordo Juanena
Vicesecretaria: Carmen Escribano Ródenas
Tesorero: José Manuel Gamboa Mutuberría
Bibliotecaria: Angélica Martínez Zarzuelo

Boletín de la Sociedad "Puig Adam"

ISSN: 1135-0261 Depósito Legal: M-7762-1995
Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis - 28917 Leganés (Madrid).
Telf.: 91 611 59 88 loureiro@graficasloureiro.es

El Boletín se distribuye gratuitamente a nuestros socios. Las instrucciones para hacerse socio aparecen en la página 96 del mismo.

Las instrucciones para publicar en el Boletín aparecen en las páginas 93-94 del mismo. Las propuestas de publicación de artículos, reseñas, etc., deben hacerse a través del correo electrónico de la Sociedad: puigadam@mat.ucm.es

En la portada aparece la figura adoptada como logotipo de la Sociedad "Puig Adam". Se trata de la figura de portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado "La Matemática y su enseñanza actual".

Página web de la Sociedad

`http://www.sociedadpuigadam.es`

Contenido:

Nuestra web contiene varias secciones: *Historia* de la Sociedad, *Boletín* de la Sociedad y *Concursos* de Problemas (el Concurso "Puig Adam" y otros concursos en que colaboran miembros de nuestra Junta Directiva).

Sobre la publicación del Boletín en nuestra web:

Nuestro Boletín se ha publicado ininterrumpidamente desde 1983 en que se fundó nuestra Sociedad. Muchos de los números antiguos están agotados y, con frecuencia se nos pide información sobre artículos publicados en ellos. La incomodidad de copiar reiteradamente dichos artículos por escaneo y de enviarlos nos ha llevado a adoptar la solución indicada a continuación.

Teniendo en cuenta la información solicitada a la Sociedad y, particularmente a algunos de nuestros socios, por parte de profesores y entidades (españolas y también de países sudamericanos) sobre artículos aparecidos en nuestro Boletín, varios de nuestros socios han propuesto incorporar parcialmente el Boletín a nuestra web, al igual que se está haciendo en otras Sociedades Matemáticas que publican revistas.

En respuesta a esta propuesta, se ha acordado que sean colgados en nuestra web en formato pdf los contenidos íntegros de los números de nuestro Boletín con más de cinco años de antigüedad y el índice de contenidos de los números publicados en los cinco últimos años. Ya se ha concluido esa tarea, de modo que los interesados pueden encontrar todos los Boletines en nuestra web.

Cómo acceder a los Boletines

Nuestra pág. web cuelga de la pág. de la Universidad Complutense de Madrid (www.ucm.es) y se puede entrar directamente en nuestra pág., por ejemplo, desde *Google*, tecleando *Sociedad Puig Adam*, seleccionando *Todos los Boletines* y eligiendo *Índices de los Boletines de los últimos cinco años*, o bien *Boletines completos de más de cinco años*.

Mantenedoras de la página web:

Beatriz Barrero Díaz y Carolina Bravo Sanz, bajo la dirección del Secretario de nuestra Sociedad.

Comité Editorial del Boletín

Gabriel Aguilera Venegas, Universidad de Málaga
José Antonio Alonso, Universidad de Sevilla
Francisco Baena Muñoz, Profesor de Instituto
Bärbel Barzel, University of Duisburg-Essen (Alemania)
Michel Beaudin, École de Technologie Supérieure, Montreal (Canadá)
Josef Böhm, Profesor de Instituto (Austria)
Joaquín Borrego, Universidad de Sevilla
Francisco Botana, Universidad de Vigo
Justo Cabezas, Profesor de Instituto y Univ. de Extremadura
Agustín Carrillo de Albornoz Torres, Profesor de Instituto y Univ. de Córdoba
Juan Carlos Cortés López, Universidad Politécnica de Valencia
Juan Jesús Donaire Moreno, Profesor del Instituto "Ramiro de Maeztu", Madrid
Fernando Etayo Gordejuela, Universidad de Cantabria
José Javier Etayo Gordejuela, Universidad Complutense de Madrid
Sergio Falcón, Universidad de las Palmas de Gran Canaria
Jose Luis Galán García, Universidad de Málaga
José Manuel Gamboa, Universidad Complutense de Madrid
José Alberto García Suárez, Profesor de Instituto y Univ. Santiago Compostela
María Gaspar Alonso-Vega, Profesora de Instituto y Univ. Complutense Madrid
Francisco González Redondo, Universidad Complutense de Madrid
Gregorio Hernández Peñalver, Universidad Politécnica de Madrid
Antonio Hernando Esteban, Universidad Politécnica de Madrid
David J. Jeffrey, University of Western Ontario (Canadá)
Nuria Joglar Prieto, Universidad Complutense de Madrid
Wolfram Koepf, Universität Kassel (Alemania)
Zoltán Kovács, The Private University College of Education, Linz (Austria)
Ricardo Luengo González, Universidad de Extremadura
Edgar Martínez Moro, Universidad de Valladolid
Angélica Martínez Zarzuelo, Universidad Complutense de Madrid
Ricardo Moreno Castillo, Profesor de Instituto y Univ. Complutense Madrid
Aleksandr Myllari, St. George's University (Grenada)

John Olive, The University of Georgia (USA)
Pavel Pech, University of South Bohemia (República Checa)
Pedro Quaresma, Universidade de Coimbra (Portugal)
Antonio Quesada, Akron University (USA)
Tomás Recio, Universidad de Cantabria
Luis Rico, Universidad de Granada
Eugenio Roanes Lozano, Universidad Complutense de Madrid
Eugenio Roanes Macías, Universidad Complutense de Madrid
Ana Romero, Universidad de La Rioja
Enrique Rubiales Camino, Profesor de Instituto y Univ. Complutense Madrid
Julio Rubio, Universidad de La Rioja
José Luis Ruiz Reina, Universidad de Sevilla
Eduardo Sáenz de Cabezón, Universidad de La Rioja
Fernando Sánchez Fernández, Universidad de Extremadura
Tomás Sánchez Giralda, Universidad de Valladolid
Javier Soler Areta, Catedrático de Instituto
José María Sordo Juanena, Universidad Complutense de Madrid
Jon R. Star, Harvard Graduate School of Education (USA)
Stanly Steinberg, University of New Mexico (USA)
Elena Varbanova, Technical University of Sofia (Bulgaria)
Nikolay N. Vassiliev, Russian Academy of Sciences (Rusia)
M. Pilar Vélez, Universidad Nebrija
Michael J. Wester, Cotopaxi and University of New Mexico (USA)

Edición de este número 111

La coordinación de la edición ha estado a cargo de Eugenio Roanes Macías.

Menciones de los artículos del Boletín

1) Recensiones de los artículos publicados en el Boletín aparecen en "MathEduc", lo que antes era Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM).
2) Los abstracts de los artículos están accesibles en el portal Dialnet.
3) El Boletín aparece en las bases de datos de publicaciones periódicas: Google Académico, UlrichsWeb y WorldCat.

Suspensión del XXXVIII Concurso “Puig Adam”

Durante el año 2021 correspondía celebrar el XXXVIII Concurso “Puig Adam”, que habíamos anunciado en la página 7 del anterior núm. 111 de nuestro Boletín. Las circunstancias sanitarias de todos conocidas obligaron a su suspensión, que fue oportunamente anunciada en la página web de nuestra Sociedad.

Suspensión de la Asamblea General Ordinaria de 2021

Por las mismas razones hubo de cancelarse la Asamblea General Ordinaria de este año, lo cual ya habíamos anunciado en la página 6 del anterior núm. 111 de nuestro Boletín.

Hay que señalar que procedía renovar los puestos siguientes, al cumplirse el periodo estatutario:

Vicepresidentes: Dª María Gaspar Alonso-Vega y
D. Juan Jesús Donaire Moreno
Vocal de Redacción de Publicaciones: D. Ricardo Moreno Castillo
Vicesecretaria: Dª Carmen Escribano Ródenas
Bibliotecaria: Dª Angélica Martínez Zarzuelo

A la vista de la incidencia, la Junta Directiva acordó prorrogar el mandato de todos ellos. La renovación de los citados puesto se someterá a la próxima Asamblea General, junto con todos los demás asuntos sobre los que la Asamblea debe pronunciarse.

Rediscovering and extending some classic geometric loci with the help of GeoGebra

Redescubriendo y extendiendo algunos lugares geométricos clásicos con ayuda de GeoGebra

Eugenio Roanes Macías
Depto. de Algebra, Geometría y Topología
Universidad Complutense de Madrid
roanes@ucm.es

Eugenio Roanes Lozano
Instituto de Matemática Interdisciplinar
Depto. de Didáctica de las CC. Experimentales, Sociales y Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
eroanes@ucm.es

Resumen

An experimental method devoted to rediscover classical geometric loci and find new branches of the curve of the locus is proposed. It is executed on the Graphic Window of GeoGebra. It is compared with two classical methods of loci determination, based on Synthetic Geometry and Elementary Analytical Geometry (using Cartesian coordinates), respectively. It is applied to three classic loci: a first locus considering "the difference of squares of distances to two fixed points being constant", a second locus derived from the "Altitude Theorem" and a third locus derived from the "Leg Theorem". In the first one only the classical solution is obtained; in the second one a new branch is rediscovered (which had already been previously found by other authors using a computer algebra method); and in the third one two new branches are obtained (first featured in this article, as far as we know). Finally, some reflections on the didactic interest of this method, in relation to the classical methods for studying geometric loci, as a prior or support method, are considered.

Panorámica evolutiva en la determinación de lugares

Los lugares geométricos han sido tratados, a lo largo de los tiempos, con distintas técnicas. Inicialmente, desde la época griega, se han aplicado técnicas de geometría sintética para determinar lugares. De este modo se trataban los lugares en textos de gran difusión entre hispano parlantes, como [1].

Desde que nació la Geometría Analítica, se comenzaron a usar coordenadas para hallar ecuaciones de lugares geométricos. De este modo se trataban en textos también de gran difusión entre hispano hablantes, como [2].

En la segunda mitad del pasado siglo se desarrollaron técnicas algebraicas novedosas, como las *Bases de Groebner* [3, 4] y las basadas en *pseudodivisión polinómica* [5], que por su laboriososidad, han sido implementadas en Sistemas de Cálculo Simbólico *(CAS)*, como *Maple* y *Mathematica*. Estas técnicas han sido aplicadas a problemas geométricos, como puede verse en [6] y [7]. Y, en particular, a determinar lugares, en artículos publicados en nuestro Boletín [8, 9, 10].

La aparición en los años 90 de los Sistemas de Geometría Dinámica *(DGS)*, como *Cabri, The Geometer Sketchpad*,.... y, más tarde, *GeoGebra*, han supuesto nuevas herramientas para visualizar y determinar lugares geométricos. En particular GeoGebra, el más difundido actualmente, además de visualizar en su *Ventana Gráfica*, dispone de un *(CAS)*, que permite ejecutar cómodamente cálculos algebraicos.

Recientemente, el Prof. Tomás Recio y sus colaboradores han desarrollado herramientas de razonamiento automático que han implementado en el *CAS GeoGebra* [12, 13, 14, 15], con las cuales se pueden obtener automáticamente ecuaciones de lugares geométricos. Y lo todavía más interesante es que, de este modo, han podido completar lugares geométricos que anteriormente se habían encontrado sólo parcialmente.

Tal es el caso, por ejemplo, del clásico lugar basado en el *Teorema de la altura*, del que hasta ahora se consideraba como solución sólo el conjunto de puntos de una circunferencia y que, con esta técnica, se ha descubierto que también son solución los puntos de una hipérbola equilátera de vértices dos puntos diametralmente opuestos de aquella circunferencia. Este interesante resultado aparece en un artículo publicado en el número anterior de nuestro Boletín [16].

Este hallazgo ha sido la motivación para desarrollar el presente trabajo. En éste se van a tratar tres lugares clásicos: el lugar basado en que sea constante la diferencia de cuadrados de distancias a dos puntos fijos, el antes mencionado teorema de la altura y el teorema del cateto. Y este último también deparará una sorpresa, ya que su solución no se limitará a una única circunferencia.

Finalmente, cada uno de estos tres problemas se va a tratar con tres técnicas: 1) por el método clásico, *vía geometría sintética*; 2) por un *método experimental sobre la Ventana Gráfica de GeoGebra*, ideado por los autores de este artículo; 3) por *vía geometría analítica*, esto es, recurriendo al uso de coordenadas. (Se omite el método anteriormente mencionado *vía algebraica*, que permite obtener automáticamente ecuaciones de lugares sobre el CAS de GeoGebra, por haber sido ya publicado en nuestro Boletín [16]).

Finalmente, en la última sección de este artículo, trataremos nuestra opinión sobre el problema didáctico acerca del orden más conveniente para usar estas técnicas en el aula, en función de la formación de los alumnos.

1. Lugar basado en que sea constante la diferencia de cuadrados de distancias a dos puntos fijos

Problema 1: *Fijados dos puntos del plano, A y B, y un número real fijo, k, determinar el lugar de los puntos C, tales que*

$$\overline{CB}^2 - \overline{CA}^2 = k \tag{1.1}$$

1.1 Solución clásica del problema 1 vía geometría sintética

Denotaremos por O al punto medio del segmento $\overline{AB}$ y por P a la proyección ortogonal de C sobre la recta AB (Figura 1).

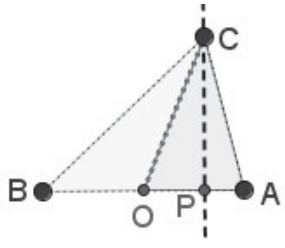


Figura 1: *Lugar de puntos que verifican* (1.1)

En el caso trivial en el cual sea $k = 0$, la condición (1.1) implica $\overline{CA} = \overline{CB}$, luego el triángulo ABC sería isósceles, siendo el lugar geométrico buscado la mediatriz $\overline{OC}$ del segmento $\overline{AB}$.

En caso de ser $k > 0$, es decir, $\overline{CA} < \overline{CB}$, entonces $\widehat{AOC} < \widehat{COB}$, luego $\widehat{AOC}$ es ángulo agudo y $\widehat{COB}$ obtuso. Aplicando el teorema del lado opuesto al ángulo agudo, al ángulo $\widehat{AOC}$ del triángulo AOC, resulta

$$\overline{AC}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OC}^2 - 2 \cdot \overline{AO} \cdot \overline{OP} \tag{1.2}$$

y aplicando el teorema del lado opuesto al ángulo obtuso, al ángulo $\widehat{COB}$ del triángulo BOC, resulta

$$\overline{BC}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{OC}^2 + 2 \cdot \overline{BO} \cdot \overline{OP} \tag{1.3}$$

Restando (1.2) de (1.3) y teniendo en cuenta que $\overline{AO} = \overline{BO}$, resulta

$$\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 = 4 \cdot \overline{AO} \cdot \overline{OP} = 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{OP} \tag{1.4}$$

Siendo similar el razonamiento para $k < 0$, es decir,para $\overline{CA} > \overline{CB}$, se concluye que el lugar de los puntos C que verifican (1.1) es la recta perpendicular a la AB por su punto P, tal que la medida del segmento orientado OP sea (tomando como positivo el sentido desde O hacia A)

$$medida(OP) = \frac{\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2 \cdot \overline{AB}} = \frac{k}{2 \cdot \overline{AB}} \tag{1.5}$$

o, de modo más elegante, mediante la expresión vectorial

$$\overrightarrow{OP} = \frac{k}{2 \cdot \overline{AB}^2} \overrightarrow{AB} \tag{1.6}$$

1.2 Descubrimiento experimental del lugar del Problema 1, visualizando en la *Ventana Gráfica* de GeoGebra

Comencemos definiendo en la *Ventana Gráfica* de GeoGebra los puntos fijos $O(0,0), A(1,0)$ y $B(-1,0)$. Esta elección de coordenadas permitirá expresar de modo sencillo la ecuación del lugar que se trata de determinar. Tras definir C, como *punto libre*, pueden definirse los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$. (Si se desea, se puede dibujar el triángulo ABC, pero esto no es necesario).

Para poder alterar posteriormente el valor del parámetro k de (1.1), interesa definir un *deslizador*, que denotaremos por **k**, con intervalo de variación [-10, 10], por ejemplo, denotando por k a su valor en cada instante.

Puesto que se trata de determinar los puntos C que verifican (1.1), este problema invita a considerar la desviación de $\overline{CB}^2 - \overline{CA}^2$ respecto del valor k elegido, tratando de que sea nula dicho desviación. Para ello, puede definirse la siguiente función $desvia1$, introduciéndola por línea de escritorio:

$$desvia1 = \overline{CB}^2 - \overline{CA}^2 - k$$

Una vez definida esta función, al arrastrar C, puede observarse cuánto se desvía $\overline{CB}^2 - \overline{CA}^2$ del valor elegido para k en el deslizador **k**.

De este modo queda todo preparado, como muestra la *Figura 2*, para realizar las experiencias, indicadas a continuación, que nos lleven a localizar experimentalmente el lugar geométrico definido por la condición (1.1).

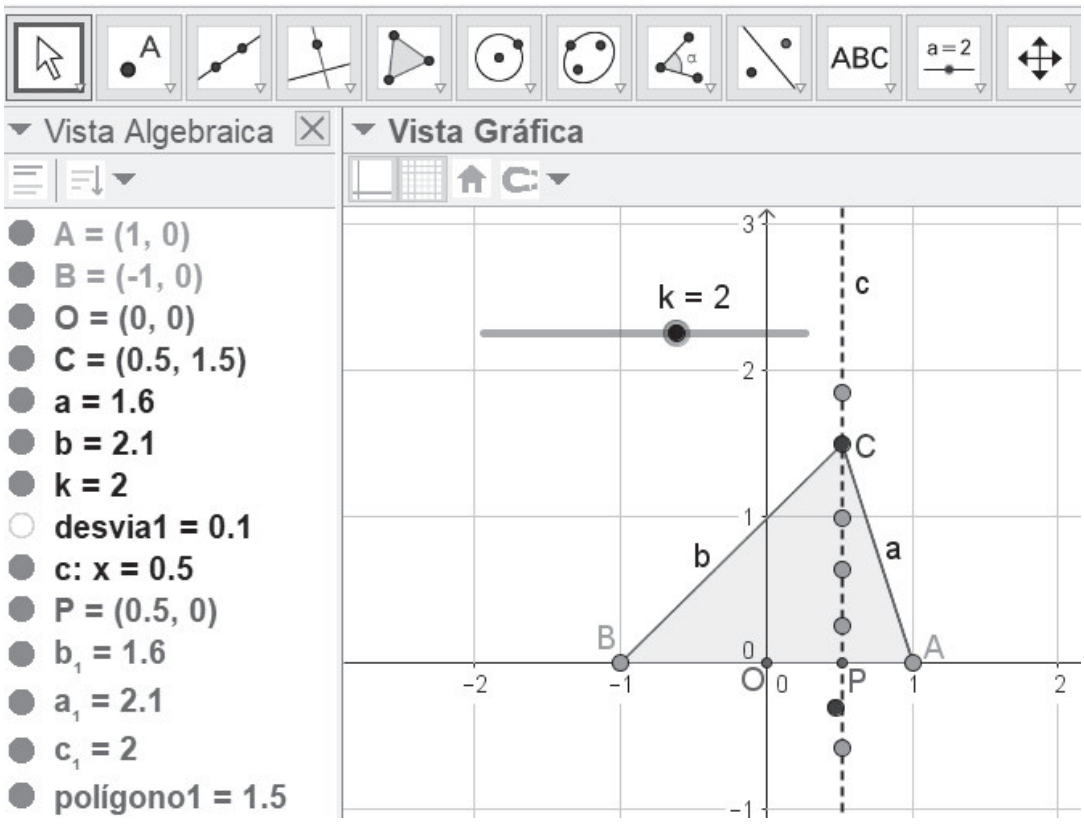


Figura 2: *Lugar de puntos que verifican* (1.1)

Experiencia 1.2.a: Arrastrar el cursor del deslizador **k**, para elegir el valor inicial de k. Entonces, al arrastrar el punto C (en la ventana *Vista Gráfica*), se observan posibles posiciones de este punto C para las cuales *desvia*1 toma valor nulo, o valor muy pequeño, próximo a 0 (en la ventana *Vista Algebraica*). Pronto se descubre que esto se consigue para posiciones de C en una perpendicular a la recta AB.

Arrastrando ahora el cursor del deslizador k hasta, por ejemplo, valor 2, se pueden observar posibles posiciones C para las cuales *desvia*1 toma valores próximos a 0 (puesto que no se está calculando en *aritmética exacta*, sino con valores aproximados). Pronto se concluye que esto se consigue para posiciones de C en la mediatriz de $\overline{OA}$.

Experiencia 1.2.b: Definir en la *Línea de escritorio* de GeoGebra la recta de ecuación $x = k$. A continuación, definir sobre ella como *punto sobre objeto* el punto R. Al arrastrando R sobre dicha recta se observa que *desvia*1 toma siempre valor 0.

Repitiendo con otro punto C, líbremente elegido, se observa que *desvia*1 sólo toma valor 0 cuando C está sobre la recta $x = k$. Y lo mismo se observa para otros valores de k, obtenidos arrastrando el deslizador **k** hasta otra posición.

Experiencia 1.2.c: Repitiendo lo indicado anteriormente para distintos valores de k, se puede tratar de prever la situación de la recta de puntos del lugar correspondiente al valor elegido en el deslizador **k**, llegándose a comprobar experimentalmente la validez de las fórmulas (1.5) o (1.6).

1.3 Determinación del lugar del Problema 1 con coordenadas

Al objeto de simplificar las expresiones, elegimos un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares de origen el punto medio O del segmento $\overline{AB}$ y tal que sea 2 la medida del segmento $\overline{AB}$ (Figura 3). De este modo, las coordenadas de los puntos antes considerados pueden denotarse

$$O(0,0), A(1,0), B(-1,0), C(x,y), P(x,0)$$

De acuerdo con esta notación, se tiene:

$$\overline{CB}^2 = (x+1)^2 + y^2 \quad \wedge \quad \overline{CA}^2 = (1-x)^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{CB}^2 - \overline{CA}^2 = 4x$$

Por tanto, el lugar definido por la condición (1.1) habrá de verificar la igualdad $4x = k$, luego tal lugar será la recta de ecuación

$$x = \frac{k}{4}$$

En particular, para $k = 0$ dicho lugar es la recta $x = 0$ (que es la mediatriz de $\overline{AB}$, como era de esperar), para $k = 2$ el lugar es la recta $x = 1/2$ (como muestra la Figura 3), para $k = 4$ el lugar es la recta $x = 1$ y para $k = -4$ el lugar es $x = -1$.

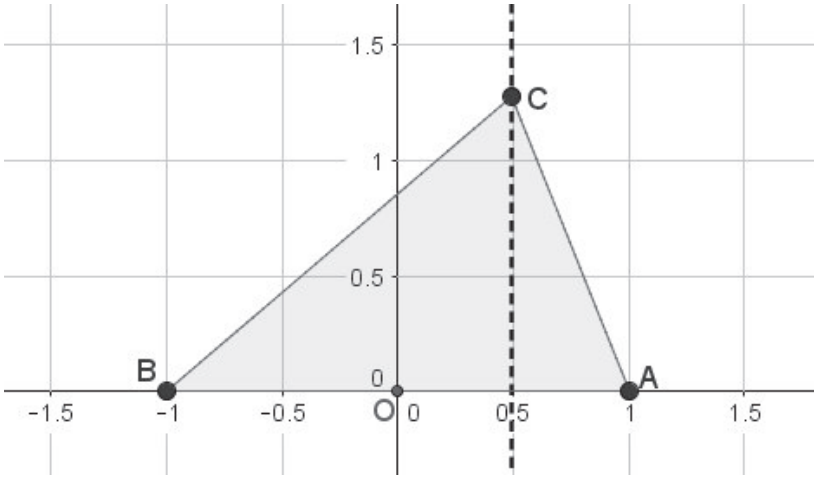


Figura 3: *El lugar de puntos para $k = 2$ es la recta x=1/2*

2. Lugar basado en el Teorema de la altura

Problema 2: *Fijados en el plano dos puntos, A y B, para cada punto, C, designaremos por H a la proyección ortogonal de C sobre la recta AB. Se trata de determinar el lugar de los puntos C, tales que* (Figura 4)

$$\overline{CH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{BH} \tag{2.1}$$

Nota 2.0: En esta configuración, caso de ser H punto interior del segmento $\overline{AB}$, la igualdad (2.1) invita a pensar en el *Teorema de la altura*, lo que justifica el título dado a esta sección.

2.1 Solución clásica del Problema 2 vía geometría sintética

Supuesto que C no está en la recta AB y que su proyección H es un punto interior del segmento $\overline{AB}$, entonces cabe preguntarse si la condición (2.1) implica que sea ABC triángulo rectángulo de base $\overline{AB}$ y altura $\overline{CH}$, lo que permitiría aplicar el teorema de la altura.

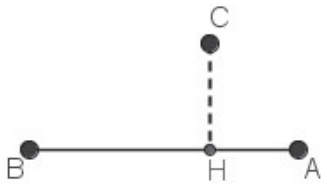


Figura 4

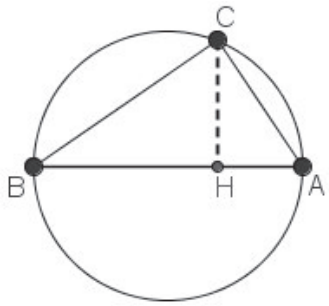


Figura 5

En efecto, consideremos los triángulos rectángulos AHC y CHB (Figura 4). La igualdad (2.1) implica

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{BH}}$$

y el ángulo de vértice H de ambos triángulos es recto, lo cual, por un criterio de semejanza, implica que ambos triángulos son semejantes.

En consecuencia, los ángulos $\widehat{ACH}$ y $\widehat{HCB}$ son complementarios, luego el ángulo $\widehat{ACB}$ es recto.

Por tanto ABC es un triángulo rectángulo de hipotenusa $\overline{AB}$, luego el lugar de los posibles puntos C que verifican la condición (1), incluye a los puntos C desde los cuales se ve $\overline{AB}$ bajo ángulo recto, es decir, a la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$ (Figura 5).

Pero, ¿no podría verificarse la igualdad (2.1) siendo C un punto tal que su proyección ortogonal, H, sobre la recta $\overline{AB}$ fuera exterior al segmento $\overline{AB}$?

Para analizar tal posibilidad, comenzaremos explorando experimentalmente esta cuestión sobre la *Vista Gráfica* de *GeoGebra*.

2.2 Descubrimiento experimental del lugar del Problema 2, visualizando en la *Vista Gráfica* de GeoGebra

Comenzamos definiendo en la *Ventana Gráfica* de GeoGebra los puntos fijos $O(0,0), A(1,0)$ y $B(-1,0)$. Esta elección de coordenadas permitirá expresar de modo sencillo las ecuaciones del lugar que se trata de determinar.

Tras definir C como *punto libre*, dibujamos el triángulo ABC haciendo uso de la herramienta *Polígono*. Y, una vez dibujada la recta AB, podemos trazar la perpendicular por C a AB, denotándola r. Al punto de intersección de r con la recta AB lo denotaremos H, pudiendo ya ocultar la recta r.

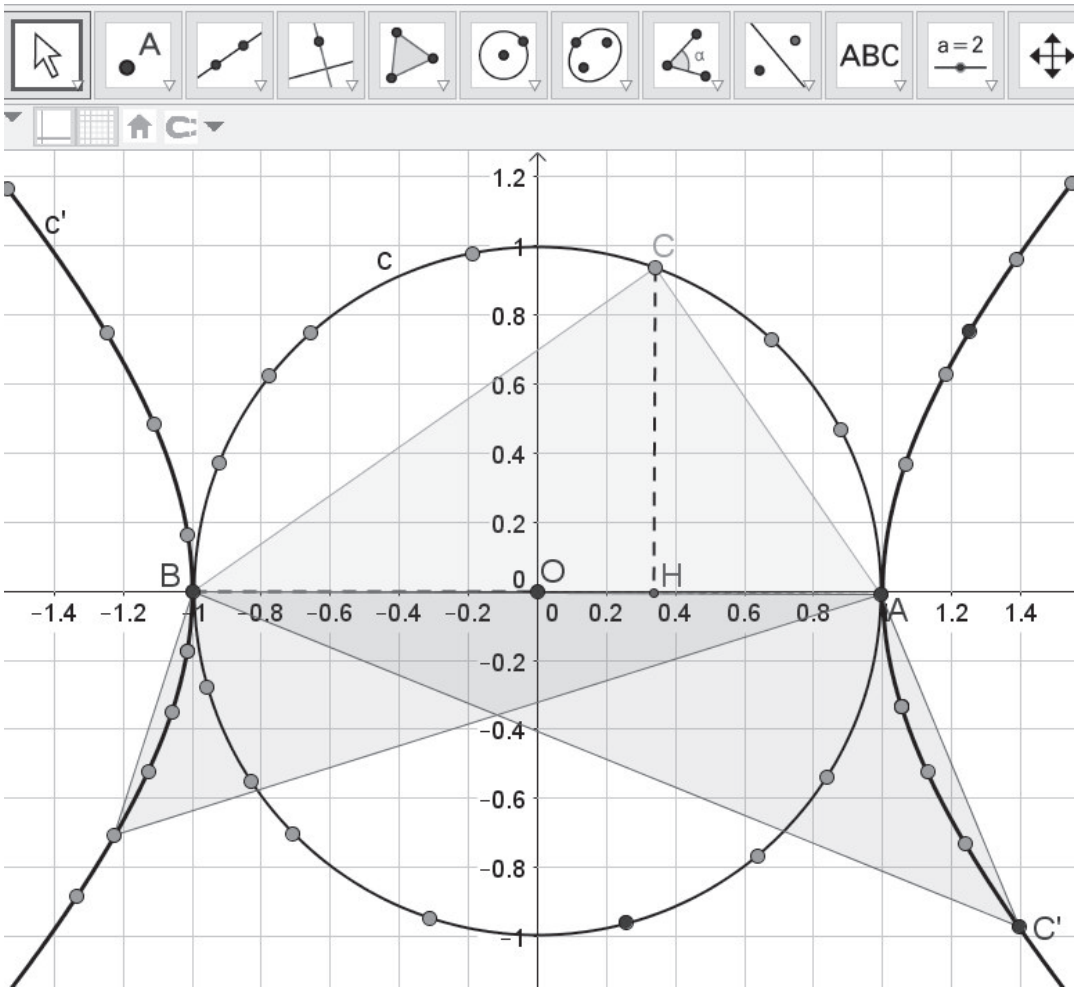


Figura 6: *Lugar de puntos C que verifican la condición (2.1)*

Puesto que C se ha definido como punto libre (sin ligaduras), puede arrastrarse a cualquier otra posición y para darnos idea de si C verifica la condición (2.1), o si se desvía más o menos de verificarla, definimos la función

$$desvia2 = \overline{CH}^2 - \overline{AH} \cdot \overline{BH}$$

Experiencia 2.2.a: Arrastrando ahora C, de modo que H se mantenga en el segmento AB, se pueden ir encontrando posiciones de C para los que $desvia2 = 0$, los cuales serán puntos del lugar que se trata de determinar. Cada uno de los puntos de este modo detectados se puede marcar en la *Vista Gráfica*, usando para ello la herramienta *Punto*, y para evitar que GeoGebra ponga nombre a esos nuevos puntos, enmarañando la figura, basta elegir previamente en *Opciones: Etiquetado / Ningún objeto nuevo*.

De este modo se pueden determinar experimentalmente varios puntos en ambos semiplanos de borde la recta AB, cuyas posiciones nos inducen a pensar que los puntos de la circunferencia de diámetro AB están en el lugar geométrico definido por (2.1).

Experiencia 2.2.b: Para verificar lo anterior, podemos dibujar la circunferencia de centro O que pasa por A, denotándola, por ejemplo, d. Definiendo P como *punto en objeto* sobre d, al arrastrar P, se observa que se mantiene $desvia2 = 0$, lo que lleva a concluir experimentalmente que los puntos de d pertenecen al lugar definido por la condición (2.1).

Experiencia 2.2.c: Arrastrando ahora C, de modo que H sea punto exterior al segmento $\overline{AB}$, se detectan nuevas posiciones de C para los que, también, $desvia2 = 0$ (tanto a la derecha de A como a la la izquierda de B). Tales nuevos puntos, de este modo detectados, también serán puntos del lugar geométrico que se trata de determinar. Si se van marcando, usando la herramienta *Punto*, al llegar a localizar suficientes y observar sus posiciones, estas nos inducen a pensar en una *hipérbola* de vértices A y B.

Para comprobarlo, basta dibujar la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 1$, definiendola por su ecuación. Definiendo ahora C' como punto en objeto sobre dicha hipérbola, puede observarse que la arrastrar C' sobre ella, se mantiene $desvia2 = 0$ (tanto en una rama de la hipérbola, como en la otra). Todo ello lleva a concluir experimentalmente que los puntos de esa hipérbola también pertenecen al lugar definido por (2.1).

2.3 Determinación del lugar del Problema 2 con coordenadas

En aras de simplificar expresiones, elegimos un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares de origen el punto medio, O, del segmento $\overline{AB}$ y tal que sea 2 la medida del segmento $\overline{AB}$. De este modo, las coordenadas de los puntos antes considerados pueden denotarse

$$O(0,0), A(1,0), B(-1,0), C(x,y), H(x,0)$$

Distingamos posibles casos, según la posición del punto H (de la recta AB) respecto de segmento $\overline{AB}$ y su punto medio O (Figura 7):

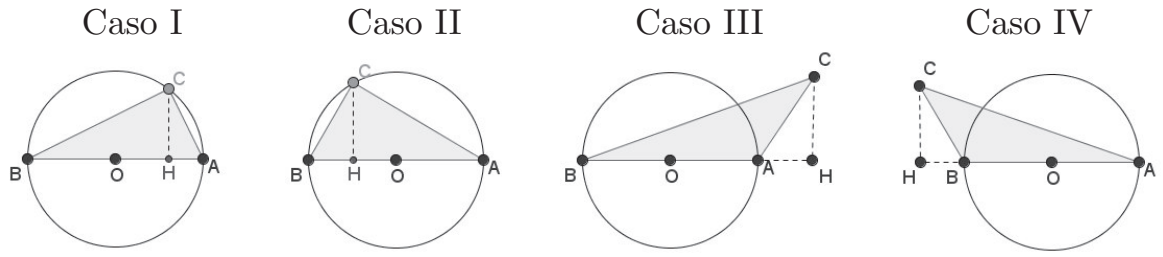


Figura 7: *Casos posibles según la posición de H respecto de A y B*

Caso I: Si $H \in \overline{OA}$, entonces es $0 \leq x \leq 1$ y las medidas de los segmentos anteriormente considerados son $\overline{AH} = 1 - x$, $\overline{BH} = 1 + x$, $\overline{CH} = y$, lo que sustituido en (2.1) implica $y^2 = (1-x)(1+x)$, de donde operando resulta

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{2.2}$$

Caso II: Si $H \in \overline{BO}$, entonces es $-1 \leq x \leq 0$ y las medidas de los segmentos anteriormente considerados son $\overline{AH} = 1 - x$, $\overline{BH} = 1 + x$, $\overline{CH} = y$, lo que sustituido en (2.1) conduce a la misma ecuación (2.2).

Caso III: Si H está en la semirrecta de origen A que no contiene a B, entonces es $x > 1$ y las medidas de los segmentos antes considerados son $\overline{AH} = x - 1$, $\overline{BH} = x + 1$, $\overline{CH} = y$, lo que sustituido en (2.1) implica $y^2 = (x-1)(x+1)$, de donde operando resulta

$$x^2 - y^2 = 1 \tag{2.3}$$

Caso IV: Si H está en la semirrecta de origen B que no contiene a A, entonces es $x < -1$ y las medidas de los segmentos antes considerados son

$\overline{AH} = 1 - x$, $\overline{BH} = -x - 1$, $\overline{CH} = y$, lo que sustituido en (2.1) implica $y^2 = (-x + 1)(-x - 1)$, de donde operando resulta la misma ecuación (2.3).

En resumen, el lugar definido por los puntos C que verifican (2.1) incluye a la circunferencia (2.2) y a la hipérbola equilátera (2.3).

Nota 2.3: Así pues, la ecuación del lugar de los puntos que verifican (2.1) consta de los puntos cuyas coordenadas (x, y) verifican alguna de las ecuaciones (2.2) o (2.3), es decir, aquellos puntos cuyas coordenadas anulan alguno de los dos polinomios x^2+y^2-1 , x^2-y^2-1, cuyo producto es el polinomio

$$x^4 - 2x^2 - y^4 + 1 \tag{2.4}$$

siendo pues la ecuación del lugar geométrico completo la que resulta de igualar a cero el polinomio (2.4). Este polinomio se podría obtener directamente con el comando *EcuacionLugar* de GeoGebra, descrito en [16], donde se trata la unificación de las ecuaciones (2.2) y (2.3) en la geometría de Lorentz.

3. Lugar basado en el Teorema del cateto

Problema 3: *Fijados en el plano dos puntos , A y B, para cada punto, C, designaremos por H a la proyección ortogonal de C sobre la recta AB. Se trata de determinar el lugar de los puntos C, tales que (Figura 4), o bien*

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AH} \tag{3.1a}$$

o bien

$$\overline{BC}^2 = \overline{BA} \cdot \overline{BH} \tag{3.1b}$$

Nota 3.0: caso de ser H punto interior del segmento $\overline{AB}$, las igualdades (3.1a) y (3.1b), en esa configuración, invitan a pensar en el *Teorema del cateto*, lo que justifica el título dado a esta sección.

3.1 Solución clásica del Problema 3 vía geometría sintética

Supuesto que C no está en la recta AB y H es punto interior del segmento $\overline{AB}$, entonces cabe preguntarse si la condición (3.1a), o la (3.1b), implican que sea ABC triángulo rectángulo de hipotenusa $\overline{AB}$, lo que permitiría aplicar el teorema del cateto al lado $\overline{AC}$ (o, respectivamente, al $\overline{BC}$).

En efecto, consideremos los triángulos ABC y ACH en la misma Figura 4. La igualdad (3.1a) implica

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AH}}$$

y, por otra parte, el ángulo $\widehat{BAC}$ es común a esos dos triángulos.

Estas dos condiciones, por un criterio de semejanza de triángulos, implican que ambos triángulos son semejantes. En consecuencia, los ángulos $\widehat{ACH}$ y $\widehat{ABC}$ son iguales, luego $\widehat{ACH}$ y $\widehat{HCB}$ son complementarios, lo que implica que el ángulo $\widehat{ACB}$ es recto.

Por tanto, ABC es un triángulo rectángulo de hipotenusa $\overline{AB}$, luego el lugar de los posibles puntos C que verifican la condición (3.1a), incluye a los puntos C desde los cuales se ve $\overline{AB}$ bajo ángulo recto, es decir, a la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$.

Pero, como sucedió para el Problema 2, ¿no podría verificarse la igualdad (3.1a) o la (3.1b), siendo C un punto tal que su proyección ortogonal, H, sobre la recta $\overline{AB}$ fuera exterior al segmento $\overline{AB}$?

Para analizar tal posibilidad, vamos a explorar experimentalmente esta cuestión sobre la *Vista Gráfica* de *GeoGebra*, como se hizo en la Sección 2.2, pero ahora para el Problema 3.

3.2 Visualizando el lugar del Problema 3 en GeoGebra

Comenzamos definiendo en la *Vista Gráfica* de *GeoGebra* los puntos fijos $O(0,0), A(1,0)$ y $B(-1,0)$.

Tras definir C, como *punto libre* (sin ligaduras), dibujamos sucesivamente la recta AB y el triángulo ABC. Una vez dibujada la recta AB, podemos trazar la perpendicular por C a AB, denotándola r. Al punto de intersección de r con la recta AB lo denotaremos H, pudiendo ya ocultar la recta r.

Puesto que C se ha definido como punto libre, puede arrastrarse a cualquier otra posición, y para darnos idea de si H verifica una de las condiciones (3.1a) o (3.1b), o si se desvía de verificarlas, definimos las dos funciones:

$$desvia3a = \overline{AC}^2 - \overline{AB} \cdot \overline{AH}$$

$$desvia3b = \overline{BC}^2 - \overline{BA} \cdot \overline{BH}$$

Experiencia 3.2.a: Arrastrando ahora C, de modo que H se mantenga en el interior del segmento AB, se pueden ir encontrando posiciones de C para las que $desvia3a = 0$, las cuales corresponden a puntos del lugar que se trata de determinar. Cada uno de los puntos de este modo detectados se puede marcar sobre en la *Ventana Gráfica* usando la herramienta *Punto*. De este modo se pueden determinar experimentalmente varios puntos en ambos semiplanos de borde la recta AB, cuyas posiciones nos inducen a pensar que los puntos de la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$ (Figura 8) están en el lugar geométrico definido por la condición (3.1a).

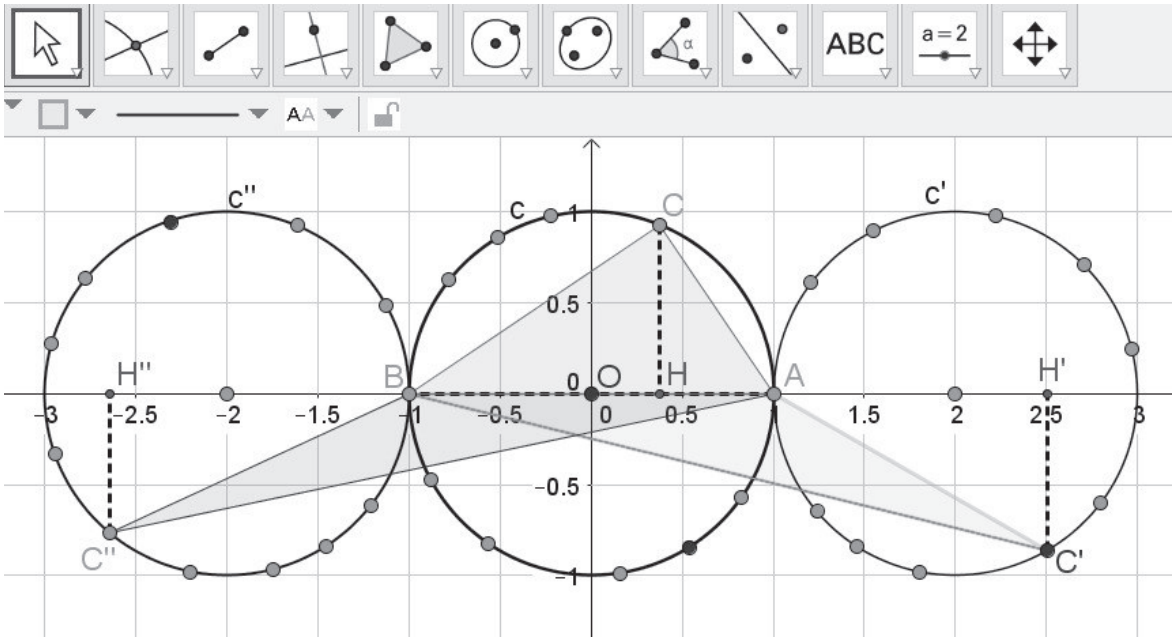


Figura 8: *Lugar de puntos C que verifican, o bien (3.1a), o bien (3.1b)*

Experiencia 3.2.b: En efecto, dibujando la circunferencia, c, de centro O que pasa por A y definiendo ahora C como *punto en objeto* sobre ella, al arrastrar C se observa que se mantiene $desvia3a = 0$, lo que lleva a concluir experimentalmente que los puntos de c pertenecen al lugar definido por (3.1a).

Experiencia 3.2.c: Arrastrando ahora C, de modo que H esté en la semirrecta de origen A, que no contiene a B, se detectan nuevas posiciones de C para los que $desvia3a = 0$. Sus posiciones inducen a pensar en la circunferencia c', del mismo radio que c y tangente exteriormente a la c en el punto A. Para

comprobarlo, basta dibujar c', definir C' como punto en objeto sobre c' y arrastrarlo, para observar que, al hacerlo, se mantiene $desvia3a = 0$, lo que lleva a concluir experimentalmente que los puntos de c' pertenecen al lugar definido por (3.1a).

Experiencia 3.2.d: Arrastrando ahora C, de modo que H esté en la semirrecta de origen B, que no contiene a A, se detectan nuevas posiciones de C para los que $desvia3b = 0$. Sus posiciones inducen a pensar en la circunferencia c'', del mismo radio que c y tangente exteriormente a la c en el punto B. Para comprobarlo, basta dibujar c'', definir C'' como punto en objeto sobre c'' y arrastrarlo, para observar que, al hacerlo, se mantiene $desvia3b = 0$, lo que lleva a concluir experimentalmente que los puntos de c'' también pertenecen al lugar definido por (3.1b).

3.3 Determinación del lugar del Problema 3 con coordenadas

De modo similar a como hicimos en la Sección 2.3, al objeto de simplificar las expresiones, elegimos las coordenadas de los puntos relevantes de la configuración del siguiente modo:

$$O(0,0), A(1,0), B(-1,0), C(x,y), H(x,0)$$

Distingamos posibles casos, según la posición del punto H (de la recta AB) respecto de segmento $\overline{AB}$ y su punto medio O (Figura 9):

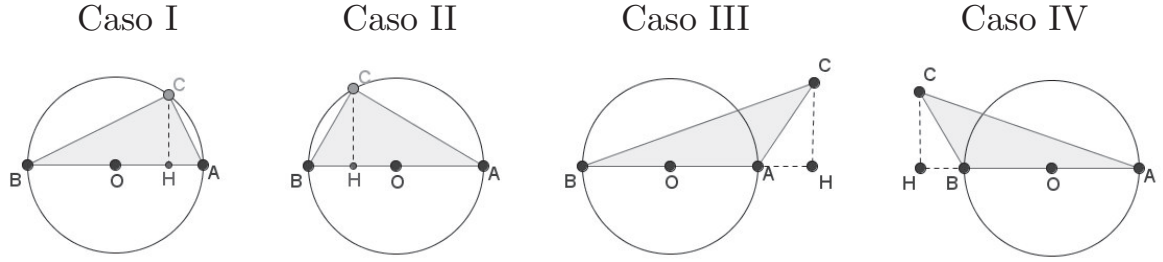


Figura 9: *Posibles posiciones del punto H, respecto de A y B*

Caso I: Si $H \in \overline{OA}$, entonces es $0 \leq x \leq 1$ y las medidas de los segmentos considerados son $\overline{AH} = 1-x$, $\overline{AB} = 2$, $\overline{AC^2} = (1-x)^2+y^2$, lo que sustituido en (3.1a) implica $(1-x)^2 + y^2 = 2 \cdot (1-x)$, de donde operando resulta

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{3.2}$$

Caso II: Si $H \in \overline{OB}$, entonces es $-1 \leq x \leq 0$ y las medidas de los segmentos considerados son $\overline{AH} = 1-x$, $\overline{AB} = 2$, $\overline{AC^2} = (1-x)^2+y^2$, lo que sustituido en (3.1a) implica $(1-x)^2 + y^2 = 2 \cdot (1-x)$, de donde operando resulta la misma ecuación (3.2).

Caso III: Si H está en la semirrecta de origen A que no contiene a B, entonces es $x > 1$ y las medidas de los segmentos considerados son $\overline{AH} = x-1$, $\overline{AB} = 2$, $\overline{AC^2} = (x-1)^2 + y^2$, lo que sustituido en (3.1a) implica $(x-1)^2 + y^2 = 2 \cdot (x-1)$, de donde operando resulta

$$(x-2)^2 + y^2 = 1 \tag{3.3}$$

que es la circunferencia de centro (2,0) y radio 1.

Caso IV: Si H está en la semirrecta de origen B que no contiene a A, entonces es $x < -1$ y las medidas de los segmentos antes considerados son $\overline{AH} = -x+1$, $\overline{AB} = 2$, $\overline{AC^2} = (-x+1)^2 + y^2$, lo que sustituido en (3.1a) implica $(-x+1)^2 + y^2 = 2 \cdot (-x+1)$ de donde operando resulta la misma ecuación (3.3). Pero si se considera el cateto $\overline{CB}$, en vez del $\overline{CA}$, y la ecuación (3.1b), en vez de la ecuación (3.1a), entonces los segmentos a considerar son $\overline{BH} = -x-1$, $\overline{BA} = 2$, $\overline{BC^2} = (-x-1)^2 + y^2$, lo que sustituido en (3.1b) implica $(-x-1)^2 + y^2 = 2 \cdot (-x-1)$, de donde operando resulta

$$(x+2)^2 + y^2 = 1 \tag{3.4}$$

que es la circunferencia de centro (-2,0) y radio 1.

En resumen, el lugar definido por los puntos C que verifican, o bien (3.1a), o bien (3.1b), incluye a las tres circunferencias (3.2), (3.3) y (3.4), que aparecen en la Figura 9, lo que está de acuerdo con lo observado experimentalmente en la Sección **3.2**.

Conclusiones y sugerencias

En este artículo se ha hecho uso de distintos métodos de resolución de lugares geométricos sobre tres ejemplos clásicos de lugares. En el primer ejemplo se ha obtenido como lugar la solución clásica, una recta. En el segundo ejemplo se ha considerado un lugar que incluye dos curvas: una circunferencia (solución clásica) y una hipérbola equilátera, lo cual ya fue obtenido en [16] (por un

método algebraico-computacional). Y en el tercer ejemplo se ha considerado un lugar que incluye tres curvas: una circunferencia (solución clásica) y otras dos circunferencias tangentes exteriormente a aquella y con centros colineales (solución novedosa del presente artículo).

En los tres problemas se han aplicado tres métodos de búsqueda de lugares geométricos: 1º) la técnica clásica de geometría sintética ; 2º) un método experimental sobre *la Vista Gráfica* de *GeoGebra*, al estilo de las ciencias experimentales, ideado por los autores de este artículo; 3º) usando coordenadas, con técnicas de geometría analítica elemental.

El primer método, basado en geometría sintética, sólo nos llevó a obtener una de las ramas de la curva solución en el segundo y tercer problema tratados. El método experimental sobre la *la Vista Gráfica* nos permitió descubrir otras ramas del lugar tratado. Y el tercer método, usando coordenadas, nos permitió probar lo antes descubierto experimentalmente.

Naturalmente, esto no significa que se haya de prescindir de la técnica clásica de geometría sintética. Muy al contrario, esa técnica, la más antigua, y elegante, ha permitido solucionar bellos problemas de lugares geométricos desde la antigüedad.

Pero no olvidemos un célebre dicho del gran matemático J.L. Lagrange: *Tant que l'Algèbre et la Géométrie ont été séparées, leurs progrès ont été lents et leurs usages bornés; mais lorsque ces deux sciences se sont réunies, elles se sont prêté des forces mutuelles et ont marché ensemble d'un pas rapide vers la perfection. C'est à Descartes qu'on doit l'application de l'Algèbre à la Géométrie, application qui est devenue la clef des plus grandes découvertes dans toutes les branches des Mathématiques* ([17], p. 271). A lo que hoy se podría añadir: *Si al Álgebra y a la Geometría se une la Computación, entonces la ficción llega a ser realidad tangible y aplicable.*

Remarquemos al respecto dos avances mencionados en este artículo sobre la detección de nuevas ramas en lugares geométricos clásicos: el *descubrimiento experimental* mediante visualización sobre la *Vista Gráfica* de *GeoGebra* y la *determinación automática de lugares* mediante el nuevo comando *EcuacionLugar*, comentado en la Nota 2.3 del final de la Sección 2.

Finalmente, mencionaremos una cuestión didáctica de sumo interés: *¿cuál es el orden en que conviene presentar a los alumnos las distintas técnicas sobre determinación de lugares geométricos?.*

La importancia de la visualización, a fin de elaborar ideas intuitivas previas a la introducción formal de conceptos, no es ninguna novedad. Ya fue señalada por el gran matemático francés H. Poincaré, como recoge M. Kline en [18], pág. 36: *(...) ¿Es posible entender una teoría si desde el primer momento se le da la forma definitiva que impone una lógica rigurosa, sin mencionar para nada el camino por el que ha llegado a adoptar esa forma? No, realmente no es posible entenderla, incluso resulta imposible retenerla si no es de memoria.* La importancia de la visualización también la trata Miguel de Guzmán en su libro [19].

Nuestra opinión, a este respecto, es que comenzar el estudio de un lugar geométrico memorizando su demostración vía geometría sintética o geometría analítica no es el camino óptimo. Entendemos que es, en cada caso, el profesor, en función de la metodología seguida, quien ha de decidir si las visualizaciones del estilo de las aquí expuestas conviene presentarlas de modo *previo* o *simultáneo* al estudio más formal de lugares con técnicas de geometría sintética o de geometría analítica elemental.

Finalmente, señalar que no son estas las únicas técnicas utilizables para determinar lugares. Por ejemplo, en el artículo [20] publicado en nuestro Boletín se trata un lugar más propio de atacar con técnicas de Análisis Matemático, como allí se hace.

Invitamos a los lectores a descubrir otros lugares cuyas soluciones clásicas sean incompletas.

Referencias

[1] P. Puig Adam (1953): *Geometría Métrica I.* Ed. Biblioteca Matemática. Madrid.

[2] J. Rey Pastor, L.A. Santaló, M. Balanzat (1955): *Geometría Analítica.* Ed. Kapelusz. Buenos Aires.

[3] B. Buchberger (2006): Bruno Buchberger's PhD thesis (1965): An algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zero dimensional polynomial ideal. *Journal of Symbolic Computation*, **41**, 475–511. doi: 10.1016/j.jsc.2005.09.007.

[4] D. Cox, J. Little, D. O´Shea (1992): *Ideals, Varieties and Algorithms.* Ed. Springer.

[5] S.-C. Chou (1988): Mechanical Geometry Theorem Proving. Ed. Reidel.

[6] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano (1994): *Nuevas tecnologías en geometría*. Ed. Complutense. Madrid.

[7] T. Recio (1998): *Cálculo simbólico y geométrico*. Ed. Síntesis. Madrid.

[8] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano (1999): Búsqueda automática de lugares geométrícos. *Bol. de la Soc. Puig Adam*, **53**, 67-77.

[9] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano (2001): Lugares geométrícos encontrados con ayuda del Álgebra y la Computación. *Bol. de la Soc. Puig Adam*, **57**, 62-79.

[10] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano, Luis M. Laita, M. Villar Mena (2002): Un método paramétrico para demostrar automáticamente y determinar lugares a partir de las construcciones geométricas. *Bol. de la Soc. Puig Adam*, **62**, 34-71.

[11] E. Roanes Lozano, E. Roanes Macías (2014): Otro modo de presentar la matemática elemental, visualizando y explorando con GeoGebra. *Bol. de la Soc. Puig Adam*, **98**, 47-74.

[12] Z. Kovács, T. Recio, M.P. Vélez (2018): Using Automated Reasoning Tools in GeoGebra in the Teaching and Learning of Proving in Geometry. *International Journal of Technology in Mathematics Education*, **25/2**, 33-50.

[13] Z. Kovács, T. Recio, M.P. Vélez (2019): Detecting truth, just on parts. Revista Matemática Complutense, Vol. **32/2**, 451-474. doi: 10.1007/s13163-018-0286-1.

[14] T. Recio, S. Van Vaerenbergh, M.P. Vélez (2020): Herramientas de Razonamiento Automático en GeoGebra: qué son y para qué sirven. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. **16/59**, 08-15. Disponible en: `https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/202`.

[15] Z. Kovács, T. Recio, L.F. Tabera, M.P. Vélez (2021): Dealing with Degeneracies in Automated Theorem Proving in Geometry. *Mathematics*, **9/16**, artículo número 1964. doi: 10.3390/math9161964.

[16] F. Etayo, N. de Lucas, T. Recio, M.P. Vélez (2021): Inventando teoremas con GeoGebra: un nuevo Teorema de la Altura, *Bol. de la Soc. Puig Adam*, **111**, 8-27.

[17] J.L. Lagrange (1877): Leçons élémentaires sur les mathématiques. En: *Oeuvres de Lagrange*. Tome Septième. Gauthiers-Villars. Paris. Disponible en: `http://sites.mathdoc.fr/cgi-bin/oetoc?id=OE_LAGRANGE_7`.

[18] M. Kline (1998): *El fracaso de la matemática moderna. Por qué Juanito no sabe sumar*. Siglo XXI de España Editores. Madrid.

[19] M. de Guzmán (2010): *El rincón de la pizarra: ensayos de visualización en análisis matemático*. Ediciones Pirámide. Madrid.

[20] R. Moreno Castillo (2020): Sobre el lugar de puntos cuya suma de distancias a los vértices de un cuadrado es constante. *Bol. de la Soc. Puig Adam*, **109**, 28-39.

Generalization of a Diophantine Problem

Generalización de un problema diofántico

Ricardo Moreno Castillo
Catedrático de instituto jubilado
moreno_castillo@hotmail.es

Abstract

This article generalizes a problem raised by Diophantus of Alexandria

Introducción

En el problema VI del libro III de su *Aritmética* encuentra Diofanto tres números racionales cuya suma es un cuadrado y tales que sumados dos a dos también dan lugar a cuadrados. En el número 73 de este Boletín propuse un procedimiento para encontrar infinitas soluciones. Y ahora propongo el mismo problema con un sumando más, esto es, encontrar cuatro números racionales cuya suma sea un cuadrado y que sumados tres a tres den lugar a cuadrados. Se trata pues de resolver en números racionales el sistema siguiente:

$$x + y + z + t = 1$$
$$y + z + t = a^2$$
$$x + z + t = b^2$$
$$x + y + t = c^2$$
$$x + y + z = d^2$$

El uno que hay en la primera ecuación no supone restricción alguna, porque si cuatro números suman un cuadrado, podemos dividirlos por dicho cuadrado.

1. Resolución del problema

Si sumamos las cuatro últimas ecuaciones del sistema planteado tenemos lo que sigue: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 3(x + y + z + t) = 3$. Entonces, si conseguimos una expresión del tres como suma de cuatro cuadrados menores que uno, ya tenemos que $x = 1 - a^2$, $y = 1 - b^2$, $z = 1 - c^2$ y $t = 1 - d^2$. Entonces solo hay que dar con dicha representación del tres.

2. De cómo se puede escribir el dos como suma de dos cuadrados

El dos se puede poner como suma de dos cuadrados del siguiente modo:

$$\left(\frac{u^2 - 2u - 1}{u^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{u^2 + 2u - 1}{u^2 + 1}\right)^2 = 2$$

Como la demostración ya se hizo en el trabajo citado, la doy por hecha.

3. De cómo se puede escribir el tres como suma de un cuadrado más el doble de otro cuadrado

Ahora vamos a descomponer el tres en suma de cuatro cuadrados, de tal modo que cada uno de ellos sea menor que la unidad. Consideramos la igualdad:

$$3 = \left(\frac{x}{z}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{z}\right)^2$$

La escribimos del siguiente modo:

$$z^2 - x^2 = 2y^2 - 2z^2,$$

y a continuación de este otro:

$$(z + x)(z - x) = 2(y + z)(y - z).$$

De esta manera tenemos cuatro números *t*, *u*, *v* y *w* tales que $tu = 2vw$ y $z + x = u$, $z - x = t$, $y + z = w$ e $y - z = v$.

Entonces $2z = u + t = w - v$. Ahora bien, como $t = 2vw/u$, tenemos que $w - v = u + 2vw/u$, lo cual nos lleva a $wu - vu = u^2 + 2vw$ y de aquí resulta lo siguiente: $w/u = (u + v)/(u - 2v)$. Entonces:

$$2x = u - t = u - \frac{2vw}{u} = u - 2v\frac{u+v}{u-2v} = \frac{u^2 - 4uv - 2v^2}{u-2v}$$

$$2y = v + w = v + u\frac{w}{u} = v + u\frac{u+v}{u-2v} = \frac{u^2 + 2uv - 2v^2}{u-2v}$$

$$2z = u + t = u + 2v\frac{w}{u} = u + 2v\frac{u+v}{u-2v} = \frac{u^2 + 2v^2}{u-2v}$$

De aquí se deduce lo siguiente:

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 = \left(\frac{u^2 - 4uv - 2v^2}{u^2 + 2v^2}\right)^2 \quad ; \quad \left(\frac{y}{z}\right)^2 = \left(\frac{u^2 + 2uv - 2v^2}{u^2 + 2v^2}\right)^2$$

Como los polinomios son homogéneos, dividimos *u* y *v* entre *v,* y a la nueva variable, *u/v* , la volvemos a llamar *v*:

$$3 = \left(\frac{v^2 - 4v - 2}{v^2 + 2}\right)^2 + 2\left(\frac{v^2 + 2v - 2}{v^2 + 2}\right)^2$$

4. Descomposición del tres como suma de cuatro cuadrados distintos y menores que la unidad

Si en la última expresión hacemos $v = 50$, tenemos lo siguiente:

$$3 = \left(\frac{383}{417}\right)^2 + 2\left(\frac{433}{417}\right)^2$$

Y en lugar del dos, ponemos la expresión obtenida en el apartado 2:

$$3 = \left(\frac{383}{417}\right)^2 + \left(\frac{u^2 - 2u - 1}{u^2 + 1}\right)^2\left(\frac{433}{417}\right)^2 + \left(\frac{u^2 + 2u - 1}{u^2 + 1}\right)^2\left(\frac{433}{417}\right)^2$$

Hacemos (por ejemplo) $u = 10$, tenemos que:

$$3 = \left(\frac{383}{417}\right)^2 + \left(\frac{79}{101}\right)^2\left(\frac{433}{417}\right)^2 + \left(\frac{119}{101}\right)^2\left(\frac{433}{417}\right)^2$$

Ahora desglosamos el tercer sumando en suma de dos cuadrados:

$$3 = \left(\frac{383}{417}\right)^2 + \left(\frac{79}{101}\right)^2\left(\frac{433}{417}\right)^2 + \left(\frac{119}{101}\right)^2\left(\frac{433}{417}\right)^2\left[\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2\right]$$

$$3 = \left(\frac{383}{417}\right)^2 + \left(\frac{34207}{42117}\right)^2 + \left(\frac{154581}{210585}\right)^2 + \left(\frac{206108}{210585}\right)^2$$

Y con esto ya podemos encontrar una solución del problema:

$$x = 1 - \left(\frac{383}{417}\right)^2 = \frac{27200}{173889}$$

$$y = 1 - \left(\frac{34207}{42117}\right)^2 = \frac{603722840}{1773841689}$$

$$z = 1 - \left(\frac{154581}{210585}\right)^2 = \frac{20450756664}{44346042225}$$

$$t = 1 - \left(\frac{206108}{210585}\right)^2 = \frac{1865534561}{44346042225}$$

Si reducimos a común denominador, tenemos unas soluciones enteras:

$$x = 6936680000 \quad y = 15093071000$$
$$z = 20450756664 \quad t = 1865534561$$

Comprobación:

$$x + y + z + t = 44346042225 = (210585)^2$$
$$y + z + t = 37409362225 = (193415)^2$$
$$x + z + t = 29252971225 = (171035)^2$$
$$x + y + z = 42480507664 = (206108)^2$$

Las soluciones aquí propuestas no son las únicas, ni probablemente las más sencillas. Invito al lector a que las busque, y si tiene tiempo y ganas, a que resuelva el problema para más variables. Si son *n* el número de variables, el

problema se reduce a escribir el número $n-1$ como suma de *n* cuadrados distintos y menores que la unidad.

Referencias

[1] Diofanto (2007): *La Aritmética y el libro Sobre los números poligonales*. Editorial Nivola, Madrid.

[2] R. Moreno Castillo, R. (2006): "Un problema diofántico" en *Boletín de la «Sociedad Puig Adam» de Profesores de Matemáticas*, nº 73, págs. 25-30.

[3] R. Moreno Castillo (2013): *Historia de la teoría elemental de números*. Editorial Nivola, Madrid.

Looking at the paintings through Voronoi's eyes
Mirando a los cuadros a través de los ojos de Voronoi

Rafael Losada Liste
Sociedad Asturiana de Educación Matemática,
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
rafael.losada@gmail.com

Tomás Recio
Departamento de Ingeniería Industrial, Escuela Politécnica Superior,
Universidad Antonio de Nebrija
trecio@nebrija.es

Abstract

We propose a protocol for the analysis of paintings (classic, modern, figurative or abstract) over GeoGebra, enhancing the perception of some of the characteristics (distribution of focal zones) of the artworks through the computation –using the dynamic color technique– of the Voronoi diagram of a collection of specific sites in the paintings.

Introducción

Es bien conocida la vertiente artística del diagrama de Voronoi (y su dual, la triangulación de Delaunay), como esquema geométrico subyacente en múltiples obras de arte (véase una sencilla descripción de este concepto en la sección 1 de este artículo y también, para una introducción mas detallada, véase [5, 14] y las referencias que allí aparecen). Por el contrario, creemos que no se ha explotado el papel del diagrama de Voronoi como herramienta para el análisis de obras de arte. Este es, aquí, nuestro objetivo.

Se trata de plantear el reconocimiento de ciertas características de las obras pictóricas: la distribución de las ***zonas focales*** en un cuadro (concepto introducido en las secciones 2, 4 y 5), con el concurso de la técnica del color

dinámico (descrita someramente en la sección 3 y, de forma interactiva, en las referencias que allí se mencionan, así como en [6] para una introducción general) aplicada sobre una imagen de tales obras ubicada en una ventana gráfica del programa GeoGebra (http://geogebra.org).

Este protocolo: cálculo del diagrama de Voronoi de las zonas focales mediante la técnica del color dinámico en GeoGebra, es aplicado, en la sección 6, a distintos cuadros o pinturas, clásicos (*La creación de Adán*, *Las Meninas*) o modernos (*El mundo de Cristina*, *El dormitorio de Arlés*), figurativos o abstractos (*Pintura suprematista*), de autores clásicos (Miguel Ángel, Velázquez, Van Gogh…) o actuales (Espejo Velasco).

Finalmente, la sección 7, de Conclusiones, argumenta matemáticamente (unicidad del conjunto de objetos que producen un cierto diagrama de Voronoi) el valor de la información obtenida mediante este procedimiento, tratando de responder a la pregunta *¿hasta qué punto el diagrama de Voronoi de un cuadro devuelve información sobre las siluetas de su espacio positivo?* concluyendo que el diagrama de Voronoi esquematiza adecuadamente una parte significativa de la distribución de las zonas focales en un cuadro.

Debe señalarse que, por las características dinámicas y cromáticas de nuestro trabajo, así como por las obvias limitaciones de la publicación en esta revista, es aconsejable que el lector interesado acuda a la versión interactiva de este mismo artículo que hemos ubicado en [11], donde, además, se incluyen amplios Anexos con instrucciones para que el lector pueda aplicar, por su cuenta y a las obras que estime conveniente, la técnica que en este artículo se desarrolla, así como una aplicación [13] ya configurada para ello.

1. Diagrama de Voronoi

Imaginemos que marcamos dos puntos en el plano. Esos puntos pueden representar entes reales, como pozos de agua, estaciones de suministro, centros sanitarios, centros de comunicación, núcleos urbanos, etc. Para evitar posibles confusiones en el resto del artículo, llamaremos ***sitio*** a cada uno de estos puntos.

Podemos preguntarnos cuál es la región del plano cuyos puntos están más próximos a un sitio que a otro. La respuesta es un semiplano, cuya frontera es la mediatriz entre ambos sitios.

Ampliemos el número de sitios a una colección de n sitios. Tomemos un sitio cualquiera P de esa colección. ¿Cuál será ahora la región del plano cuyos puntos

están más próximos a P que a ningún otro sitio de la colección? La respuesta es una intersección de semiplanos. Procediendo de igual modo para cada uno de los sitios, obtenemos una división del plano en n regiones excluyentes, denominadas *regiones de Voronoi*. Así, cada región de Voronoi está formada por todos los puntos más próximos a cada sitio de la colección dada.

La frontera entre dos regiones colindantes es un trozo (segmento o semirrecta) de la mediatriz entre los sitios de la colección correspondientes a esas dos regiones. El conjunto de esos segmentos y semirrectas se denomina *diagrama de Voronoi* (Figura 1). Véase, por ejemplo, [7, 15] para una introducción elemental a este concepto.

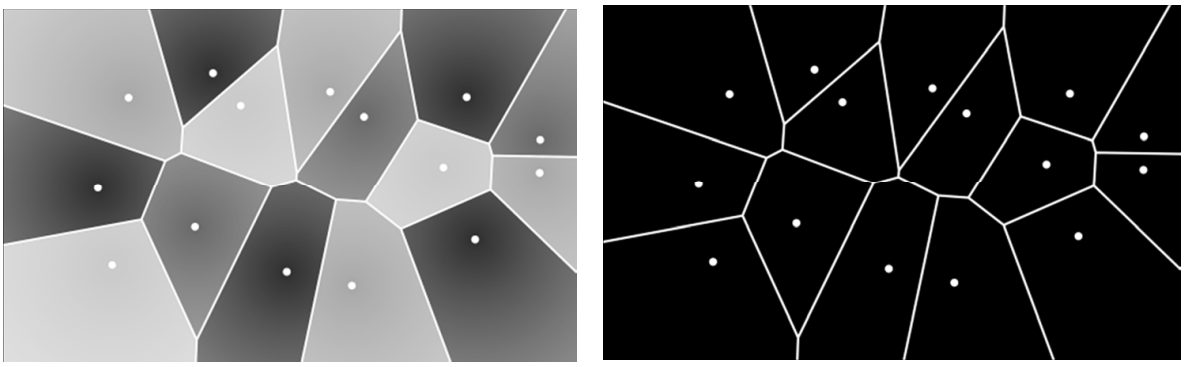


Figura 1: *Regiones y diagrama de Voronoi de una colección de 15 sitios*

Observemos que cualquier punto del plano pertenece o bien al diagrama de Voronoi o bien a una única región de Voronoi. Dicho de otro modo, las regiones y el diagrama de Voronoi constituyen una partición del plano.

GeoGebra dispone de un comando específico para crear el diagrama de Voronoi de una colección de sitios usando un sofisticado algoritmo interno. Alternativamente, podemos crear las regiones de Voronoi de una manera muy simple. Para cada sitio de la colección creamos una circunferencia de igual radio (regido por un deslizador) y suficientemente amplio para abarcar a toda la colección. A cada circunferencia le asignamos un color diferente y activamos su rastro. Finalmente, contraemos simultáneamente todas las circunferencias (animando el deslizador), hasta alcanzar sus centros. De este modo, cada punto del plano irá adquiriendo diferentes colores, según le vaya alcanzando el rastro de cada circunferencia, pero al finalizar el proceso el color "superviviente" siempre será el correspondiente al color de la circunferencia centrada en el sitio de la

colección que se encuentre más próximo (véase [7] para una descripción interactiva con GeoGebra; y también [16], para un video ilustrativo).

El comando de GeoGebra devuelve el diagrama de Voronoi en forma de grafo. Como tal, observemos que, en casi todos los casos, el grado de cada nodo es 3 (en los nodos concurren tres aristas) como ocurre en la Figura 1. Por *casi todos* entendemos la situación general, es decir, si tomamos sitios al azar, la probabilidad de que todos los nodos del diagrama de Voronoi correspondiente tengan grado 3 es 1.

Recordemos que, con independencia del método empleado para la construcción del diagrama de Voronoi, en cualquier caso, ya sea general o no, un nodo queda determinado por aquellas intersecciones de mediatrices que son circuncentros de tres sitios, de modo que la circunferencia que pasa por ellos no contenga a ningún otro sitio en su interior.

2. Curva bisectriz

Dejemos de considerar los sitios como objetos puntuales. Ahora son formas planas aisladas. ¿Cuál será el recorrido equivalente al diagrama de Voronoi, es decir, dónde estarán los puntos del plano que equidistan de los sitios más cercanos a ellos?

Para empezar, consideremos solo dos sitios circulares. Si ambos círculos tienen el mismo radio, la mediatriz de sus centros resuelve nuevamente la cuestión. Pero si tienen distinto radio, la mediatriz se curvará en una rama de hipérbola, la más próxima al círculo menor (Figura 2).

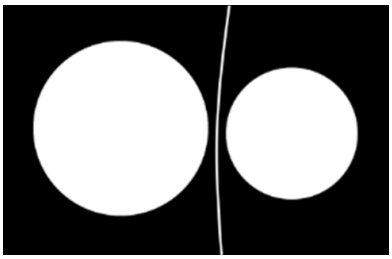


Figura 2: *Rama de hipérbola equidistante de dos círculos*

En general, la línea resultante dependerá de la forma que tenga el borde de cada sitio. Si nos limitamos a bordes rectos o circulares (podemos considerar los puntos extremos de un segmento, recto o curvo, como círculos de radio cero), obtenemos tres tipos posibles de recorridos equidistantes:

- Entre círculos (o puntos): mediatrices e hipérbolas.
- Entre rectas: bisectrices.
- Entre rectas y círculos (o puntos): parábolas.

Sea cual sea el caso, llamaremos *curva bisectriz* al recorrido resultante, que se compondrá, por lo tanto, de segmentos rectos (mediatrices y bisectrices) y arcos parabólicos e hiperbólicos. Esta curva bisectriz, aplicada a una colección de sitios, crea un diagrama que seguiremos denominando, sin temor a confusión, *diagrama de Voronoi* (Figura 3), ya que lo podemos interpretar como una generalización del diagrama de Voronoi generado por sitios puntuales (véase [1] para un trabajo de investigación reciente en este contexto).

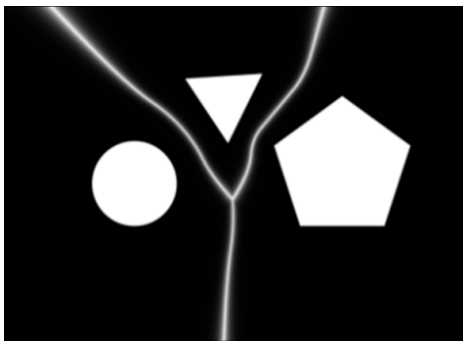


Figura 3: *Diagrama de Voronoi de tres formas planas*

Observemos que, en ocasiones, no todos los puntos del borde de una forma intervienen en la generación de las curvas bisectrices que conforman el diagrama de Voronoi. Por ejemplo, la posición exacta del vértice situado más a la derecha en el pentágono de la Figura 3 no afecta al diagrama. Llamaremos "*borde sensible"* de una forma a la parte del borde que realmente es necesaria para generar el diagrama. Hemos optado por el calificativo de *sensible* porque esta característica no depende solo de la propia forma, sino también de la distribución de las demás formas que la rodean.

3. Escáner de color dinámico

Calcular con exactitud el diagrama de Voronoi de una colección de formas requiere bastante trabajo, incluso aunque nos limitemos a formas circulares o poligonales. Debemos calcular cada recta o cónica que interviene en la trayectoria, así como sus intersecciones, y filtrar los segmentos o arcos

convenientes. Con GeoGebra, por ejemplo, estas restricciones conllevan la parametrización previa de cada cónica, pues debemos trazar segmentos de arcos.

Alternativamente, podemos usar el método con el que se ha creado la Figura 3. Se trata de realizar un barrido de la pantalla, resaltando aquellos puntos cuya diferencia de distancias a las dos formas más próximas esté muy próxima a ser cero. Con ello perdemos algo de exactitud, pero ganamos versatilidad y mucho tiempo.

Con GeoGebra, este barrido se consigue mediante la creación de lo que denominamos un *escáner de color dinámico*, ver [8, 9]. Se trata de una columna de puntos (para la Figura 3 se usaron 400) con el rastro activado. El movimiento de toda la columna está gobernado por un único deslizador numérico. El color de cada punto de esta columna varía del blanco al negro en función de la diferencia de distancias al par de formas más cercanas, de modo que, al animar el deslizador, se oscurecen solo los puntos prácticamente equidistantes de esas formas, visualizando así el diagrama de Voronoi.

4. Siluetas

Si en una imagen destaca una forma con perfil definido, es sencillo aislarla del resto recortando ese perfil. Obtenemos así una silueta de la forma, como muestra el ejemplo de la Figura 4.

Figura 4: *Silueta de una figura*

Observemos que, si consideramos por un lado la silueta del ordenador portátil, por otro la silueta de la pipa y por otro la silueta del hombre, al representar las tres siluetas obtendríamos exactamente la misma imagen negro sobre blanco que aparece en la Figura 4. Igualmente, si añadiésemos la silueta del tronco que sirve

de asiento, esta silueta quedaría inmediatamente integrada en la silueta global. Dicho de otro modo, solo se pueden distinguir con claridad las siluetas aisladas, sin borde común. Esta característica ha sido ampliamente usada en el teatro de sombras chinescas o en la propuesta de rompecabezas, como las figuras realizables con las piezas del tangram (Figura 5).

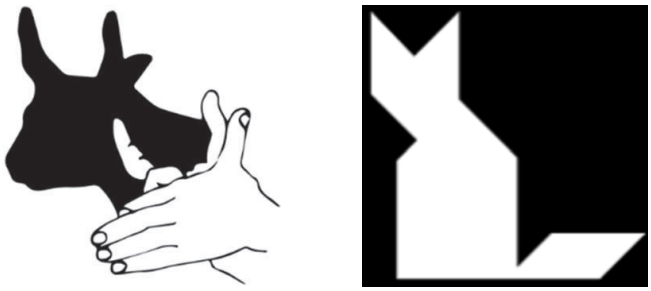


Figura 5: *Sombras chinescas y una figura (pretende ser un gato) para construir con el tangram*

5. El cuadro pictórico como rectángulo plano

En este artículo nos centraremos en imágenes correspondientes a obras pictóricas. Como cualquier otra manifestación artística, una representación pictórica es el resultado de un proceso en el que el autor tiene una intención y se vale de una serie de recursos para exponerla. Un cuadro, por lo tanto, es el resultado final de múltiples elecciones y ejecuciones. Ante él, el espectador debe realizar un ejercicio de interpretación, en la búsqueda de la intención original del autor.

Ahora bien, para nuestros propósitos, consideraremos al cuadro en sí como una imagen plana, generalmente rectangular, en donde sobre una base, habitualmente de lienzo o madera, aparecen pinceladas de color. En este sentido, no hay, por ejemplo, diferencia alguna entre un cuadro abstracto y uno figurativo, o entre un cuadro barroco y uno hiperrealista.

5.1 Zonas focales

Debemos entender que, al considerar el cuadro solo como conjunto de manchas de color, optamos por una visión plana del cuadro. Esto es importante, porque nuestra tendencia natural es interpretar los cuadros, sobre todo los figurativos, como representaciones de la realidad tridimensional, con lo que fácilmente nos dejamos llevar por la perspectiva o ilusión de profundidad que parece apreciarse

en la escena. Sin embargo, aquí consideraremos únicamente el espacio (plano o prácticamente plano) de la superficie de la pintura.

No nos interesarán cualidades que pueden resultar muy importantes en el análisis de muchos cuadros desde el punto de vista del diseño, como puedan ser la armonía o el equilibrio de color.

En cambio, nos interesarán las *zonas focales*, esto es, las zonas del cuadro que más captan la atención del espectador. Más concretamente, como veremos, nos centraremos en las siluetas de estas áreas. En el reconocimiento y aislamiento de estas formas, como el perfil del hombre de la Figura 4, pueden intervenir elementos como nuestro conocimiento previo, la perspectiva, la luz, el contraste de color, etc. Pero una vez detectadas estas zonas focales, todos esos elementos dejarán de interesarnos.

5.2 Espacios positivo y negativo

En la composición pictórica se denomina *espacio positivo* al ocupado por las zonas focales, mientras que el área que las rodea se denomina *espacio negativo*. En la Figura 4, el espacio positivo es la figura del hombre trabajando sentado, cuya silueta hemos recortado, y el espacio negativo la vegetación que le rodea.

En algunas ocasiones, muy especiales, los espacios positivo y negativo pueden intercambiarse. Uno de los ejemplos más conocidos es la copa de Rubin (véase [10, 12], Figura 6). En principio, el espacio positivo es la copa. Pero el espacio negativo, destacado como silueta negra en la imagen de la derecha, adquiere protagonismo propio, al observar y reconocer su perfil.

Figura 6: *La copa de Rubin*

En la composición pictórica resulta fundamental la distribución de las zonas focales que integran el espacio positivo. Algunas de estas distribuciones, por su

simpleza, son recurrentes, apareciendo reiteradamente a lo largo de la historia en diferentes corrientes artísticas. Por ejemplo, son frecuentes las distribuciones especulares (simetría axial), circulares, radiales, diagonales, triangulares, tabulares (matriciales), etc. No es nuestro propósito analizar un cuadro bajo este enfoque, puesto que a menudo consideraremos distintas zonas focales como una sola, pues solo nos interesan sus siluetas, como explicamos a continuación.

5.3 Siluetas sin huecos y aisladas

En efecto, pretendemos aumentar al máximo el contraste entre estos dos espacios, positivo y negativo, así que consideraremos el espacio positivo como compuesto por zonas focales sin huecos y aisladas.

En el caso de que una zona focal tenga un "hueco", es decir, incluya en su interior alguna mancha de color que interpretaríamos como espacio negativo, consideraremos ese hueco como parte integrante del espacio positivo.

Por ejemplo, en la Figura 7 vemos el cuadro *Los girasoles* de Van Gogh. A su derecha, en negro, su espacio positivo, la silueta del jarrón con las flores. Observemos cómo los huecos, los espacios entre flores, han sido suprimidos para conseguir una forma sin huecos.

Figura 7*: La silueta sin huecos de una zona focal*

Por aisladas entendemos sin frontera común. En el caso de que dos zonas focales compartan borde (o incluso den la ilusión de "superponerse"), las consideraremos como parte de una única zona focal que integra a ambas.

En la parte superior del ejemplo de la Figura 8, un cuadro abstracto (véase el cuadro de Malévich, más adelante), dos formas rectangulares parecen solaparse: un ancho rectángulo naranja parece cubrir parcialmente un fino rectángulo rojo. Observemos cómo sus siluetas se funden en una sola.

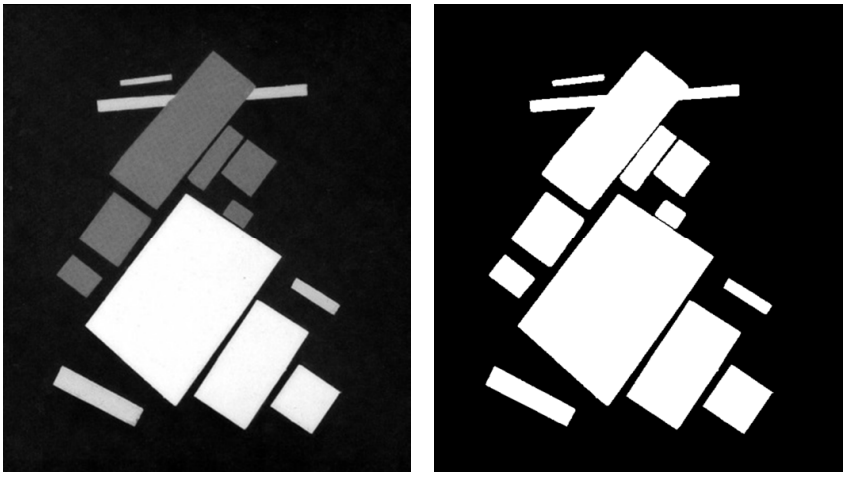


Figura 8: *Dos zonas focales se funden en una única silueta*

6. Ejemplos

6.1 *La creación de Adán*, Miguel Ángel

En este fresco realizado en la bóveda de la capilla Sixtina destacan dos grandes zonas focales para contraponer las dos figuras protagonistas (Figura 9).

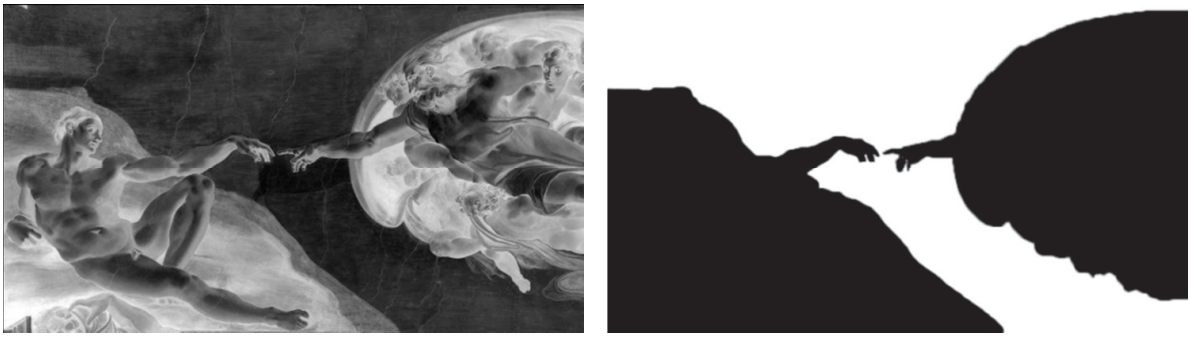


Figura 9: *Dos zonas focales enfrentadas*

Como el espacio positivo se reduce a dos zonas, solo aparecerá una curva bisectriz. Aun así, las siluetas de ambas zonas, consideradas como polígonos, tienen demasiados lados. Debido a ello, tanto en este cuadro como en los siguientes, aproximaremos las siluetas con polígonos sin tanto detalle. Los efectos de esta simplificación sobre el diagrama de Voronoi resultante apenas son apreciables.

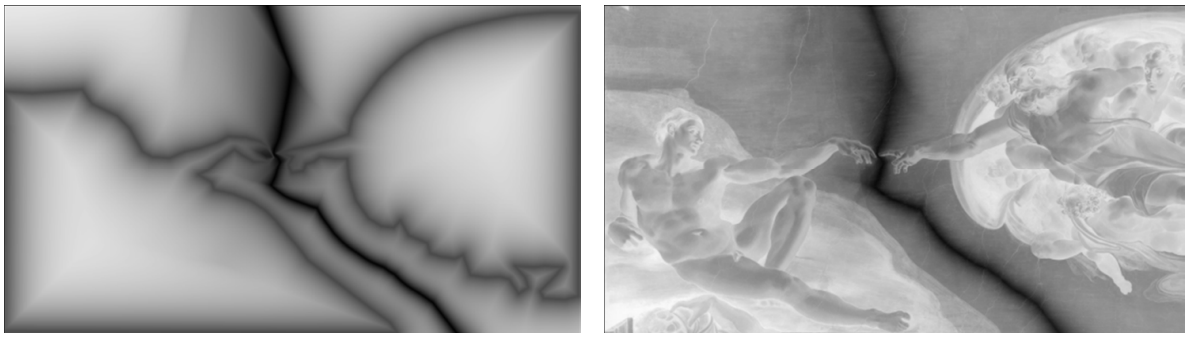


Figura 10: *Resultado del escáner (izquierda) y transparencia (derecha)*

Para que la curva bisectriz destaque lo máximo posible, hemos ajustado nuestro escáner de color dinámico, de modo que la curva aparezca en blanco. También se perfilarán, en azul, los polígonos que hemos empleado. Una vez creado el diagrama de Voronoi, lo hemos superpuesto, como transparencia, al cuadro original (Figura 10). Todas estas construcciones se pueden ver y descargar desde el libro GeoGebra [11] creado específicamente para este artículo. En el Anexo de ese libro se detalla la construcción del escáner que hemos usado para obtener esta y otras figuras.

6.2 *Las Meninas,* Velázquez

Las siluetas de las figuras que integran este cuadro, desde Velázquez hasta José Nieto (el personaje enmarcado a contraluz en el umbral la puerta del fondo) no están aisladas, por lo que forman una única y gran silueta.

Solo existe, entonces, otra zona focal aislada: el espejo del fondo, ligeramente iluminado por la luz que entra por el último ventanal abierto a la derecha, donde se reproduce la imagen de los reyes. En este sentido, este cuadro es similar al de Jan van Eyck, *El matrimonio Arnolfini* (Figura 11), donde en el espejo del fondo se refleja tanto el matrimonio como el propio pintor. En este último cuadro es más evidente la distribución "casi parabólica" del matrimonio enmarcando el espejo.

El artista español J.M. Ballester [3] creó en 2009 su obra *The Royal Palace*, una restauración del espacio negativo de *Las meninas*, vaciándolo de sus personajes. Observemos (Figura 12, derecha) que el espejo sigue apareciendo… ¡pero sin la imagen reflejada de los reyes!

Figura 11: *El matrimonio de Arnolfini y Las meninas*

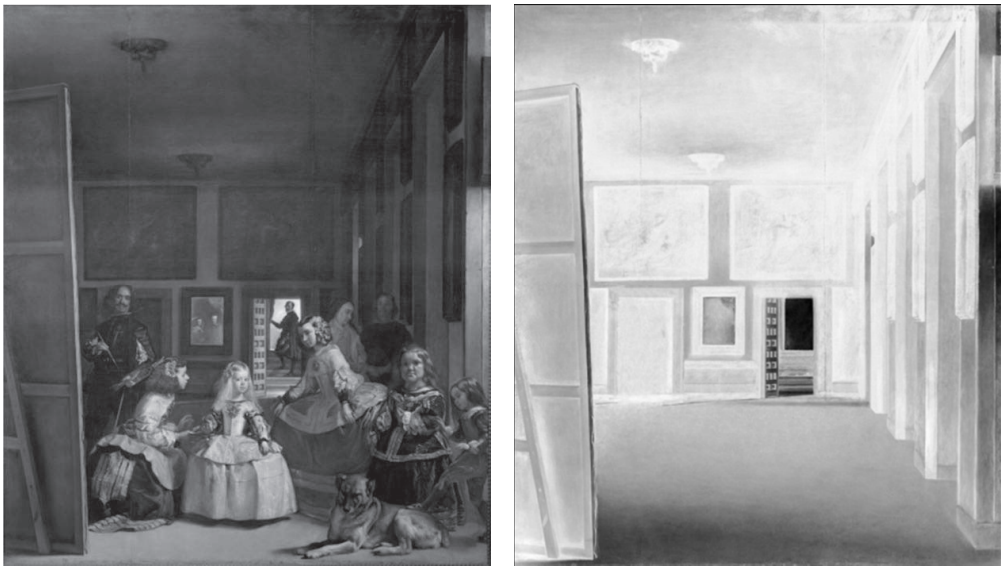


Figura 12: *El cuadro de Velázquez y su espacio negativo*

Aplicando el mismo escáner y siguiendo el mismo procedimiento que en el cuadro anterior, obtenemos la Figura 13.

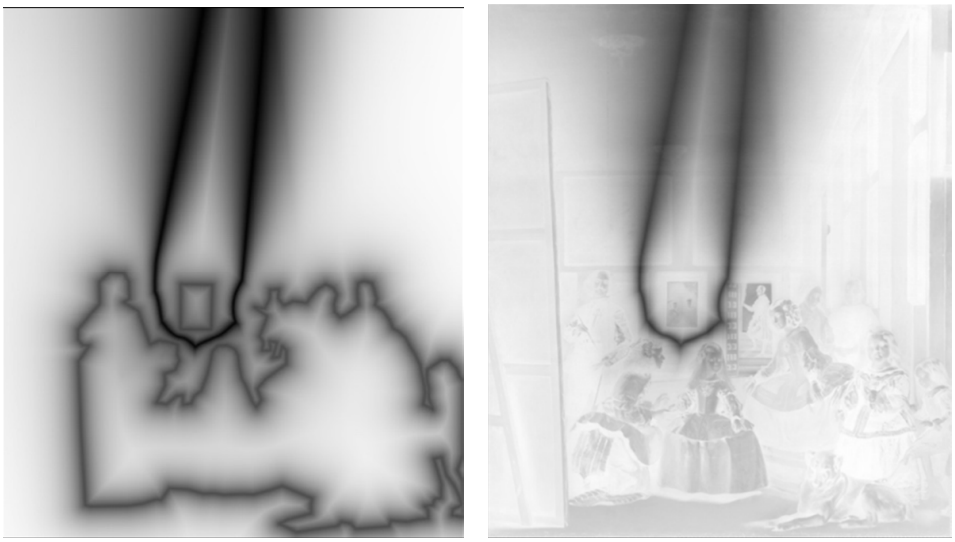


Figura 13: *Perfilado de las siluetas y diagrama de Voronoi*

6.3 *El mundo de Cristina*, Wyeth

En este cuadro, las figuras de la muchacha y las casas se perfilan sobre la tierra y el cielo. Obtenemos así cuatro formas aisladas que determinan el diagrama de Voronoi de la Figura 14. Observemos que en todos los casos estamos considerando el marco del cuadro completamente ajeno tanto al espacio negativo como al espacio positivo, como si la pintura estuviese flotando en el plano infinito.

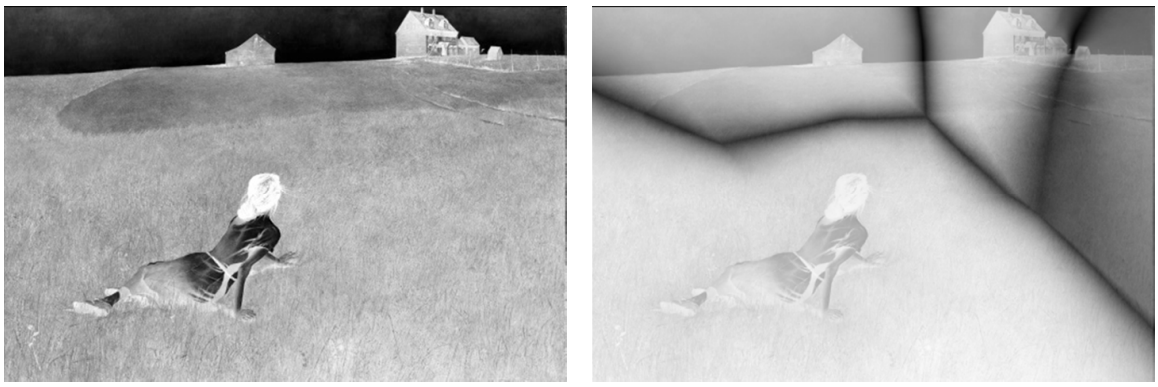


Figura 14: *El diagrama de Voronoi divide este cuadro en cuatro regiones*

6.4 *Pintura suprematista,* Malévich

Ya vimos este cuadro en la Figura 8. Recordemos que los rectángulos naranja y rojo, en la parte superior del cuadro, se funden en una única silueta. Al tratarse de un cuadro de abstracción geométrica, las siluetas de las zonas focales que componen el espacio positivo son sencillas y nítidas. En el centro del diagrama de Voronoi resultante (Figura 15) abundan los tramos con segmentos rectos, correspondientes a bisectrices entre lados de las zonas focales.

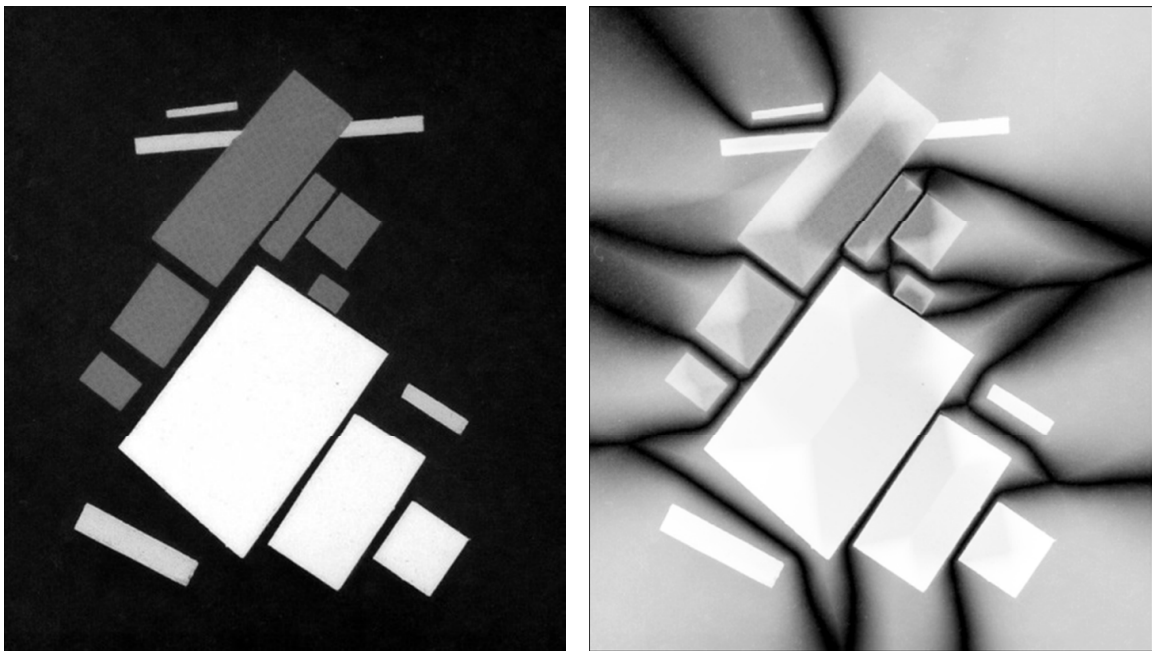


Figura 15: *El diagrama de Voronoi de un cuadro abstracto*

6.5 *El dormitorio en Arlés*, Van Gogh

El procedimiento que estamos empleando no es válido para todos los cuadros, ya sean figurativos o abstractos. En algunos casos, porque los elementos carecen de un perfil nítido, como en el cuadro *Número 1A* de Pollock. En otros, porque las siluetas de las zonas focales forman un solo grupo que domina todo el cuadro, como en el cuadro de Goya *El 3 de mayo en Madrid* (Figura 16).

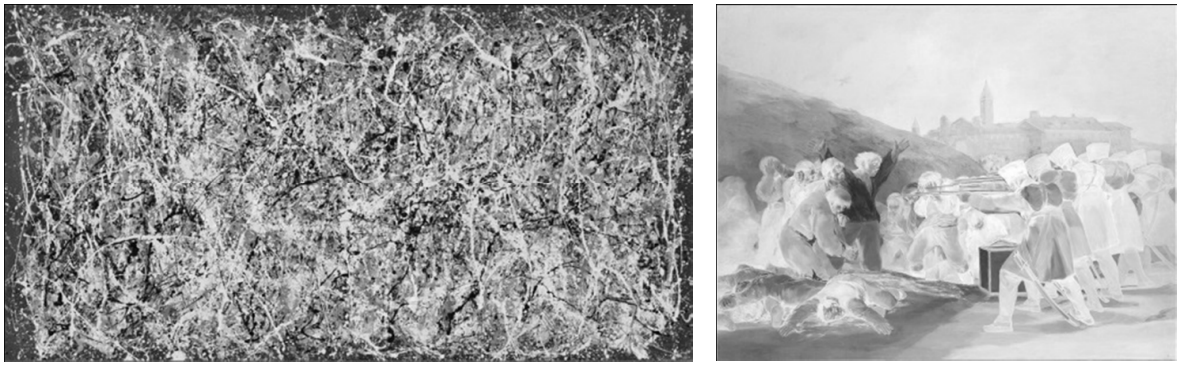


Figura 16: *Número 1A (Pollock) y Los fusilamientos del 3 de mayo (Goya)*

En cambio, en otros cuadros resulta sencillo aislar los diferentes elementos que captan nuestra atención, pues se distribuyen bien diferenciados, como en *El dormitorio en Arlés*, de Vincent van Gogh (Figura 17).

Figura 17: *El diagrama de Voronoi resalta el aislamiento de los elementos de este cuadro*

6.6 Dos cuadros de *Arqueología disgregada*, Cecilio Espejo Velasco

Consideremos, para finalizar, los dos cuadros de la Figura 18, del mismo autor, Cecilio Espejo Velasco, a quien agradecemos su colaboración.

Figura 18: *Dos cuadros con similar contraste de espacios positivo y negativo*

Vemos que el de la izquierda es más abstracto que el de la derecha, en el que podemos identificar fácilmente algunas formas. La paleta de colores tampoco coincide. Hay algunos elementos semejantes, como la presencia de algunas formas circulares. Pero no son estas pequeñas coincidencias por lo que apreciamos rápidamente un parecido entre ambos cuadros, sino la disposición similar de las zonas focales, de modo que, en ambos cuadros, el espacio negativo parece cumplir la única misión de aislar justo lo necesario las diferentes formas que constituyen el espacio positivo. Al aplicar nuestro escáner a ambos cuadros, obtenemos el resultado que muestra la Figura 19.

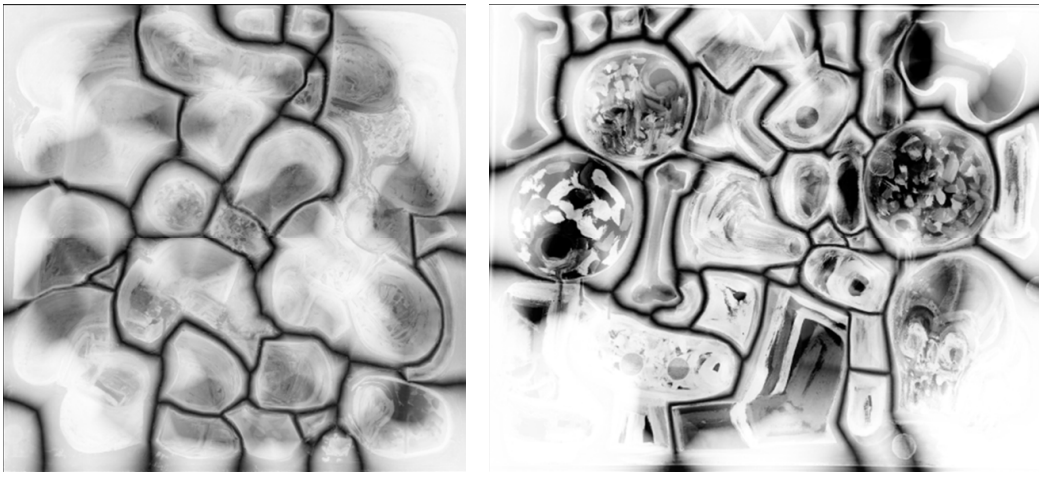


Figura 19: *Dos diagramas bisectrices ajustados a las siluetas*

Si reajustamos de nuevo nuestro escáner para que contraste con colores diferentes cada una de las regiones de Voronoi obtenidas, conseguimos el resultado que muestra la Figura 20. Observemos la similitud existente entre estas regiones de Voronoi y los cuadros originales.

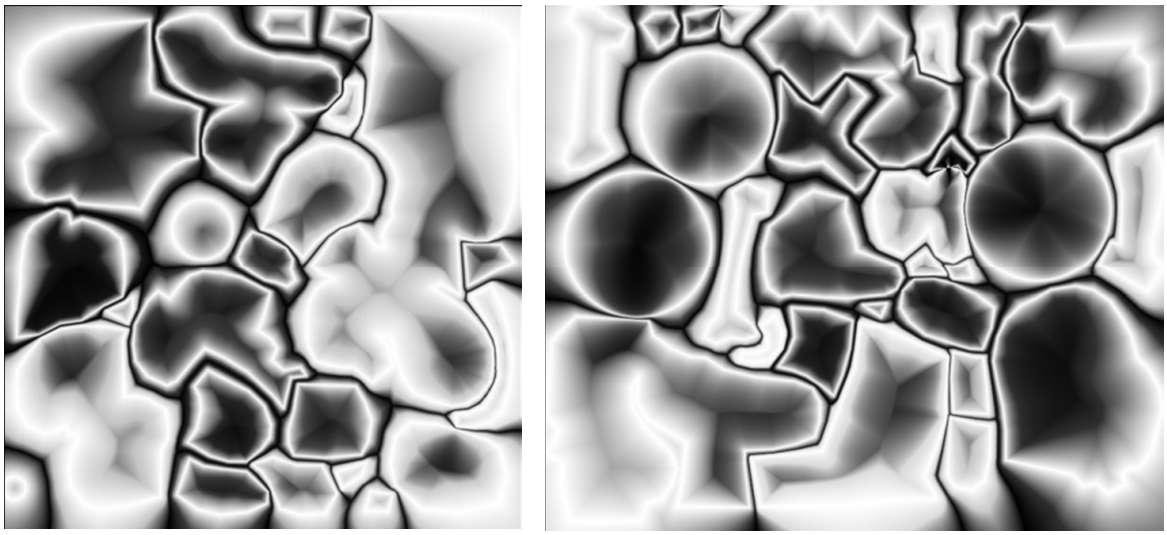


Figura 20: *Regiones de Voronoi de los dos cuadros*

7. Generadores del mismo diagrama de Voronoi

El preciso ajuste del diagrama de Voronoi a las siluetas del espacio positivo que se observa en los dos cuadros anteriores nos invita a realizar la siguiente pregunta: ¿hasta qué punto el diagrama de Voronoi de un cuadro devuelve información sobre las siluetas de su espacio positivo? Para intentar contestar a esta pregunta, retrocedamos al caso de sitios puntuales.

Está claro que, para cada colección de sitios, su diagrama de Voronoi es único. Ahora bien, el recíproco no tiene, en principio, por qué ser cierto. Es decir, dada una división del plano en n regiones de Voronoi puede haber más de un conjunto de n sitios que la genere.

Pensemos, por ejemplo, en cuatro sitios dispuestos en los vértices de un rectángulo. Su diagrama de Voronoi es muy sencillo: el par de mediatrices que bisecan los pares de lados opuestos del rectángulo. Ahora bien, el conjunto de cuatro sitios colocados en los vértices de cualquier otro rectángulo, con el mismo centro y lados paralelos al anterior, generará el mismo diagrama de Voronoi (Figura 21).

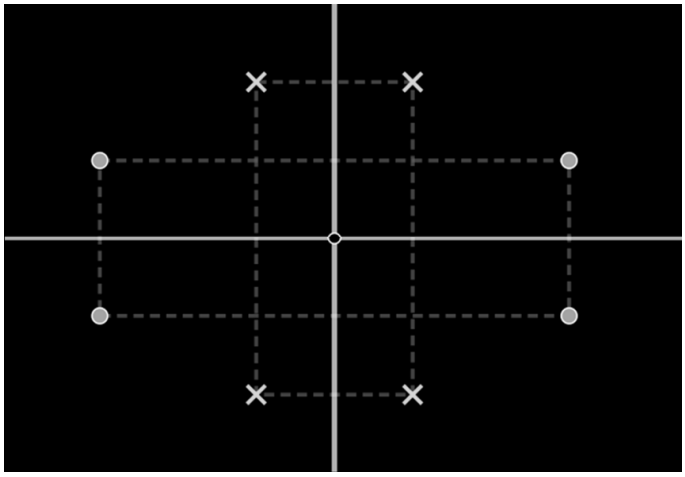


Figura 21: *Los vértices de ambos rectángulos generan el mismo diagrama de Voronoi*

Esto sucede porque el nodo del diagrama de Voronoi resultante, en el centro de la Figura 21 tiene grado par (4 semirrectas concurren en él), lo que permite la coincidencia en la composición de las simetrías axiales. Esto confiere cierta flexibilidad a la posición de los sitios, ver [4].

Pero recordemos que, en la práctica, podemos suponer que todos los nodos de nuestros diagramas de Voronoi tienen grado 3, con lo que la situación cambia totalmente. Efectuaremos el siguiente razonamiento para nodos de este grado, que son los que nos interesan, pero podemos generalizarlo a cualquier nodo de grado impar, ver [2].

Consideremos un diagrama de Voronoi de al menos cuatro sitios, con todos sus nodos de grado tres. Sean O y N dos nodos extremos del mismo segmento y sean A, B y C los sitios cuyo circuncentro es O (por lo que A, B y C están en posición general, es decir, no alineados), de tal modo que el segmento ON descansa en la mediatriz de A y B (Figura 22).

Para que otra terna de sitios genere el mismo diagrama, han de estar situados en triángulos homotéticos con el triángulo ABC, con centro de homotecia en O. Si ahora nos ceñimos a una sola región de Voronoi, por ejemplo, la correspondiente a A, observamos que esto fuerza a que cualquier otro sitio A' que genere la misma región ha de situarse en la semirrecta OA. (Evidentemente, una vez fijada la posición de A' en esa semirrecta, los otros dos sitios de la terna quedan

inmediatamente determinados, pues han de ser los simétricos a A' respecto a las aristas que concurren en O).

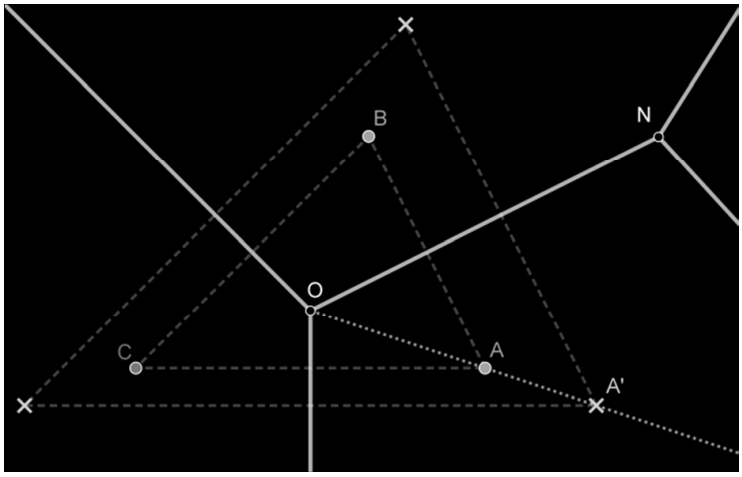


Figura 22: *El sitio A', alternativo a A, ha de situarse en la semirrecta OA*

Ahora bien, aplicando el mismo argumento al nodo N, A' ha de situarse también en la semirrecta NA. Por lo tanto, A' ha de ser la intersección de OA y NA: A' = A.

Concluimos entonces que, dado un diagrama de Voronoi correspondiente a n sitios puntuales (n>3), con todos sus nodos impares (es decir, prácticamente cualquier diagrama de Voronoi), ese conjunto de n sitios generador del diagrama es único.

Pasar de formas puntuales a formas circulares o poligonales no aumenta la libertad de los sitios generadores, más bien la reduce. Pensemos, por ejemplo, que una misma recta mediatriz puede ser generada por muchos pares de puntos diferentes, pero un arco parabólico determina, por sí mismo, los dos objetos de los que equidista, el foco y la directriz.

Resumiendo, cualquiera de los diagramas de Voronoi que hemos generado a partir de los cuadros determina el *borde sensible* de las siluetas que interviene en su generación. Como estas siluetas perfilan las zonas focales del espacio positivo del cuadro, el diagrama de Voronoi esquematiza, en un único grafo, una parte significativa de la distribución de las zonas focales en el cuadro, colaborando, así, a mejorar nuestra *percepción de la forma* [12].

Como reflexión final queremos señalar nuestro deseo de que el presente trabajo contribuya a destacar el valor, tanto educativo como divulgativo, que adquieren los conceptos y procedimientos matemáticos, a menudo acusados (injustamente) de *fríos* o *áridos*, al plasmarse en contextos culturales como el artístico, también a menudo declarados (justamente) como profundamente *emocionales*. Creemos que una educación integral es aquella que fomenta la apreciación de la belleza en cualquiera de sus formas y, a fin de cuentas, detrás de un cuadro o de un teorema siempre encontramos lo mismo: la imaginación humana.

8. Notas

• Todas las imágenes y construcciones de GeoGebra referenciadas en este artículo se pueden ver a color y descargar desde el libro GeoGebra [11].

• Las imágenes que aparecen en este artículo o bien han sido realizadas por los autores o carecen de derechos de autor. La fotografía de uno de los autores, que aparece en la Figura 4, es cortesía del profesor Csaba Sárvári (Universidad de Pécs).

• El segundo autor está parcialmente subvencionado por el proyecto de investigación: PID2020-113192GB-I00 (Visualización Matemática: Fundamentos, Algoritmos y Aplicaciones) del MICINN.

Referencias

[1] I. Adamou (2013), *Curvas y Superficies Bisectrices y Diagrama de Voronoi de una familia finita de semirrectas paralelas en R^3*. Tesis Doctoral, Universidad de Cantabria. Disponible en: https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/3699/TesisAI.pdf. Accedido el 19 de agosto de 2021.

[2] P.F. Ash y E.D. Bolker (1985), Recognizing Dirichlet Tessellations. *Geometriae Dedicata* 19, 175-206, D. Reidel Publishing Company. Disponible en: https://www.cs.umb.edu/~eb/dirichlet/RecognizingDTs.pdf. Accedido el 19 de agosto de 2021.

[3] J.M. Ballester, *Guggenheim Bilbao Museum Collection*. Disponible en: https://www.guggenheim-bilbao.eus/en/the-collection/artists/jose-manuel-ballester. Accedido el 19 de agosto de 2021.

[4] T. Biedl, M. Held y S. Huber, *Recognizing Straight Skeletons and Voronoi Diagrams and Reconstructing Their Input*. Disponible en: https://www.sthu.org/research/publications/files/BHH13b.pdf. Accedido el 19 de agosto de 2021.

[5] Z. Kovács, B. Lichtenegger, T. Recio, P.R. Richard y M.P. Vélez (2020), Exploring artwork through Delaunay triangulations. En: Annie Savard, Rebecca Pearce (eds.), *MACAS in the Digital Era: Proceedings of the 2019 MACAS (Mathematics and its Connections to the Arts and Sciences) Symposium*, Montreal, Quebec. Disponible en: https://mcgill.ca/macas2019/proceedings. Accedido el 19 de agosto de 2021.

[6] R. Losada (2014), El color dinámico de GeoGebra. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*. Vol. 17 (nº 3), 525–547.

[7] R. Losada, *Diagramas de Voronoi*. Capítulo de libro de GeoGebra. Disponible en: https://www.geogebra.org/m/d6j2nhYG#chapter/216003 Accedido el 19 de agosto de 2021

[8] R. Losada, *Escáner de color dinámico*. Capítulo de libro de GeoGebra. Disponible en: https://www.geogebra.org/m/d6j2nhYG#chapter/216029. Accedido el 19 de agosto de 2021.

[9] R. Losada, *Color dinámico*. Libro de GeoGebra. Disponible en: https://www.geogebra.org/m/d6j2nhYG. Accedido el 19 de agosto de 2021.

[10] R. Losada, *El vaso de Rubin*. Actividad de GeoGebra. Disponible en: https://www.geogebra.org/m/wezcpqch. Accedido el 19 de agosto de 2021.

[11] R. Losada, *Voronoi paintings*. Libro de GeoGebra. Disponible en: https://www.geogebra.org/m/kfhnzmfx. Accedido el 19 de agosto de 2021.

[12] R. Losada, *La percepción de la forma*. Libro de GeoGebra. Disponible en: https://www.geogebra.org/m/wjnwsc7x. Accedido el 19 de agosto de 2021.

[13] R. Losada, *Escáner Voronoi*. Actividad de GeoGebra. Disponible en https://www.geogebra.org/m/aurjqevt. Accedido el 19 de agosto de 2021.

[14] S. Trivedi (2008), Voronoi Art. En *Onionesque Reality*. Disponible en: https://onionesquereality.wordpress.com/2008/12/13/voronoi-art/. Accedido el 19 de agosto de 2021.

[15] T. Recio (1998), *Cálculo Simbólico y Geométrico*, Colección: Educación Matemática en Secundaria, Editorial Síntesis, Madrid.

[16] N. Yau (2019), Voronoi diagram from smooshing paint between glass. En *Flowing data*. Disponible en: https://flowingdata.com/2019/01/11/voronoi-diagram-from-smooshing-paint-between-glass/. Accedido el 19 de agosto de 2021.

An application of the mean value theorem to study numerical series

Una aplicación del teorema del valor medio para estudiar series numéricas

Clara Burgos
Departamento de Matemática Aplicada e
Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Universitat Politècnica de València, Valencia, España
clabursi@doctor.upv.es

Julia Calatayud
Departament de Matemàtiques
Universitat Jaume I, 12071, Castellón, España
calatayj@uji.es

Juan Carlos Cortés
Departament de Matemática Aplicada e
Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Universitat Politècnica de València, Valencia, España
jccortes@mat.upv.es

Marc Jornet
Departament de Matemàtiques
Universitat Jaume I, 12071, Castellón, España
jornet@uji.es

Resumen

In this note we show an application of the mean value theorem to derive the convergence/divergence of numerical series. In particular, our analysis allows us to derive the convergence of p-series and to derive the classical Cauchy condensation test.

Motivación

El objetivo de esta nota es mostrar una sencilla aplicación del Teorema del Valor Medio (TVM) para establecer un criterio que permite analizar la convergencia/divergencia de ciertas series de números positivos.

Empezamos nuestra exposición con dos casos particulares, que servirán para comprender mejor la generalización posterior que se establece en el criterio de convergencia que demostramos al final de esta nota.

Ejemplo 1. *Consideremos la función* $f(x) = \ln(x)$ *en el dominio* $x > 0$. *Como para cada* $m \geq 1$ *entero,* $f(x)$ *es continua en el intervalo* $x \in [m, m+1]$ *y es derivable en* $x \in]m, m+1[$, *podemos aplicar el TVM y garantizar que existe al menos un valor* $c_m \in]m, m+1[$ *de modo que*

$$\frac{1}{c_m} = \ln(m+1) - \ln(m), \qquad m < c_m < m+1. \tag{1}$$

Observemos que $g(x) := f'(x) = 1/x$ *es una función positiva y decreciente* ($g'(x) = f''(x) = -1/x^2 < 0$) *para* $x > 0$. *Por tanto, de la desigualdad del dominio dada en* (1) *se deduce*

$$m < c_m < m+1 \Rightarrow \frac{1}{m+1} < \frac{1}{c_m} < \frac{1}{m}.$$

De esta desigualdad y de (1), *se obtiene*

$$\frac{1}{m+1} < \ln(m+1) - \ln(m) < \frac{1}{m}.$$

Si escribimos esta desigualdad para $m = 1, 2, \ldots, n$, *obtenemos:*

$$\begin{array}{lccccccc}
m=1 & \Rightarrow & \frac{1}{2} & < & \ln(2)-\ln(1) & < & 1, \\
m=2 & \Rightarrow & \frac{1}{3} & < & \ln(3)-\ln(2) & < & \frac{1}{2}, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
m=n & \Rightarrow & \frac{1}{n+1} & < & \ln(n+1)-\ln(n) & < & \frac{1}{n}.
\end{array}$$

Sumando término a término esta cadena de desigualdades, y teniendo en cuenta que $\ln(1) = 0$*, se obtiene*

$$\sum_{m=2}^{n+1} \frac{1}{m} < \ln(n+1) < \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}.$$

Observemos que la suma de la derecha, $H_n := \sum_{m=1}^{n} 1/m$*, representa la suma parcial* n*-ésima de la serie armónica* $\sum_{m=1}^{\infty} 1/m$*. Si tomamos límites en la desigualdad de la derecha, se tiene:*

$$+\infty = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) \leq \lim_{n\to\infty} H_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m},$$

de donde se deduce que la serie armónica es divergente.

En el segundo ejemplo nos apoyaremos en un razonamiento similar para probar la convergencia de una importante serie numérica de términos positivos.

Ejemplo 2. *Para facilitar el razonamiento seguimos una presentación similar a la anterior. Ahora consideraremos la función* $f(x) = -1/x$*,* $x > 0$*, y aplicamos el TVM en el intervalo* $x \in [m, m+1]$*, siendo* $m \geq 1$ *entero. Ello nos permite asegurar la existencia de, al menos, un valor* $c_m \in]m, m+1[$ *de modo que*

$$\frac{1}{c_m^2} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}, \qquad m < c_m < m+1. \tag{2}$$

Claramente $g(x) := f'(x) = 1/x^2$*,* $x > 0$*, es una función positiva y decreciente (*$g'(x) = f''(x) = -2/x^3 < 0$*). Por tanto,*

$$m < c_m < m+1 \Rightarrow \frac{1}{(m+1)^2} < \frac{1}{c_m^2} < \frac{1}{m^2}.$$

Aplicando esta última desigualdad, de (2) *se obtiene*

$$\frac{1}{(m+1)^2} < \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} < \frac{1}{m^2}.$$

Si escribimos esta desigualdad para $m = 1, 2, \ldots, n$, obtenemos:

$$\begin{array}{lcccccc}
m=1 & \Rightarrow & \dfrac{1}{2^2} & < & 1-\dfrac{1}{2} & < & 1, \\
m=2 & \Rightarrow & \dfrac{1}{3^2} & < & \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3} & < & \dfrac{1}{2^2}, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
m=n & \Rightarrow & \dfrac{1}{(n+1)^2} & < & \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1} & < & \dfrac{1}{n^2}.
\end{array}$$

Sumando término a término esta cadena de desigualdades, se obtiene

$$\sum_{m=2}^{n+1} \frac{1}{m^2} < 1 - \frac{1}{n+1} < \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2}.$$

Ahora vamos a partir de la desigualdad de la izquierda para obtener, tras manipulaciones algebraicas sencillas, la suma n-ésima, $S_n := \sum_{m=1}^{n} 1/m^2$, de la serie $\sum_{m=1}^{\infty} 1/m^2$,

$$1 - \frac{1}{(n+1)^2} + \sum_{m=2}^{n+1} \frac{1}{m^2} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2} = S_n < 2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Tomando límites cuando $n \to \infty$, se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} S_n < \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 2,$$

de donde se deduce que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ es convergente.

1. Un criterio para probar la convergencia/divergencia de series numéricas de términos positivos

Motivados por los ejemplos anteriores, supongamos $f(x) \in \mathcal{C}^2(]0, \infty[)$ tal que $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$, es decir, creciente y cóncava. Si aplicamos el TVM en

el intervalo $]m, m+1[$, $m \geq 1$ entero, se concluye:

$$\text{existe al menos un } c_m \in]m, m+1[\colon\ f'(c_m) = f(m+1) - f(m). \qquad (3)$$

Como $f'(x)$ es decreciente (pues $(f'(x))' = f''(x) < 0$), se tiene:

$$m < c_m < m+1 \Rightarrow f'(m+1) < f'(c_m) < f'(m). \qquad (4)$$

De (3) y (4) se deduce

$$f'(m+1) < f(m+1) - f(m) < f'(m).$$

Desarrollando esta desigualdad para $m = 1, 2, \ldots, n$, se obtiene:

$$\begin{array}{lllllll}
m=1 & \Rightarrow & f'(2) & < & f(2)-f(1) & < & f'(1), \\
m=2 & \Rightarrow & f'(3) & < & f(3)-f(2) & < & f'(2), \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
m=n & \Rightarrow & f'(n+1) & < & f(n+1)-f(n) & < & f'(n).
\end{array}$$

Si sumamos término a término y simplificamos los términos centrales (que forman una suma telescópica), se deduce

$$\sum_{m=2}^{n+1} f'(m) < f(n+1) - f(1) < \sum_{m=1}^{n} f'(m). \qquad (5)$$

Como $f' > 0$, entonces f es creciente y por tanto solamente se presentan dos posibilidades sobre el comportamiento asintótico de f. A continuación, analizamos cada caso.

- Caso 1: Si $\lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty$.
  Tomemos límites cuando $n \to \infty$ en la desigualdad de la derecha de (5), entonces en este caso se tiene

$$+\infty = \lim_{n\to\infty} f(n+1) - f(1) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} f'(m) = \sum_{m=1}^{\infty} f'(m).$$

Obsérvese que $f(1) < +\infty$ porque $f(x)$ es continua para $x = 1 > 0$. Por tanto, se deduce que la serie de términos positivos (pues $f'(x) > 0$, $x > 0$) dada por $\sum_{m=1}^{\infty} f'(m)$, es divergente.

- Caso 2: Si $\lim_{n\to\infty} f(n) = M < +\infty$.
  Consideremos la desigualdad de la izquierda de (5) y completemos la serie que queda en el término izquierdo empezando en $m = 1$:

$$\sum_{m=1}^{n+1} f'(m) < f(n+1) - f(1) + f'(1).$$

  Ahora tomemos límites cuando $n \to \infty$ en esta desigualdad. Esto conduce a que

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} f'(m) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n+1} f'(m) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} f(n+1) - f(1) + f'(1) = M - f(1) - f'(1) < +\infty.\end{aligned}$$

  Obsérvese que hemos usado que $f(1)$ y $f'(1)$ son finitos porque $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas para $x = 1 > 0$. Por tanto, se deduce que la serie de términos positivos, $\sum_{m=1}^{\infty} f'(m)$, es convergente.

Resumiendo, hemos establecido el siguiente teorema:

Teorema 1.1. *Sea $f(x) \in \mathcal{C}^2(]0,\infty[)$ tal que $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$. Se cumplen los siguientes resultados para la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$:*

i) Si $\lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$ diverge.

ii) Si $\lim_{n\to\infty} f(n) < +\infty$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$ converge.

Notemos que, puesto que f es creciente, se tiene que cumplir o bien $\lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty$ (no acotabilidad) o bien $\lim_{n\to\infty} f(n) < +\infty$ (acotabilidad). Como $f'(x) > 0$, se tiene que cumplir o bien $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n) = +\infty$ o bien $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n) < +\infty$. Por tanto, asumiendo que $f(x) \in \mathcal{C}^2(]0,\infty[)$ tal que $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$, la conclusión del Teorema 1.1 se puede reescribir como

$$\lim_{n\to\infty} f(n) < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} f'(n) < +\infty. \tag{6}$$

Acabamos este apartado deduciendo el criterio de condensación de Cauchy como una consecuencia del Teorema 1.1. Ciertamente, esta deducción es más técnica que la demostración clásica que podemos encontrar en la mayoría de los textos sobre series numéricas.

Teorema 1.2. *Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sucesión de números positivos decreciente. Entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} < +\infty.$$

Demostración. Podemos tomar una función f con $f' > 0$ y $f'' < 0$, tal que $f'(n) = a_n$. Para su construcción, se toma una función decreciente y positiva que pase por los a_n en n y se define f como una primitiva; obsérvese que esto es consistente con que a_n es una sucesión de números positivos y monótona decreciente. Puesto que f' es decreciente, se tiene que

$$\begin{aligned} f'(2^n)2^n = f'(2^n)(2^{n+1} - 2^n) &\geq \int_{2^n}^{2^{n+1}} f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &\geq f'(2^{n+1})(2^{n+1} - 2^n) \\ &= f'(2^{n+1})2^n = \frac{1}{2} f'(2^{n+1})2^{n+1}. \end{aligned}$$

Sumando para $n = 1, 2, \ldots$, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'(2^n)2^n \geq \underbrace{\int_2^{\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x}_{= \lim_{n\to\infty} f(n) - f(2)} \geq \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} f'(2^n)2^n. \tag{7}$$

Así, teniendo en cuenta que $a_n := f'(n)$ y la regla de Barrow, se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} f'(n) < +\infty \overset{(6)}{\iff} \lim_{n\to\infty} f(n) < +\infty$$

$$\overset{\text{Barrow}}{\iff} \int_2^{\infty} f'(x)\,\mathrm{d}x < +\infty \overset{(7)}{\iff} \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} f'(2^n)2^n < +\infty$$

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty} f'(2^n)2^n < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_{2^n} 2^n < +\infty.$$

2. Aplicaciones

Acabamos esta nota presentando algunos ejemplos de series de interés donde la aplicación del Teorema 1.1 permite deducir su convergencia/divergencia.

Ejemplo 3. *Para $p > 1$ finito, consideremos la función $f_p(x) = M - \frac{K}{x^p}$, $K > 0$, $M \in \mathbb{R}$, en el dominio $x > 0$. Observemos que cumple las hipótesis del Teorema 1.1,*

$$f_p'(x) = Kpx^{-(p+1)} > 0, \quad f_p''(x) = -Kp(p+1)x^{-(p+2)} < 0, \qquad \forall x > 0.$$

Además, $\lim_{n\to\infty} f_p(n) = M < +\infty$. Por tanto, aplicando el Teorema 1.1–ii) se deduce que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_p'(n)$ converge, o equivalentemente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}}, \quad p = 1, 2, \ldots \quad \textit{converge.}$$

Este es un resultado bien conocido (por ejemplo aplicando el test integral o el test de condensación de Cauchy), y de hecho en algunos casos particulares se conoce la suma. Por ejemplo, para $p = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$.

Ejemplo 4. *Ahora aplicaremos el Teorema 1.1 a la función $f_r(x) = M - Kr^x$, $K > 0$, $0 < r < 1$, $M \in \mathbb{R}$, en el dominio $x > 0$. En primer lugar, comprobamos que se cumplen las hipótesis del teorema,*

$$f_r'(x) = -Kr^x \ln(r) > 0, \quad f_r''(x) = -Kr^x (\ln(r))^2 < 0, \qquad \forall x > 0.$$

Además, $\lim_{n\to\infty} f_r(n) = M < +\infty$. Por el Teorema 1.1–ii) obtenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_r'(n)$ converge, o equivalentemente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n < \infty, \quad 0 < r < 1,$$

lo cual es bien conocido, al tratarse de la serie geométrica.

El siguiente ejemplo, ilustra la aplicación del Teorema 1.1 para demostrar la divergencia de una serie, también bien conocida.

Ejemplo 5. *Sea la función* $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$, *la cual cumple las condiciones del Teorema 1.1,*

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0, \qquad f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0, \qquad \forall x > 0.$$

Claramente, $\lim_{n\to\infty} f(n) = +\infty$. *Por el Teorema 1.1–i) obtenemos que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$ *diverge, o equivalentemente,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty.$$

El resultado es un caso particular de la conocida divergencia de la serie subarmónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$, $0 < p < 1$.

Conclusiones

En esta nota hemos introducido un sencillo criterio para estudiar la convergencia de series numéricas de términos positivos que está basado en la aplicación del Teorema del Valor Medio. Los resultados nos han permitido deducir, de un modo diferente al habitual, la convergencia o divergencia de algunos tipos importantes de series numéricas, como las p-series o las series geométricas, si bien el resultado establecido es susceptible de aplicarse a más tipos de series numéricas. También hemos obtenido una prueba del criterio clásico de condensación de Cauchy como consecuencia del principal resultado del trabajo. Creemos que el contenido del artículo puede ser de utilidad para presentar, de un modo alternativo, resultados clásicos de la teoría de series numéricas.

Referencias

[1] T. M. Apostol (1976), *Análisis Matemático*, Ed. Reverté, Barcelona.

[2] J. de Burgos Román y otros (2010), *Sucesiones y Series*, García-Maroto Editores, Madrid.

Offsets of a regular trifolium
Curvas paralelas a un trifolium regular

Thierry Dana-Picard
Jerusalem College of Technology
ndp@jct.ac.il

Zoltán Kovács
Private Pädagogische Hochschule der Diözese Linz
zoltan@geogebra.org

Abstract

The non-uniqueness of a rational parametrization of a rational plane curve may influence the process of computing envelopes of 1-parameter families of plane curves. We study envelopes of family of circles centred on a regular trifolium and its offsets, paying attention to different parametrizations. We use implicitization both to show that two rational parametrizations of a curve are equivalent, and to determine an implicit equation for the envelope under study. The derivation of an implicit equation of an offset follows another path, leading to new developments of the package GeoGebra Discovery. As an immediate symbolic result, we obtain that in the general case the offset curve of a regular trifolium is an algebraic curve of degree 14. We illustrate this fact by providing a GeoGebra applet that computes such curves automatically and visualizes them in a web browser.

1 Envelopes and offsets

Let $\mathcal{C}_t$ be a family of plane curves, parameterized by the real t, given by the equation $F(x, y, t) = 0$.

Definition 1.1 (*Impredicative*; [13])**.** A plane curve $\mathcal{E}$ is called an *envelope* of the family $\{\mathcal{C}_k\}$ if the following properties hold:

(i) every curve in the family $\{\mathcal{C}_t\}$ is tangent to $\mathcal{E}$;

(ii) to every point M on $\mathcal{E}$ is associated a value $t(M)$ of the parameter t, such that $\mathcal{C}_t$ is tangent to $\mathcal{E}$ at the point M;

(iii) The function $t(M)$ is non-constant on every arc of $\mathcal{E}$.

Two other definitions exist, also mentioned by [13]. One of them reads as follows:

Definition 1.2 (*Synthetic*; [13])**.** The envelope of the given family of curves is the set of limit points of intersections of nearby curves C_t.

This definition is somehow problematic, as it would request the definition of a topological set of curves, in order to have a reasonable definition of a limit. Nevertheless, such a point of view has been used for a simple case by [10].

The most used and usable definition is called *analytic* by [13]; note that [2], (sections 9.6.7 and 14.6.1) gives this one only. It has been derived from the limit definition as theorem by [10].

Definition 1.3 (*Analytic*; [13])**.** Let C_t be a 1-parameter family of curves given by an equation $F(x, y, t) = 0$. The envelope of the family $\{C_t\}$ is the set of all points (x, y) such that there is a t verifying the system of equations

$$\begin{cases} F(x, y, t) = 0, \\ \frac{\partial F(x,y,t)}{\partial t} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Following the English Wikipedia page on *envelope (mathematics)*, [3] reports on a 4^{th} definition of an envelope, namely: the envelope is the curve that bounds the planar region described by the points belonging to the curves in the family. In the case of our study, this is the *offset* of the trifolium at distance 1, as coined by [16], page 10. Actually, the first three definitions mentioned above are equivalent, but the last one is not equivalent to them. There exist examples where envelope and offset are identical, such as in [10]

and [16], but other examples enlighten the difference; see [7]. The family studied in this paper is an example with new properties. They are studied in section 4.

Note that the difference between envelope and offset is of the utmost importance for industrial applications, such as the determination of safety zones in industrial plants and entertainment parks. This issue is evoked in [7].

2 A regular trifolium: different presentations

We study various constructions on the basis of a regular trifolium (called also regular *trefoil*). We recall the basic definitions, referring to [11], where other constructions are also proposed.

Definition 2.1. A *regular trifolium* is a plane algebraic curve, given by the implicit equation

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = ax\left(x^2-3y^2\right) \tag{2}$$

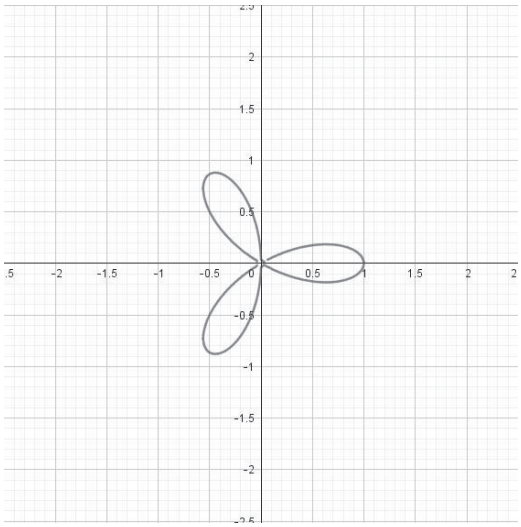
where a is a positive real parameter

The parameter a influences the *size* of the trifolium, not its shape. Two examples are shown in Figure 1, obtained using GeoGebra, a Dynamic Geometry System (freely downloadable from `http://geogebra.org`). An important reason for using this software is that it enables dynamical mouse-driven experiments. Animation can be obtained with a CAS also, requiring some programming. The differences between the two kinds of animation are discussed in [7]. A plot can be obtained also using an *implicitplot* command of a Computer Algebra System. WLOG, we will work in the case where $a = 1$.

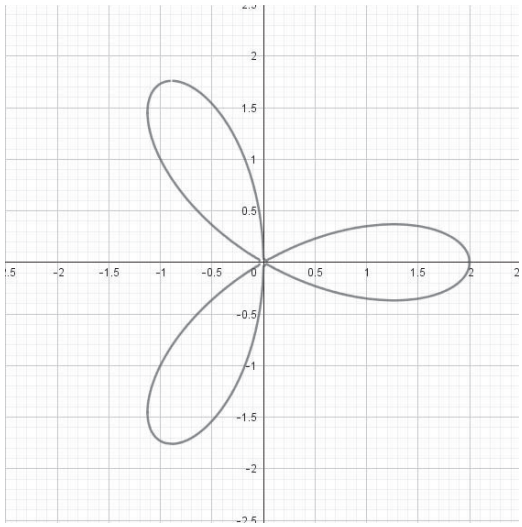
A more dynamical definition is as follows:

Definition 2.2. A regular trifolium is the trajectory of the second intersection point between a line and a circle turning around one of their common points in the same direction, and the circle turning four times as fast as the line.

We will use this definition in order to derive a rational parametrization of the regular trifolium, whence showing that this curve is a rational curve.



(a) $a = 1$



(b) $a = 2$

Figure 1: *Two examples of a regular trifolium*

Consider the circle C through the origin and whose center has coordinates $(1/2, 0)$. Its implicit equation is $(x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4$. A general rotation matrix about the origin is The rotated circle C_s is thus given by the equation

$$\left(x\cos s + y\sin s - \frac{1}{2}\right)^2 + (y\cos s - x\sin s)^2 = \frac{1}{4}. \tag{3}$$

Now consider the line $L : y = x$. Rotating the line at a speed one fourth of the rotation speed of the circle, we have a line L_s whose equation is

$$\cos\frac{s}{4}x + y\sin\frac{s}{4} = 0. \tag{4}$$

The circle C_s and the line L_s intersect at two points, the origin and a second point whose coordinates are given as follows (for the sake of simplicity, we substitute $t = s/4$):

$$\begin{cases} x(t) = 4\sin^4 t - 3\sin^2 t, \\ y(t) = -\sin t\cos t\left(4\sin^2 t - 3\right). \end{cases} \tag{5}$$

Using this parametrization, we obtain Figure 2; an experimental checking using a DGS or a CAS shows that this plot is identical to Figure 1a. This

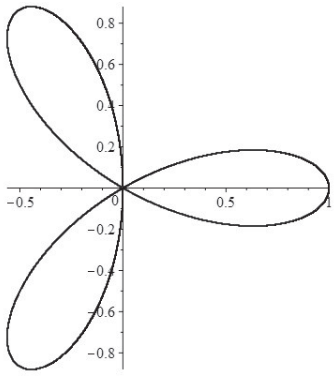


Figure 2: *Geometric construction of a regular trifolium*

identity may be checked by substitution of the two expressions for $x(t)$ and $y(t)$ into Equation (2). Note that the parametrization (5) is not rational. In order to have benefit of Theorem 4.7 in [16], we need a rational presentation.

[12] proposes another trigonometric parametric presentation (we modify it in order to be coherent with our previous presentations):

$$\begin{cases} x = a\cos t + \cos 2t, \\ y = a\sin t - \sin 2t. \end{cases} \tag{6}$$

This parametrization shows that a regular trifolium is a special case of a *hypotrochoid*. It can be verified, either experimentally with software or using trigonometric manipulations, that for $a = 1/2$, we obtain the same curve studied earlier. A regular trifolium is a special case of trifolium, in which the three leaves are isometric, two of them being obtained from the third one by a rotation of angle $\frac{2\pi}{3}$ or $\frac{4\pi}{3}$ (see [6]).

The following result is well-known, we emphasize it because of its importance for the subsequent sections. We will show two proofs.

Proposition 2.3. *A regular trifolium is a rational curve.*

This proposition means that a regular trifolium has a rational parametrization. It is well-known that such a parametrization, when it exists, is not unique. We derive now two parametrizations of a regular trifolium. The first one will be obtained when using the following Lemma.

Lemma 2.4. *A rational parametrization of the unit circle centred at the origin is as follows:*

$$\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y = \frac{2t}{1+t^2}. \end{cases} \tag{7}$$

Proof. The proof is straightforward; we give it as a promo, because we will use the same method later in a more complicated setting. Consider the unit circle $\mathcal{U}$ centred at the origin and a line $\mathcal{L}$ through the point $B(-1, 0)$ (Figure 3). The tangent to $\mathcal{U}$ through B is parallel to the y-axis, all other lines through

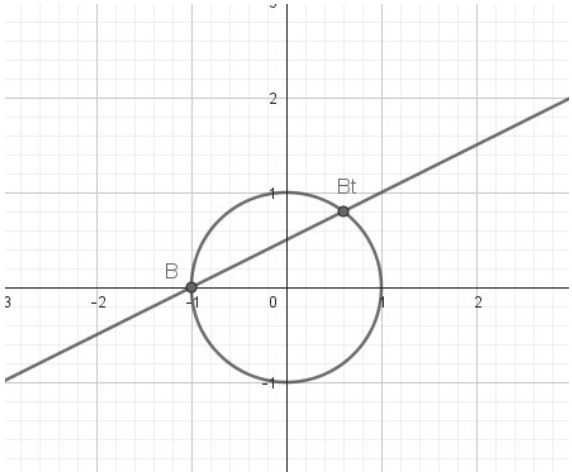


Figure 3: *Geometric construction for parameterizing the unit circle* $\mathcal{U}$

B have a slope t and intersect $\mathcal{U}$ at a 2^{nd} point B_t. The coordinates of B_t are the solutions of the system of equations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = t(x + 1). \end{cases}$$

The result is obtained by substitution. Note that this parametrization is valid for every point but B. □

Following [16] (p. 90), we recall that a rational parametrization can be stated by means of rational maps. Let $\mathcal{C}$ be a rational affine curve over the field $\mathbb{K}$ and $P(t) \in \mathbb{R}(t)^2$ be a rational parametrization of $\mathcal{C}$. This parametrization induces a rational map

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathbb{A}^1(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ & t & \mapsto & P(t) \end{array}$$

and $P(\mathbb{A}^1(\mathbb{K}))$ is a dense subset of $\mathcal{C}$ (dense in the sense of Zariski topology). A trigonometric parametrization of the unit circle centred at the origin is given by $P(u) = (\cos u, \sin u),\ u \in \mathbb{R}$. On the one hand, this parametrization is a bijection between the unit circle and every interval $[2k\pi, 2(k+1)\pi)$. On the other hand, Equations (7) define a bijection from $\mathbb{R}$ onto the unit circle but the point B. Therefore, for almost every real u, there exists a real t such that $\cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ and $\sin u = \frac{2t}{1+t^2}$. By substitution into the trigonometric parametrization of the curve given above, and after simplification, we obtain the following result:

Proposition 2.5 (First rational parametrization)**.** *A rational parametrization of the regular trifolium is given by*

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{4t^2(3t^2-1)(t^2-3)}{(t^2+1)^4}, \\ y(t) = -\frac{2t(t-1)(t+1)(3t^2-1)(t^2-3)}{(t^2+1)^4}. \end{cases} \tag{8}$$

Another rational parametric presentation for the regular trifolium can be obtained, not applying directly Lemma 2.4, but using the method of its proof.

Proposition 2.6 (Second rational parametrization)**.** *A rational parametrization of the regular trifolium is given by*

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{3t^2-1}{(t^2+1)^2}, \\ y(t) = -\frac{t(3t^2-1)}{(t^2+1)^2}. \end{cases} \tag{9}$$

Proof. The regular trifolium is a quartic with a triple point at the origin. The $y-$axis is tangent to the curve at the origin; by substitution of $x = 0$ into Equation 2, we prove that there is no other point of intersection. Any other line through the origin (with equation $y = tx$, the parameter t being the slope of the line) through the origin intersects the trifolium at one extra point, as we see from the solution of system of equations 10 ; see Figure 4.

The coordinates of this point are the solutions of the following system of equations:

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^2 = x\,(x^2-3y^2), \\ y = tx. \end{cases} \tag{10}$$

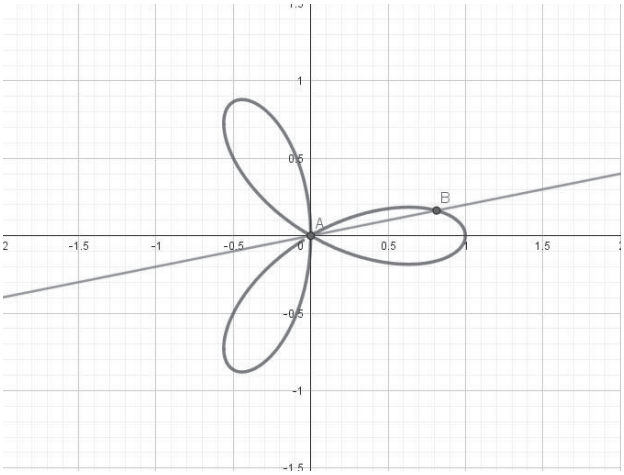


Figure 4: *Geometric construction for parameterizing the regular trifolium*

The solution is obtained by substitution and simplification. (Of course, these computations may be performed using a CAS with the **solve** command. The output may show both the origin and the extra (variable) point.) □

Remark 2.7. Other rational parametrizations of the unit circle can be obtained, using other families of lines, such as the families given by equations $y = t(x-1)$ (lines through $A(1,0)$, or $y-1 = tx$ (lines through $B(0,1)$, etc.). Following the same process as above, we obtain different rational presentations for the regular trifolium. Nevertheless, it can be proven that all of them provide the same implicit equation for the envelope that we will study.

3 The 1-parameter family of unit circles centred on the regular trifolium

We consider now the family of unit circles $\mathcal{C}_t$ centred on the regular trifolium described in Section 2. The index t is actually the parameter that we use for

the parametric presentation of the trifolium. Here we will use the formulas derived in Prop. 2.6, namely:

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{3t^2-1}{(t^2+1)^2}, \\ y(t) = -\frac{t(3t^2-1)}{(t^2+1)^2}. \end{cases}$$

A general equation for the family of unit circles centred on the trifolium is of the form $F(x, y, t) = 0$, where

$$F(x,y,t) = \left(x + \frac{3t^2-1}{(t^2+1)^2}\right)^2 + \left(y + \frac{t(3t^2-1)}{(t^2+1)^2}\right)^2 - 1.$$

According to Definition 1.3, an envelope of this family of unit circles, if it exists, is determined by the solutions of the following system of equations (the second one is displayed after simplification):

$$\begin{cases} \left(x + \frac{3t^2-1}{(t^2+1)^2}\right)^2 + \left(y + \frac{t(3t^2-1)}{(t^2+1)^2}\right)^2 - 1 = 0, \\ -6t^6y + (-12x-18)t^5 + 18t^4y + (8x+60)t^3 + 22t^2y \\ \quad +(20x-18)t - 2y = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Denote

$$D(t) = \left(9t^6 - 45t^4 + 75t^2 + 1\right)\left(t^2+1\right)^2.$$

Then solutions of the System (11) are given by the two following parametrizations, each one defining an envelope of the family of circles, and their union being also an envelope of this family:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{27\left[(-3t^4+12t^2-1)\sqrt{D(t)(3t^2-5)^2(t^2+1)} - 81t^{10}+567t^8-1530t^6+1566t^4-357t^2-5\right]}{D(t)\ (3t^2-5)}, \\ y(t) = \frac{t\left[-27t^8+144t^6-270t^4+72t^2+2\sqrt{D(t)(3t^2-5)^2(t^2+1)}+1\right]}{D(t)}, \end{cases} \tag{12}$$

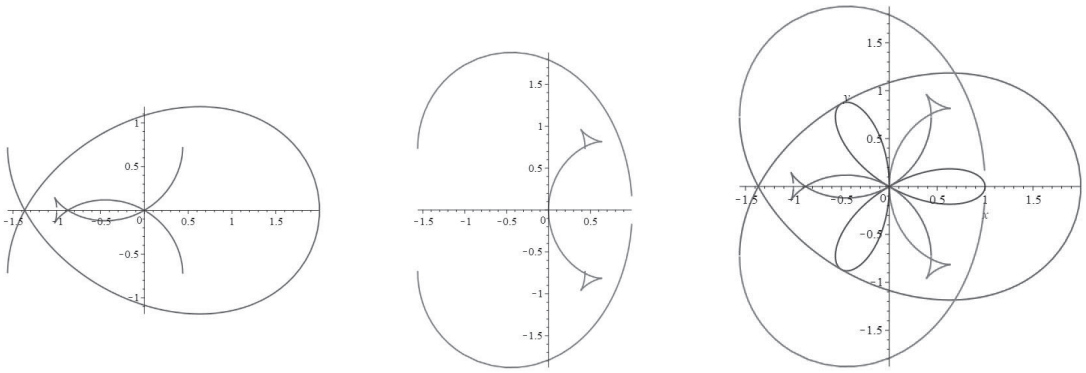
and

$$\begin{cases} x(t) = \frac{27\left[(3t^4-12t^2+1)\sqrt{D(t)(3t^2-5)^2(t^2+1)} - 81t^{10}+567t^8-1530t^6+1566t^4-357t^2-5\right]}{D(t)\ (3t^2-5)}, \\ y(t) = -\frac{t\left[(27t^8-144t^6+270t^4-72t^2+2\sqrt{D(t)(3t^2-5)^2(t^2+1)}-1)\right]}{D(t)}. \end{cases} \tag{13}$$

Figures 5(a) and 5(b) show the two separate components, which will be denoted by $\mathcal{E}_1$ and $\mathcal{E}_2$ respectively. In Figure 5(c), both the trifolium and the "full" envelope $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ are displayed. A first analysis of the display reveals the following properties:

- The roles of the components $\mathcal{E}_1$ and $\mathcal{E}_2$ are not symmetric.
- It seems that $\mathcal{E}_1$ is twice tangent to $\mathcal{C}$ and $\mathcal{E}_2$ is tangent once.
- The tree points of tangency are the vertices of an equilateral triangle.

Of course, these remarks have to be proven. This can be done by algebraic manipulations and CAS aided solution of systems of equations.



(a) 1st component (b) 2nd component (c) Full envelope

Figure 5: *The envelopes of the family of unit circles*

Remark 3.1. The first and second envelopes are themselves disjoint unions of subcurves, with obvious discontinuities. These plots have been obtained with Maple. A first attempt with the **plot** command yielded within one second a picture with superfluous straight segments connecting the separate subcurves. Addition of the option **discont=true** eliminated these superfluous, but each computation required about one minute.

The full envelope is also the disjoint union of two components: an external one (with three bulbs) and an internal one (looking like 3 fishes connected by their mouth). We will now use algebraic manipulations in order to determine an implicit polynomial equation for the envelope. The properties of the

polynomial will indicate whether each of these components is an algebraic curve, or of they are impossible to distinguish by that way.

We transform Equations (12) into polynomial equations, using squaring and transferring form side to side. We obtain the two following polynomials in three variables x, y, t:

$$\begin{aligned} P_1(x,y,t) = {} & 9t^{14}x^2 - 9t^{14} - 9t^{12}x^2 + 54t^{12}x + 45t^{12} - 51t^{10}x^2 - 180t^{10}x \\ & + 120t^{10} + 67t^8x^2 + 18t^8x - 678t^8 + 283t^6x^2 + 648t^6x + 647t^6 \\ & + 261t^4x^2 + 250t^4x - 567t^4 + 79t^2x^2 - 148t^2x + 90t^2 + x^2 - 2x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2(x,y,t) = {} & 9t^{14}y^2 + 54t^{13}y - 9t^{12}y^2 + 45t^{12} - 180t^{11}y - 51t^{10}y^2 - 447t^{10} \\ & + 18t^9y + 67t^8y^2 + 1106t^8 + 648t^7y + 283t^6y^2 - 462t^6 + 250t^5y \\ & + 261t^4y^2 - 111t^4 - 148t^3y + 79t^2y^2 - 99t^2 - 2ty + y^2. \end{aligned}$$

These polynomials generate an ideal $J = \langle P_1, P_2 \rangle$ in the polynomial ring $\mathbb{R}[x, y, t]$. Using Maple's command *EliminationIdeal*, we eliminate the variable t (i.e. we compute a projection onto $\mathbb{R}[x, y]$). The obtained ideal is generated by a polynomial of degree 28 in two variables x and y. This polynomial has exactly two irreducible components, each of degree 14, namely:

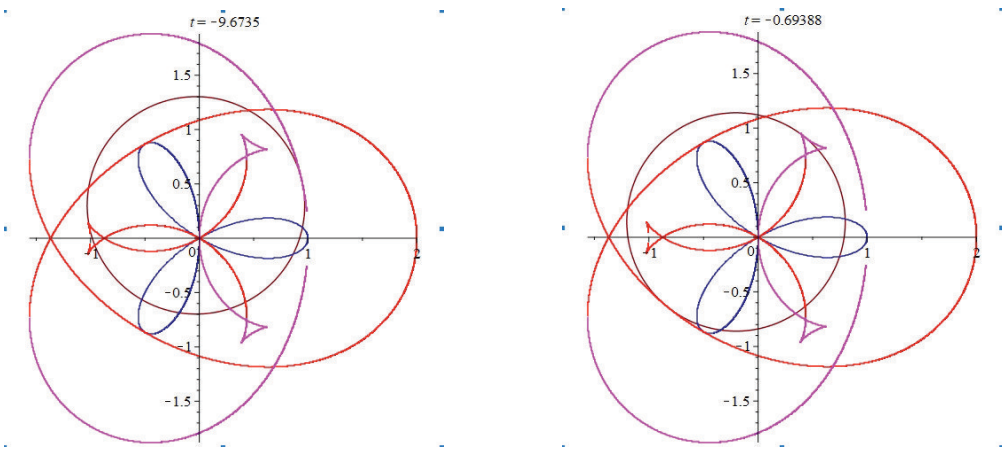
$$\begin{aligned} F_1(x,y) = {} & 256x^{14} + 1792x^{12}y^2 + 5376x^{10}y^4 + 8960x^8y^6 + 8960x^6y^8 + 5376x^4y^{10} \\ & + 1792x^2y^{12} + 256y^{14} - 512x^{13} - 1024x^{11}y^2 + 2560x^9y^4 + 10240x^7y^6 \\ & + 12800x^5y^8 + 7168x^3y^{10} + 1536xy^{12} + 3840x^{12} - 12032x^{10}y^2 \\ & - 78848x^8y^4 - 122368x^6y^6 - 71936x^4y^8 - 8960x^2y^{10} + 3584y^{12} \\ & - 5728x^{11} + 14752x^9y^2 + 50752x^7y^4 + 6464x^5y^6 - 51680x^3y^8 \\ & - 27872xy^{10} + 6080x^{10} + 120064x^8y^2 + 336000x^6y^4 + 333056x^4y^6 \\ & + 107968x^2y^8 - 3072y^{10} - 5952x^9 - 22688x^7y^2 - 435936x^5y^4 \\ & - 288480x^3y^6 + 75424xy^8 - 56823x^8 - 376540x^6y^2 + 232758x^4y^4 \\ & - 358620x^2y^6 - 26359y^8 + 35646x^7 + 360802x^5y^2 + 636938x^3y^4 \\ & + 201190xy^6 + 65109x^6 - 176542x^4y^2 - 256867x^2y^4 - 19328y^6 \\ & - 38090x^5 - 387676x^3y^2 - 68626xy^4 - 15173x^4 + 339668x^2y^2 \\ & + 25677y^4 + 14394x^3 - 67846xy^2 - 3289x^2 - 90y^2 + 242x, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_2(x,y) = {} & 1024x^{14} + 7168x^{12}y^2 + 21504x^{10}y^4 + 35840x^8y^6 + 35840x^6y^8 \\
& + 21504x^4y^{10} + 7168x^2y^{12} + 1024y^{14} - 2048x^{13} - 4096x^{11}y^2 \\
& + 10240x^9y^4 + 40960x^7y^6 + 51200x^5y^8 + 28672x^3y^{10} + 6144xy^{12} \\
& - 3072x^{12} - 27648x^{10}y^2 - 67584x^8y^4 - 71680x^6y^6 - 39936x^4y^8 \\
& - 15360x^2y^{10} - 4096y^{12} + 13632x^{11} + 13632x^9y^2 - 81792x^7y^4 \\
& - 190848x^5y^6 - 149952x^3y^8 - 40896xy^{10} - 4992x^{10} - 28416x^8y^2 \\
& - 54528x^6y^4 - 49152x^4y^6 - 23424x^2y^8 - 5376y^{10} - 34944x^9 \\
& + 15552x^7y^2 + 152640x^5y^4 + 312384x^3y^6 + 99648xy^8 + 28793x^8 \\
& + 258596x^6y^2 + 220566x^4y^4 + 35492x^2y^6 + 44729y^8 + 35078x^7 \\
& - 35078x^5y^2 - 175390x^3y^4 - 105234xy^6 - 60633x^6 - 297828x^4y^2 \\
& - 104613x^2y^4 - 73514y^6 - 35046x^5 + 70092x^3y^2 + 105138xy^4 \\
& + 38880x^4 + 77760x^2y^2 + 38880y^4 + 23328x^3 - 69984xy^2.
\end{aligned}
$$

An implicit plot of F_2 is identical to the envelope displayed in Figure 5(c). Plotting F_1 yields a totally different figure, which is irrelevant to our purpose. See [3] for a discussion of irrelevant components in such situations.

The same process, starting from the parametric equations of the second component leads to the same two polynomials $F_1(x,y)$ and $F_2(x,y)$.

The role of the two components can be explored using an animation with Maple. Two snapshots are displayed in Figure 6. Note that for every value



(a) (b)

Figure 6: *Animation of the family of circles when the center moves along the trifolium*

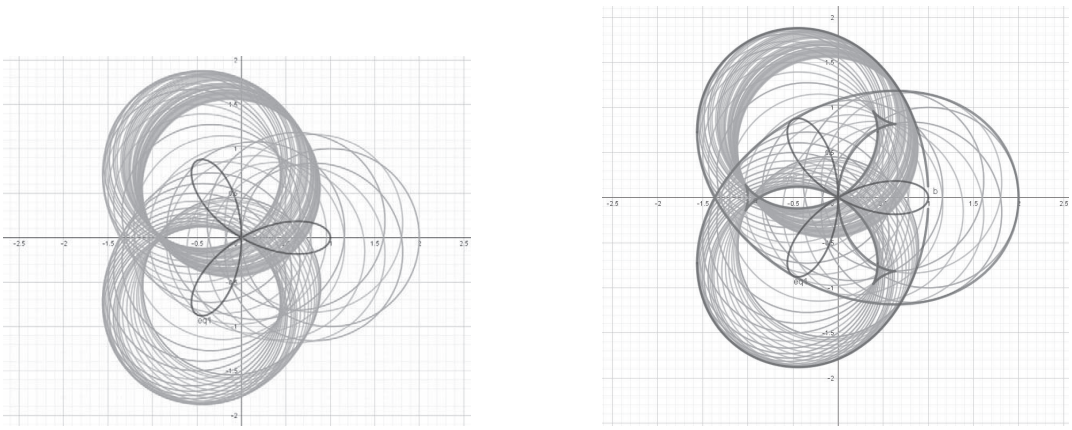
of the parameter t, the corresponding circle touches both components. This confirms, as if this was necessary, an interesting detail in the definition of an envelope: its non-uniqueness. Here, each component is a separate envelope of the given family of circles, and their union too.

4 The offset at distance 1 of the regular trifolium

An interactive study with GeoGebra of the given family of unit circles centred on the regular trifolium shows that the offset of the family is different from the envelope. Recall that the circles of the family have the following general equation:

$$\left(x + \frac{3t^2 - 1}{(t^2+1)^2}\right)^2 + \left(y + \frac{t\left(3t^2 - 1\right)}{(t^2+1)^2}\right)^2 = 1. \tag{14}$$

Using a slider bar with the **Trace On** feature to modify the values of the parameter t, a certain number of circles can be plotted. Note that no preview of the envelope is visible here, but some preview of the offset is obtained. See Figure 7, which shows the regular trifolium $\mathcal{C}$ and a certain number of circles of the family.



(a) animation of circles (b) with the envelope

Figure 7: *Offset preview of the family of unit circles*

From this experiment, it appears that the offset is the union of arcs of the external envelope (the internal part, looking like three fishes, is irrelevant to

the question here). The open question is: which arcs? The answer can come from an analytic treatment only.

5 Symbolic experiments with GeoGebra

Recent improvements in GeoGebra, in particular in its experimental version *GeoGebra Discovery*, allow us to directly study the offsets of the regular trifolium at various distances. Latest versions since December 2020 (freely available at `https://github.com/kovzol/geogebra/releases`) make it possible to define the algebraic equation (2) with parameter $a = 1$, and then use it as a path for a moving circle. First the user enters this equation in the *Input Bar* and obtains the object $eq1$, then a distance f will be defined by a segment AB. As a next step, a point C is attached to the trifolium curve, and a circle c with center C and radius f will be added. At last, the command `Envelope(`c`,`C`)` will be used to compute the offset of the trifolium at distance f. (The same result can be obtained by using the *Envelope tool* and clicking on c and C. In this alternative way, the user does not even have to type anything but the equation, and just use the mouse). Figure 8 shows how the object $eq2$ can be obtained finally when $f = 0.5$.

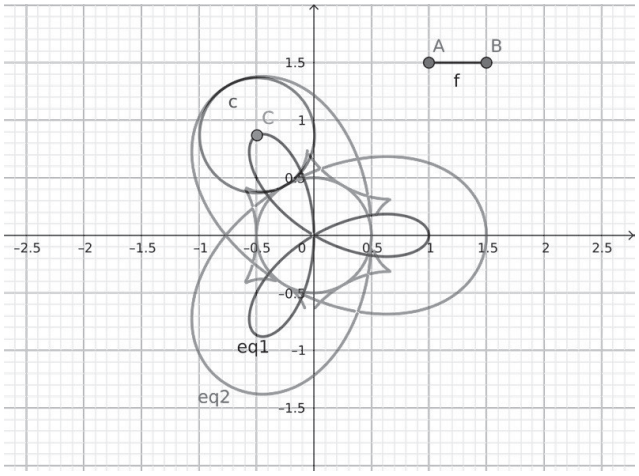


Figure 8: *The distance* 0.5 *offset of the regular trifolium made with GeoGebra Discovery*

The obtained figure shows some similarities with the previously obtained figures, most visibly the external envelope has a similar geometry. On the other hand, there is an inmost envelope that seems to be a circle. We can verify this fact by opening the *CAS View* and issue the command

`Factors(LeftSide(`$eq2$`)-RightSide(`$eq2$`))`

which informs us that the obtained result consists of two factors: one defines a circle with center $(0, 0)$ and radius $1/2$, reported as $4x^2 + 4y^2 - 1$; the other factor is

$$\begin{aligned}
O_{1/2}(x, y) = {} & 262144x^{14} - 524288x^{13} + 1835008x^{12}y^2 \\
& - 1048576x^{11}y^2 + 540672x^{11} + 5505024x^{10}y^4 \\
& - 2359296x^{10}y^2 + 49152x^{10} + 2621440x^9y^4 \\
& + 540672x^9y^2 - 614400x^9 + 9175040x^8y^6 \\
& - 5505024x^8y^4 - 5947392x^8y^2 - 352000x^8 \\
& + 10485760x^7y^6 - 3244032x^7y^4 + 3981312x^7y^2 \\
& + 570368x^7 + 9175040x^6y^8 - 2621440x^6y^6 \\
& - 7766016x^6y^4 + 9098240x^6y^2 + 213504x^6 \\
& + 13107200x^5y^8 - 7569408x^5y^6 - 10911744x^5y^4 \\
& - 570368x^5y^2 - 359424x^5 + 5505024x^4y^{10} \\
& + 1572864x^4y^8 + 1867776x^4y^6 + 1390080x^4y^4 \\
& - 2059776x^4y^2 - 277344x^4 + 7340032x^3y^{10} \\
& - 5947392x^3y^8 + 13320192x^3y^6 - 2851840x^3y^4 \\
& + 718848x^3y^2 + 62208x^3 + 1835008x^2y^{12} \\
& + 786432x^2y^{10} + 2998272x^2y^8 - 7244800x^2y^6 \\
& + 2440704x^2y^4 - 554688x^2y^2 + 139968x^2 \\
& + 1572864xy^{12} - 1622016xy^{10} + 516096xy^8 \\
& - 1711104xy^6 + 1078272xy^4 - 186624xy^2 \\
& + 262144y^{14} - 262144y^{12} - 638976y^{10} + 815360y^8 \\
& - 86528y^6 - 277344y^4 + 139968y^2 - 19683,
\end{aligned}$$

defining again a curve of degree 14.

We emphasize here that, in the background, the analytic method was used by GeoGebra, that is, computing a Jacobi determinant and then using elimination to obtain an equation in two variables, defining a plane curve. (See [14] and [15] for more details.) In other words: GeoGebra performed

an *automated proof* on the validity of the formula that describes $O_{1/2}(x, y)$. What is more, GeoGebra's symbolic capability ensured that the conjectured formula was also obtained in an automated way. (In fact, these two steps: conjecture and proof were performed in one operation.) The computation took less than half of a second on a modern computer.

When choosing $f = 1$ or other values, similar results can be obtained. For example, when changing f to 1 the result $(x^2 + y^2 - 1) \cdot F_2(x, y)$ will be delivered, that is, again a product of a circle and the offset. In this case is the computation, however, somewhat slower.

As a consequence, dynamic investigation of the set of offsets for various distances is a bit inconvenient in GeoGebra. When fixing point A and dragging point B we reach computation speed between and 1.34 and 1.35 frame per second (FPS). (Testing was performed on Ubuntu Linux 18.04, Intel(R) Core(TM) i7-4770 CPU @ 3.40GHz. See `https://prover-test.geogebra.org/job/GeoGebra_Discovery-art-plottertest/72/artifact/fork/geogebra/test/scripts/benchmark/art-plotter/html/all.html` for a detailed output of the benchmarking suite, test cases `trifolium-offset1.ggb`, ..., `trifolium-offset4.ggb`. These results are valid for the native version of GeoGebra, that is, GeoGebra Classic 5. The web version, that is, GeoGebra Classic 6, underperforms this speed between 0.23 and 0.24 FPS.) Here the same distance is defined but with different input points: this difference comes from the very different computational character of the slightly different algebraic translations. In fact, for an enjoyable animation the user could expect at least 5 FPS, so further speedup of the computation could be addressed in future work.

On the other hand, slow movement of point B can show how the set of offsets look like. Figure 9 presents how the curves change while B is dragged from $(1.5, 1.5)$ to $(1, 0.5)$. (Coloring of point B and the curve $eq2$ depends on the length of f: we used the RGB-components $(f, 1 - f, 1)$.) An online version of this experiment can be found at [9].

Conclusion

We derived the offset curve of a regular trifolium by using different approaches. Automated reasoning based on *elimination* played an important

role in our results. In our last experiment we highlighted that a point-and-click approach by using a Dynamic Geometry System can merge conjecturing and proving to a single step, and dragging some input points a large set of theorems can be proven in a novel way.

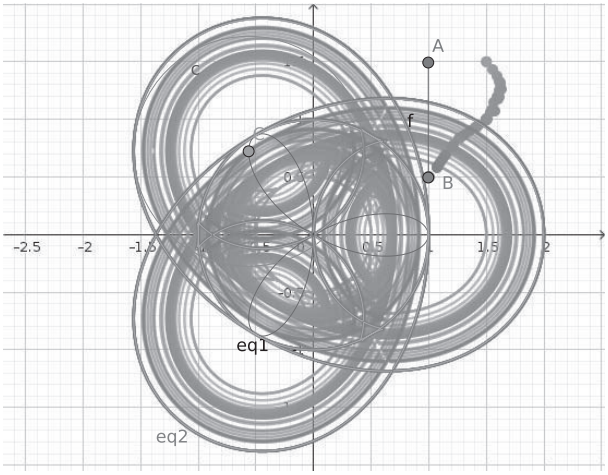


Figure 9: *Various offsets of the trifolium for distances f between* 0.5 *and* 1

Acknowledgments

First author was partially supported by the CEMJ Chair at JCT 2019-2020. Second author was partially supported by a grant PID2020-113192GB-I00 (Mathematical Visualization: Foundations, Algorithms and Applications) from the Spanish MICINN. Special thanks to Bernard Parisse for his efforts on improving the Giac Computer Algebra System especially for this research.

References

[1] W. Adams, P. Loustaunau (1994): *An Introduction to Gröbner Bases*, Graduate Studies in Mathematics **3**, American Mathematical Society, RI: Providence.

[2] M. Berger (1987): *Geometry*, Berlin-Heidelberg: Springer Verlag.

[3] F. Botana, T. Recio (2016): Some issues on the automatic computation of plane envelopes in interactive environments, *Mathematics and Computers in Simulation* **125**, 115–125. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2014.05.011

[4] F. Botana, J.L. Valcarce (2004): Automatic determination of envelopes and other derived curves within a graphic environment, *Mathematics and Computers in Simulation* **67**, 3–13. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2004.05.004

[5] D. Cox, J. Little, D. O'Shea (1992): *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, New York.

[6] T. Dana-Picard (2018): Automated study of a regular trifolium, *Math. Comput. Sci.* **13**(1-2), 57–67. https://doi.org/10.1007/s11786-018-0351-7

[7] T. Dana-Picard (2021): Envelopes and Offsets of Two Algebraic Plane Curves: Exploration of Their Similarities and Differences. *Math. Comput. Sci.* https://doi.org/10.1007/s11786-021-00504-5

[8] T. Dana-Picard, Z. Kovács (2021): Networking of technologies: a dialog between CAS and DGS. *Electronic Journal of Mathematics and Technology.* **15**(1), 43–59.

[9] T. Dana-Picard, Z. Kovács (2020): *Offsets of a trifolium*, available: https://matek.hu/zoltan/offsets-of-a-trifolium.php.

[10] T. Dana-Picard, N. Zehavi (2016): Revival of a classical topic in Differential Geometry: the exploration of envelopes in a computerized environment, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* **47**(6), 938–959. https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1133852

[11] R. J. Ferréol (2017): *Regular Trifolium*, available: https://mathcurve.com/courbes2d.gb/trifoliumregulier/trifoliumregulier.shtml.

[12] R. Ferréol (2017): *Rational Quartic*, available: https://mathcurve.com/courbes2d.gb/quarticrationnelle/quarticrationnelle.shtml.

[13] A. Kock (2007): Envelopes – notion and definiteness, *Beiträge zur Algebra und Geometrie (Contributions to Algebra and Geometry)* **48**, 345–350.

[14] Z. Kovács (2017): Real-time Animated Dynamic Geometry in the Classrooms by Using Fast Gröbner Basis Computations, *Math. Comput. Sci.* **11**(3-4), 351–361. https://doi.org/10.1007/s11786-017-0308-2

[15] Z. Kovács (2018): Achievements and Challenges in Automatic Locus and Envelope Animations in Dynamic Geometry, *Math. Comput. Sci.* **13**, 131–141. https://doi.org/10.1007/s11786-018-0390-0

[16] J.R. Sendra, F. Winkler, S. Pérez-Díaz (2008): *Rational Algebraic Curves: A Computer Algebra Approach*, Springer.

[17] D. Zeitoun, T. Dana-Picard (2010): Accurate visualization of graphs of functions of two real variables, *International Journal of Computational and Mathematical Sciences* **4**(1), 1–11.

[18] D. Zeitoun, T. Dana-Picard (2019): On the usage of different coordinate systems for 3D plots of functions of two real variables, *Math. Comput. Sci.* **13**, 311–327. https://doi.org/10.1007/s11786-018-0359-z

An exhibition about the construction of polyhedrons including a variant of the "omnipolyhedron"

Una exposición sobre la construcción de poliedros que incluye una variante del "omnipoliedro"

Roberto Cardil Ricol
IES Alonso Quijano de Alcalá de Henares (Madrid)
roberto.cardil@gmail.com

Resumen

An exhibition about 'The Platonic Solids' and the 'Omnipoliedro' by Puig Adam is being exhibited at the IES Alonso Quijano in Alcalá de Henares (Madrid) from May to November 2021. It is aimed at students and the general public. It has a triple objective: to enjoy the beauty of polyhedrons, to encourage their construction using different simple techniques, and to suggest how these constructions help us to think mathematically.

Breve descripción de la Exposición

Durante los meses de mayo a noviembre de 2021 se está exhibiendo una exposición en el vestíbulo del IES Alonso Quijano de Alcalá de Henares dirigida a estudiantes y público en general. Su título es 'Los sólidos platónicos' y tiene un triple objetivo: disfrutar de la belleza de los poliedros, fomentar su construcción usando diferentes técnicas sencillas y sugerir cómo estas construcciones nos ayudan a pensar matemáticamente.

Puede considerarse que la exposición tiene tres partes. La primera muestra los cinco sólidos regulares construidos con cartulina y con varillas de plástico y su asociación con cinco obras de arte relacionadas con los cuatro elementos

y el universo (como sugirió Platón). En al segunda parte se muestran cuatro posibles emparejamientos de estos poliedros que tienen especial interés geométrico y que, en la tercera parte, se utilizarán para la construcción del omnipoliedro de Puig Adam y de una variante del mismo.

La exposición ha resultado ser un marco adecuado para impartir charlas con los alumnos y organizar talleres de construcción de poliedros.

En la Figura 1 aparece uno de los paneles de la Exposición, en que se trata de visualizar los referidos emparejamientos, que resultarán esenciales en la construcción del omnipoliedro.

Figura 1: *Emparejamiento de poliedros regulares.*

1. El omnipoliedro inicial de Puig Adam

La idea del mnipoliedro surgió en la clase de D. Pedro Puig Adam con sus alumnos en el Instituto San Isidro de Madrid.

Efectivamente, la construcción del omnipoliedro surgió de un comentario en clase, después de haber aparecido deformados antiguos modelos de dodecaedro y cubo regulares (construidos con varillas metálicas soldadas), mientras que el tetraedro, el octaedro e icosaedro, de la misma colección, se conservaban en buen estado. La diferencia de resistencia no fue debida al azar, sino a la rigidez estática del triángulo. Ello le condujo a interesarse por las estructuras reticulares triangulares, tan usuales en la técnica (puentes, postes, etcétera). En particular, los alumnos comprobaron la rigidez del ico-

saedro como estructura triangular, sin necesidad de soldar los vértices, sino de atarlos simplemente.

Puig Adam propuso una solución simple, elegante y efectiva, para resolver el problema de la falta de rigidez del cubo y del dodecaedro con la construcción del omnipoliedro. El omnipoliedro original construido en el Instituto San Isidro aparece fotografiado en la página 250 del célebre libro [**?**].

Desde entonces, el omnipoliedro ha sido construido en varias ocasiones y lugares, entre las que destaca la bien conocida y documentada por José Antonio Mora, instalada en el Parque Temático del Tossal en Alicante (Figura 2).

Figura 2: *Omnipoliedro del Parque Temático del Tossal.*

Por desgracia, este precioso omnipoliedro ha desaparecido [**?**], pero aparece bien documentada en la página web de José Antonio Mora [**?**], donde se describe detalladamente la construcción y que incluye una completa guía didáctica.

2. Una variante de omnipoliedro

La construcción del omnipoliedro es muy instructiva y fácil de realizar con materiales actuales, asequibles y vistosos. La técnica que se propone en la Exposición consiste en utilizar varillas, tacos y hembrillas para formar las aristas que se unirán con bridas de plástico.

En particular, para la Exposición se ha desarrollado una variante del omnipoliedro, que aparece junto con la clásica de Puig Adam, en otro panel de la Exposición (Figura 3).

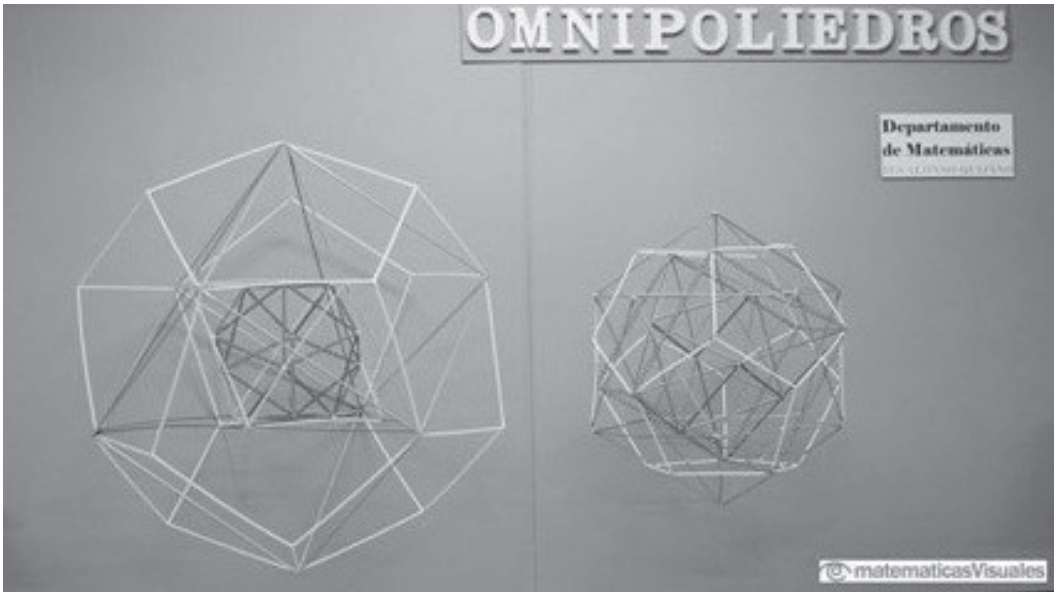


Figura 3: *Dos variantes del Omnipoliedro.*

Conclusión

Las motivaciones a que da lugar la construcción de un omnipoliedro son muy variadas. Una obvia es el cálculo de las longitudes de las varillas. También lleva a obtener los volúmenes de los sólidos platónicos con procedimientos particularmente simples.

Para más detalles sobre la exposición puede verse la página web complementaria [**?**]. En ella se comenta detenidamente una propuesta de construcción del omnipoliedro y se analizan algunas consecuencias geométricas que de ellas se derivan.

Una información más amplia sobre construcción y propiedades de poliedros, desarrollada por el autor, puede encontrarla el lector en [**?**].

Referencias

[1] P. Puig Adam (1960): *La matemática y su enseñanza actual*, Ministerio de Educación.

[2] A. Requena (2021), *Blog de título "Turismo Matemático"*. Accesible en: `https://mateturismo.wordpress.com/2021/06/21/el-omnipoliedro-que-fueen-alicante/`

[3] J.A. Mora *El Omnipoliedro del Tossal de Alicante,*. Accesible en: `http://jmora7.com/miWeb2/home2.htm`

[4] R. Cardil Ricol (2021), *Exposición "Los sólidos platónicos"*. Accesible en: `http://www.matematicasvisuales.com/html/geometria/platonicos/omnipoliedro.html`

[5] R. Cardil Ricol (2021), *Matemáticas Visuales*. Accesible en: `http://www.matematicasvisuales.com`

Reseña de libros

RICARDO MORENO CASTILLO: *Introducción a la historia de las curvas algebraicas* (116 págs.) ISBN: 978-84-15913-59-7. Editorial NIVOLA, 2020. Colección Violeta.

En esta nueva entrega de la colección "Una historia de las Matemáticas para jóvenes" su autor, Ricardo Moreno Castillo, se centra en las curvas algebraicas planas y en el problema de su clasificación.

El autor logra hacer su libro autocontenido comenzando por las definiciones de lo que es un polinomio y el plano proyectivo. Una vez claros estos conceptos, el autor logra sintetizar en su libro una historia de las curvas algebraicas, que parte de las cónicas y el cálculo de sus rectas tangentes y sus asíntotas (que definirá como aquellas tangentes en los puntos del infinito), para terminar con las fórmulas de Plücker y una pequeña lista de algunas otras curvas notables que no han aparecido en el hilo argumental anterior.

Para conducirnos a través de este capítulo de la Historia de las Matemáticas el autor comienza con la clasificación de las cúbicas según Newton. La clasificación de Newton es árida y no es exhaustiva, y será mejorada por Plücker más adelante.

El autor, pues, nos lleva de la mano a través del proceso que llevó de una a otra clasificación. Para ello nos introduce en el estudio de los puntos singulares de una curva, y el orden de contacto entre curvas, lo que nos conducirá hacia el famoso teorema de Bezout.

A continuación, el autor nos presenta el estudio de los puntos de inflexión de una curva, que le da pie tanto a hablar del trabajo de un matemático casi desconocido, Gua de Malves, como a introducir el hessiano y por consiguiente el trabajo de Cramer.

En este punto la historia de las curvas, en cuanto a su estudio de las curvas cúbicas, aún sigue la clasificación de Newton y es Stirling quien completa su trabajo. MacLaurin es posiblemente el primero en intuir el teorema de Bezout. Teorema tan potente que nos provee de demostraciones muy sencillas de los teoremas de Pappus y Pascal.

En los últimos capítulos, y de camino a las fórmulas de Plücker, el autor logra presentar conceptos tan profundos como el género y la parametrización de una curva, para terminar explicando la clasificación de las curvas algebraicas, de un grado fijo cualquiera, en términos del número de singularidades.

Finalmente, y como cabía esperar al hablar de clasificación de curvas algebraicas, el autor explica la noción de transformación birracional y la diferencia entre ésta y una transformación proyectiva.

El presente libro hace un esfuerzo notable y presenta exitosamente de manera muy resumida la base de lo que actualmente es un problema de investigación avanzada, y con resultados de largo alcance que llegan incluso a la física teórica, este es el estudio del "moduli de curvas". Donde por moduli de curvas se entiende el espacio que parametriza todas las curvas algebraicas.

Marina Logares

MARÍA VICTORIA VEGUÍN CASAS: Madrid, calles personajes y paseos matemáticos (268 págs.) ISBN: 978-84-9873-450-8. Ediciones La Librería, 2021.

La autora, licenciada en Matemáticas y en Psicología, ha ejercido como catedrática de matemáticas en el IES Beatriz Galindo de Madrid y desempeñado durante varios años tareas de orientación escolar, participando en proyectos de innovación educativa. También ha publicado libros y artículos relativos a Historia de la matemática en sus orígenes.

Comienza el libro con una Breve historia de los planos y callejeros más antiguos de Madrid, para enseguida ocuparse de lo que denomina Un Callejero Matemático, que incluye el Estudio Matemático de una calle concreta, calles dedicadas a números, a cuerpos geométricos (Glorieta de las Pirámides, Plaza de los Cubos, etc), calles dedicadas a instrumentos relacionados con las matemáticas (Astrolabio, Brújula, Sextante, Reloj), así como calles dedicadas a personajes que tuvieron actividad relacionada con las matemáticas (Echegaray, Lucio del Valle, Juan de Herrera,..). El capítulo 3 se ocupa de las calles dedicadas a Pitágoras y al matemático árabe madrileño Maslama, nacido a mitad del siglo X.

A partir de esta parte inicial de introducción, contiene sucesivos capítulos que se ocupan de calles cuyos personajes aparecen en orden cronológico. El capítulo 4 a calles dedicadas a personajes anteriores al siglo XVI (Avda. de Séneca y calles de Columela, San Isidoro de Sevilla, Averroes, Alfonso X y Raimundo Lulio).

El capítulo 5 contiene calles dedicadas a personajes nacidos en los siglos XVI-XVII (Antonio de Nebrija, Cardenal Silíceo, Juan de Herrera,…), el capítulo 6 a calles dedicadas a personajes nacidos en el siglos XVIII (Jorge Juan, Antonio de Ulloa, Celestino Mutis, Agustín de Betancourt,…) y el capítulo 7 a calles dedicadas a personajes nacidos entre 1800 y 1850 (Manuel Becerra, Ibáñez de Ibero, Echegaray, Arturo Soria,…).

El capítulo 8 contiene calles dedicadas a personajes nacidos después de 1850 (Torres Quevedo, Esteban Terradas, Rey Pastor, Julio Palacios, Ricardo San Juan). El capítulo 9 trata las calles dedicadas a matemáticos no españoles (Euclides, Arquímedes, Copérnico, Galileo, Newton, Leibniz,…). El capítulo 10 se titula “Otras calles que debemos considerar”, e incluye las calles de Lista, San Jerónimo, Alcalá Galiano, Pedro Teixeira,…

En cada una de las calles, plazas, parques,… considerados aparece la fecha del Acuerdo Municipal por el que se les asigna tal nombre, una foto del cartel la calle, el lugar y fecha de nacimiento y defunción del personaje, una biografía del mismo, un amplio resumen de su actividad profesional y su relación con las matemáticas.

Y el capítulo 11, titulado Paseos matemáticos por Madrid, se dedica a describir Rutas de algún modo relacionadas con las matemáticas: paseo por la Plaza de la Villa y alrededores, paseo por el Barrio de los Jerónimos, paseo por la Ciudad Universitaria,…

Finalmente, se consideran Algunas Conclusiones, como "Paradojas en el callejero", "Un callejero afectado por cambios de nombres", "Un callejero de amigos, profesores y discípulos", "Matemáticos madrileños con calle y sin calle en Madrid" (entre los que aparece el que fue, hasta su fallecimiento, vicepresidente de nuestra sociedad, Javier Peralta, autor de artículos sobre los matemáticos madrileños) y concluye con una relación de cráteres lunares y asteroides dedicados a algunos de los personajes mencionados en el libro.

Termina el libro con una abundante Bibliografía y una relación de páginas webs consultadas para la elaboración del libro.

Su lectura es muy agradable y, sin duda, interesante para todos los madrileños (y no madrileños) interesados en los personajes ilustres que desarrollaron actividades relacionadas con las matemáticas y dan nombre a calles, plazas y parques de Madrid.

Eugenio Roanes Macías

Competición Estadística Europea

El *Instituto Nacional de Estadística (INE),* en colaboración con la *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa (SEIO)*y la *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa (SEIO)* y la *Facultad de Estudios Estadísticos (FEE)* de la UCM convocan la fase nacional de la *Competición Estadística Europea.*

Esta competición está dirigida a estudiantes de secundaria (categoría A: Bachillerato y Ciclos Formativos de Grado Medio, categoría B: ESO y Formación Profesional básica) y la participación se realiza en equipos de un máximo de tres alumnos dirigidos por un profesor/a. El calendario previsto para la fase nacional es el siguiente:

- Inscripción: del 1 de octubre al 28 de noviembre de 2021, ambos incluidos.
- Realización de la primera prueba: del 29 de noviembre de 2021 al 13 de enero de 2022, ambos incluidos.
- Publicación de los resultados de la primera prueba: 17 de enero de 2022.
- Realización del trabajo de la segunda prueba: del 18 de enero al 28 de febrero de 2022, ambos incluidos.
- Publicación de los equipos ganadores y finalistas: 17 de marzo de 2022.

Los equipos ganadores y finalistas podrán participar en la fase europea del concurso y competir con equipos de otros países de la UE. Los premios en esta fase consisten en un cheque regalo de 400€ y material promocional.

Los cinco primeros equipos de cada categoría (ganador y cuatro finalistas) podrán elaborar un vídeo de la fase europea, y un jurado seleccionará qué dos vídeos de los cinco presentados por cada categoría serán los que participen en la fase europea.

El calendario previsto para esta fase es el siguiente:

- Realización de los vídeos para la fase europea: 18 marzo al 3 de mayo 2022
- Selección de los vídeos para participar en la fase europea: 9 de mayo 2022
- Votación del público: del 4 al 19 de mayo 2022
- Publicación de los vídeos ganadores por votación del público: 20 mayo 2022

Toda la información relativa a la fase nacional, incluidas las bases, podrá consultarse en la página web:

https://www.ine.es/esc_es/

Instrucciones para el envío de originales, para su publicación en el Boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, congresos, etc., deben enviarse *en formato electrónico*, del modo especificado a continuación.

Artículos

Los artículos deberán ser organizados del siguiente modo:

Encabezamiento: comenzará con el título del artículo en inglés e, inmediatamente debajo, el título en español; a continuación el nombre del autor o autores; después la referencia al departamento y/o institución de trabajo de los autores; así como las direcciones de correo electrónico de los autores; y, finalmente el Abstract (Resumen) en inglés (estrechado a ambos lados un centímetro, respecto de la anchura del texto).

Desarrollo: comenzará con una sección de Introducción (que irá sin numerar), seguida de las demás secciones, cuyos títulos deben ir numerados. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

Terminación: El artículo concluirá con unas Conclusiones, en que se comente brevemente lo más esencial o novedoso del contenido del artículo; y, finalmente, se incluirá la Bibliografía citada.

Procesador: Para facilitar la revisión, corrección e impresión es preferible utilizar μS-Word o LaTeX.

Respecto de las Figuras

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser impresas.

Las figuras deben llevar debajo numeración (Figura 1, Figura 2, …), para referirse a ellas en el texto, y un breve descriptor.

No debe escribirse texto a ninguno de los dos lados de la figura, ni a la izquierda ni a la derecha (es decir, las figuras no deben intercalarse en el texto).

En caso de usar Word

El formato de texto debe ser 17 cm (alto) x 12.8 cm (ancho). Para ello, hacer uso del *Diseño de página*, y en *Configurar Página*, elegir estos márgenes: superior 3 cm; inferior 9,7 cm; izquierdo 4,1 cm; derecho 4,1 cm; encuadernación 0 cm. Usar letra *Times New Roman* con "Interlineado sencillo" (no múltiple).

El título (en inglés y español) en minúsculas de 16 puntos; el nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en estilo de letra negrita; la referencia de departamento o institución de trabajo en 11 puntos en el mismo estilo de letra; y la dirección de correo electrónico en estilo de letra *Courier New* de 11 puntos.

La palabra Abstract (o Resumen), en minúsculas de 12 puntos en letra negrita y su contenido, en inglés, en tamaño de letra de 11 puntos en estilo itálica o cursiva.

Los títulos de secciones en minúsculas de 12 puntos en letra negrita, sin punto final. Las subsecciones en minúsculas negritas en tamaño de letra de 11 puntos. La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará (es decir, empezará al borde).

Plantilla para facilitar la redacción usando Word (recomendado)

Entrando en la página web de la Sociedad, se puede descargar una plantilla que permite facilitar a los autores el seguimiento de las normas tipográficas anteriormente indicadas.

En caso de usar LaTeX

El formato de texto debe ser 17 cm (alto) x 12.8 cm (ancho). Para ello, hacer uso del estilo "article", eligiendo: *textheight=17cm* (alto), *textwidth=12.8cm* (ancho) y *hoffset=0.3cm*. Por lo demás, tener en cuenta lo indicado anteriormente para usuarios de Word. Para direcciones de correo electrónico usar el tipo de letra `\texttt`.

Si se usan paquetes específicos de *Latex* distintos de los usuales, deberán adjuntarse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Plantilla para facilitar la redacción usando LaTex (recomendado)

Entrando en la página web de la Sociedad, se puede descargar una plantilla que permite facilitar a los autores el seguimiento de las normas tipográficas anteriormente indicadas.

Selección de originales

Los artículos recibidos para su publicación serán evaluados por miembros del Comité Editorial (mencionados en las páginas 4-5 de los últimos números del Boletín), que decidirán sobre la originalidad, calidad y ajuste del artículo a la línea general del Boletín.

En casos especiales, para efectuar la evaluación se acudirá a revisores externos (no incluidos en el Comité Editorial).

Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que hagan modificaciones en el contenido de los artículos o en el modo de presentarlos.

Una vez concluido dicho proceso de revisión de un artículo y adaptación a las normas de publicación anteriormente indicadas, el artículo podrá ser aceptado para su publicación, lo que se comunicará a sus autores y se incluirá en la lista de artículos a publicar en nuestro Boletín.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de diez euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son del 39 en adelante.

El importe puede ser abonado mediante transferencia a la nueva cuenta de la Sociedad, ES58 3025 0006 2114 3326 8241, domiciliada en la entidad bancaria *Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28003* (o bien mediante un cheque a nombre de *la Sociedad).*

La carta o mensaje de correo electrónico de petición se enviará a la Sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En ella se indicará el número o números a adquirir, incluyendo la *dirección* a donde se han de enviar y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia*.

INSCRIPCION DE NUEVOS SOCIOS EN LA SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

SOLICITUD DE INSCRIPCIÓN

D. ..... Teléf.: .....

Dirección: .....

Ciudad: ..... Cod. Postal: ..... E-mail: .....

Centro de trabajo: .....

Solicita el ingreso como socio de número de la sociedad:

Con esta fecha autorizo al Banco: .....

Dirección de la Sucursal: .....

para que cargue en mi cuenta: ..... / ..... / ..... / ..... /.

los recibos de las cuotas correspondientes al año 2022 y siguientes.

Fecha: ..... de ..... de 2021

Firma:

Dicha solicitud se enviará por correo postal a la dirección:
Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas
Facultad de Educación Despacho 3215 28040 Madrid
o bien al email de la Sociedad: puigadam@mat.ucm.es

Los nuevos inscritos en la Sociedad que elijan abonar la cuota anual mediante domiciliación en su entidad bancaria, deberán comunicarlo a su banco, para que sean aceptados los recibos, que serán pasados en el mes de enero de cada año.

La cuota anual fue establecida en la Asamblea 2012 (véase el Boletín nº 91) en 51 euros para socios individuales y 62 para institucionales (que incluyen la cuota de la Federación de Sociedades, que envía a nuestros socios la revista SUMA).

Quienes prefieran abonar la cuota mediante transferencia pueden hacerlo a la c.c. de nuestra Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

CAJA DE INGENIEROS c/. Carranza, 5 28004 Madrid
cc. ES58 3025 0006 2114 3326 8241