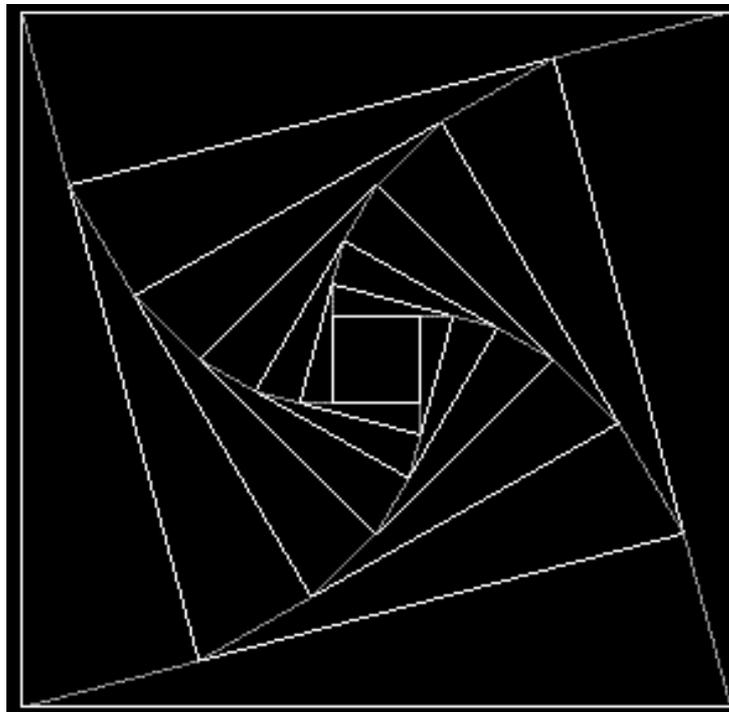


**SOCIEDAD «PUIG ADAM»  
DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS**



**BOLETÍN N.º 105  
ABRIL DE 2018**

## ÍNDICE

Págs.

Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas .....	2
Edición del Boletín y Comité Editorial .....	4
Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2018 .....	6
Convocatoria del XXXVI Concurso de Resolución de Problemas .....	7
XVII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid, por <i>Joaquín Hernández y Juan Jesús Donaire</i> .....	8
Un estudio de las transformaciones del plano que conservan la forma de las figuras por métodos sintético y algebraico usando GeoGebra, por <i>E. Roanes Macías y E. Roanes Lozano</i> .....	19
Unas curvas estrafalarias II, por <i>Ricardo Moreno Castillo</i> .....	50
Una nota sobre una clase de ecuaciones diferenciales con condición inicial aleatoria, por <i>José Manuel López-Ballesteros, Clara Burgos, Julia Calatayud, Juan Carlos Cortés y Marc Jornet</i> .....	64
Índice de los artículos publicados en los números 76 al 104 de este Boletín (2007-2017), elaborado por <i>Beatriz Barrero Díaz y Carolina Bravo Sanz</i> , bajo la dirección del Secretario de nuestra Sociedad .....	74
Reseña de libros .....	91
Instrucciones para el envío de originales .....	94
Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín .....	95
Boletín de inscripción .....	96

## **SOCIEDAD “PUIG ADAM” DE PROFESORES DE MATEMATICAS**

SEDE: Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra) Despacho 3215  
Rector Royo Villanova, s/n 28040 – Madrid  
Correo electrónico: puigadam@mat.ucm.es

---

### **Junta Directiva de la Sociedad “Puig Adam”**

*Presidente:* José Javier Etayo Gordejuela

*Vicepresidentes:*

Eugenio Roanes Macías

Joaquín Hernández Gómez

María Gaspar Alonso-Vega

*Vocales:*

Enrique Rubiales Camino (Relaciones Institucionales)

Eugenio Roanes Lozano (Gestión de publicaciones)

Ricardo Moreno Castillo (Actividades y concursos)

Juan Jesús Donaire Moreno (Redacción de Publicaciones)

*Secretario:* José María Sordo Juanena

*Vicesecretaria:* Carmen Escribano Ródenas

*Tesorero:* José Manuel Gamboa Mutuberría

*Bibliotecaria:* Angélica Martínez Zarzuelo

---

### **Boletín de la Sociedad “Puig Adam”**

ISSN: 1135-0261 Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).

Tel.: 91 611 59 94 – loureiro@graficasloureiro.es

El Boletín se distribuye gratuitamente a nuestros socios. Las instrucciones para hacerse socio aparecen en la página 96 del mismo.

Las instrucciones para publicar en el Boletín aparecen en la página 94 del mismo. Las propuestas de publicación de artículos, reseñas, etc, deben hacerse a través del correo electrónico de la Sociedad: puigadam@mat.ucm.es

En la portada aparece la figura adoptada como logotipo de la Sociedad "Puig Adam". Se trata de la figura de portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado “La Matemática y su enseñanza actual”.

## **Página web de la Sociedad**

<http://www.sociedadpuigadam.es>

### Contenido:

Nuestra web contiene varias secciones: *Historia* de la Sociedad, *Boletín* de la Sociedad y *Concursos* de Problemas (el Concurso “Puig Adam” y otros concursos en que colaboran miembros de nuestra Junta Directiva).

### Sobre la publicación del Boletín en nuestra web:

Nuestro Boletín se ha publicado ininterrumpidamente desde 1983 en que se fundó nuestra Sociedad. Muchos de los números antiguos están agotados y, con frecuencia se nos pide información sobre artículos publicados en ellos. La incomodidad de copiar reiteradamente dichos artículos por escaneo y de enviarlos nos ha llevado a adoptar la solución indicada a continuación.

Teniendo en cuenta la información solicitada a la Sociedad y, particularmente a algunos de nuestros socios, por parte de profesores y entidades (españolas y también de países sudamericanos) sobre artículos aparecidos en nuestro Boletín, varios de nuestros socios han propuesto incorporar parcialmente el Boletín a nuestra web, al igual que se está haciendo en otras Sociedades Matemáticas que publican revistas.

En respuesta a esta propuesta, se ha acordado que sean colgados en nuestra web en formato pdf los contenidos íntegros de los números de nuestro Boletín con más de cinco años de antigüedad y el índice de contenidos de los números publicados en los cinco últimos años. Ya se ha concluido esa tarea, de modo que los interesados pueden encontrar todos los Boletines en nuestra web.

### Cómo acceder a los Boletines

Nuestra pág. web cuelga de la pág. de la Universidad Complutense de Madrid ([www.ucm.es](http://www.ucm.es)) y se puede entrar directamente en nuestra pág., por ejemplo, desde *Google*, tecleando *Sociedad Puig Adam*, seleccionando *Todos los Boletines* y eligiendo *Índices de los Boletines de los últimos cinco años*, o bien *Boletines completos de más de cinco años*.

### Mantenedoras de la página web:

Beatriz Barrero Díaz y Carolina Bravo Sanz, bajo la dirección del Secretario de nuestra Sociedad.

## **Edición del Boletín**

### *Comité Editorial*

Gabriel Aguilera Venegas, Universidad de Málaga  
José Antonio Alonso, Universidad de Sevilla  
Francisco Baena Muñoz, Profesor de Instituto  
Bärbel Barzel, University of Duisburg-Essen (Alemania)  
Michel Beaudin, École de Technologie Supérieure, Montreal (Canadá)  
Josef Böhm, Profesor de Instituto (Austria)  
Joaquín Borrego, Universidad de Sevilla  
Francisco Botana, Universidad de Vigo  
Justo Cabezas, Profesor de Instituto y Univ. de Extremadura  
Agustín Carrillo de Albornoz Torres, Profesor de Instituto y Univ. de Córdoba  
Juan Carlos Cortés López, Universidad Politécnica de Valencia  
Juan Jesús Donaire Moreno, Profesor del Instituto “Ramiro de Maeztu”, Madrid  
Fernando Etayo Gordejuela, Universidad de Cantabria  
José Javier Etayo Gordejuela, Universidad Complutense de Madrid  
Sergio Falcón, Universidad de las Palmas de Gran Canaria  
Jose Luis Galán García, Universidad de Málaga  
José Manuel Gamboa, Universidad Complutense de Madrid  
José Alberto García Suárez, Profesor de Instituto y Univ. Santiago Compostela  
María Gaspar Alonso-Vega, Profesora de Instituto y Univ. Complutense Madrid  
Francisco González Redondo, Universidad Complutense de Madrid  
Joaquín Hernández Gómez, Profesor de Instituto y Univ. Complutense Madrid  
Gregorio Hernández Peñalver, Universidad Politécnica de Madrid  
Antonio Hernando Esteban, Universidad Politécnica de Madrid  
David J. Jeffrey, University of Western Ontario (Canadá)  
Nuria Joglar Prieto, Universidad Complutense de Madrid  
Wolfram Koepf, Universität Kassel (Alemania)  
Zoltán Kovács, The Private University College of Education, Linz (Austria)  
Ricardo Luengo González, Universidad de Extremadura  
Edgar Martínez Moro, Universidad de Valladolid  
Angélica Martínez Zarzuelo, Universidad Complutense de Madrid

Ricardo Moreno Castillo, Profesor de Instituto y Univ. Complutense Madrid  
Aleksandr Myllari, Åbo Akademi University (Finlandia)  
John Olive, The University of Georgia (USA)  
Pavel Pech, University of South Bohemia (República Checa)  
Pedro Quaresma, Universidade de Coimbra (Portugal)  
Antonio Quesada, Akron University (USA)  
Tomás Recio, Universidad de Cantabria  
Luis Rico, Universidad de Granada  
Eugenio Roanes Lozano, Universidad Complutense de Madrid  
Eugenio Roanes Macías, Universidad Complutense de Madrid  
Ana Romero, Universidad de La Rioja  
Enrique Rubiales Camino, Profesor de Instituto y Univ. Complutense Madrid  
Julio Rubio, Universidad de La Rioja  
José Luis Ruiz Reina, Universidad de Sevilla  
Eduardo Sáenz de Cabezón, Universidad de La Rioja  
Fernando Sánchez Fernández, Universidad de Extremadura  
Tomás Sánchez Giralda, Universidad de Valladolid  
José María Sordo Juanena, Universidad Complutense de Madrid  
Jon R. Star, Harvard Graduate School of Education (USA)  
Stanly Steinberg, University of New Mexico (USA)  
Elena Varbanova, Technical University of Sofia (Bulgaria)  
Nikolay N. Vassiliev, Russian Academy of Sciences (Rusia)  
Michael J. Wester, Cotopaxi and University of New Mexico (USA)

### Edición de este número 105

La coordinación de la edición ha estado a cargo de Eugenio Roanes Macías.

### Menciones de los artículos del Boletín

- 1) Recensiones de los artículos publicados en el Boletín aparecen en “MathEduc”, lo que antes era Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM).
- 2) Los abstracts de los artículos vuelven a estar accesibles en el portal Dialnet.
- 3) El Boletín aparece en la base de datos de publicaciones periódicas UlrichsWeb

# Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2018

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas correspondiente al año 2018 para el *sábado día 7 de abril de 2018*, en los locales de la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, Ciudad Universitaria, a las 11:30 en primera convocatoria y a las 12:00 en segunda, con el siguiente:

## ORDEN DEL DIA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.
2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.
3. Informe del Tesorero.  
Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Elección de nuevos cargos directivos.
5. Asuntos de trámite.
6. Ruegos y preguntas.

## Cuotas del año 2018 y siguientes

Se recuerda a nuestros socios que en la Asamblea General Ordinaria de 2014 se aprobó que los recibos anuales sean pasados al cobro en el mes de enero de cada año (véase Boletín nº 97), ya que hemos de pagar a primeros de año la cuota a la Federación Española de Sociedades Matemáticas, por la que recibimos la revista SUMA.

# XXXVI Concurso de Resolución de Problemas

convocado por

**la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas**

(con la colaboración del Colegio de Doctores y  
Licenciados en Filosofía y Letras y en Ciencias)

## BASES DEL CONCURSO

**Primera:** Los alumnos podrán participar en el Concurso en tres niveles:

- a) *Primer nivel:* alumnos de 3º de E.S.O.
- b) *Segundo nivel:* alumnos de 4º de E.S.O.
- c) *Tercer nivel:* alumnos de 1º Bachillerato

**Segunda:** Las pruebas consistirán en la resolución de Problemas de Matemáticas (los mismos para todos los concursantes de un mismo nivel) y se realizarán en la mañana del *sábado 19 de mayo de 2018* a partir de las 10 horas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

**Tercera:** A los mejores de cada nivel, se concederán diplomas y premios.

**Cuarta:** Los Centros que deseen presentar alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción preferiblemente antes del día 11 de mayo, dirigiéndose por correo electrónico, carta o fax al presidente de nuestra Sociedad:

*Prof. Javier Etayo Gordejuela*  
*Departamento de Álgebra, Geometría y Topología*  
*Facultad de Ciencias Matemáticas*  
*28040-Madrid      Fax: 91 394 4662*  
*Correo electrónico: jetaayo@mat.ucm.es*

En la preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

**Quinta:** Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el curso académico 2017-2018.

# XVII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

Una vez más y ya van diecisiete años, la Sociedad Puig Adam patrocina y organiza el Concurso Intercentros de resolución de problemas por equipos en sus tres modalidades: relevos, equipos e individuales.

En esta ocasión ha habido 91 equipos correspondientes a 48 centros de enseñanza, tanto públicos como privados. En total 546 estudiantes que junto con muchos de sus profesores y algunos padres desarrollaron esta actividad en un ambiente lúdico y cordial en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid durante la mañana del sábado 18 de noviembre.

Muchos de estos estudiantes, asiduos a los concursos, participaron a la semana siguiente en la LIV Olimpiada Matemática en la fase local de Madrid y esperamos que también participen durante el mes de junio en el concurso Puig Adam.

Incluimos a continuación algunos de los problemas propuestos en esta ocasión y la relación de los centros y concursantes ganadores. Las soluciones pueden encontrarse buscando en Internet en las páginas correspondientes a los Concursos de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas.

## Prueba por equipos (45 minutos)

### 1º y 2º de E.S.O.

1. Las edades de Carlos, Hugo y Elvira vienen dadas por números enteros. Hugo tiene 65 años y la suma de las edades de Carlos y Elvira es 100 años. Hace 9 años la edad de Elvira era un número múltiplo de 17 que, además, no era primo con el número de la edad actual de Hugo. ¿Cuál es la edad actual de Carlos?
2. Los números  $A = 878787878787$  y  $B = 787878787878$ , de 12 cifras cada uno, están formados sólo por sietes y ochos. ¿Cuál es su máximo común divisor?
3. El perímetro del rectángulo  $ABCD$  de la Figura 1 es de 30 cm. Dibujamos otros tres rectángulos cuyos centros son los vértices  $A$ ,  $B$  y  $D$  y sus lados paralelos a los del rectángulo  $ABCD$ , como muestra la figura que no está hecha a escala. Si la

suma de los perímetros de estos tres rectángulos es 20 cm, ¿cuál es el perímetro del polígono cuyos lados están marcados con línea gruesa?

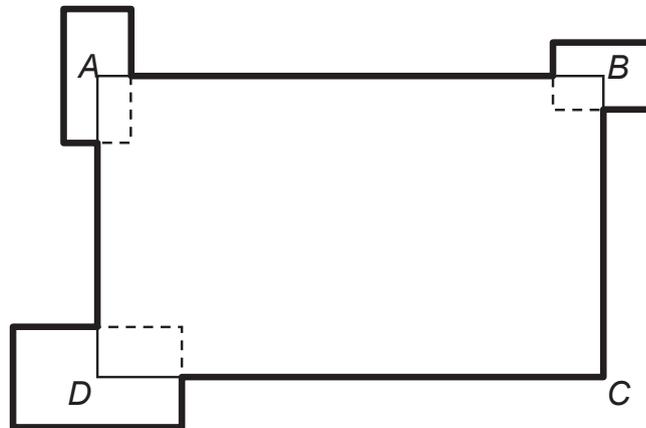


Figura 1

**3° y 4° de E.S.O.**

1. En la Figura 2 se observan tres circunferencias tangentes entre sí y también tangentes a una recta. Si los radios de las circunferencias mayores miden 36 y 9, ¿cuánto mide el radio de la pequeña?

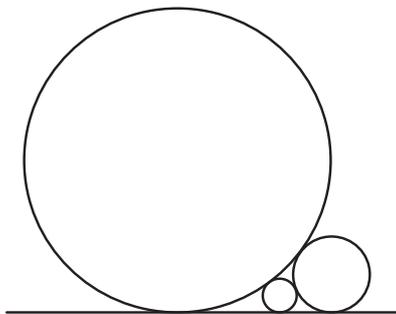


Figura 2

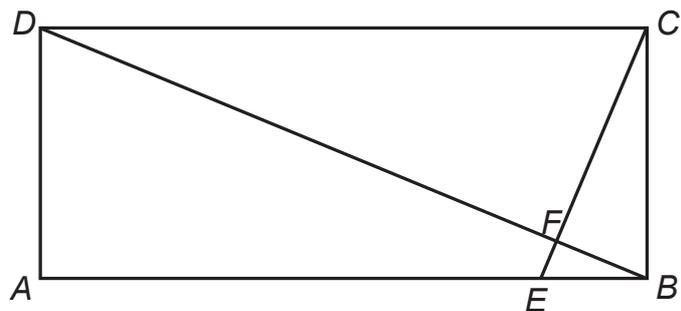


Figura 3

2. En el rectángulo  $ABCD$  de la Figura 3,  $AB = 24$  y  $AD = 10$ . El segmento  $CE$  es perpendicular a la diagonal  $BD$  y el punto  $F$  la intersección de ambos segmentos. ¿Cuál es la longitud del segmento  $EF$ ?

3. ¿Cuántos números de cinco cifras, que empiecen por 37, verifican que tanto  $[37abc]$ , como  $[37bca]$  y  $[37cab]$  son múltiplos de 37? Por ejemplo: 37296, 37962 y 37629 son tres de ellos.

*Nota.* La expresión  $[37abc]$  representa al número cuyas cifras son 3, 7, a, b, c.

### Bachillerato

1. En la Figura 4 se observan dos semicircunferencias de centros  $A$  y  $B$  y radios 2 y 1 respectivamente. Otra semicircunferencia de diámetro  $CD$ , tangente exterior a ambas semicircunferencias y una circunferencia de centro  $P$  que es tangente a las tres semicircunferencias anteriores. ¿Cuál es el radio de esta circunferencia de centro  $P$ ?

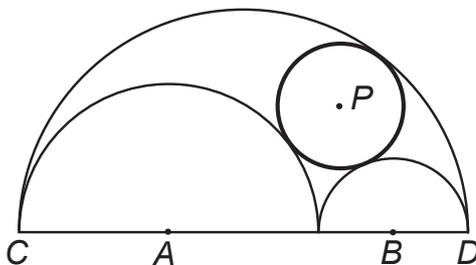


Figura 4

2. Sean  $x$  e  $y$  números reales tales que  $|x| \neq |y|$  y que verifican las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} x^3 &= 13x + 3y \\ y^3 &= 3x + 13y \end{aligned} \right\}.$$

Calcular  $(x^2 - y^2)^2$ .

3. Determinar el valor de  $x + y$  sabiendo que:

$$\left. \begin{aligned} [x] + [y] + y &= 43,8 \\ x + y - [x] &= 18,4 \end{aligned} \right\}$$

*Nota.*  $[a]$  es la parte entera de  $a$ , es decir, el mayor entero menor o igual que  $a$ .

## Prueba individual (90 minutos)

### 1º y 2º de E.S.O.

1. En la Figura 5 se observa un cuadrante de circunferencia de centro  $D$  y radio  $r$  y un rectángulo  $ABCD$  inscrito en el cuadrante. Si el perímetro del rectángulo es 16 y el perímetro de la región sombreada es  $10 + 3\pi$ , ¿cuál es el valor del radio  $r$ ?

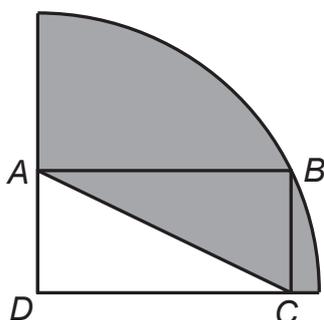


Figura 5

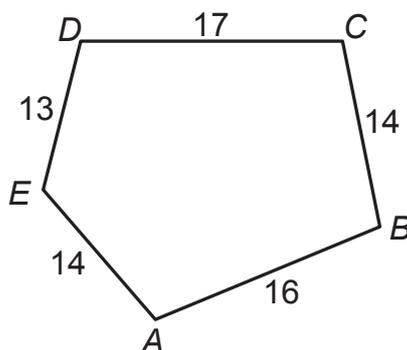


Figura 6

20	1	

Figura 7

2. Escribimos en una lista todos los números enteros desde el 1 hasta el 2017. Si suprimimos todos los cuadrados perfectos y también todos los cubos perfectos, ¿cuántos números nos quedarán en esa lista?
3. Se considera el pentágono  $ABCDE$  de la Figura 6 en el que se indican las longitudes de sus lados. Con centro en cada uno de sus vértices, dibujamos cinco circunferencias de forma que las que tienen por centro dos vértices del mismo lado son tangentes entre sí. ¿Cuál es el centro de la mayor que hemos dibujado y cuál es su radio?
4. Las nueve casillas del “cuadrado mágico” de la Figura 7 están ocupadas por los nueve divisores de 100. (El producto de los números de cada fila, cada columna y cada diagonal es el mismo). Si el 20 y el 1 ocupan las casillas que muestra la figura, ¿qué número ocupará la casilla sombreada?

### 3° y 4° de E.S.O.

1. ¿Hay algún triángulo en el que las medidas de sus ángulos, en grados sexagesimales, vengan dadas por números enteros y que verifiquen que la suma de la medida de uno de ellos más el producto de las medidas de los otros dos sea 2017? *Indicación:* Te puede ayudar saber que 919 es un número primo.

2. En el triángulo rectángulo  $ABC$ , de catetos  $AC = 3$  y  $AB = 4$ , inscribimos dos circunferencias iguales, tangentes entre sí y tangentes a los lados del triángulo como se muestra en la Figura 8. Calcula el radio de las circunferencias.

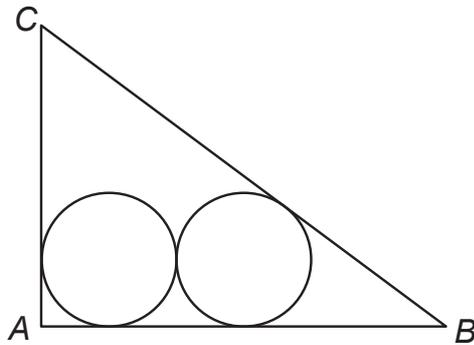


Figura 8

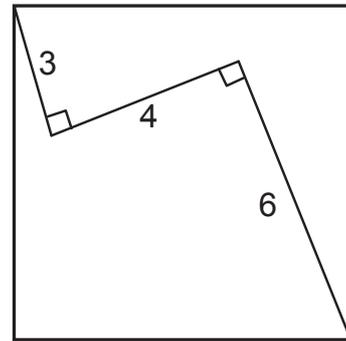


Figura 9

3. En un trayecto en tren entre dos ciudades, una hora después de la salida, el tren se detuvo por un pequeño fallo mecánico que se solucionó en media hora pero que hizo que el tren continuara su viaje a la mitad de la velocidad normal. Por esta circunstancia llegó a su destino con dos horas de retraso. Expertos consultados aseguraron que si la avería se hubiera producido 100 km más adelante, la demora habría sido de sólo una hora. ¿Cuál es la distancia que separa a estas dos ciudades? *Nota:* Suponemos que el tren circula siempre a velocidad constante.

4. Calcula el área del cuadrado de la Figura 9.

## Bachillerato

1. Los números  $x, y, z$ , son enteros. ¿Cuántas soluciones tiene el siguiente sistema?

$$\left. \begin{aligned} x^2 - 3xy + 2y^2 - z^2 &= 31 \\ -x^2 + 6yz + 2z^2 &= 44 \\ x^2 + xy + 8z^2 &= 100 \end{aligned} \right\}$$

2. Encuentra todas las parejas de enteros positivos  $(x, y)$  tales que  $4^y - 615 = x^2$ .

3. En el triángulo rectángulo  $ABC$ , de catetos  $AC = 3$ ,  $AC = 4$ , inscribimos  $n$  circunferencias iguales, tangentes entre sí y tangentes a los lados del triángulo como se muestra en la Figura 10. ¿Para qué valor de  $n$  se verifica que el radio de cada una de ellas es  $\frac{1}{2017}$ ?

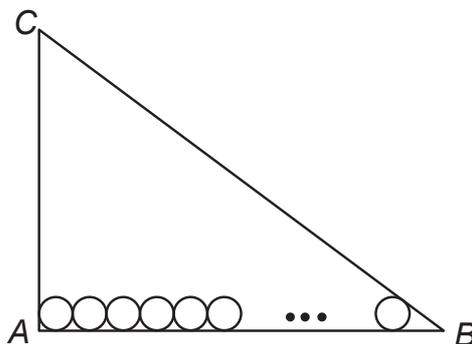


Figura 10

4. El número  $21!$  Tiene más de 60000 divisores (positivos). Si elegimos al azar uno de ellos, ¿cuál es la probabilidad de que sea impar?

**Prueba por relevos (60 minutos)**

**1º y 2º de ESO**

**1A.** El peso total de un frasco y su contenido, que son 20 pastillas idénticas, es 180 gramos. Cuando el frasco contiene 15 pastillas vemos que el peso total es 165 gramos. ¿Cuántos gramos pesa el frasco?

*(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)*

**1B.** Sea "T" la respuesta del problema **2B**.

Los números  $m$ ,  $n$ ,  $p$  y  $q$  son enteros positivos y diferentes.

Si además satisfacen la ecuación  $(7 - m)(7 - n)(7 - p)(7 - q) = T$ ,

¿cuál es el valor de su suma?

*(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)*

**1C.** Sea "T" la respuesta del problema **2C**.

En el último examen de Matemáticas de mi clase la nota media ha sido  $5 + \frac{T}{100}$ .

Si la nota media de las chicas fue de 6 y la de los chicos de 5, ¿cuántos estudiantes hay en mi clase si no puede haber más de 30?

*(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)*

### 3° y 4° de ESO

**2A.** Sea "T" la respuesta del problema 3A.

En la Figura 11 se observa un semicírculo de radio  $T$ , y tres semicírculos iguales de radio  $\frac{T}{2}$ . ¿Cuál es el área de la zona sombreada?

*(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)*

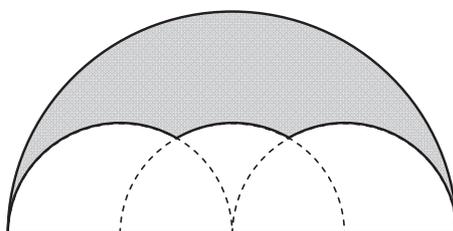


Figura 11

**2B.** En un cajón hay 3 calcetines blancos, 2 negros y 5 rojos. Sin mirar dentro del cajón, ¿cuál es el número mínimo de calcetines que hay que sacar para estar seguros de que sacamos dos del mismo color?

*(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1°- 2° de ESO)*

**2C.** Sea "T" la respuesta del problema 3C.

Dos trenes viajan a velocidad constante. El más lento recorre en 15 minutos  $\frac{T}{27}$  km menos que el más rápido y tarda 15 segundos más que el más rápido en recorrer 4 km. ¿Cuál es, en km/h, la velocidad del tren más rápido?

*(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1°- 2° de ESO)*

## Bachillerato

**3A.** Sea " $T$ " la respuesta del problema 1A.

En la Figura 12 se observa un triángulo equilátero y un cuadrado de perímetro  $T$  que tiene un vértice común con el triángulo y otros dos en lados del triángulo. Si escribimos el perímetro del triángulo como  $a + b\sqrt{3}$  con  $a$  y  $b$  enteros positivos, calcula el número  $a/b$ .

*(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)*

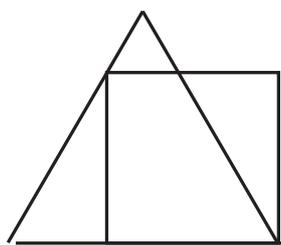


Figura 12

**3B.** Sea " $T$ " la respuesta del problema 1B.

Los puntos  $A\left(\frac{T}{2}, 92\right)$ ;  $B(17, 76)$  y  $C(19, 84)$  son los centros de tres círculos de radio 3. Una recta que pasa por el punto  $B$  corta a los tres círculos de forma que la suma de las áreas de los trozos de círculo que deja a cada lado es la misma. ¿Cuál es la pendiente de la recta?

*(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)*

**3C.** El producto de las edades de un padre y sus dos hijos es 4018. Si actualmente el padre tiene menos de 45 años, ¿qué edad tenía cuando nació el hijo mayor?

*(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)*

## Centros ganadores

1. *Colegio Alemán de Madrid* (Equipo A)
2. *IES San Juan Bautista* (Equipo A)
3. *Colegio Alemán de Madrid* (Equipo B)

## Estudiantes ganadores

### NIVEL I (1º, 2º ESO)

- |    |                                   |                       |
|----|-----------------------------------|-----------------------|
| 1º | <i>Alejandro Krimm de Vicente</i> | (Colegio Alemán)      |
| 2º | <i>Jaime Martino-Soaresú</i>      | (Colegio Monte Tabor) |

### NIVEL II (3º, 4º ESO)

- |    |                                |                         |
|----|--------------------------------|-------------------------|
| 1º | <i>Felipe Lorenzo Martínez</i> | (Colegio Alemán)        |
| 1º | <i>Jorge Maceín</i>            | (IES San Juan Bautista) |
| 1º | <i>Jorge Merino</i>            | (IES San Juan Bautista) |
| 1º | <i>Miguel Valdivieso</i>       | (Colegio Alemán)        |

### NIVEL III (1º, 2º Bachillerato)

- |    |                            |                        |
|----|----------------------------|------------------------|
| 1º | <i>Martín Gómez Abejón</i> | (IES Ramiro de Maeztu) |
| 2º | <i>Zhang, Senghao</i>      | (IES Ramiro de Maeztu) |

## Relación de los 10 centros con mayor puntuación

- |    |                                      |       |
|----|--------------------------------------|-------|
| 1. | <i>Colegio Alemán de Madrid A</i>    | 37,15 |
| 2. | <i>IES San Juan Bautista A</i>       | 36,05 |
| 3. | <i>Colegio Alemán de Madrid B</i>    | 29,90 |
| 4. | <i>Colegio San Agustín A</i>         | 28,10 |
| 5. | <i>Colegio San José del Parque A</i> | 26,95 |
| 6. | <i>IES Ramiro de Maeztu A</i>        | 26,20 |
| 7. | <i>IES Fortuny A</i>                 | 26,05 |
| 8. | <i>Colegio San Agustín C</i>         | 24,10 |

<i>9. Colegio San Agustín B</i>	<i>24,05</i>
<i>10. IES José Luis Sampedro B</i>	<i>22,40</i>

Y, como siempre, enhorabuena a todos y un agradecimiento especial a los profesores que se preocupan de preparar y seleccionar a los alumnos de sus centros. Con su ayuda hemos llegado hasta aquí y con su ayuda seguiremos muchos años.

**Joaquín Hernández Gómez**  
**Juan Jesús Donaire Moreno**

# An approach to shape-preserving transformations in the plane by synthetic and algebraic methods using GeoGebra

## Un estudio de las transformaciones del plano que conservan la forma por métodos sintético y algebraico usando GeoGebra

**E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano**

Depto de Algebra, Geometría y Topología,  
Facultad de Educación, Univ. Complutense de Madrid  
{roanes,eroanes}@mat.ucm.es

### Resumen

*Shape-preserving transformations in the Euclidean plane (also denoted similarities) are usually studied using either synthetic geometry techniques or algebraic techniques. As GeoGebra is, at the same time, a dynamic geometry system and a computer algebra system, both techniques can be applied simultaneously. Both kinds of techniques are used in this article to study these transformations with the help of GeoGebra. The article is focused on the visualization and exploration of their properties and, especially, on their composition. This way the study and the application of these transformations is facilitated.*

### Consideraciones previas

Las ejecuciones con GeoGebra de todas las transformaciones consideradas en este estudio van siendo descritas en detalle, a medida que van siendo introducidas. De este modo, los lectores no usuarios habituales de GeoGebra puedan ejecutarlas sin dificultad. Las propiedades de las transformaciones consideradas se pueden ir comprobando experimentalmente con GeoGebra, al tiempo que se estudian de modo sintético o algebraico.

# 1 Isometrías o movimientos de modo sintético

Las isometrías o movimientos del plano euclideo son las transformaciones geométricas que conservan la distancia. Se trata aquí de aplicar reflexiones, traslaciones y rotaciones a objetos geométricos (generalmente polígonos), para visualizar y explorar propiedades de estas transformaciones y especialmente su composición o producto.

## 1.1 Reflexión en una recta o simetría axial

*Definición:* La *reflexión* (o *simetría axial*) de eje la recta  $r$  es la transformación en que la imagen de cada punto  $X$  es el punto  $X'$  tal que  $r$  es la mediatriz del segmento  $\overline{XX'}$ . La Fig. 1 muestra un triángulo  $ABC$  y su imagen,  $A'B'C'$ , en la reflexión de eje la recta  $DE$ . (El producto de una reflexión por sí misma es la transformación identidad, esto es, la reflexión es una transformación involutiva).

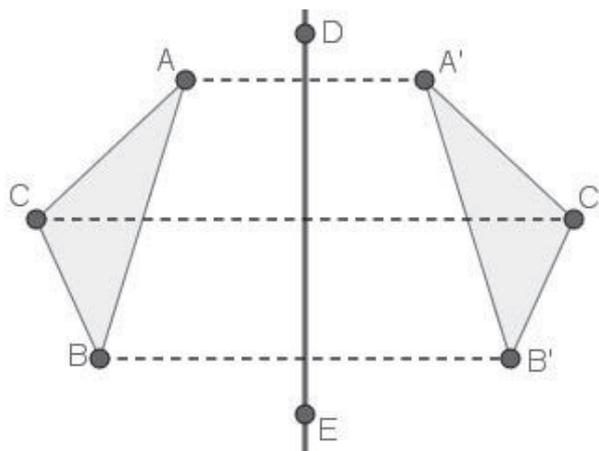


Fig. 1: Reflexión de eje la recta  $DE$ .

Imagen de  $ABC$  en la simetría de eje  $ED$ : Tras hacer clic en el icono  y elegir la opción *Simetría Axial*, se selecciona con botón derecho de ratón una región rectangular que contenga a  $ABC$  y se hace clic sobre el eje  $DE$ ; aparece entonces en la *VG* (*Vista Gráfica*) la imagen del objeto y en la *VA* (*Vista Algebraica*) sus datos algebraicos (coordenadas o ecuaciones). Al arrastrar un vértice de  $ABC$ , su imagen se reposiciona consecuentemente. Lo mismo ocurre al arrastrar  $D$  o  $E$ .

## 1.2 Traslación definida por un vector

Definición: La *traslación* de vector  $\overrightarrow{DE}$  es la transformación en que la imagen de cada punto  $X$  es el punto  $X'$  tal que el vector  $\overrightarrow{XX'}$  es equipolente (e.e. de la misma dirección, sentido y módulo) que el vector  $\overrightarrow{DE}$ . La Fig. 2 muestra un triángulo,  $ABC$ , y su imagen,  $A'B'C'$ , en la traslación de vector  $\overrightarrow{DE}$ .

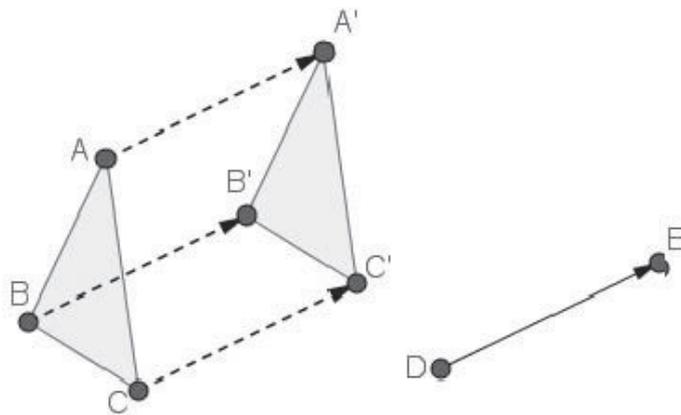


Fig. 2: Traslación de vector  $\overrightarrow{DE}$ .

Definir vectores con GeoGebra: Hacer clic en el icono *Recta*, para elegir la opción *Vector*, hacer clic en el punto elegido como origen del vector y luego en el lugar elegido como extremo del vector; entonces aparece en la *VG* el vector con el nombre asignado (en minúsculas) y en la *VA* las coordenadas del vector y las de su origen y extremo.

Imagen de  $ABC$  en la traslación de vector  $\overrightarrow{DE}$ : Hacer clic en el icono  para elegir la opción *Traslación*, seleccionar una región rectangular que contenga a  $ABC$  y hacer clic sobre  $\overrightarrow{DE}$ ; entonces aparece en la *VG* la imagen,  $A'B'C'$ , y en la *VA* los datos algebraicos del objeto imagen. Al arrastrar un vértice de  $ABC$ , su imagen se repositona consecuentemente. Lo mismo ocurre al arrastrar  $D$  o  $E$ .

Producto de reflexiones de ejes paralelos: En la Fig. 3 aparecen un cuadrilátero (no convexo)  $ABCD$ , una recta  $EF$  y su paralela por el punto  $G$ . El cuadrilátero  $A'B'C'D'$  es imagen del  $ABCD$  en la reflexión de eje  $EF$  y el cuadrilátero  $A''B''C''D''$  es imagen del  $A'B'C'D'$  en la reflexión de eje la paralela a la  $EF$  por  $G$ . Ahora bien, al aplicar a  $ABCD$  la traslación de vector

$2 \cdot \overrightarrow{EG}$ , se obtiene el mismo polígono que al aplicarle sucesivamente estas dos reflexiones, en el orden mencionado, ya que

$$\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''} = 2 \cdot \overrightarrow{EA'} + 2 \cdot \overrightarrow{A'G} = 2 \cdot \overrightarrow{EG}$$

En conclusión, al componer dos simetrías de ejes paralelos resulta una traslación de vector perpendicular a los ejes de simetría, sentido del primero al segundo eje y módulo el doble de la distancia entre los ejes. Recíprocamente, una traslación se descompone en producto de dos simetrías de ejes perpendiculares al vector traslación, distancia entre ellos la mitad del módulo del vector traslación y sentido el del primer eje hacia al segundo.

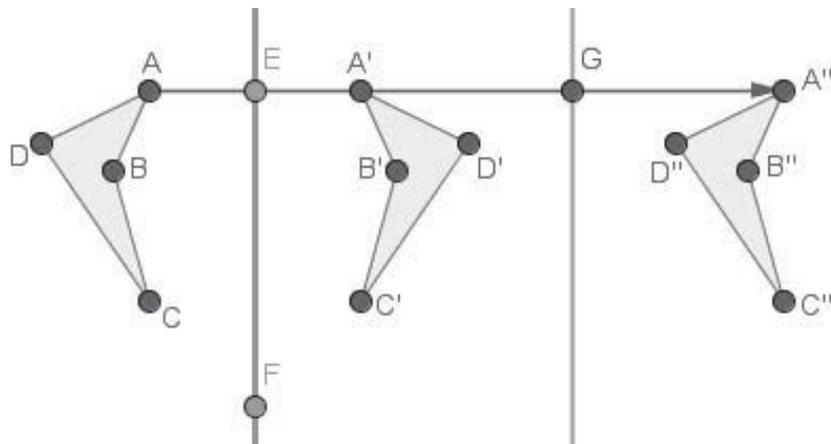


Fig. 3: *Dos reflexiones de ejes paralelos y traslación resultante.*

Consecuencias de descomponer una traslación en producto de reflexiones:

Los siguientes resultados pueden ser comprobados con GeoGebra:

- al componer dos reflexiones de ejes paralelos en orden inverso resulta la traslación de vector opuesto (esas dos reflexiones no conmutan);
- al componer la reflexión de eje  $r$  con la traslación de vector  $v$ , perpendicular a  $r$ , resulta la reflexión de eje  $r'$ , paralelo a  $r$ , tal que el producto de la reflexión de eje  $r$  por la de eje  $r'$  sea la traslación de vector  $v$ ;
- al componer la traslación de vector  $v$  con la reflexión de eje  $r$ , perpendicular a  $v$ , resulta la reflexión de eje  $r'$ , paralelo a  $r$ , tal que el producto de la reflexión de eje  $r'$  por la de eje  $r$  sea la traslación de vector  $v$ ;

- al componer un número par de reflexiones de ejes paralelos resulta traslación de vector perpendicular a los ejes de reflexión;
- al componer número impar de reflexiones de ejes paralelos resulta otra reflexión de eje paralelo a los de aquellas.

### 1.3 Rotación o giro alrededor de un punto

Definición: La *rotación* o *giro* de centro el punto  $D$  y amplitud el ángulo orientado dado  $\widehat{EFG}$  es la transformación en que la imagen de cada punto  $X$  es el punto  $X'$  tal que  $\overline{DX'} = \overline{DX}$  y  $\widehat{XDX'} = \widehat{EFG}$  (ángulos orientados). La Fig. 4a muestra un triángulo  $ABC$  y su imagen  $A'B'C'$  en dicha rotación. (La rotación de  $360^\circ$  es la aplicación idéntica o identidad).

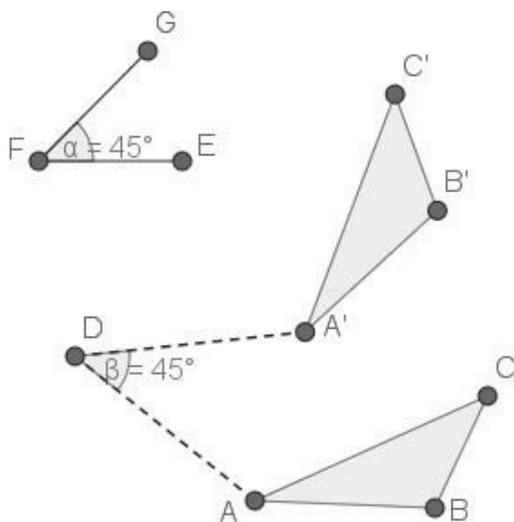


Fig. 4a: *Rotación o giro.*

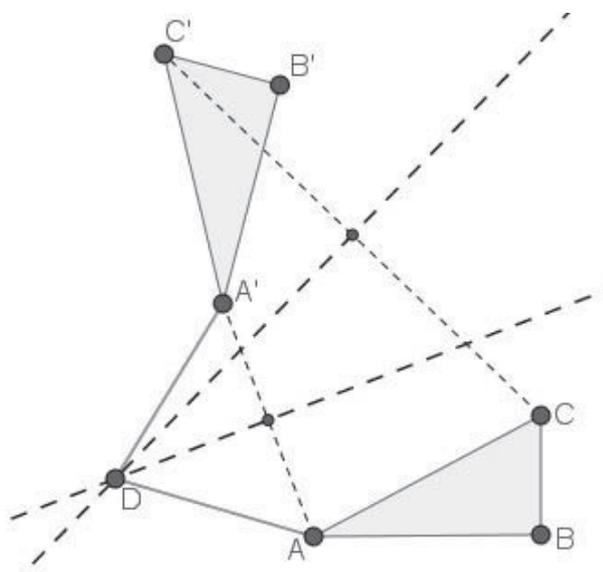


Fig. 4b: *¿Donde está el centro?*

Imagen de ABC en una rotación (Fig. 4a): Hacer clic en el icono  para elegir la opción *Rota alrededor de un punto*, seleccionar el objeto a rotar, hacer clic sobre el centro de rotación (previamente trazado), elegir en la ventana que aparece la amplitud en grados (siendo sentido positivo el antihorario), o bien la letra griega con que GeoGebra haya designado el ángulo a rotar previamente dibujado y pulsar *OK*; entonces aparece en la *VG* la imagen de  $ABC$  y en la *VA* las coordenadas de los vértices del triángulo imagen.

Determinación del centro de giro: Supongamos ahora que el triángulo  $A'B'C'$  es la imagen del triángulo  $ABC$  en una cierta rotación o giro, cuyo centro se trata de determinar (Fig. 4b). De acuerdo con la definición de rotación, el centro,  $D$ , de tal rotación ha de equidistar de  $A$  y  $A'$ , luego estará en la mediatriz de  $\overline{AA'}$  y, por la misma razón, en las mediatrices de  $\overline{BB'}$  y  $\overline{CC'}$ . Por tanto,  $D$  será el punto de intersección de esas mediatrices (naturalmente basta con intersecar dos de ellas). Y la amplitud de la rotación será  $\widehat{ADA'}$ . (De este modo se determina el centro del giro producto de dos giros de centros distintos, cuya amplitud es, obviamente, la suma de amplitudes).

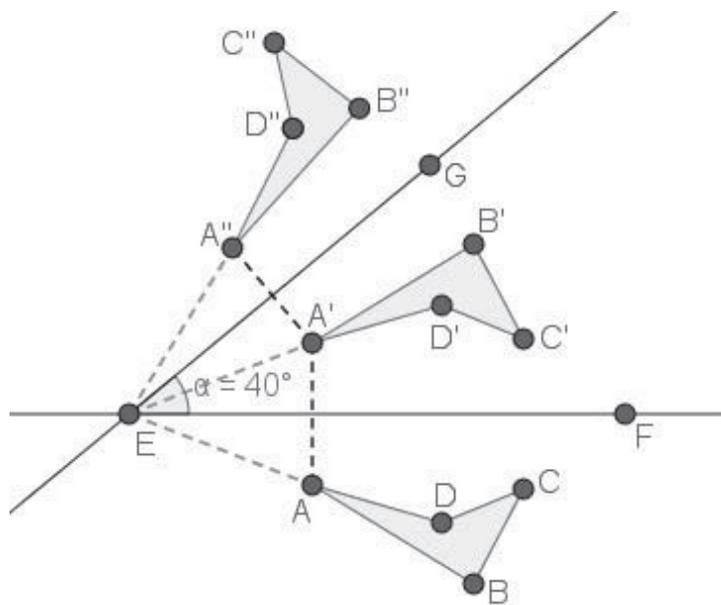


Fig. 5: Reflexiones de ejes secantes y rotación resultante.

Producto de reflexiones de ejes que se cortan: En la Fig. 5 aparecen el polígono  $ABCD$  y las rectas  $EF$  y  $EG$ . Se ha generado la imagen,  $A'B'C'D'$ , de  $ABCD$  en la reflexión de eje  $EF$  y luego la imagen de  $A'B'C'D'$  en la reflexión de eje  $EG$ . Al aplicar a  $ABCD$  la rotación de centro  $E$  y amplitud  $2 \cdot \widehat{FEG}$ , se obtiene el mismo polígono que al aplicarle las dos reflexiones consecutivas anteriores, es decir, el producto de la reflexión de eje  $EF$  por la de eje  $EG$  es la rotación de centro  $E$  y amplitud  $2 \cdot \widehat{FEG}$ , ya que  $\overline{EA} = \overline{EA'} = \overline{EA''}$  y

$$\widehat{AEA''} = \widehat{AEA'} + \widehat{A'EA''} = 2 \cdot \widehat{FEA'} + 2 \cdot \widehat{A'EG} = 2 \cdot \widehat{FEG}$$

### Consecuencias de descomponer una rotación en producto de reflexiones:

Los siguientes resultados pueden ser comprobados con GeoGebra:

- al componer dos reflexiones de ejes secantes en orden inverso resulta la rotación del mismo centro y amplitud el ángulo opuesto (no conmutan);
- al componer la reflexión eje  $r$  con la rotación  $g$  de centro  $C \in r$ , resulta una reflexión cuyo eje,  $r'$ , pasa por  $C$  y tal que el producto de la reflexión de eje  $r$  por la de eje  $r'$  sea  $g$ ;
- al componer la rotación  $g$  de centro  $C$  con una reflexión cuyo eje,  $r$ , pasa por  $C$ , resulta la reflexión cuyo eje,  $r'$ , pasa por  $C$  y tal que el producto de la reflexión de eje  $r'$  por la de eje  $r$  sea  $g$ ;
- al componer un número par de reflexiones cuyos ejes pasan por un mismo punto,  $C$ , resulta una rotación de centro  $C$ ;
- al componer un número impar de reflexiones cuyos ejes pasan por un mismo punto,  $C$ , resulta una reflexión cuyo eje pasa por  $C$ .

## 1.4 Simetría central

Definición: La *simetría central* de centro  $O$  es la transformación en que la imagen del punto  $X$  es el punto  $X'$ , tal que  $O$  sea punto medio del segmento  $XX'$ . (Así pues, la simetría de centro  $O$  es el giro de  $180^\circ$  alrededor de  $O$ ).

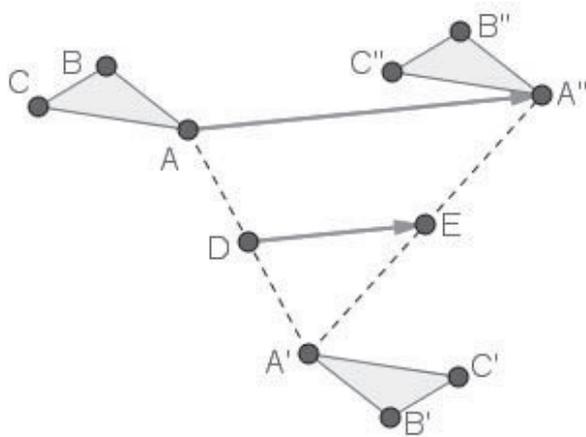


Fig. 6: *Producto de simetrías de centros distintos y traslación resultante.*

Imagen de  $ABC$  en una simetría central: Hacer clic en el icono , elegir la opción *Simetría central*, seleccionar el triángulo  $ABC$  y hacer clic sobre el centro de simetría. (De otro modo: aplicar a  $ABC$  una rotación de  $180^\circ$  alrededor del centro de simetría). Al arrastrar un vértice cualquiera de  $ABC$ , su imagen se repositiona en consecuencia. Lo mismo ocurre al arrastrar  $D$  o  $E$ .

Producto de dos simetrías centrales: En la Fig. 6 aparecen un triángulo  $ABC$ , su imagen en la simetría de centro  $D$  y la imagen de esta en la simetría de centro  $E$ . Al ser  $\overline{DE}$  paralela media del triángulo  $AA'A''$ , es claro que  $\overrightarrow{AA''} = 2 \cdot \overrightarrow{DE}$ . Por tanto, el producto de las simetrías de centros  $D$  y  $E$  es la traslación de vector  $2 \cdot \overrightarrow{DE}$ .

Consecuencias de descomponer una traslación en dos simetrías centrales:

Los siguientes resultados pueden ser comprobados con GeoGebra:

- al cambiar el orden de ambos centros de simetría, resulta la traslación de vector opuesto (no conmutan);
- al componer la simetría de centro  $D$  con la traslación de vector  $v$ , resulta la simetría de centro  $E$ , tal que  $2 \cdot \overrightarrow{DE} = v$ ;
- al componer la traslación de vector  $v$  con la simetría de centro  $E$ , resulta la simetría de centro  $D$ , tal que  $2 \cdot \overrightarrow{DE} = v$ ;
- siendo  $DEFG$  un paralelogramo, el producto de las cuatro simetrías de centros  $D, E, F, G$ , en ese orden, es la transformación identidad;
- siendo  $DEFG$  un paralelogramo, el producto de las tres simetrías de centros  $D, E, F$ , en ese orden, es la simetría de centro  $G$ .

## 1.5 Reflexión con deslizamiento

Definición: Siendo  $A$  y  $B$  dos puntos distintos, se considera la transformación compuesta de la reflexión de  $e$  e la recta  $AB$  con la traslación de vector  $\overrightarrow{AB}$ . Dicha transformación compuesta se denomina *reflexión con deslizamiento* (o también *simetría deslizante*). queda determinada por el par de puntos  $A$  y  $B$ , por lo que se suele llamar reflexión con deslizamiento  $AB$ .

La Fig. 7 muestra un triángulo  $MNP$ , su imagen,  $M'N'P'$ , en la reflexión de  $e$  e la recta  $AB$  y la imagen de este,  $M''N''P''$ , en la traslación de vector  $\overrightarrow{AB}$ .

De este modo,  $M''N''P''$  es imagen de  $MNP$  en la reflexión con deslizamiento  $AB$ . (Para mejor visualización se ha activado la cuadrícula de GeoGebra).

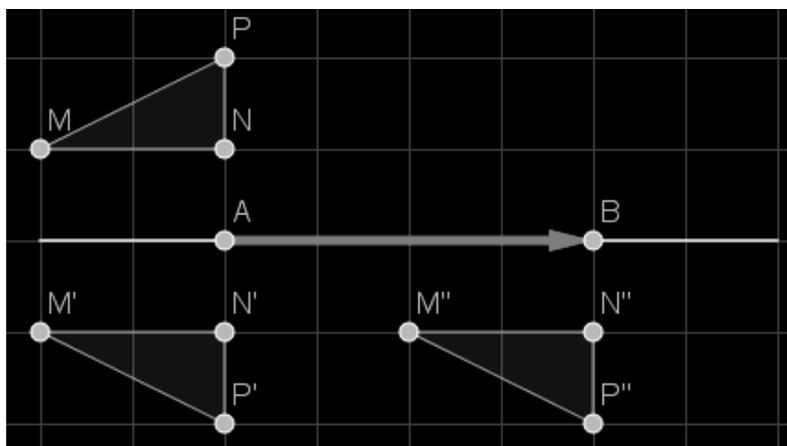


Fig. 7: Imagen de  $MNP$  en la reflexión con deslizamiento  $AB$ .

Consecuencias directas de la definición de reflexión con deslizamiento:

Los siguientes resultados pueden ser comprobados con GeoGebra:

- los puntos medios de los segmentos  $\overline{MM''}$ ,  $\overline{NN''}$ ,  $\overline{PP''}$  (Fig.7) están en el eje  $AB$ , ya que  $AB$  es paralela media de los triángulos  $MM'M''$ ,  $NN'N''$ ,  $PP'P''$ ;
- la reflexión y la traslación de una reflexión con deslizamiento conmutan;
- al componer la reflexión con deslizamiento  $AB$  con ella misma, resulta la traslación de vector  $2 \cdot \overrightarrow{AB}$ ;
- al componer dos reflexiones de ejes paralelos con otra de eje perpendicular a aquellos, resulta una reflexión con deslizamiento;
- al componer una simetría central con una reflexión cuyo eje no pasa por el centro de la simetría, resulta una reflexión con deslizamiento.

*Nota:* La reflexión con deslizamiento es una isometría que cambia el sentido, pero no es una reflexión. En efecto: en una reflexión hay puntos dobles (que se transforman en si mismo), los de su eje, pero en una reflexión con deslizamiento no existen puntos dobles. Así pues, existen cuatro tipos de isometrías en el plano, dos que conservan el sentido de los ángulos (traslaciones y rotaciones) y otras dos que lo cambian (reflexiones y reflexiones con deslizamiento). Y puede probarse que no existen más (descomponiendo en reflexiones).

## 2 Isometrías o movimientos de modo algebraico

### 2.1 Sentido de los ángulos haciendo uso de coordenadas

Un ángulo  $\widehat{AVB}$ , convexo en sentido antihorario, se conviene en considerarlo de sentido positivo (GeoGebra mide los ángulos en sentido antihorario).

Si los puntos  $A, V, B$  vienen dados por sus coordenadas,  $(a_1, a_2), (v_1, v_2), (b_1, b_2)$ , para determinar el sentido del ángulo  $\widehat{AVB}$  puede considerarse el producto vectorial  $\overrightarrow{VA} \times \overrightarrow{VB}$ . Al ser este un vector perpendicular a ambos y de sentido dado por la regla del tornillo dextrosum), se tiene

$$\overrightarrow{VA} \times \overrightarrow{VB} = \det \begin{pmatrix} a_1 - v_1 & a_2 - v_2 \\ b_1 - v_1 & b_2 - v_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Para definir en GeoGebra la última matriz de (1), denotándola  $S$ , basta introducirla por la línea de escritorio como lista de listas, es decir, en la forma

$$S := \{ \{1, v_1, v_2\}, \{1, a_1, a_2\}, \{1, b_1, b_2\} \}$$

y ahora, para definir su determinante, denotándolo  $\mathbf{d}$ , se introduce por línea de escritorio:  $\mathbf{d} := \text{Determinante}[S]$ . Entonces, según que  $\mathbf{d}$  sea positivo o negativo, el sentido del ángulo  $\widehat{AVB}$  será de sentido antihorario (positivo) u horario (negativo).

### 2.2 Ecuación matricial de una isometría

Siendo las isometrías del plano transformaciones lineales, la isometría en la que el punto  $P'(x', y')$  es imagen del  $P(x, y)$  puede expresarse matricialmente en la forma

$$(1, x', y') = (1, x, y) M \quad ( )$$

donde  $M$  es una matriz  $2 \times 2$  cuyos elementos son números reales.

Como la posición en el plano de un objeto geométrico queda determinada por tres de sus puntos no alineados, una isometría del plano quedará determinada por los vértices de un triángulo no degenerado y sus respectivas imágenes (conservando las distancias entre vértices). Así pues, la isometría que transforma los tres puntos  $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)$ , no alineados,

en  $A'(a'_1, a'_2)$ ,  $B(b'_1, b'_2)$ ,  $C'(c'_1, c'_2)$ , ha de verificar las tres condiciones  $(1, a'_1, a'_2) = (1, a_1, a_2) \cdot M$ ,  $(1, b'_1, b'_2) = (1, b_1, b_2) \cdot M$ ,  $(1, c'_1, c'_2) = (1, c_1, c_2) \cdot M$  expresables conjuntamente (apilándolas) en la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_1 & a'_2 \\ 1 & b'_1 & b'_2 \\ 1 & c'_1 & c'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} M$$

Multiplicando por la izquierda por la inversa de la matriz de coordenadas de  $A, B, C$ , resulta

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & a'_1 & a'_2 \\ 1 & b'_1 & b'_2 \\ 1 & c'_1 & c'_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Este cálculo matricial se realiza cómodamente con GeoGebra, introduciéndolo por línea de escritorio en la forma indicada en la subsección 2.1, teniendo en cuenta que la inversa de una matriz,  $H$ , se introduce cómo `Inversa[H]` y que para multiplicar dos matrices se intercala el asterisco de multiplicar entre ellas. Se obtiene así la matriz  $M$ , cuya primera columna resulta ser  $(1,0,0)$ .

### 2.3 Conservación o cambio de sentido por una isometría

De (1) se sigue que las áreas (orientadas) de los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son, respectivamente,

$$area(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} ; area(A'B'C') = \frac{1}{2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & a'_1 & a'_2 \\ 1 & b'_1 & b'_2 \\ 1 & c'_1 & c'_2 \end{pmatrix}$$

y, al tratarse de una isometría, ambas áreas son iguales en valor absoluto. Por tanto, ambas áreas tendrán valores iguales u opuestos, según que la isometría conserve el sentido o lo cambie. En consecuencia, de (3) se deduce que

$$det(M) = \frac{2 \cdot area(A'B'C')}{2 \cdot area(ABC)} = \pm 1$$

resultando  $+1$  ó  $-1$ , según que la isometría conserve el sentido o lo cambie. Así pues, será:  $det(M) = 1$  para las traslaciones y rotaciones, y  $det(M) = -1$  para las reflexiones y reflexiones con deslizamiento.

## 2.4 Puntos invariantes por una isometría

Finalmente, los puntos invariantes por la isometría (2) serán los que verifiquen la ecuación matricial  $(1, x, y) \cdot M = (1, x, y)$ , es decir, los que verifiquen  $(1, x, y) \cdot (M - I) = (0, 0, 0)$ , siendo  $I$  la matriz unidad  $3 \times 3$ . Denotando por  $m_{ij}$  a los elementos de la matriz  $M$ , esta ecuación matricial da lugar a tres ecuaciones lineales. La primera de estas ecuaciones es trivial,  $0=0$ , por ser  $(1,0,0)$  la primera columna de  $M$ . Las otras dos ecuaciones lineales son, denotando por  $m_{ij}$  a los elementos de la matriz  $M$ :

$$m_{12} + (m_{22} - 1) \cdot x + m_{32} \cdot y = 0 ; m_{13} + m_{23} \cdot x + (m_{33} - 1) \cdot y = 0 \quad (4)$$

La solución de este sistema proporciona, por tanto, los puntos invariantes de la isometría de matriz  $M$ . Naturalmente, las traslaciones (distintas de la transformación idéntica) y reflexiones con deslizamiento no tienen puntos invariantes; las rotaciones tienen un único punto invariante (el centro de giro); y las reflexiones tienen una recta de puntos invariantes (el eje de la simetría).

## 2.5 Ejemplos de isometrías haciendo uso de coordenadas

Los siguientes ejemplos aclaran cómo operar en la práctica.

Ejemplo 2.5.A: Para la isometría en que los puntos  $A(0,0), B(1,0), C(1,2)$  se transforman respectivamente en  $A'(2,2), B'(3,2), C'(3,4)$ , la matriz  $M$ , definida en (3), resulta ser:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como  $\det(M) = 1$  es positivo, se trata de una isometría que conserva el sentido. Las ecuaciones (4) quedan así:  $2 + 0 = 0$ ,  $2 + 0 = 0$ , luego no tiene puntos invariantes. De su ecuación matricial,  $(1, x', y') = (1, x', y') \cdot M$ , resultan las ecuaciones paramétricas:  $x' = 2 + x$ ,  $y' = 2 + y$ , luego se trata de la traslación de vector  $(2, 2)$ .

Ejemplo 2.5.B: Para la isometría en que los puntos  $A(3,0), B( , 0), C( , 1)$  se transforman en  $A'(3,3), B'(3, ), C'(2, )$ , se puede calcular con  $\det$  y  $\text{tr}$  a la matriz  $M$ , su determinante (denotándolo  $\mathbf{d}$ ), y la imagen del punto  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , introduciendo por línea de escritorio, sucesivamente:

$H := \{\{1, 3, 0\}, \{1, 5, 0\}, \{1, 5, 1\}\}$   
 $H' := \{\{1, 3, 3\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 2, 5\}\}$   
 $M := \text{Inversa}(H) * H'$   
 $d := \text{Determinante}(M)$   
 $\{\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}\} * M$

resultando, respectivamente:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad d = 1 \quad ; \quad (2,5, 0,5)$$

Como  $\det(M) = 1 > 0$ , se conserva el sentido. Las ecuaciones (4) quedan  $3 - x - y = 0$ ,  $y - x = 0$ , cuya solución  $x = 1,5$ ,  $y = 1,5$  es el único punto invariante. Se trata pues de la rotación de centro  $D(1,5, 1,5)$  y amplitud  $\widehat{ADA'}$ . De su ecuación matricial,  $(1, x', y') = (1, x, y)M$ , resultan las paramétricas:  $x' = 3 - y$ ,  $y' = x$ .

Ejemplo 2.5.C: Para la isometría en que los puntos  $A(3, 0), B(5, 0), C(5, 1)$  se transforman en  $A'(1, 2), B'(1, 4), C'(2, 4)$ , calculando la matriz (3), resulta

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como  $\det(M) = -1$  es negativo, se trata de una isometría que cambia el sentido. Las ecuaciones (4) se reducen a  $1 - x - y = 0$ ,  $-1 - x - y = 0$ , luego no tiene esta recta de puntos invariantes. Por tanto, se trata de la reflexión de esta recta. De su ecuación matricial,  $(1, x', y') = (1, x, y) \cdot M$ , resultan sus ecuaciones paramétricas:  $x' = 1 - y$ ,  $y' = -1 - x$ .

### 3 Semejanzas de modo sintético

Las semejanzas son las transformaciones geométricas del plano euclideo que conservan los ángulos y, por tanto, la forma de las figuras. Resultan de la composición de una isometría con una homotecia. Vamos a estudiarlas, tratando de visualizar y explorar sus propiedades, y, muy especialmente, su composición o producto.

### 3.1 Homotecias

Definición: La *homotecia* de centro el punto  $D$  y razón el número real  $r$  ( $r \neq 0$ ) es la transformación en que la imagen del punto  $X$  es el punto  $X'$ , tal que  $\overrightarrow{DX'} = r \cdot \overrightarrow{DX}$ . En consecuencia  $D, X, X'$  son colineales. En la Fig. 8 aparecen el triángulo  $ABC$  y su imagen de en la homotecia de centro  $D$  y razón 2. (En particular, la homotecia de razón 1 es la transformación idéntica y la de razón -1 es la simetría central).

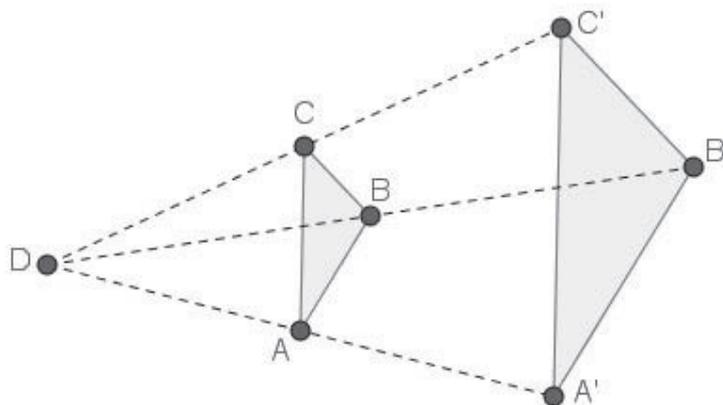


Fig.8: Imagen de  $ABC$  en la homotecia de centro  $D$  y razón 2.

Imagen del triángulo  $ABC$  en una homotecia: Hacer clic en , elegir la opción *Homotecia*, seleccionar una región rectangular que contenga al triángulo  $ABC$ , hacer clic sobre el centro de homotecia  $D$ , escribir en la ventana que aparece la razón de homotecia y pulsar *OK*; entonces aparece en la *VG* su imagen y en la *VA* su área y sus vértices. Al arrastrar  $D$ , o un vértice de  $ABC$ , la imagen de  $ABC$  se reposiciona consecuentemente.

Comprobación de propiedades de la homotecia: Las propiedades generales de la homotecia (consecuencia del teorema de Thales) se comprueban fácilmente con GeoGebra:

- la imagen de una recta es otra recta paralela (distinta, si, y solo si, la recta original no pasa por el centro de la homotecia y  $r \neq 1$ );
- las imágenes de dos rectas paralelas son también paralelas, e.e., conservan el paralelismo (siendo, por tanto, afinidades);

- siendo  $A'$  y  $B'$  imágenes de  $A$  y  $B$  en una homotecia de razón  $r$ , se verifica  $\overline{A'B'} = r \cdot \overline{AB}$ , e.e., las homotecias conservan la razón de distancias;
- conservan los ángulos (con su sentido) y, por tanto, la forma de las figuras.

Producto de homotecias concéntricas: La composición o producto de dos homotecias del mismo centro y razones respectivas  $r$  y  $r'$  es, obviamente, otra homotecia del mismo centro y razón  $rr'$ . En particular, si  $r' = \frac{1}{r}$  su producto es la transformación idéntica o identidad.

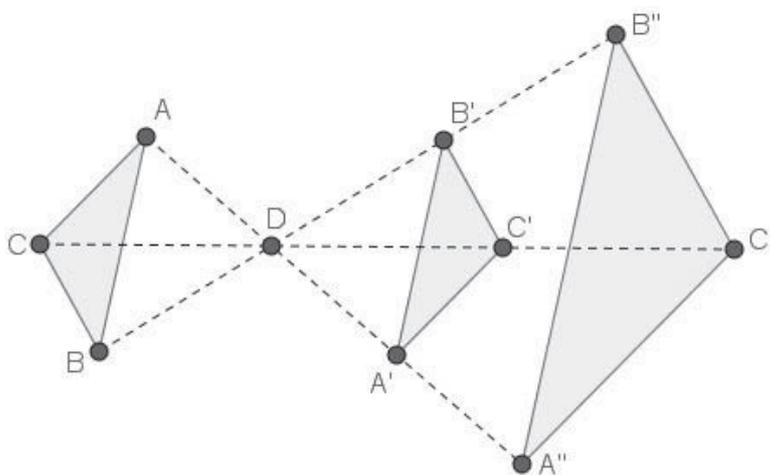


Fig.9: Simetría central y homotecia concéntricas.

Descomposición de homotecias de razón negativa: En la Fig. 9 aparecen el triángulo  $ABC$  y su imagen en la transformación compuesta de la simetría central de centro  $D$  y la homotecia de centro  $D$  y razón 2, cuyo producto es la homotecia de centro  $D$  y razón  $-2$ . En general, una homotecia de centro  $D$  y razón  $s < 0$  se descompone en producto de la simetría central de centro  $D$  y la homotecia de centro  $D$  y razón  $-s$ .

Conservación del sentido: Las homotecias de razón positiva obviamente conservan el sentido en el plano, pero también lo conservan las de razón negativa, al ser producto de simetría central y homotecia de razón el valor absoluto del de aquella. (Curiosamente, las homotecias de razón negativa no conservan el sentido en el espacio de tres dimensiones, pues no lo hacen las simetrías centrales, que en el espacio no son un caso particular de rotación).

### 3.2 Producto de homotecias y traslaciones

Traslación por homotecia: En la Fig. 10 aparece un triángulo,  $ABC$ , al cual se ha aplicado una traslación de vector  $\vec{v}$ . A la imagen obtenida,  $A'B'C'$ , se le ha aplicado una homotecia de distinto centro  $D$  y razón 2, para obtener su imagen,  $A''B''C''$ . Se trata de determinar la transformación en la cual  $A''B''C''$  es la imagen de  $ABC$ .

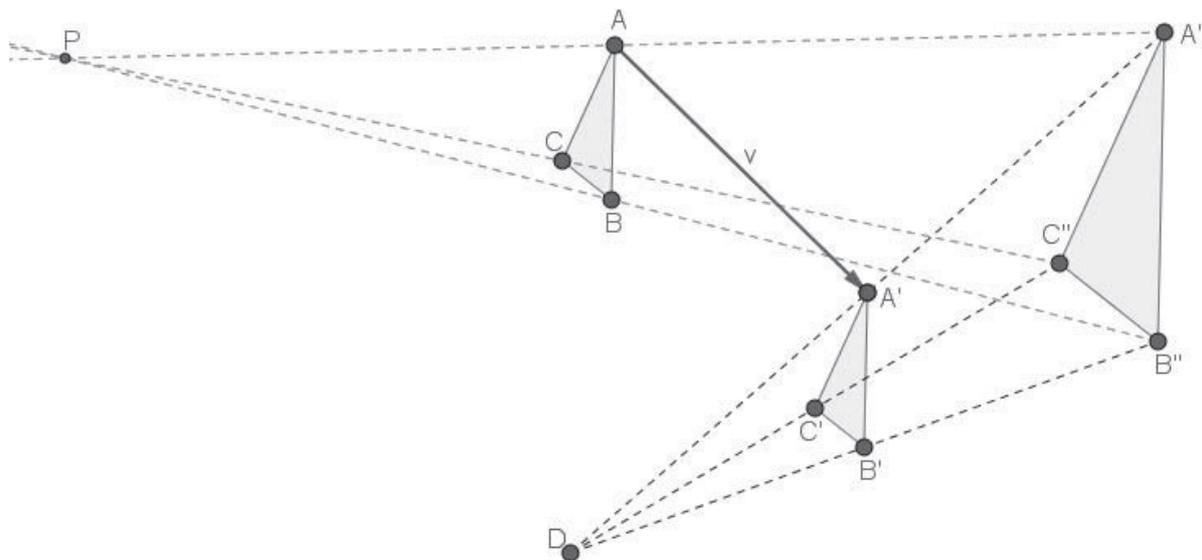


Fig. 10: *Composición de traslación y homotecia.*

La traslación ha transformado cada lado de  $ABC$  en un segmento igual y paralelo a aquel. Y La homotecia ha transformado cada lado de  $A'B'C'$  en un segmento de doble longitud y paralelo a el. Los lados de  $A''B''C''$  son pues respectivamente paralelos y de longitud doble que los de  $ABC$ . En consecuencia, debe existir una homotecia de razón 2 que transforme directamente  $ABC$  en  $A''B''C''$ . Pero ¿cómo determinar su centro?. Naturalmente debe estar en la recta  $AA''$  y también en la  $BB''$ . Luego será el punto,  $P$ , de intersección de ambas, como muestra la Fig. 10.

Otros resultados relacionados con el anterior: Se pueden comprobar fácilmente con ayuda de GeoGebra los siguientes resultados:

- el producto de una homotecia por una traslación es otra homotecia de la misma razón y centro distinto;

- una homotecia y una traslación no conmutan, e.e., su centro depende del orden en que se apliquen;
- el producto de dos homotecias de distintos centros y razones inversas es una traslación.

*Producto de homotecias de distintos centros:* En la Fig. 11 aparece un triángulo,  $ABC$ , al cual se ha aplicado una homotecia de centro  $D$  y razón 2. A la imagen obtenida,  $A'B'C'$ , se le ha aplicado otra homotecia de centro  $E$  y razón  $\frac{3}{2}$ , para obtener su imagen,  $A''B''C''$ . Se trata de determinar la transformación producto de ambas, en la cual  $A''B''C''$  es la imagen de  $ABC$ .

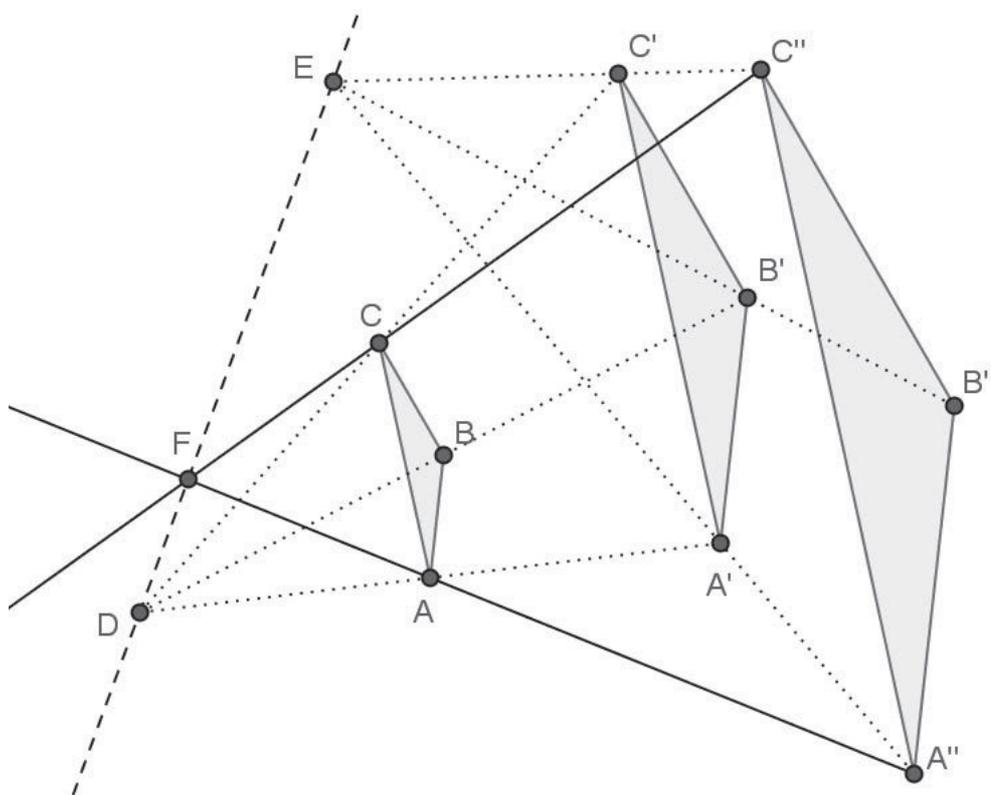


Fig. 11: *Composición de homotecias de distintos centros.*

Los lados de  $A''B''C''$  son respectivamente paralelos y de longitud triple ( $2 \cdot \frac{3}{2} = 3$ ) que los de  $ABC$ . En consecuencia, debe haber una homotecia de razón 3 que transforme directamente  $ABC$  en  $A''B''C''$ . Pero ¿cómo determinar su centro?. Naturalmente debe estar en la recta  $AA''$  y también en la  $CC''$ . Luego será el punto  $F$  de intersección de ambas (Fig. 11).

Observemos que  $F$  está en la recta  $DE$  ¿Será ello una casualidad o una propiedad válida en general? Para responder, tengamos en cuenta que las rectas que pasan por  $D$  son dobles (se transforman en si mismas) en la primera homotecia y las que pasan por  $E$  son dobles en la segunda homotecia, luego la recta  $DE$  es doble en la homotecia producto de ambas y, por tanto, debe pasar por  $F$ , ya que las únicas rectas dobles son las que pasan por el centro de homotecia.

En consecuencia, el centro,  $F$ , de la homotecia producto es el punto de intersección de dos rectas que pasen por puntos homólogos (como  $AA''$  y  $BB''$ ), o bien, el punto de intersección de una de estas con la recta  $DE$ , determinada por los centros de ambas homotecias iniciales.

### 3.3 Semejanzas directas

Las *semejanzas* que conservan el sentido de los ángulos se llaman *semejanzas directas*. Como las homotecias conservan el sentido, el producto de una isometría que conserva el sentido por una homotecia será una semejanza directa.

Puesto que la posición de una figura queda determinada por tres de sus puntos no alineados, una semejanza queda determinada por un triángulo no degenerado,  $ABC$ , y su imagen,  $A'B'C'$ , de lados proporcionales (no paralelos, en general).

Dada la semejanza directa definida por  $ABC$  y  $A'B'C'$ , se trata de encontrar isometrías y homotecias que transformen el primer triángulo en el segundo del modo mas sencillo posible. Es claro que aplicando a  $ABC$  una rotación de amplitud el ángulo que forman una recta-lado de  $ABC$  con su correspondiente homóloga de  $A'B'C'$  el triángulo así obtenido,  $A_1B_1C_1$ , es de lados paralelos a los de  $A'B'C'$ , bastando ya aplicar a  $A_1B_1C_1$  una homotecia que transforme a éste en  $A'B'C'$ .

En general, el centro de tal homotecia resulta ser distinto del centro de la rotación previamente aplicada. Pero, ¿sería posible hacer coincidir ambos centros? La respuesta es afirmativa: existe un único punto del plano, que es centro común de una rotación y una homotecia, cuyo producto es la semejanza directa. Se llama *centro de semejanza directa*, o, también, *centro de rotación dilatatoria*.

Determinación del centro de semejanza directa: Vamos a describir la configuración que permite determinarlo, advirtiendo que no se trata de un problema

lineal (resoluble sólo con la regla), como los anteriores, sino que ahora habremos de hacer uso del compás. GeoGebra nos ayudará a hacerlo.

Consideremos el caso no trivial en que los dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  no son de lados paralelos. Elijamos dos lados homólogos de ambos triángulos,  $\overline{BC}$  y  $\overline{B'C'}$ , por ejemplo. Sea  $P$  el punto de intersección de las rectas  $BC$  y  $B'C'$  que contienen a dichos lados (Fig. 12). Tracemos las circunferencias  $PBB'$  y  $PCC'$ . El otro punto de intersección de ambas circunferencias,  $D$ , es el centro de semejanza directa buscado, como se muestra en dicha figura.

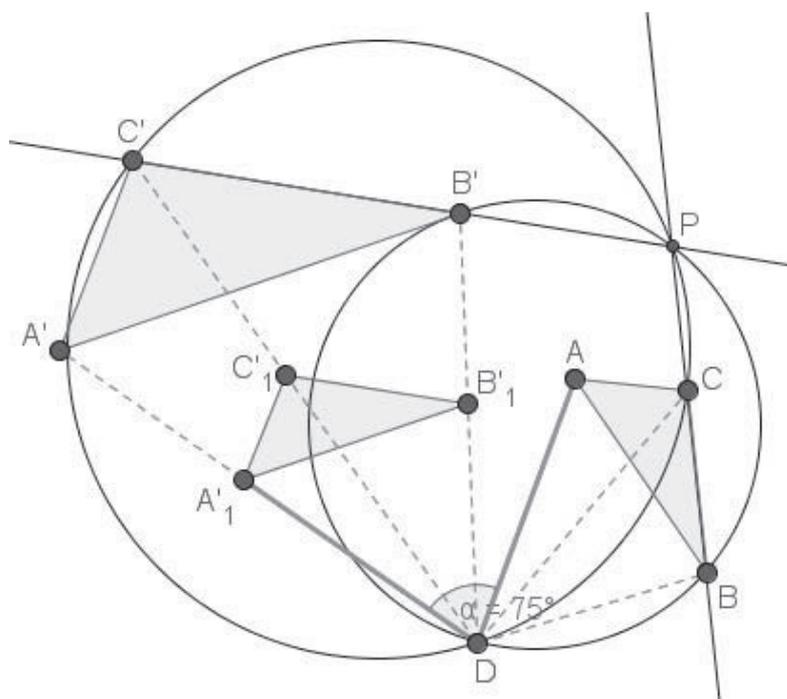


Fig. 12: *Centro de semejanza directa.*

*Nota:* La existencia del centro de semejanza puede ser probada con distintas técnicas. Vía geometría sintética, basándose en la igualdad de ciertos ángulos inscritos que abarcan arcos iguales en esas circunferencias. Vía analítica, basándose en considerar la aplicación lineal que transforma  $ABC$  en  $A'B'C'$ , la cual posee un único punto invariante, el centro de semejanza directa. Vía plano complejo, simplemente operando. Pero, siendo nuestro propósito la construcción en GeoGebra de la configuración descrita, no explicitamos tales demostraciones, que los interesados pueden encontrar en textos geométricos clásicos: [1], [2], [3],...

### 3.4 Semejanzas inversas

Las *semejanzas* que cambian el sentido de los ángulos se llaman *semejanzas inversas*. Como las homotecias conservan el sentido, el producto de una isometría que cambia el sentido por una homotecia será una semejanza inversa.

Una semejanza inversa queda determinada por un triángulo,  $ABC$ , y su imagen,  $A'B'C'$ , de lados proporcionales y distinto sentido de sus ángulos. Se puede descomponer en producto de una isometría que cambie el sentido por una homotecia.

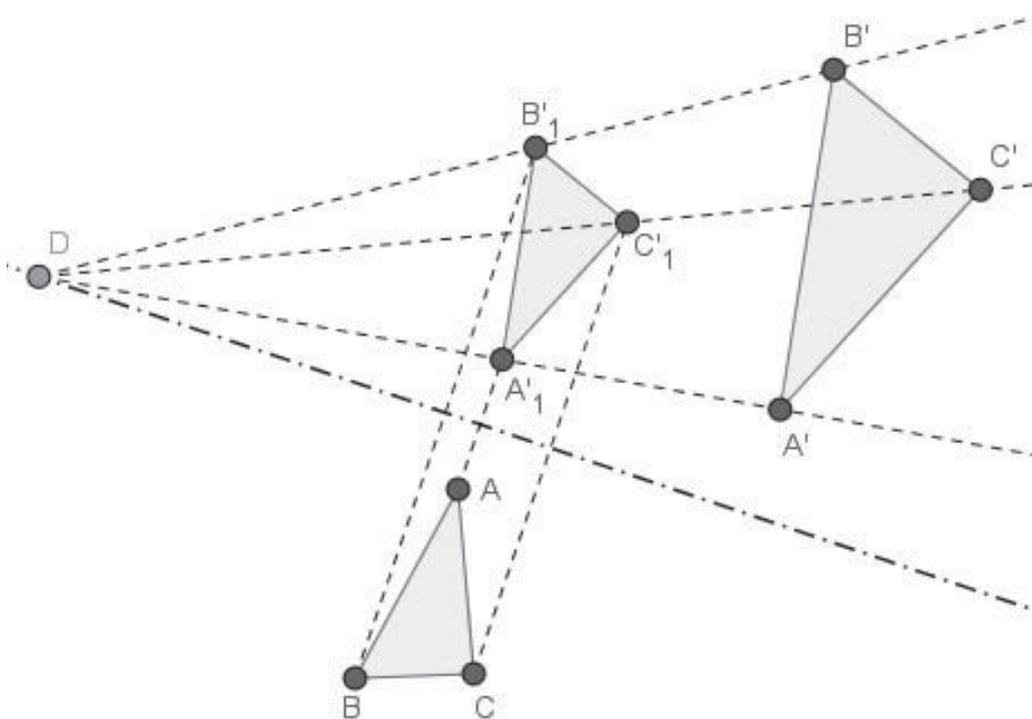


Fig. 13: *Centro de reflexión dilatatoria.*

Sin entrar en detalle, lo más sencillo es descomponer en producto de reflexión por homotecia, tales que el centro de la homotecia esté en el eje de la reflexión. En la Fig. 13 aparecen el triángulo  $ABC$ , y su imagen,  $A'B'C'$ , en una semejanza inversa (es decir, de lados proporcionales y sentido contrario). Dicha semejanza es producto de la reflexión de eje la recta en línea continua y una homotecia de centro  $D$ , situado en dicha recta. Tal punto  $D$  se denomina *centro de semejanza inversa*, o también *centro de reflexión dilatatoria*.

## 4 Semejanzas de modo algebraico

### 4.1 Ecuación matricial de una semejanza

Siendo las semejanzas del plano transformaciones lineales, la semejanza en la que el punto  $P'(x', y')$  es imagen del  $P(x, y)$  puede expresarse matricialmente en la forma

$$(1, x', y') = (1, x, y) \cdot S \quad (5)$$

donde  $S$  es una matriz  $3 \times 3$  cuyos elementos son números reales.

Como la posición en el plano de un objeto geométrico queda determinada por tres de sus puntos no alineados, una semejanza del plano quedará determinada por los vértices de un triángulo y sus respectivas imágenes (que deben conservar la razón de distancias).

Así pues, la semejanza que transforma tres puntos  $A(a_1, a_2)$ ,  $B(b_1, b_2)$ ,  $C(c_1, c_2)$  no alineados, en  $A'(a'_1, a'_2)$ ,  $B'(b'_1, b'_2)$ ,  $C'(c'_1, c'_2)$ , ha de verificar las tres condiciones

$(1, a'_1, a'_2) = (1, a_1, a_2) \cdot S$ ,  $(1, b'_1, b'_2) = (1, b_1, b_2) \cdot S$ ,  $(1, c'_1, c'_2) = (1, c_1, c_2) \cdot S$   
expresables conjuntamente (apilándolas) en la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_1 & a'_2 \\ 1 & b'_1 & b'_2 \\ 1 & c'_1 & c'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} S$$

Multiplicando por la izquierda por la inversa de la matriz de coordenadas de  $A, B, C$ , resulta

$$S = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 1 & b_1 & b_2 \\ 1 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & a'_1 & a'_2 \\ 1 & b'_1 & b'_2 \\ 1 & c'_1 & c'_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Este cálculo matricial se realiza cómodamente con GeoGebra, en la misma forma indicada en 2.2 para isometrías.

### 4.2 Conservación o cambio de sentido por una semejanza

Razonando como en 2.3, de (6) se deduce que

$$\det(S) = \frac{2 \cdot \text{area}(A'B'C')}{2 \cdot \text{area}(ABC)} \quad (7)$$

Supongamos que la semejanza es producto del movimiento  $\mathbf{m}$ , en que  $A'_1B'_1C'_1$  es imagen de  $ABC$ , por la homotecia  $\mathbf{h}$ , en la que  $A'B'C'$  es imagen de  $A'_1B'_1C'_1$ . Siendo  $k$  la razón de homotecia, se tiene  $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{A'_1B'_1}$  y  $\overrightarrow{A'C'} = k \cdot \overrightarrow{A'_1C'_1}$  luego se tiene la siguiente relación entre áreas (orientadas) de ambos triángulos (haciendo uso de productos vectoriales)

$$area(A'B'C') = \frac{1}{2} \overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'} = \frac{1}{2} \cdot k^2 \cdot \overrightarrow{A'_1B'_1} \times \overrightarrow{A'_1C'_1} = k^2 \cdot area(A'_1B'_1C'_1)$$

y, de acuerdo con lo indicado en 2.3,  $area(A'_1B'_1C'_1) = \pm area(ABC)$ , donde el signo  $\pm$  será elegido según que la isometr´a conserve el sentido o lo cambie. Sustituyendo ambas igualdades en ( ), se tiene pues

$$det(S) = \pm k^2$$

donde  $k$  es la razón de la semejanza, es decir, la razón de la semejanza producto de la homotecia por el movimiento. Naturalmente corresponde signo positivo a las semejanzas directas y negativo a las inversas.

### 4.3 Puntos invariantes por una semejanza

Finalmente, los puntos invariantes por la semejanza ( ) serán los que verifiquen la ecuación matricial  $(1, x, y)S = (1, x, y)$ , es decir, los que verifiquen

$$(1, x, y) \cdot (S - I) = (0, 0, 0)$$

siendo  $I$  la matriz unidad  $3 \times 3$ . Denotando por  $s_{ij}$  a los elementos de la matriz  $S$ , esta ecuación matricial da lugar a tres ecuaciones lineales. La primera de estas ecuaciones es trivial,  $0 = 0$ , por ser  $(1, 0, 0)$  la primera columna de  $S$ . Las otras dos ecuaciones lineales son (denotando por  $s_{ij}$  a los elementos de la matriz  $S$ )

$$s_{12} (s_{22} - 1) \cdot x + s_{23} \cdot y = 0 \quad s_{13} - s_{23} \cdot x + (s_{33} - 1) \cdot y = 0 \quad ( )$$

La solución de este sistema proporciona, por tanto, los puntos invariantes de la isometr´a de matriz  $S$ . Naturalmente, el centro de la semejanza directa o inversa puede ser obtenido resolviendo el sistema lineal de ecuaciones ( ).

#### 4.4 Ejemplos de semejanzas haciendo uso de coordenadas

Los siguientes ejemplos aclaran cómo operar en la práctica.

*Ejemplo 4.4.A:* (producto de homotecia por traslación): Al aplicar al triángulo  $ABC$  de vértices  $A(2,0)$ ,  $B(3,0)$ ,  $C(3,2)$  la homotecia de centro  $D(0,0)$  y razón 2 se obtiene como imagen el triángulo  $A'B'C'$  (Fig. 14). Y al aplicar a este la traslación de vector  $u = (-6, 3)$  se obtiene como imagen el triángulo  $A''B''C''$ .

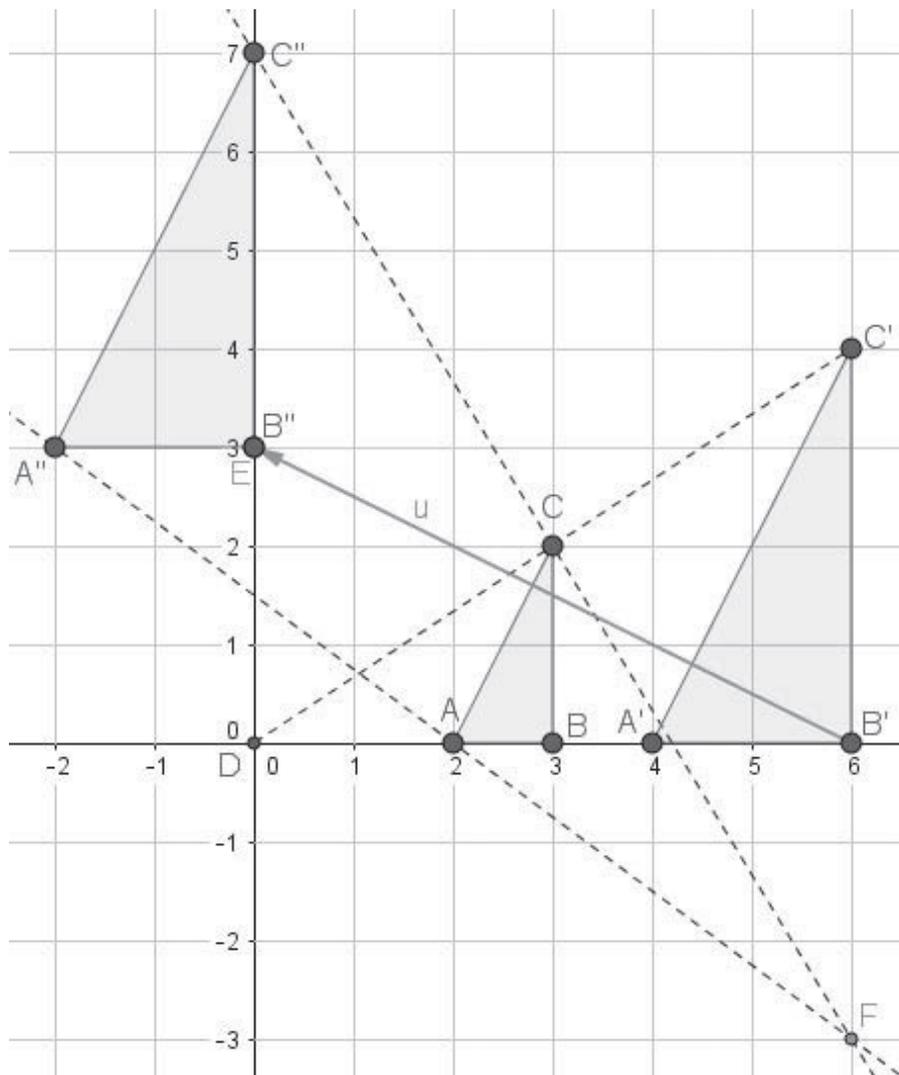


Fig. 14: Centro,  $F$ , de la homotecia producto.

Se trata de determinar la transformación producto de ambas. Siendo  $x' = 2x, y' = 2y$  las ecuaciones paramétricas de esa homotecia y siendo  $x' = x - 6, y' = y + 3$  las de la traslación, serán  $x'' = 2x - 6, y'' = 2y + 3$  las de su transformación producto. Y los puntos invariantes de esta deberán verificar las ecuaciones del sistema lineal  $x = 2x - 6, y = 2y + 3$ , cuya solución única proporciona el único punto invariante  $F(6, -3)$ , centro de la homotecia producto, como se visualiza en la Fig. 14.

(Notemos que las coordenadas han sido elegidas de modo que se opere con valores enteros sencillos, mostrándose la cuadrícula para una mas cómoda localización de coordenadas de los puntos considerados).

*Ejemplo 4.4.B (centro de semejanza inversa):* En la Fig.15 se muestran dos triángulos, el  $ABC$  de vértices  $A(2, 1), B(3, 3), C(2, 3)$  y el  $A'B'C'$  de vértices  $A'(3, -1), B'(7, 1), C'(7, -1)$ . Los lados de  $A'B'C'$  son respectivamente de longitud doble que los del  $ABC$ , por lo que ambos triángulos son semejantes. Pero son de distinto sentido.

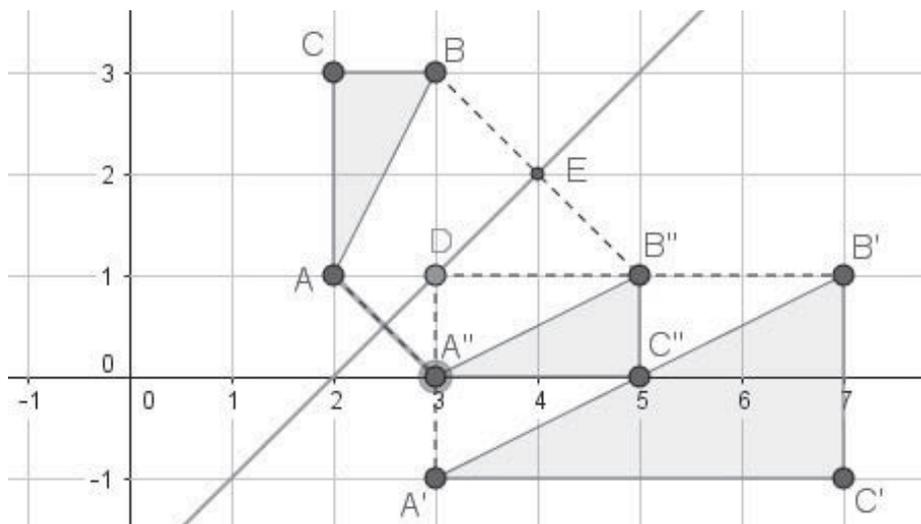


Fig. 15: Centro,  $D$ , de la semejanza inversa.

Se trata de determinar, del mejor modo posible, la semejanza que transforma  $ABC$  en  $A'B'C'$ . De acuerdo con lo indicado anteriormente, la matriz de tal semejanza se puede calcular con GeoGebra (como en el ejemplo 2.5.B), resultando

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Para esta matriz  $S$ , el sistema de ecuaciones (8) queda así  $1 - x + 2y = 0$ ;  $-5 + 2x - y = 0$ , cuya solución única  $x = 3, y = 1$ , proporciona el centro de semejanza inversa  $(3,1)$ , denotado  $D$  en la Fig. 15.

Ahora, la imagen de  $A'B'C'$  en la homotecia de centro  $D$  y razón  $\frac{1}{2}$  (inverso de la razón de semejanza) es el triángulo  $A''B''C''$  de vértices  $A''(3,0)$ ,  $B''(5,1)$ ,  $C''(5,0)$ . Puesto que este triángulo ha de ser imagen del  $ABC$  en una simetría, su eje ha de pasar por el punto medio,  $E$ , de  $\overline{BB'}$ , siendo pues la recta  $DE$  el eje de dicha simetría.

De este modo, la semejanza en que  $A'B'C'$  es imagen de  $ABC$  resulta ser producto de la simetría de eje  $DE$  por la homotecia de centro  $D$  y razón 2. Así pues,  $D$  es su centro de semejanza inversa, como se visualiza en la Fig. 15. (Notemos que las coordenadas también han sido elegidas de modo que se opere con valores enteros sencillos).

## 5 Combinación de ambos métodos, sintético y algebraico, usando GeoGebra

GeoGebra es un sistema de geometría dinámica, que incluye un sistema de cómputo algebraico, lo que permite combinar ambos métodos al resolver problemas de transformaciones del grupo euclídeo, como vamos a mostrar.

### 5.1 Semejanza directa combinando ambos métodos

En la sección 3.3 se determinó el centro de semejanza directa por método sintético. Ahora vamos a describir cómo determinarlo por método algebraico y, una vez obtenido, ejecutar por método sintético la rotación y la homotecia de cuyo producto resulta la semejanza.

Consideremos dos triángulos, el  $ABC$  de vértices  $A(1,1)$ ,  $B(3,3)$ ,  $C(3,1)$  y el  $A'B'C'$  de vértices  $A'(2,5)$ ,  $B'(-2,5)$ ,  $C'(-2,3)$ . Ambos son semejantes (de lados proporcionales) y del mismo sentido. Con la misma notación de la

Sección 2.5, siendo  $H$  y  $H'$ , respectivamente, las matrices de coordenadas de  $ABC$  y de  $A'B'C'$ , la matriz  $S$  de la semejanza, se puede calcular así :

$$H := \{\{1, 4, 1\}, \{1, 4, 3\}, \{1, 3, 3\}\}$$

$$H' := \{\{1, 2, 5\}, \{1, -2, 5\}, \{1, -2, 3\}\}$$

$$S := \text{Inversa}(H) * H'$$

resultando

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en (8) elementos de esta matriz  $S$ , se obtiene el sistema de ecuaciones  $4 - x - 2 = 0$  ;  $-3 + 2x - y = 0$ , cuya solución única,  $x = 2, y = 1$ , proporciona el centro de semejanza directa,  $(2,1)$ , denotado  $D$  en la Fig. 16.

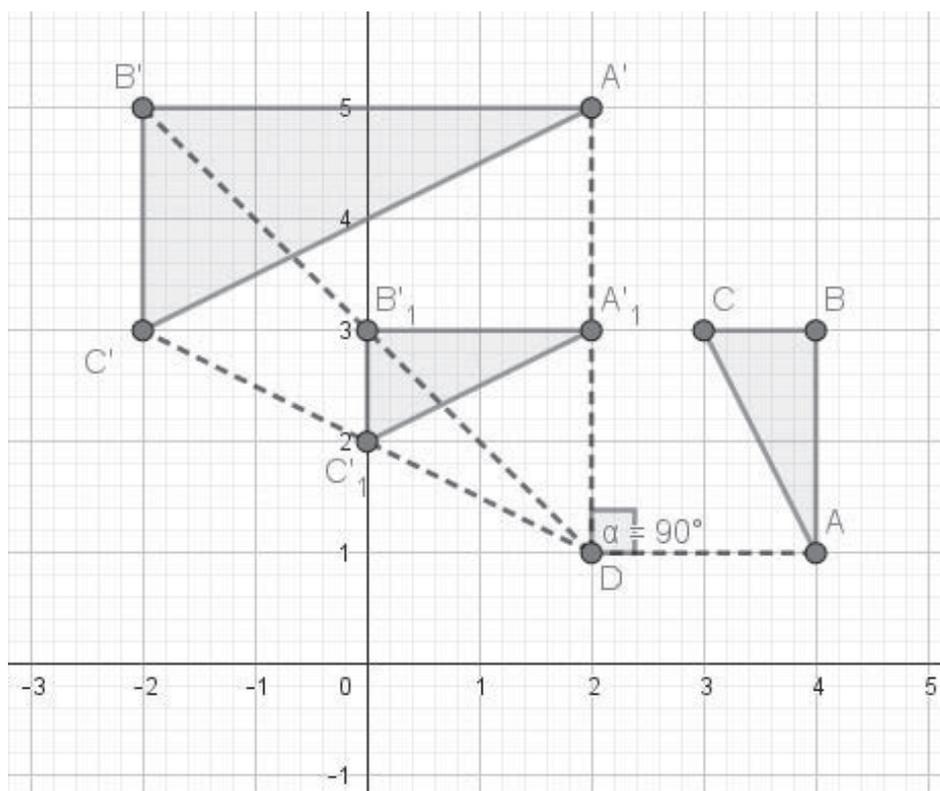


Fig. 16: Centro,  $D$ , de la semejanza directa.

*Nota:* Si se desea, el sistema lineal anterior puede ser resuelto por GeoGebra así: hacer clic en *Vista*, seleccionar *Cálculo Simbólico (CAS)*, introducir el sistema de ecuaciones en la primera casilla de la ventana *CAS* en la forma  $\{4 - x - 2 = 0, -3 + 2x - y = 0\}$  y pulsar el icono  $\mathbf{x=}$ , obteniéndose entonces la solución en la forma  $\{\{\mathbf{x=2}, \mathbf{y=1}\}\}$ .

Una vez determinado  $D$  por el método algebraico descrito, podemos continuar por método sintético, ejecutando los siguientes pasos:

- i) determinar el ángulo  $\widehat{ADA'}$  (haciendo clic en el icono de ángulo y sucesivamente en  $A$ , en  $D$  y en  $A'$ );
- ii) aplicar a  $ABC$  la rotación de centro  $D$  y amplitud de  $\widehat{ADA'}$ , para obtener el triángulo  $A_1B_1C_1$ ;
- iii) aplicar a  $A_1B_1C_1$  la homotecia de centro  $D$  y razón 2, para obtener como imagen  $A'B'C'$ .

(Notemos que, por simplicidad, las coordenadas de  $ABC$  y  $A'B'C'$  han sido elegidas de modo que se opere con valores enteros sencillos).

## 5.2 Visualizando el desplazamiento del centro de semejanza directa al trasladar la figura imagen

Continuando con el problema considerado en la Sección 5.1, se trata ahora de trasladar la figura imagen,  $A'B'C'$ , para observar como esto afecta al centro de semejanza directa,  $D$ . Mas concretamente, manteniendo el mismo triángulo original,  $ABC$ , se va a sustituir el triángulo imagen,  $A'B'C'$ , de vértices  $A' = (2, 5)$ ,  $B' = (-2, 5)$ ,  $C' = (-2, 3)$ , por el resultado de aplicarle la traslación de vector  $v_t = (-t, -2t)$ , es decir, por el triángulo de vértices  $A'' = (2 - t, 5 - 2t)$ ,  $B'' = (-2 - t, 5 - 2t)$ ,  $C'' = (-2 - t, 3 - 2t)$ .

Así pues, la matriz de coordenadas  $H$  no varía, pero si varían la matriz de coordenadas  $H'$  y la matriz de la semejanza,  $S$ , que pasan a ser, respectivamente,

$$H'_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 - t & 5 - 2t \\ 1 & -2 - t & 5 - 2t \\ 1 & -2 - t & 3 - 2t \end{pmatrix}, \quad S_t = Inversa(H) * H'_t \quad (10)$$

Sustituyendo en (8) los elementos de  $S_t$ , se obtiene el centro de semejanza directa, en función del parámetro  $t$ , lo que puede hacerse con ayuda del *CAS*,

como se indica en la *Nota* de la Sección 5.1.

Este proceso es cómodo de ejecutar en GeoGebra definiendo un deslizador para el parámetro  $t$ , como se describe a continuación.

Deslizador de parámetro  $t$ : Hacer clic en el icono *Deslizador*; hacer clic en el lugar de la *VG* donde se desea ubicar; en la ventana que entonces aparece, escribir el nombre del parámetro,  $t$  (que, en principio, aparece con valor inicial 1) y elegir los extremos del intervalo de posibles valores de  $t$ ; y cerrar la ventana (quedando así definido el deslizador). Al desplazar el cursor del deslizador a derecha e izquierda, el parámetro  $t$  va tomando valores en el intervalo elegido.

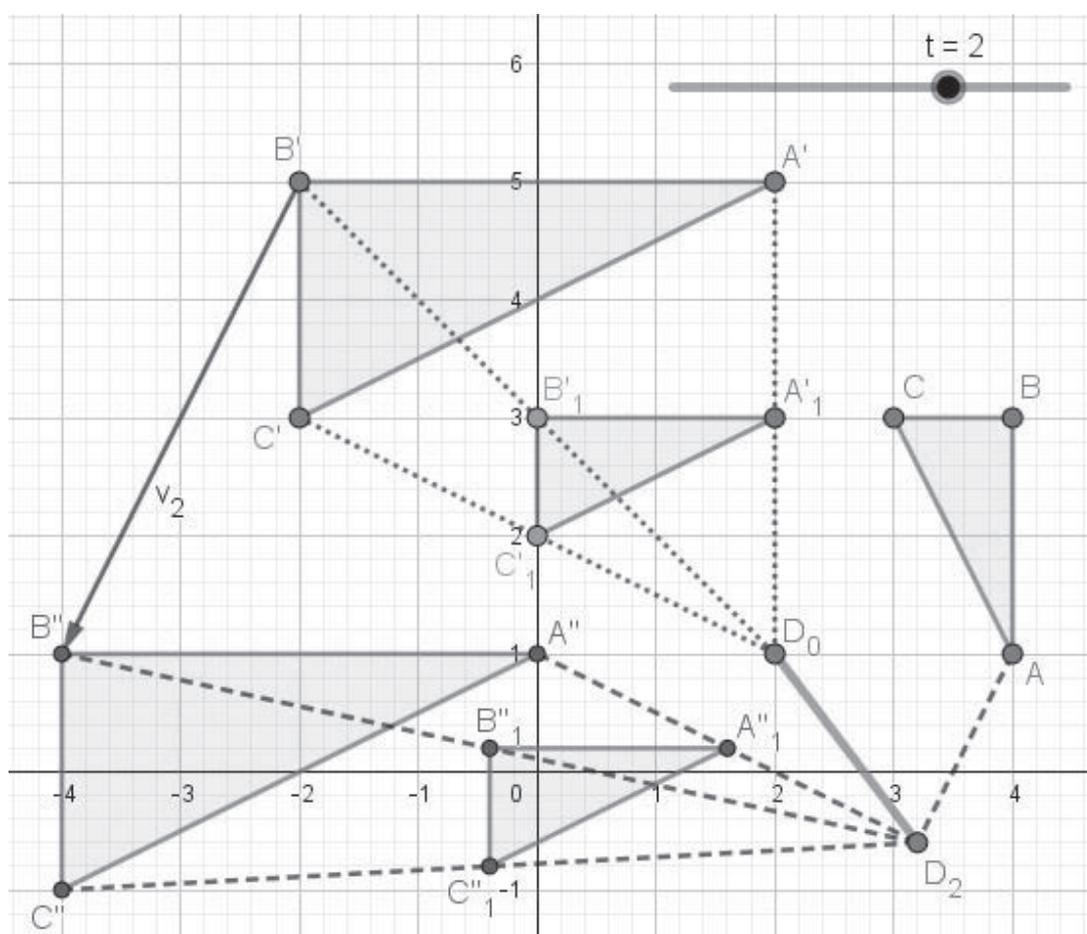


Fig. 17: *Desplazamiento del centro de semejanza directa.*

En la Fig. 17 pueden verse el triángulo inicial  $ABC$ , su triángulo imagen  $A'B'C'$  en una semejanza directa y el triángulo  $A_1B_1C_1$ , imagen del  $ABC$  en

dicha semejanza directa (los mismos de la Fig. 16). El centro de tal semejanza se ha denotado ahora  $D_0$ , por corresponder al valor  $t = 0$  del parámetro.

Al desplazar el cursor del deslizador para dar otro valor al parámetro  $t$ , el nuevo valor de  $t$  se actualiza en (10). En particular, para  $t = 2$  el vector traslación pasa a ser  $v_2 = (-2, -4)$  y el triángulo  $A'B'C'$  se transforma en esa traslación en el  $A''B''C''$ , el nuevo centro de semejanza es el punto  $D_2$  y la imagen de  $ABC$  por la rotación en la nueva semejanza directa es  $A''_1B''_1C''_1$  (Fig 17).

Por otra parte, desplazando de nuevo el cursor del deslizador hasta tomar valor  $t = 0$ , si entonces se pulsa sobre  $D_0$  con el botón derecho del ratón y selecciona *Rastro*, al ir desplazando el cursor del deslizador hasta  $t = 2$ , se va marcando la línea que recorre el centro de semejanza  $D_t$  (dicho rastro aparece en línea gruesa en la Fig. 17).

*Nota:* Al variar  $t$ , la amplitud de la rotación y y la razón de homotecia naturalmente no varían, sólo cambia el centro de semejanza, pero es curioso observar que el rastro dejado por el centro de rotación es un trazo recto (el segmento  $D_0D_2$ ), lo que contrasta con el hecho de que la determinación de dicho centro no es un problema lineal (intersección de dos circunferencias, según se vio en la Sección 3.3).

### 5.3 Visualizando el desplazamiento del centro y eje de semejanza inversa al girar la figura imagen

En la Sección 3.4 se definió el centro de semejanza inversa y en el ejemplo 4.4.B se detalló cómo determinarlo de modo algebraico. Se trata ahora de mostrar cómo varían el eje y centro de una semejanza inversa al aplicar un giro a la figura imagen.

En la Fig. 18 pueden verse dos triángulos semejantes de distinto sentido,  $ABC$  y  $A'B'C'$ . El primero se transforma en el segundo mediante la semejanza inversa consistente en la reflexión de eje la recta  $r'$  y una homotecia de centro  $D'$ , incidente con  $r'$ . Aplicando al triángulo  $A'B'C'$  una rotación de centro  $(0, 0)$  y amplitud  $90^\circ$  (en sentido horario), resulta el triángulo  $A''B''C''$ , obviamente semejante al  $ABC$ , y de sentido contrario. El triángulo  $ABC$  se transforma en el  $A''B''C''$  mediante la semejanza inversa consistente en la reflexión de eje la recta  $r''$  y la homotecia de centro  $D''$ , incidente con  $r''$ .

Al igual que en la Sección 5.2, este proceso se puede automatizar creando un deslizador,  $t$ , de modo que al pasar de  $t = 0$  a  $t = 90$  transforme el triángulo  $A'B'C'$  en su imagen en la rotación de centro  $(0,0)$  y amplitud  $90^\circ$  (en sentido horario), es decir, en  $A''B''C''$ . Para ello, se puede elegir el intervalo de variación del deslizador  $(-90, 90)$ , de modo que resulte mas intuitivo el giro de amplitud un ángulo recto.

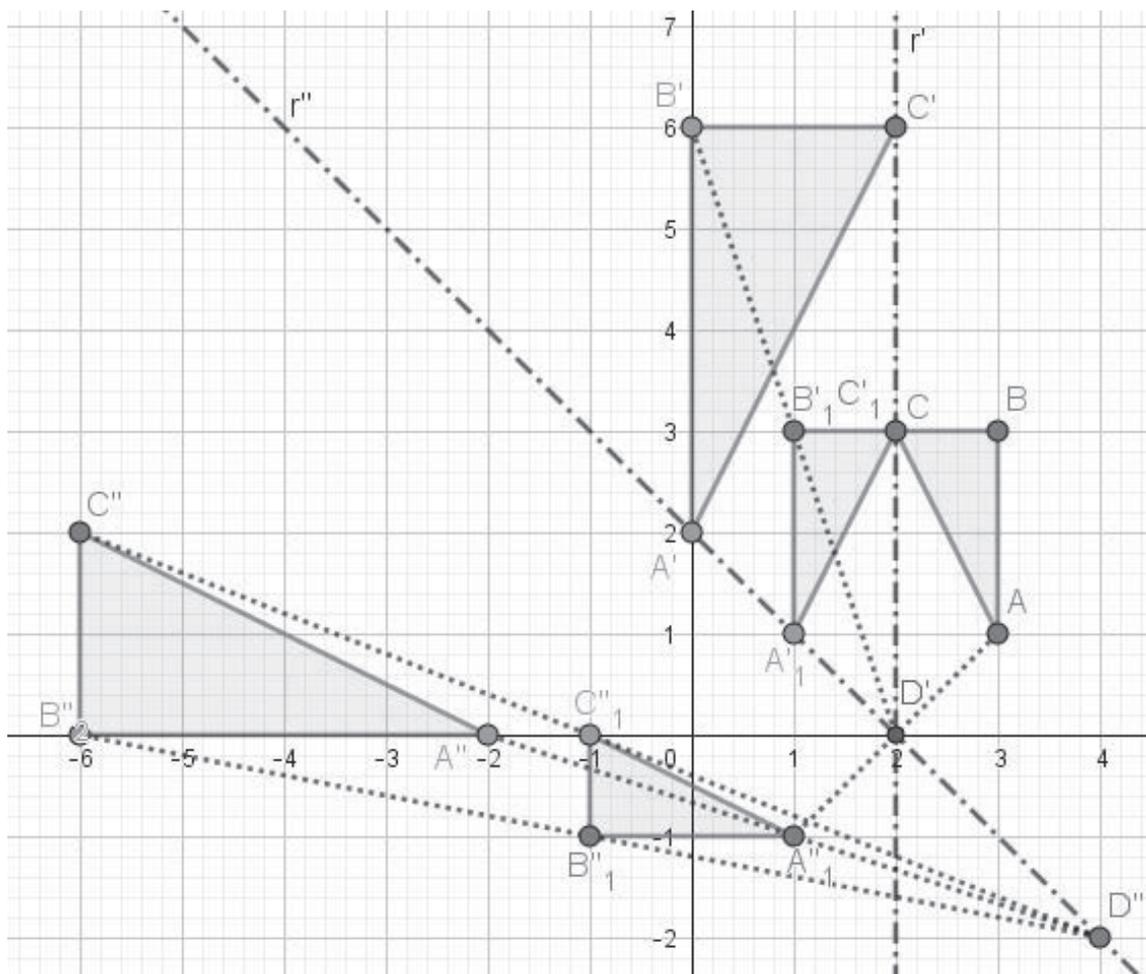


Fig. 18: *Desplazamiento del centro y eje de semejanza inversa.*

*Nota:* En caso de que la amplitud de la rotación antes considerada sea otra, las coordenadas de los vértices del triángulo imagen pueden no ser expresables elementalmente. Lo que GeoGebra proporciona es una expresión decimal aproximada, cuyo número de dígitos se puede preestablecer en el desplegable *Opciones*, eligiendo *Redondeo*, que ofrece hasta 15 *cifras significativas*.

## Conclusión

Este modo de presentar las transformaciones del grupo equiforme, comprobando experimentalmente con GeoGebra y simultaneando su estudio por vía sintética y vía algebraica, facilita y enriquece su comprensión. También ayuda a elegir la técnica a utilizar en sus numerosas aplicaciones.

## Bibliografía

- [1] P. Puig Adam (1958), *Curso de Geometría Métrica. Tomo I: Fundamentos*. Biblioteca Matemática.
- [2] H. M. S. Coxeter (1961), *Introduction to Geometry*. Wiley.
- [3] D. Pedoe (1970), *Geometry. A comprehensive Course*. Cambridge Univ. Press.
- [4] E. Roanes Macías (1980), *Introducción a la Geometría*. Anaya.
- [5] G. E. Martin (1982), *Transformation Geometry*. Springer-Verlag.
- [6] M. J. Soto y J. L. Vicente (1995), *Algebra lineal con Matlab y Maple*. Prentice-Hall.
- [7] E. Roanes Macías y E. Roanes Lozano (1996), Transformaciones lineales con sistemas de cómputo algebraico. *Boletín de la Soc. Puig Adam*, **42**, 28-46.
- [8] A. Raya, A. Rider, R. Rubio (2007), *Algebra y Geometría Lineal*. Reverté.
- [9] E. Roanes Macías y E. Roanes Lozano (2014), Otro modo de hacer matemática elemental, visualizando y explorando con GeoGebra. *Boletín de la Soc. Puig Adam*, **98**, 23-64.

## Some extravagant curves II

## Unas curvas estrafalarias II

**Ricardo Moreno Castillo**

Catedrático de instituto jubilado

moreno\_castillo@hotmail.es

### Abstract

*This article studies the properties of certain eighth degree algebraic curves.*

### Introducción

Este artículo continúa otro publicado en el número 102 de este boletín. Se trataba de estudiar el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a tres puntos es constante. En aquella ocasión los puntos eran los vértices del triángulo equilátero concéntrico con los ejes de coordenadas y simétrico respecto del de las ordenadas. Ahora supondremos los puntos alineados.

### 1. Generación de las curvas

Supondremos que los puntos alineados son:  $A = (1, 0)$ ,  $B = (0, 0)$  y  $C = (-1, 0)$ . Las letras  $a$ ,  $b$  y  $c$  significarán los cuadrados de las distancias del punto  $(x, y)$  a los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , y, por brevedad,  $u = x^2 + y^2$ . De este modo:

$$a = u - 2x + 1 \quad b = u \quad c = u + 2x + 1$$

Facilitará los posteriores cálculos dejar las siguientes cuentas hechas:

$$ac = u^2 + 2u + 1 - 4x^2 \quad abc = u^3 + 2u^2 + u - 4ux^2$$

Si  $\lambda$  es la constante, ha de suceder que  $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \lambda$ . Aislamos  $\sqrt{b}$  y elevamos al cuadrado en ambos miembros:

$$a + c + 2\sqrt{a}\sqrt{c} = \lambda^2 + b - 2\lambda\sqrt{b}$$

Se pasan las raíces al segundo miembro y de nuevo se eleva al cuadrado:

$$u + 2 - \lambda^2 = -2\lambda\sqrt{b} - 2\sqrt{a}\sqrt{c}$$

$$3u^2 + 4u + 6u\lambda^2 + 4\lambda^2 - \lambda^4 - 16x^2 = -8\lambda\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}$$

Introducimos la notación:  $P = 6\lambda^2 + 4$  y  $Q = 4\lambda^2 - \lambda^4$ , y por tercera vez se eleva al cuadrado:

$$3u^2 + Pu + Q - 16x^2 = -8\lambda\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}$$

$$9u^4 + (6P - 64\lambda^2)u^3 - 96x^2u^2 + (P^2 + 6Q - 128\lambda^2)u^2$$

$$+ 256x^4 + (256\lambda^2 - 32P)ux^2 + (2PQ - 64\lambda^2)u - 32Qx^2 + Q^2 = 0$$

Establecemos ahora las notaciones:

$$R = 6P - 64\lambda^2 = 24 - 28\lambda^2$$

$$S = P^2 + 6Q - 128\lambda^2 = 30\lambda^4 - 56\lambda^2 + 16$$

$$T = 256\lambda^2 - 32P = 64\lambda^2 - 128 = 64(\lambda^2 - 2)$$

$$U = 2PQ - 64\lambda^2 = -12\lambda^6 + 40\lambda^4 - 32\lambda^2 = -4\lambda^2(3\lambda^4 - 10\lambda^2 + 8)$$

Con arreglo a ellas, la ecuación de la curva queda del siguiente modo:

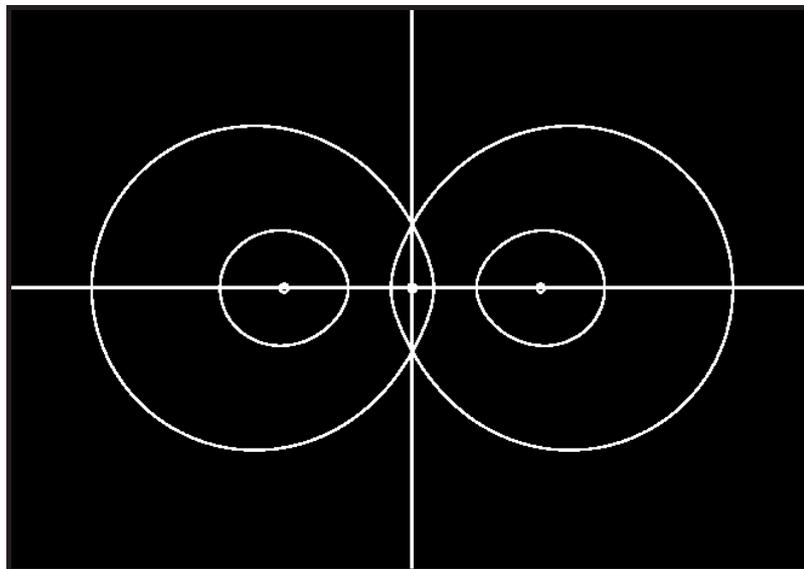
$$9u^4 + Ru^3 - 96x^2u^2 + Su^2 + 256x^4 + Tux^2 + Uu - 32Qx^2 + Q^2 = 0$$

Ahora bien, las sucesivas elevaciones al cuadrado eliminan los dobles signos de las raíces, de modo que también pertenecen a la curva los puntos cuya suma de distancias a dos de los vértices menos la distancia al otro es igual a  $\lambda$ .

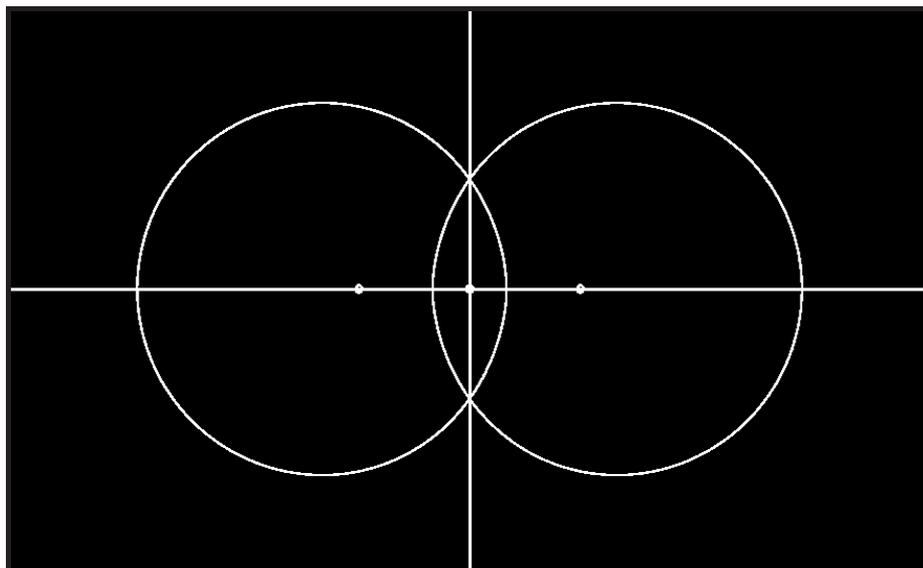
Los coeficientes de la ecuación para algunos valores de la constante están en la tabla que viene a continuación:

$\lambda$	$P$	$Q$	$R$	$S$	$T$	$U$
$1/2$	$11/2$	$15/16$	$17$	$31/8$	$-112$	$-91/16$
$1$	$10$	$3$	$-4$	$-10$	$-64$	$-4$
$\sqrt{2}$	$16$	$4$	$-32$	$24$	$0$	$0$
$3/2$	$35/2$	$63/16$	$-39$	$335/8$	$16$	$-99/16$
$\sqrt{3}$	$22$	$3$	$-60$	$118$	$64$	$-60$
$2$	$28$	$0$	$-88$	$272$	$128$	$-256$
$\sqrt{5}$	$34$	$-5$	$-116$	$486$	$192$	$-660$
$3$	$58$	$-45$	$-228$	$1942$	$448$	$-5796$
$\sqrt{10}$	$64$	$-60$	$-256$	$2456$	$512$	$-8320$

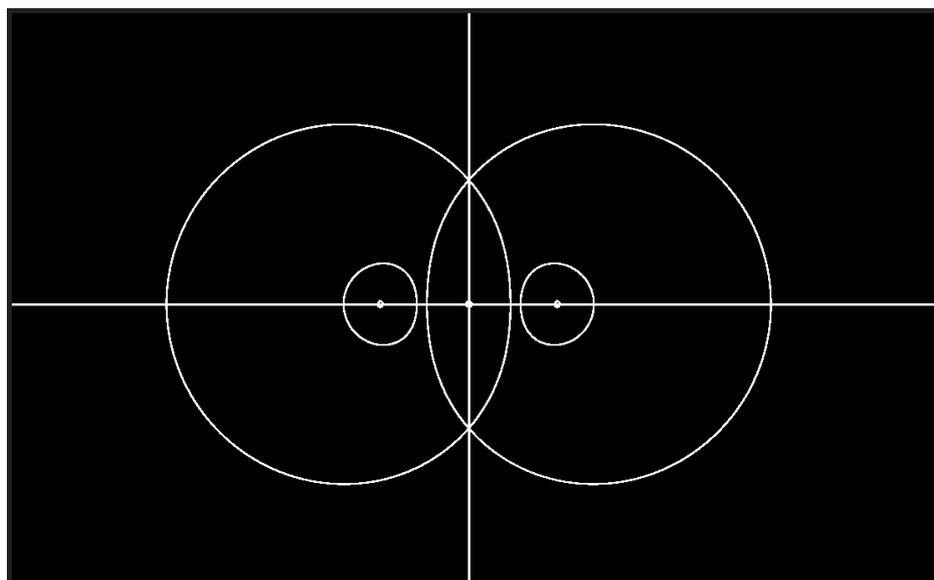
Las gráficas de las curvas correspondientes son las siguientes:



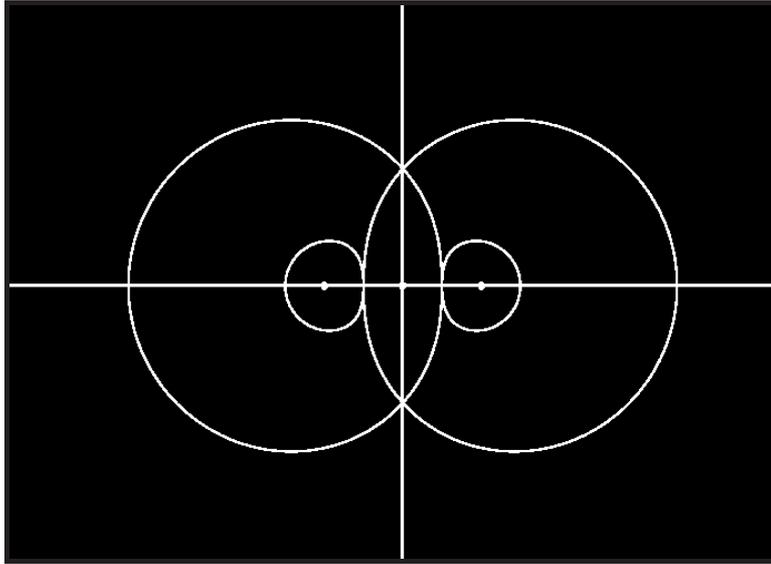
$$9u^4 + 17u^3 - 96x^2u^2 + (31/8)u^2 + 256x^4 - 112ux^2 - (91/16)u - 30x^2 + 225/256 = 0 \quad (\lambda = 1/2)$$



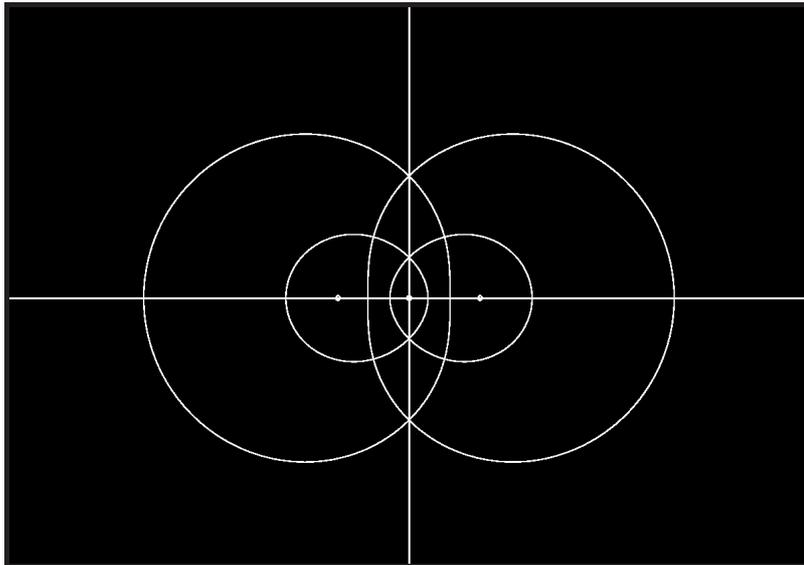
$$9u^4 - 4u^3 - 96x^2u^2 - 10u^2 + 256x^4 - 64ux^2 - 4u - 96x^2 + 9 = 0 \quad (\lambda = 1)$$



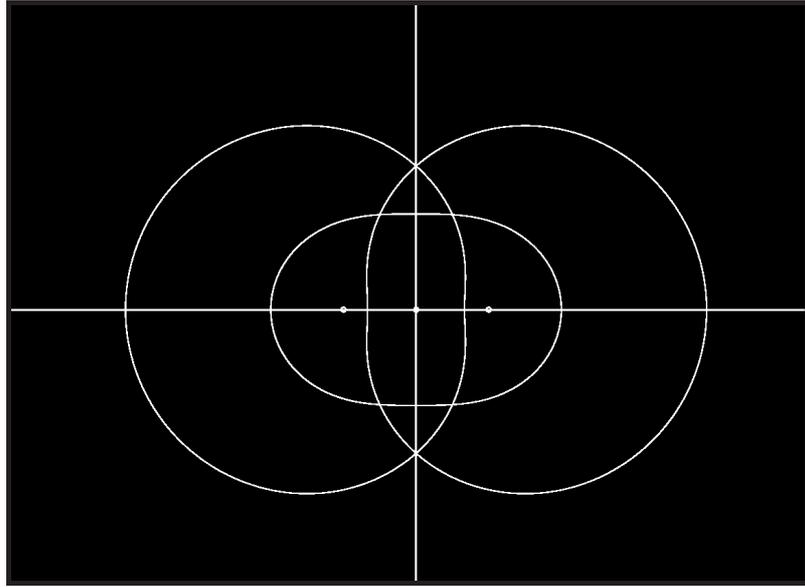
$$9u^4 - 32u^3 - 96x^2u^2 + 24u^2 + 256x^4 - 128x^2 + 16 = 0 \quad (\lambda = \sqrt{2})$$



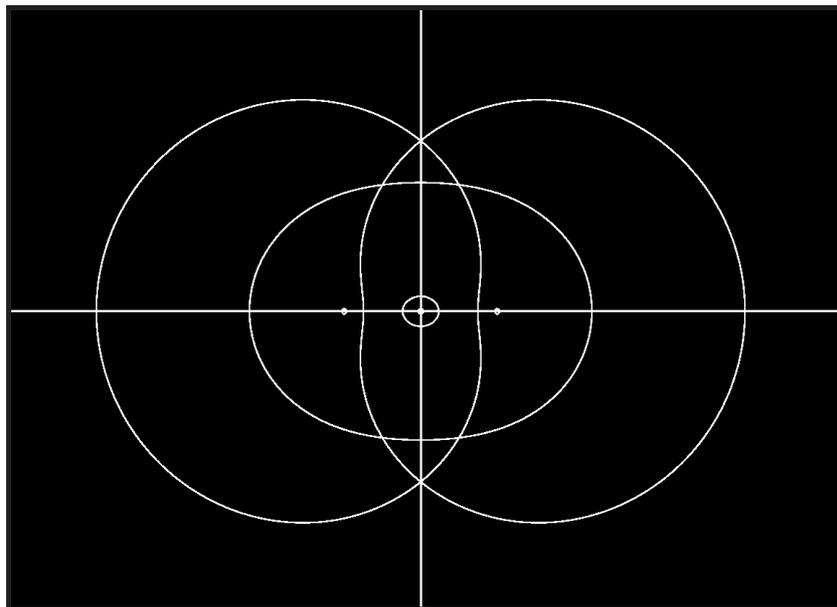
$$9u^4 - 39u^3 - 96x^2u^2 + (335/8)u^2 + 256x^4 \quad (\lambda = 3/2) \\ + 16ux^2 - (99/16)u - 126x^2 + 3969/256 = 0$$



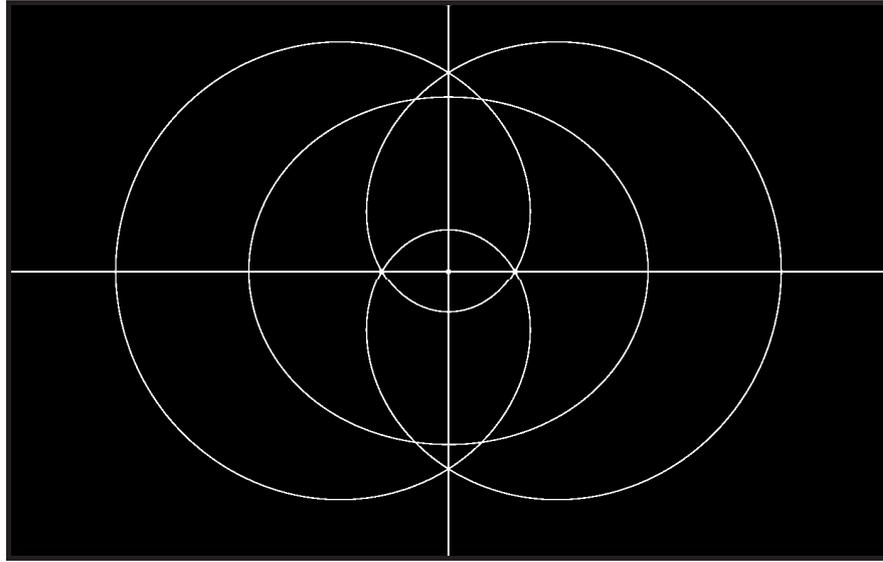
$$9u^4 - 60u^3 - 96x^2u^2 + 118u^2 + 256x^4 + 64ux^2 - 60u - 96x^2 + 9 = 0 \quad (\lambda = \sqrt{3})$$



$$9u^4 - 88u^3 - 96x^2u^2 + 272u^2 + 256x^4 + 128ux^2 - 256u = 0 \quad (\lambda = 2)$$

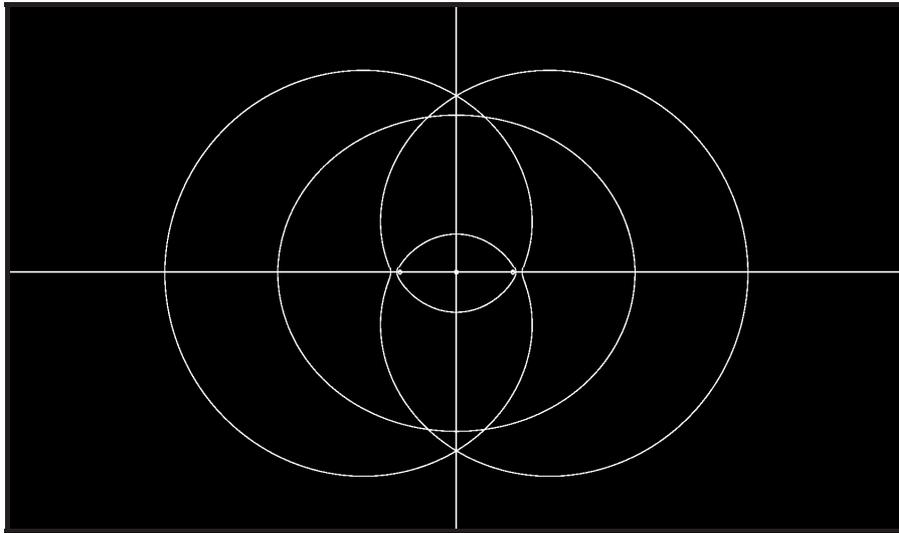


$$9u^4 - 116u^3 - 96x^2u^2 + 486u^2 + 256x^4 + 192ux^2 - 660u + 160x^2 + 25 = 0 \quad (\lambda = \sqrt{5})$$



$$9u^4 - 228u^3 - 96x^2u^2 + 1942u^2 + 256x^4 \quad (\lambda = 3)$$

$$+ 448ux^2 - 5796u + 1440x^2 + 2025 = 0$$



$$9u^4 - 256u^3 - 96x^2u^2 + 2456u^2 + 256x^4 \quad (\lambda = \sqrt{10})$$

$$+ 512ux^2 - 8320u + 1920x^2 + 3600 = 0$$

## 2. Puntos de corte con los ejes de coordenadas

Si  $f(x, y) = 0$  es la ecuación de la curva, hacemos  $x = 0$  :

$$\begin{aligned} f(0, y) &= 9y^8 + Ry^6 + Sy^4 + Uy^2 + Q^2 \\ &= (y^2 - \lambda^2)^2(9y^4 + (24 - 10\lambda^2)y^2 + \lambda^4 - 8\lambda^2 + 16) \end{aligned}$$

Entonces, los puntos de encuentro de la curva con el eje de las  $y$ -es son:

$$y = \pm\lambda \quad y = \frac{-\lambda \pm 2\sqrt{\lambda^2 - 3}}{3} \quad y = \frac{+\lambda \pm 2\sqrt{\lambda^2 - 3}}{3}$$

Esto da lugar a dos puntos reales si  $\lambda < \sqrt{3}$ , a cuatro si  $\lambda = \sqrt{3}$ , y a seis si  $\lambda > \sqrt{3}$  (si  $\lambda = 2$  dos de ellos se funden en el origen). Ahora hacemos  $y = 0$  :

$$f(x, 0) = 9x^8 + (R - 96)x^6 + (S + 256 + T)x^4 + (U - 32Q)x^2 + Q^2$$

Realizadas las cuentas y descomponiendo el polinomio, tenemos que:

$$\begin{aligned} 9x^8 - (28\lambda^2 + 72)x^6 + (30\lambda^4 + 8\lambda^2 + 144)x^4 - (12\lambda^6 - 72\lambda^4 + 160\lambda^2)x^2 + \lambda^8 - 8\lambda^6 + 16\lambda^4 \\ = 9(x^2 - \lambda^2)(x^2 - (\lambda/3)^2)(x^2 - (\lambda + 2)^2)(x^2 - (\lambda - 2)^2) \end{aligned}$$

Lo cual da lugar a los ocho puntos:

$$x = \pm\lambda \quad x = \pm\lambda/3 \quad x = \pm(\lambda + 2) \quad x = \pm(\lambda - 2)$$

Si  $\lambda = 1$ , los dos primeros puntos coinciden con los dos últimos, dando lugar a dos puntos dobles aislados. Si  $\lambda = 2$ , los últimos son un solo punto doble. Si  $\lambda = 3/2$  los dos segundos coinciden con los dos últimos (intercambiando los signos) formando dos puntos dobles. Si  $\lambda = 3$  los dos segundos coinciden con los dos últimos, y dan lugar a dos puntos dobles.

### 3. Puntos singulares

Para buscar los puntos singulares planteamos el sistema:

$$f = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

en el cual:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 72xu^3 + 6Ru^2x - 192xu^2 - 384x^3u + 4Sxu + 1024x^3 + 2Tux + 2Tx^3 + 2Ux - 64Qx \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 72yu^3 + 6Ru^2y - 384x^2yu + 4Syu + 2Tx^2y + 2Uy \end{aligned}$$

Supongamos  $x = 0$ . El segundo polinomio es nulo. En cuanto al tercero:

$$\frac{\partial f(0, y)}{\partial y} = 72y^7 + 6Ry^5 + 4Sy^3 + 2Uy = 0$$

Esta ecuación, liberada de la solución  $y = 0$  y simplificada, resulta ser:

$$\begin{aligned} 9y^6 + (18 - 21\lambda^2)y^4 + (15\lambda^4 - 28\lambda^2 + 8)y^2 - 3\lambda^6 + 10\lambda^4 - 8\lambda^2 = \\ 9(y^2 - \lambda^2)(y^2 - (3\lambda^2 - 4)/3)(y^2 - (\lambda^2 - 2)/3) = 0 \end{aligned}$$

Los puntos correspondientes a  $y = \pm\lambda$  son singulares. Las raíces del segundo factor no corresponden a puntos de la curva salvo que  $\lambda = \sqrt{3}$ , lo cual proporciona los puntos singulares  $y = \pm\sqrt{3}/3$ .

Supongamos ahora  $y = 0$ . El tercer polinomio es nulo y el segundo es:

$$\frac{\partial f(x, 0)}{\partial x} = 72x^7 + (6R - 576)x^5 + (4S + 1024 + 4T)x^3 + (2U - 64Q)x = 0$$

Prescindiendo de la solución  $x = 0$  y haciendo cuentas, esta ecuación se convierte en esta otra:

$$9x^6 - (54 + 21\lambda^2)x^4 + (15\lambda^4 + 4\lambda^2 + 72)x^2 - 3\lambda^6 + 18\lambda^4 - 40\lambda^2 = 0$$

Usando esta ecuación se puede comprobar lo siguiente: si  $\lambda = 1$  los puntos  $(1, 0)$  y  $(-1, 0)$  son puntos dobles aislados (cuyas tangentes son  $x \pm iy = 1$  y  $x \pm iy = -1$ ), si  $\lambda = 3/2$  los puntos  $(1/2, 0)$  y  $(-1/2, 0)$  son cúspides (sus rectas tangentes dobles son  $x = 1/2$   $x = -1/2$  respectivamente), si  $\lambda = 2$  el origen es un punto doble aislado (con rectas tangentes  $x \pm iy = 0$ ) y si  $\lambda = 3$ , los puntos  $(1, 0)$  y  $(-1, 0)$  son nodos (y sus tangentes  $(x-1)\sqrt{1114} \pm y\sqrt{301} = 0$  y  $(x+1)\sqrt{1114} \pm y\sqrt{301} = 0$ ). Para otros valores de  $\lambda$  la curva encuentra al eje de abscisas en ocho puntos distintos y no hay en él puntos singulares.

Fuera de los ejes están los cuatro puntos dobles ordinarios  $(1/2, \sqrt{\lambda^2 - 9/4})$ ,  $(1/2, -\sqrt{\lambda^2 - 9/4})$ ,  $(-1/2, \sqrt{\lambda^2 - 9/4})$  y  $(-1/2, -\sqrt{\lambda^2 - 9/4})$ , que son reales si  $\lambda > 3/2$ , imaginarios si  $\lambda < 3/2$  y confluyen en dos cúspides si  $\lambda = 3/2$ .

Para buscar los puntos singulares en el infinito construimos la curva proyectiva asociada:

$$F(x, y, z) = 9u^4 + Ru^3z^2 - 96x^2u^2z^2 + Su^2z^4 + 256x^4z^4 + Tux^2z^4 + Uuz^6 - 32Qx^2z^6 + Q^2z^8$$

A partir de ella es fácil ver lo siguiente:

$$F(x, y, 0) = 9u^4 \quad ; \quad \frac{\partial F(x, y, 0)}{\partial x} = 72xu^3 \quad ; \quad \frac{\partial F(x, y, 0)}{\partial y} = 72yu^3 \quad ; \quad \frac{\partial F(x, y, 0)}{\partial z} = 0$$

Hacemos  $z = 0$  y llegamos a que  $u = 0$ , lo que quiere decir que los puntos cíclicos del plano  $I = (1, i, 0)$  y  $J = (1, -i, 0)$  son puntos múltiples de la curva.

Fabricamos ahora la curva  $G(y, z) = F(1, y + i, z)$  (cuya multiplicidad en el origen es del mismo género que la de  $F$  en  $I$ ). Su sumando de menor grado es  $9(2yi)^4 + 256z^4$ , luego  $G$  tiene en  $(0, 0)$  un punto cuádruple cuyas tangentes son las rectas  $4z = \pm\sqrt{6}(1 \pm i)y$ .  $I$  es un punto cuádruple ordinario de  $F$  y sus tangentes son

$$\begin{aligned} \sqrt{6}(1-i)x + \sqrt{6}(1+i)y - 4z = 0 & , \quad \sqrt{6}(1+i)x + \sqrt{6}(1-i)y - 4z = 0 , \\ \sqrt{6}(1-i)x + \sqrt{6}(1+i)y + 4z = 0 & , \quad \sqrt{6}(1+i)x + \sqrt{6}(1-i)y + 4z = 0 . \end{aligned}$$

Las mismas consideraciones pueden hacerse con  $J$ .

#### 4. Clase de las curvas

Por ser de grado 8, la clase de la curva no puede superar a 56. Su valor exacto es difícil de calcular por la gran complicación de los cálculos, pero se intentará dar una cota superior un poco más afinada. Para ello vamos a contar el número de rectas tangentes a la curva que se pueden trazar desde el punto del infinito del eje de ordenadas, rectas cuya ecuación es de la forma  $x = \alpha$ . Entonces en la de la curva ponemos  $\alpha$  en lugar de la  $x$  y la escribimos como polinomio en  $y$ :

$$\begin{aligned} & 9y^8 + (6\alpha^2 + R)y^6 + (54\alpha^4 + 3R\alpha^2 - 92\alpha^2 + S)y^4 \\ & + (36\alpha^6 + 3R\alpha^4 - 192\alpha^4 + 2S\alpha^2 + T\alpha^2 + U)y^2 \\ & + 9\alpha^8 + (R - 96)\alpha^6 + (S + 256 + T)\alpha^4 + (U - 32Q)\alpha^2 + Q^2 \end{aligned}$$

Cada valor de  $\alpha$  para el cual la ecuación tenga soluciones dobles da lugar a una recta de las buscadas. Todos los que anulan el término independiente dan la solución doble  $y = 0$ , y son en general ocho. Para buscar los demás hacemos  $t = y^2$ , dividimos todo por 9, y tenemos una ecuación del tipo  $t^4 + at^3 + bt^2 + ct + d = 0$ , la cual, mediante el cambio  $t = z - a/4$  se transforma en otra de la forma  $z^4 + pz^2 + qt + r = 0$ , donde:

$$p = b - \frac{3}{8}a^2 \quad q = \frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{2}ab + c \quad r = -\frac{3}{256}a^4 + \frac{1}{16}ba^2 - \frac{1}{4}ac + d$$

El discriminante de esta nueva ecuación es:

$$\Delta = 18pq^3 - 32qrp^2 - 27q^4 + 144prq^2 + 16rp^4 - 128p^2q^2 - 4p^3q^2 + 256r^3$$

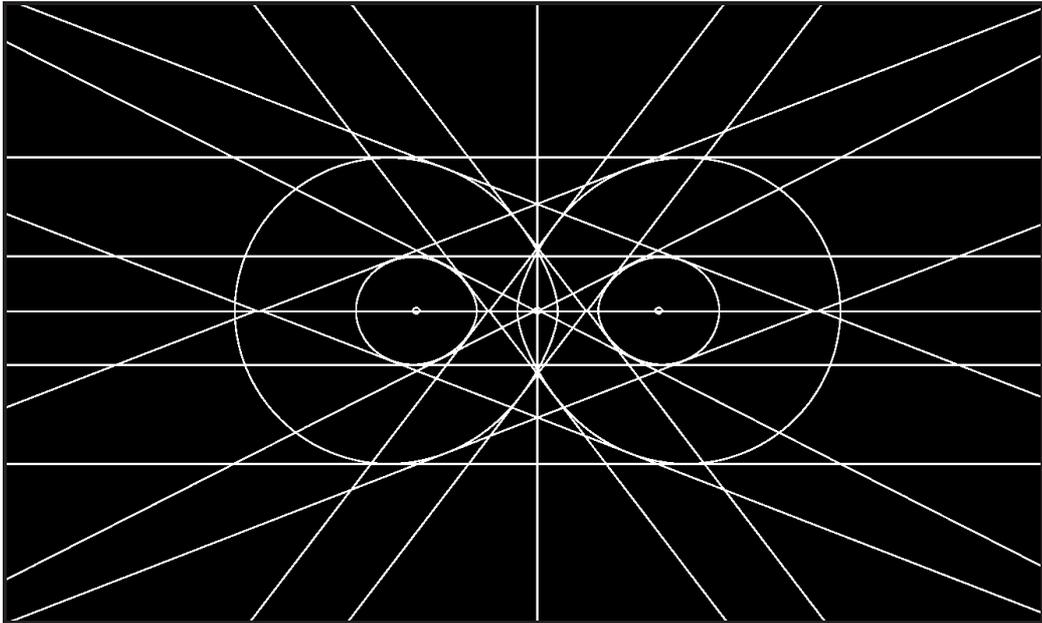
Es sencillo ver que  $p$  es un polinomio en  $\alpha$  de grado 4,  $q$  lo es de grado 6 y  $r$  lo es de grado 8, de lo que se deduce que el discriminante es un polinomio de grado 24, que es el número máximo de soluciones de la ecuación  $\Delta = 0$ . Ahora bien, de esas 24 rectas prescindimos de las ocho ya encontradas. Las demás corresponden a valores múltiples de  $t$  distintos de cero, lo que da lugar a dos valores para  $y$ , lo cual significa que son rectas bitangentes, y para lo que ahora no interesa han de ser contadas dos veces. Entonces  $16 \times 2 + 8 = 40$ , y este es como mucho el valor que puede alcanzar la clase.

## 5. Las inflexiones de la curva

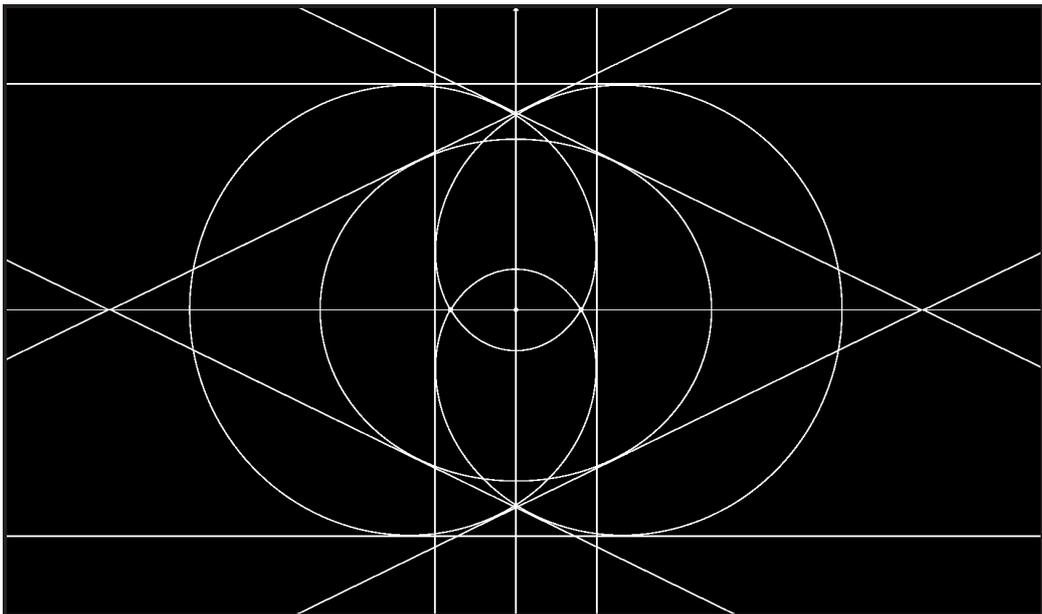
Encontrar las inflexiones de la curva es también muy complicado. Pero por lo menos el número de sus inflexiones reales se puede limitar con la ayuda de la cota de la clase. En efecto, si  $m$  es la clase de la curva,  $n$  el grado,  $d$  el de sus puntos dobles ordinarios reales,  $r$  el de sus cúspides reales e  $i$  el de inflexiones reales, y  $t$  el de bitangentes reales, existe una fórmula debida a Klein que relaciona todos esos elementos:

$$n + i + 2t = m + r + 2d$$

Pensemos, por ejemplo, en la curva para  $\lambda = 1/2$ , que posee 14 bitangentes reales (como se puede ver en la figura que viene a continuación) y dos puntos dobles ordinarios. La relación de Klein nos lleva a que  $i = m - 32$ , con lo cual se puede asegurar que la curva tiene como mucho 8 inflexiones reales. En cambio, la curva correspondiente a  $\lambda = 3$  tiene 8 bitangentes reales (ver la segunda de las figuras de la página siguiente) y 8 puntos dobles ordinarios. La fórmula de Klein nos da  $i = m - 8$ , en consecuencia  $i \leq 32$ .



Bitangentes de la curva correspondiente a  $\lambda = 1/2$



Bitangentes de la curva correspondiente a  $\lambda = 3$

## 6. El género de las curvas

El género de una curva  $C$  cuyas singularidades sean todas ordinarias lo proporciona la expresión siguiente (donde  $m_p$  es la multiplicidad del punto  $P$ ):

$$g(C) = \frac{n(-1)(n-2)}{2} - \sum_{P \in C} \frac{m_p(m_p-1)}{2}$$

Así es en nuestro caso (salvo para  $\lambda = 3/2$ ), de modo que es fácil de calcular. Por ejemplo, para  $\lambda = 1/2$  es tres, y para  $\lambda = 3$  es uno.

### Una sugerencia para ulteriores reflexiones

Podría ser divertido estudiar la familia de curvas estrafalarias en las que  $\lambda$  y dos puntos están fijos y al tercero se le mueve según una cierta curva. Dejo la sugerencia al ocioso y desocupado lector.

## Bibliografía

Fulton, W. (1971), *Curvas algebraicas*, Editorial Reverté, Barcelona.

Moreno Castillo, R. (2005), *Plücker y Poncelet. Dos modos de entender la geometría*, Editorial Nivola, Madrid.

Moreno Castillo, R. (2016), “Unas curvas estrafalarias” en *Boletín de la Sociedad Puig Adam*, nº 102, págs. 51-61.

De la Puente Muñoz, M<sup>a</sup>. J. (2007), *Curvas algebraicas planas*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz

# A note about a class of differential equations with random initial condition

## Una nota sobre una clase de ecuaciones diferenciales con condición inicial aleatoria

José Manuel López-Ballesteros, Clara Burgos,  
Julia Calatayud, Juan Carlos Cortés, Marc Jornet

Departamento de Matemática Aplicada  
Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar  
Universitat Politècnica de València

jomaloba@alumni.uv.es, clabursi@posgrado.upv.es,  
jucagre@alumni.uv.es, jccortes@mat.upv.es, marcjor@alumni.uv.es

### Resumen

*This paper shows a nice connection between Differential Equations and Probability through an illustrative example. We apply a successful algebraic strategy together with properties of expectation operator to determine the main statistical properties (mean, variance and covariance) of the solution to a non-autonomous linear differential equation whose initial condition is a random variable. Theoretical findings are illustrated by means of one example.*

### Introducción

Una de las experiencias docentes más instructivas, desde el punto de vista formativo, es la resolución de problemas cuya solución es conocida por métodos alternativos. La “alternativa” no tiene porqué estar basada, necesariamente, en un razonamiento ni más *corto* ni más *sencillo*, porque en ese contexto lo

realmente importante es la *sorpresa* de constatar la existencia de la “alternativa”, y reflexionar a partir de ella acerca de las profundas conexiones entre las distintas partes de la matemática. La riqueza de la experiencia formativa se ve incrementada si en la formulación del problema se consideran dos áreas de la Matemática *aparentemente* poco relacionadas.

Esta nota muestra un enfoque alternativo para resolver un problema sobre ecuaciones diferenciales deterministas, que se formulará en un contexto aleatorio a partir de una motivación natural. Como veremos, el tratamiento del problema requerirá, principalmente, de conceptos pertenecientes a las áreas de Ecuaciones Diferenciales y de Probabilidad. Como se mostrará, la solución “alternativa” sigue un proceso más *largo* que el tradicional, pero a cambio arroja luz sobre las relaciones existentes entre las dos áreas de conocimiento antes indicadas, proporcionando una formación matemática transversal, y por tanto más rica.

## 1. El problema a tratar y su solución

En el área de las Ecuaciones Diferenciales deterministas, el modelo no autónomo *más sencillo* se formula a partir del siguiente problema de valor inicial (PVI) basado en una ecuación diferencial lineal homogénea

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t)x(t), & t > t_0 \in \mathbb{R}, \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Por ejemplo, en el contexto de la Biología, si  $f(t) = k$ , siendo  $k$  una constante, y  $x(t)$  denota el tamaño de una población, en el instante  $t > t_0 \geq 0$ , el PVI (1) corresponde al denominado Modelo de Malthus para una especie con tasa de crecimiento instantánea  $k$  y una población inicial  $x_0 > 0$ . En la práctica, los datos  $x_0$  y  $f(t)$  no suelen conocerse de forma determinista, por lo que es más natural tratarlos como una variable aleatoria y un proceso estocástico, respectivamente. Este enfoque conduce al área de las Ecuaciones Diferenciales Aleatorias [1]. En este trabajo consideraremos el escenario más sencillo en el que la condición inicial es una variable aleatoria,  $X_0$ , y  $f(t)$  es una función determinista. En este contexto la solución del PVI (1) es un proceso estocástico  $X(t)$ , y la derivada,  $\dot{X}(t)$  debe interpretarse en algún

sentido estocástico apropiado. En efecto, como la derivada es un límite y en el contexto de la Teoría de Probabilidad hay diferentes tipos de convergencia, se hace necesario seleccionar algún tipo de convergencia para interpretar el PVI (1) cuando se asume que la condición inicial  $X_0$  es una variable aleatoria. En este trabajo se considera la convergencia en media cuadrática definida en el espacio de Banach  $(L^2_{VA}(\Omega), \|\cdot\|_{2,VA})$  de las variables aleatorias de segundo orden a valores reales, definidas sobre un espacio de probabilidad completo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Concretamente,

$$L^2_{VA}(\Omega) = \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \mathbb{E}[X^2] < +\infty\}, \quad \|X\|_{2,VA} = (\mathbb{E}[X^2])^{\frac{1}{2}} < +\infty,$$

siendo  $\mathbb{E}[\cdot]$  el operador esperanza. Una sucesión de variables aleatorias de este espacio,  $\{X_n : n \geq 0\} \subset L^2_{VA}(\Omega)$ , se dice que converge en media cuadrática a la variable aleatoria  $X \in L^2_{VA}(\Omega)$  si se cumple

$$\|X_n - X\|_{2,VA} = \left(\mathbb{E}[(X_n - X)^2]\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

En este caso se escribe  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{m.c.} X$ .

Una de las principales ventajas de la convergencia en media cuadrática es que se trata de una convergencia fuerte, ya que los resultados que se establecen en este tipo de convergencia son válidos en otro tipo de convergencias, que también son muy importantes en la Teoría de la Probabilidad, como la convergencia en probabilidad y la convergencia en distribución [2]. Como la solución del PVI (1) es un proceso estocástico,  $X(\cdot)$ , a continuación introducimos el espacio de Banach  $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_2)$  donde está definida la solución:

$$L^2(\Omega) = \left\{ X : \Omega \rightarrow L^2_{VA}(\Omega) : \int_{\mathcal{T}} \mathbb{E}[(X(\cdot, \cdot))^2] d\mathbb{P} < +\infty, \quad \cdot \in \Omega \right\},$$

siendo  $\mathbb{P} = [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{P} \geq 0$  y

$$\|X\|_2 = \left(\int_{\mathcal{T}} \mathbb{E}[(X(\cdot, \cdot))^2] d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathcal{T}} (\|X(\cdot, \cdot)\|_{2,VA})^2 d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \cdot \in \Omega.$$

Es conveniente añadir que en este trabajo, y en la literatura habitual, se utilizan las siguientes notaciones  $X = X(\cdot) = X(\cdot, \cdot)$  y  $X_0 = X_0(\cdot)$  de

forma indistinta para denotar un proceso estocástico y una variable aleatoria, respectivamente, porque en general el contexto debe ser suficiente para eliminar cualquier confusión.

Los elementos de  $X$  de este espacio se denominan procesos estocásticos cuadrado integrables, y en particular cumplen que para cada  $t \in \mathcal{T}$  fijo, la variable aleatoria resultante,  $X(t, \omega)$ , es de segundo orden,  $X(t, \omega) \in L^2_{VA}(\Omega)$ , es decir  $\mathbb{E}[(X(t, \omega))^2] < +\infty$ .

A continuación enunciamos, sin demostración, varios resultados claves para nuestro posterior estudio y que hacen de la convergencia en media cuadrática particularmente adecuada cuando se estudian ecuaciones diferenciales con incertidumbre y el propósito no es solo calcular la solución, si no también sus principales funciones estadísticas, tales como la media, la varianza y la correlación.

**Propiedad 1.** ([1, p.88]). *Dadas dos sucesiones de variables aleatorias  $\{X_n : n \geq 1\}$  e  $\{Y_n : n \geq 1\}$  en  $L^2_{VA}(\Omega)$  tales que*

$$X_n \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{m.c.} X, \quad Y_n \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{m.c.} Y,$$

*entonces se cumple que*

$$\mathbb{E}[X_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X], \quad \mathbb{V}[Y_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{V}[Y], \quad \Gamma(X_n, Y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(X, Y), \quad (2)$$

*donde  $\mathbb{E}[\cdot]$ ,  $\mathbb{V}[\cdot]$  y  $\Gamma[\cdot]$  denotan los operadores media, varianza y correlación, respectivamente.*

Recuerdese que por definición, la correlación de dos variables aleatorias  $X, Y \in L^2_{VA}(\Omega)$  está dada por  $\Gamma(X, Y) = \mathbb{E}[XY]$ . Por tanto, la tercera expresión de (2) se puede escribir de la siguiente forma equivalente

$$X_n \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{m.c.} X, \quad Y_n \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{m.c.} Y \Rightarrow \mathbb{E}[X_n Y_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[XY].$$

En el contexto aleatorio, la derivada del proceso estocástico  $X(t)$  que aparece en el PVI (1) se interpreta en el sentido de la norma  $\|\cdot\|_{2,PE}$  de forma habitual. Así, dado  $X \in L^2_{PE}(\Omega)$  se dice que el proceso estocástico  $\dot{X}(t) \in L^2_{PE}(\Omega)$  es derivable en el punto  $t \in \mathcal{T} = [t_0, T]$  si se cumple

$$\left\| \frac{X(t+h) - X(t)}{h} - \dot{X}(t) \right\|_{2,PE} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \quad t, t+h \in \mathcal{T} = [t_0, T].$$

Una propiedad clave de la convergencia en media cuadrática, la cual se infiere de la Propiedad 1, que hace que este tipo de convergencia sea particularmente atractiva para el estudio de ecuaciones diferenciales aleatorias frente a otros tipos de convergencia estocástica es la siguiente:

**Propiedad 2.** (*[1, p.98]*) Sea  $X(t) \in L^2_{PE}(\Omega)$  derivable en media cuadrática y sea  $\Gamma_X(t, s) \triangleq \mathbb{E}[X(t)X(s)]$ ,  $s, t \in \mathcal{T} = [t_0, T]$ , la función de correlación del proceso estocástico  $X(t)$ . Entonces se cumple

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Gamma_X(t, s)) = \mathbb{E}[\dot{X}(t)X(s)], \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbb{E}[X(t)]) = \mathbb{E}[\dot{X}(t)]. \quad (4)$$

Esta propiedad indica que el operador esperanza conmuta con la derivada en media cuadrática (denotada con el punto  $(\dot{\cdot})$ ) dando lugar a una expresión en términos de la derivada determinista  $(\frac{\partial}{\partial t})$  de la función de correlación. Análogamente para la función media.

La Propiedad 2 es importante porque, como veremos posteriormente, en algunos escenarios puede ser aprovechada para calcular la media, la varianza y la correlación del proceso estocástico solución de una ecuación diferencial aleatoria, sin necesidad de resolver dicha ecuación (lo cual en muchos casos no es posible). Es importante señalar, que a diferencia de lo que sucede en el caso determinista donde los objetivos principales cuando se resuelve una ecuación diferencial son calcular su solución, estudiar condiciones de existencia y unicidad, y estudiar la dependencia de la solución respecto de los parámetros y condiciones iniciales, en el contexto aleatorio además de estudiar estos problemas también son objetivos importantes determinar las principales características del proceso estocástico solución, tales como las funciones media, varianza y covarianza, ya que a partir de ellas se obtiene una descripción de comportamiento estadístico de la solución. Más aún, si se conoce que la solución sigue algún tipo de distribución conocida, como por ejemplo la gaussiana, la obtención de las funciones estadísticas media y covarianza permite caracterizar completamente el proceso estocástico solución.

En el caso de la *versión* aleatoria del P (1) se puede demostrar, mediante un procedimiento basado en la extensión de resultados deterministas al contexto aleatorio de la media cuadrática que es bastante técnico, que el

proceso estocástico solución es

$$X(t) = X_0 e^{\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau}, \quad t \geq t_0. \quad (5)$$

En este punto es importante señalar que la costosa legitimación teórica de esta expresión en el contexto aleatorio ha motivado la búsqueda del enfoque alternativo que se presenta en la Sección 2. Admitiendo entonces, la representación formal (5), la obtención de la media, la varianza y de la correlación de  $X(t)$  puede realizarse primero tomando los correspondientes operadores directamente sobre la ecuación (5) y después aplicando sus propiedades operacionales. De este modo se obtienen la media

$$\mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[X_0 e^{\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau}] = \mathbb{E}[X_0] e^{\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau}, \quad (6)$$

y la covarianza

$$\begin{aligned} \Gamma[X(t)X(s)] &= \mathbb{E}[(X_0 e^{\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau})(X_0 e^{\int_{t_0}^s f(\tau) d\tau})] \\ &= \mathbb{E}[(X_0)^2] e^{\int_{t_0}^t f(\tau) d\tau + \int_{t_0}^s f(\tau) d\tau}. \end{aligned} \quad (7)$$

Tomando  $s = t$  en (7), se obtiene

$$\mathbb{E}[(X(t))^2] = \mathbb{E}[(X_0)^2] e^{2 \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau}, \quad (8)$$

por lo que, teniendo en cuenta (6) y (8), la varianza de la solución está dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[X(t)] &= \mathbb{E}[(X(t))^2] - (\mathbb{E}[X(t)])^2 \\ &= \mathbb{E}[(X_0)^2] e^{2 \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau} - (\mathbb{E}[(X_0)])^2 e^{2 \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau} \\ &= (\mathbb{E}[(X_0)^2] - (\mathbb{E}[(X_0)])^2) e^{2 \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau} \\ &= \mathbb{V}[X_0] e^{2 \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau} > 0. \end{aligned} \quad (9)$$

## 2. Una solución alternativa

En este apartado mostramos cómo obtener las funciones media, varianza y covarianza del proceso estocástico solución mediante un enfoque que no requiere de la obtención rigurosa de la solución y que aprovecha la propiedad clave de la convergencia en media cuadrática que se ha presentado en el apartado anterior (Propiedad 2).

## 2.1. Cálculo de la función media

Basta tomar el operador media en la versión aleatoria del PVI (1) y aplicar la expresión (4) de la Propiedad 2:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\dot{X}(t)] &= \mathbb{E}[f(t)X(t)] \Rightarrow \frac{d}{dt} [\mathbb{E}[X(t)]] = f(t)\mathbb{E}[X(t)], \\ \mathbb{E}[X_0(t)] &= \mathbb{E}[X_0],\end{aligned}$$

de modo que el PVI aleatorio se transforma en el siguiente PVI determinístico, que conserva la linealidad del problema original, y cuya solución es bien conocida,

$$\left. \begin{aligned}\frac{d}{dt} [\mathbb{E}[X(t)]] &= f(t)\mathbb{E}[X(t)], \\ \mathbb{E}[X_0(t)] &= \mathbb{E}[X_0],\end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[X_0]e^{\int_{t_0}^t f(\tau)d\tau}.$$

Obsérvese que la solución coincide con la obtenida anteriormente en la expresión (6).

## 2.2. Cálculo de la función de correlación

El cálculo de la función de correlación del proceso estocástico solución por el método alternativo es más intrincado. Partimos de la ecuación diferencial aleatoria del PVI (1) y multiplicamos ambos miembros por  $X(s)$ ,  $s \geq t_0$ ,

$$\dot{X}(t)X(s) = f(t)X(t)X(s),$$

tomamos el operador esperanza en ambos miembros y aplicamos su linealidad, ya que  $f(t)$  es una función determinista,

$$\mathbb{E}[\dot{X}(t)X(s)] = f(t)\mathbb{E}[X(t)X(s)].$$

Ahora aplicamos la expresión (3) de la Propiedad 2

$$-\frac{d}{dt} (\Gamma_X(t, s)) = f(t)\Gamma_X(t, s). \quad (1)$$

Para la condición inicial de PVI (1), razonando de forma similar se obtiene

$$X(t) = X_0 \Rightarrow X(t)X(s) = X_0X(s) \Rightarrow \mathbb{E}[X(t)X(s)] = \mathbb{E}[X_0X(s)],$$

es decir, utilizando la definición de función de correlación

$$\Gamma_X(0, s) = \mathbb{E}[X_0 X(s)], \quad s \geq t_0. \quad (11)$$

La solución del PVI determinista (10)–(11), que es de tipo lineal, es claramente

$$\Gamma_X(t, s) = \Gamma_X(0, s) e^{\int_0^t f(\tau) d\tau}, \quad (12)$$

para  $s \geq t_0$  fijo.

Ahora determinaremos el valor  $\Gamma_X(0, s)$ ,  $s \geq t_0$ . Para ello partimos de la ecuación diferencial dada en (1), escrita en términos de la variable  $s$  en lugar de  $t$

$$\dot{X}(s) = f(s)X(s), \quad s > t_0.$$

Ahora multiplicamos por  $X(0)$  ambos miembros, tomamos el operador esperanza y aplicamos la expresión (3) de la Propiedad 2, con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} X(0)\dot{X}(s) &= f(s)X(0)X(s) \Rightarrow \mathbb{E}[X(0)\dot{X}(s)] = f(s)\mathbb{E}[X(0)X(s)], \\ \frac{\partial}{\partial s} (\Gamma_X(0, s)) &= f(s)\Gamma_X(0, s). \end{aligned} \quad (13)$$

Para obtener su correspondiente condición inicial, multiplicamos por  $X(0) = X_0$ , la condición inicial del PVI (1) aleatorizado y tomamos el operador esperanza

$$X(0)X(0) = X_0 X_0 \Rightarrow \mathbb{E}[(X(0))^2] = \mathbb{E}[(X_0)^2],$$

es decir

$$\Gamma_X(0, 0) = \mathbb{E}[(X_0)^2]. \quad (14)$$

La solución del PVI determinista (13)–(14), que es de tipo lineal, es

$$\Gamma_X(0, s) = \mathbb{E}[(X_0)^2] e^{\int_0^s f(\tau) d\tau}. \quad (15)$$

Sustituyendo (15) en (12), se deduce que la expresión de la función de correlación buscada es

$$\Gamma_X(t, s) = \mathbb{E}[(X_0)^2] e^{\int_0^t f(\tau) d\tau} e^{\int_0^s f(\tau) d\tau},$$

la cual coincide con ( ). Tomando  $s = t$  se obtiene como antes la función varianza.

### 3. Ejemplo y conclusiones

Concluimos este trabajo ilustrando el desarrollo anterior con un ejemplo. Consideremos el PVI (1) aleatorizado donde  $t_0 = 0$ ,  $f(t) = -\frac{1}{t+1}$  y la condición inicial  $X_0$  sigue una distribución beta de parametros  $(\alpha; \beta) = (2; 3)$ , i.e.,  $X_0 \sim \text{Be}(2; 3)$ , [3]. En este caso, teniendo en cuenta que  $\mathbb{E}[X_0] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{2}{5}$  y  $\mathbb{V}[X_0] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{1}{25}$ , por tanto  $\mathbb{E}[(X_0)^2] = \frac{1}{25} + (\frac{2}{5})^2 = \frac{1}{5}$ , y aplicando las expresiones obtenidas en (6), (9) y (7), respectivamente, se obtienen las funciones media, varianza y correlación de la solución:

$$\mathbb{E}[X(t)] = \frac{2}{5(t+1)}, \quad \mathbb{V}[X(t)] = \frac{1}{25(t+1)^2}, \quad \Gamma_X(t, s) = \frac{1}{5} \left( \frac{1}{t+1} \times \frac{1}{s+1} \right).$$

En la Figura 1 se han representado la función media (o esperanza) y las funciones media más/menos una desviación típica del proceso estocástico solución,  $\mathbb{E}[X(t)] \pm \sqrt{\mathbb{V}[X(t)]}$ .

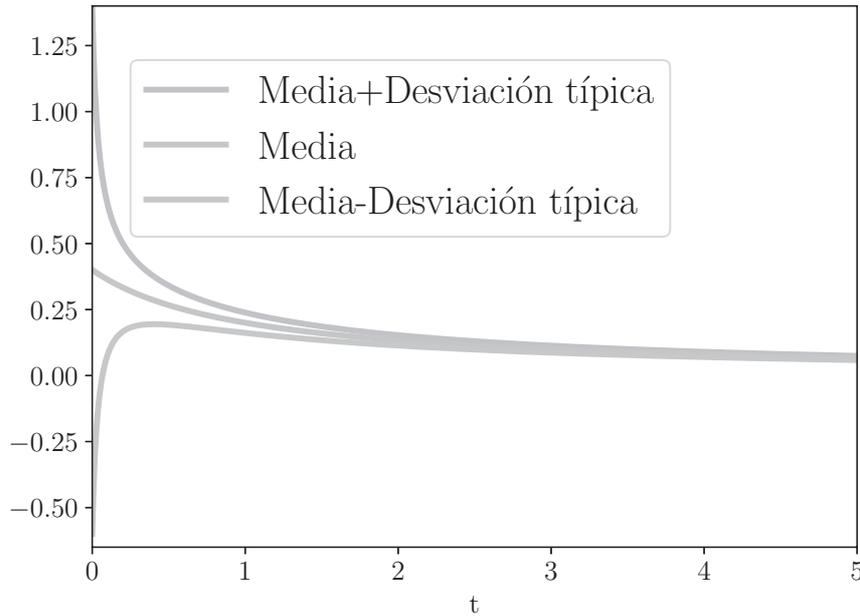


Figura 1: Gráficas de la función media y de la media más/menos una desviación típica del proceso estocástico solución en el contexto del ejemplo.

Y en la Figura 2 la función de correlación en el contexto de este ejemplo.

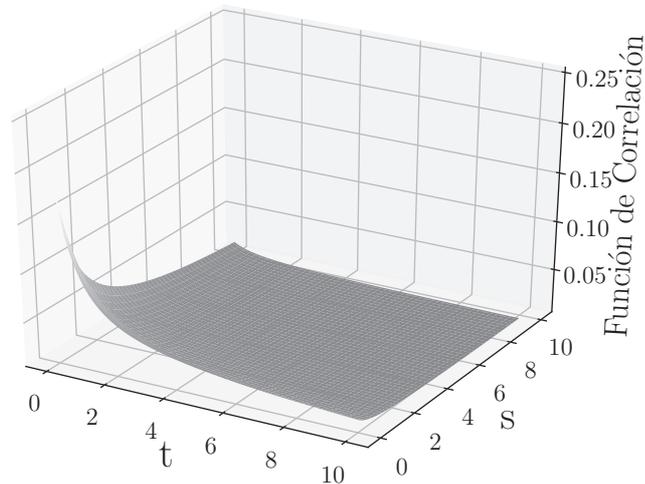


Figura 2: Gráfica de la función de correlación del proceso estocástico solución en el contexto del ejemplo.

Para terminar queremos señalar que el trabajo presentado puede servir de motivación docente para buscar otros contextos de enseñanza universitaria donde importantes conceptos deterministas puedan extenderse al escenario aleatorio, potenciando de esta forma una formación multidisciplinar entre distintas áreas matemáticas.

## Referencias

- [1] Soong, T.T. (1973): Random Differential Equations in Science and Engineering. Ed. Academic Press. New York.
- [2] Quesada, V. y García A. (1988): Lecciones de Cálculo de Probabilidades, Ed. Díaz de Santos. Madrid.
- [3] DeGroot, M.H. (1988): Probabilidad y Estadística, Ed. Addison-Wesley Iberoamericana. Madrid.

## ÍNDICE DE LOS ARTÍCULOS PUBLICADOS EN LOS NÚMEROS 76 AL 104 DE ESTE BOLETÍN (2007-2017)

(El índice de los números 01 al 50 fue publicado en el Boletín 51 y el índice de los números 51 al 75 fue publicado en el Boletín 76)

AUTORES y Títulos	Boletín, Pág. y año		
<b>ABELLANAS, MANUEL</b>			
Sobre la vecindad geometría .....	82	38	09
<b>AIZPÚN LÓPEZ, ALBERTO</b>			
Recordando las Escuelas de Magisterio del último medio siglo .....	83	79	09
Las matemáticas y la gente .....	91	32	12
<b>ALDEGUER CARRILLO, JOSÉ</b>			
Una aplicación de los haces de cónicas al armado de vigas. Reflexiones sobre la fundación de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales .....	89	81	11
La Real Academia de Matemáticas de Barcelona y el progreso de la Ingeniería .....	97	58	14
Comentarios al proceso histórico de la creación de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales .....	99	83	15
Comentarios al proceso histórico de la creación de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales .....	101	84	16
<b>ALÍ GAGO, ISMAIL y LISÓN MARTÍN, FERNANDO</b>			
Reseña de software: Las matemáticas en MAX, la distribución de software libre de la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid .....	80	77	08
<b>ALVAREZ MESA, JESÚS</b>			
Condiciones algebraicas de existencia de ternas Pitagóricas	98	82	14
Consideraciones en torno a ecuaciones diofánticas no lineales .....	101	50	16
Ecuaciones algebraicas y soluciones racionales .....	103	41	17

<b>AUTORES y Títulos</b>	<b>Boletín, Pág. y año</b>		
<b>BAENA, FRANCISCO J</b>			
Del teorema de Viviani, del principio de reflexión y de otros hitos camino del punto de Fermat .....	97	63	14
Mínimo de la suma de distancias a cuatro puntos del plano euclíde .....	99	16	15
<b>BEJARANO GORDEJUELA, MARÍA</b>			
El pensamiento matemático escondido en una sonata: La sonata para dos pianos y percusión de Béla Bartók y la sucesión de Fibonacci .....	93	45	13
<b>BLANCO MARTÍN, M<sup>a</sup> FRANCISCA</b>			
El Modulor de Le Corbusier: un instrumento de medida ....	84	63	10
<b>BÖHM, JOSEF</b>			
One Locus – Three Challenges .....	84	81	10
<b>BOMBAL GORDÓN, FERNANDO y JIMÉNEZ GUERRA, PEDRO</b>			
In Memoriam: Excmo. Sr. D. Baltasar Rodríguez-Salinas Palero .....	76	13	07
<b>BOTANA, FRANCISCO y RECIO, TOMÁS</b>			
A propósito de la envolvente de una familia de elipses .....	95	15	13
<b>BOTANA, FRANCISCO y VALCARCE, JOSÉ LUIS</b>			
Escaleras deslizantes flexibles: Un repaso actualizado y específico al puente entre Geometría Dinámica y Algebra Computacional .....	84	27	10
<b>BUJANDA DE GOICOECHEA, MARÍA PAZ</b>			
La Escuela Politécnica de París .....	85	69	10
En memoria del Profesor Etayo Miqueo .....	95	70	13
<b>CABANES TORRENTE, JOSÉ LUIS</b>			
Apunte biográfico de Julio Fernández Biarge .....	96	47	14

**CABEZAS CORCHERO, J.**

Las fuentes del <i>Resumen Histórico</i> de los <i>Elementos de aritmética, álgebra y geometría</i> de Juan Justo García Rodríguez .....	79	56	08
(ver también ROANES LOZANO, E.)			

**CALBO SANJUÁN, G.**

Distribuciones estadísticas truncadas de forma bilateral. El caso de la distribución gaussiana .....	77	44	07
Aplicación del método de los coeficientes indeterminados discreto al cálculo de algunas sumas parciales notables .....	78	38	08
El modelo matemático lognormal para valorar activos financieros: un enfoque didáctico .....	81	13	09
Provocar el pensamiento matemático: un ejemplo en el aula .....	81	83	09

**BÖHM, JOSEF** (ver LEINBACH, PATRICIA)**CASTIÑEIRA MERINO, JULIO**

Calculo de volúmenes con la fórmula del prismoide .....	84	9	10
De Paramétricas a Implícita .....	95	82	13
Continuación del artículo “De Paramétricas a Implícita” ...	96	73	14
El Problema de Castillon y la Recta Proyectiva Real .....	103	17	17

**COOPER, ANDREW** (ver QUESADA, ANTONIO)**CORTÉS LÓPEZ, J.C. y GARCÍA MORENO, E. y NAVARRO QUILES, A.**

Aleatorizando el modelo de crecimiento malthusiano .....	103	52	17
--	-----	----	----

**CORTÉS LÓPEZ, J.C. y NAVARRO, ANA y ALMUDENA SÁNCHEZ**

Distribuciones de probabilidad continuas y ecuaciones diferenciales ordinarias .....	101	42	16
--	-----	----	----

**D'AMORE, BRUNO**

El cero, de obstáculo epistemológico a obstáculo didáctico.	78	10	08
---	----	----	----

<b>AUTORES y Títulos</b>	<b>Boletín, Pág. y año</b>		
<b>DE LA BARRERA, D. y MARTÍN PEINADOR, E.</b> Estructuras de grupo topológico en $(Z, +)$ .....	95	54	13
<b>DE LA PUENTE, M.J.</b> Como obtener curvas algebraicas con formas predetermi- nadas a partir de circunferencias .....	85	12	10
<b>DE LA VILLA, AGUSTÍN</b> (ver GARCÍA, ALFONSA)			
<b>DE LEDESMA, LUIS</b> (ver HERNANDO, ANTONIO)			
<b>DE VEGA FERNÁNDEZ, FCO. JAVIER</b> Lo que debí hacer y no hice: un modelo matemático para el amor .....	83	24	09
<b>DE VICENTE LASECA, LOURDES</b> (ver GONZÁLEZ REDONDO, FRANCISCO A.)			
<b>DEL RÍO SAN JOSÉ, JORGE</b> (ver MARTÍNEZ DE AZAGRA PAREDES, ANDRÉS)			
<b>DI YU y PERALTA, JAVIER</b> La enseñanza del ábaco en una escuela china .....	104	40	17
<b>DUNLAP, LAURIE</b> (ver QUESADA, ANTONIO)			
<b>ETAYO GORDEJUELA, FERNANDO</b> ¿Qué significa comprender un problema? .....	82	15	09
Los conceptos en Geometría Diferencial. Memorias de un estudiante .....	93	35	13
Sobre la Tesis Doctoral de Javier Peralta .....	104	24	17
<b>ETAYO GORDEJUELA, JOSÉ JAVIER</b> Regreso a 1979: Comparación entre algunas conexiones li- neales sobre una variedad casi-compleja .....	93	27	13
Adiós a Javier Peralta .....	104	21	17
<b>ETAYO MIQUEO, JOSÉ JAVIER</b> Dos matemáticos navarros y unos recuerdos míos .....	92	17	12
<b>ETAYO RODRÍGUEZ, FERNANDO</b> (ver ETAYO RO- DRÍGUEZ, UJUÉ)			

<b>AUTORES y Títulos</b>	<b>Boletín, Pág. y año</b>		
<b>ETAYO RODRÍGUEZ, UJUÉ y ETAYO RODRÍGUEZ, FERNANDO</b>			
José Javier Etayo Miqueo era el abuelo .....	93	43	13
<b>FALCÓN SANTANA, SERGIO</b>			
Números primos formados únicamente por un dígito repetido .....	99	39	15
Sucesiones generadas a partir de la potencia de una expresión lineal .....	101	74	16
<b>FALCÓN SANTANA, SERGIO y MEDINA RODRÍGUEZ, PEDRO y PLAZA DE LA HOZ, ÁNGEL</b>			
¿Comprenden los alumnos los enunciados de los problemas .....	103	72	17
<b>FALCÓN, SERGIO</b>			
Estudio de una contracción en el plano euclídeo .....	102	42	16
(ver también MARTÍN, ALBERTO)			
<b>FERNÁNDEZ BIARGE, J.</b>			
Los distintos usos de la palabra “espacio” .....	76	21	07
Cuárticas bicirculares .....	77	34	07
Una generalización del teorema de Pascal al espacio de tres dimensiones .....	79	21	08
Acerca de los diámetros de Newton de una curva algebraica .....	83	14	09
Nota sobre asimetrías heredadas en Biología .....	93	59	13
Enseñanzas Técnicas para el futuro: Las Matemáticas en las Enseñanzas Técnicas .....	96	12	14
Don Pedro Puig Adam en el Instituto San Isidro .....	100	37	15
(ver también ROANES MACÍAS, E.)			
<b>FERNÁNDEZ CRISTOBAL, J.M.</b>			
Algunas sumas alternadas .....	76	53	07
Perturbación de las hipersuperficies $S=\{r=r_0\}$ en la métrica de Schwarzschild debida a su curvatura extrínseca .....	91	65	12

<b>AUTORES y Títulos</b>	<b>Boletín, Pág. y año</b>		
<b>FERNÁNDEZ LIRIA, PEDRO</b>			
Julio Fernández Biarge, mi padre .....	96	37	14
<b>FERNÁNDEZ TERÁN, ROSARIO E.</b> (ver GONZÁLEZ REDONDO, FRANCISCO A.)			
<b>FERNANDO, JOSÉ F. y GAMBOA, JOSÉ MANUEL</b>			
Factorización en algunos subanillos de $C$ .....	95	31	13
<b>GARCÍA ÁLVAREZ, ALBERTO</b> (ver ROANES LOZANO, E.)			
<b>GARCÍA GIGANTE, BENJAMÍN</b>			
Competencia matemática y videojuegos .....	83	46	09
<b>GARCÍA GUAL, JESÚS</b>			
Peinando barajas .....	88	72	11
<b>GARCÍA MORENO, E.</b> (ver CORTÉS LÓPEZ, J.C.)			
<b>GARCÍA SUÁREZ, JOSÉ ALBERTO</b>			
Sobre la congruencia de Cavalieri en triángulos .....	91	56	12
Curva más corta que divide un triángulo en dos regiones de igual área .....	98	74	14
Un camino heurístico hacia el punto de Fermat de un triángulo .....	99	31	15
Determinación de la “circunferencia de los 9 puntos” mediante relaciones cuadrangulares cíclicas entre ellos .....	103	66	17
Posiciones de Cavalieri entre dos triángulos de distinta o igual área .....	104	85	17
<b>GARCÍA SUÁREZ, XENARO</b>			
Suma de las $k$ -ésimas potencias.....	85	37	10
<b>GARCÍA, ALFONSA y GARCÍA, FRANCISCO y RODRÍGUEZ, GERARDO y RODRÍGUEZ, VICTORIA y DE LA VILLA, AGUSTÍN</b>			
Una caja informática de herramientas matemáticas .....	84	52	10
<b>GARCÍA, FRANCISCO</b> (ver GARCÍA, ALFONSA)			

<b>AUTORES y Títulos</b>	<b>Boletín, Pág. y año</b>		
<b>GÓMEZ AGULLÓ, OLGA y LISÓN MARTÍN, FERNANDO</b>			
Aquellos maravillosos años .....	83	87	09
<b>GONZÁLEZ DE POSADA, FRANCISCO</b>			
En el Centenario de Alan Turing. Turing <i>versus</i> Torres Quevedo .....	91	62	12
<b>GONZÁLEZ REDONDO, FRANCISCO A.</b>			
La Matemática en la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas .....	76	59	07
La Matemática en las revistas científicas españolas del siglo XIX .....	91	71	12
(ver también ROANES LOZANO, E.)			
<b>GONZÁLEZ REDONDO, FRANCISCO A. y DE VICENTE LASECA, LOURDES y FERNÁNDEZ TERÁN, ROSARIO E.</b>			
Julio Rey Pastor y los primeros años del Laboratorio y Seminario Matemático .....	77	67	07
<b>GONZÁLEZ, LEO M. y MACIÀ, FABRICIO y SOUTO IGLESIAS, ANTONIO</b>			
Estabilidad, aproximación numérica y mecánica de fluidos.	81	26	09
<b>GUTIÉRREZ ADRIÁN, EVA y MARTA (ver QUEIRUGA, MIGUEL ANGEL)</b>			
<b>GUTIÉRREZ, CELIA</b>			
Aplicación de un contraste de hipótesis para descubrir los factores que posibilitan el éxito en la implantación de un sistema de información .....	78	63	08
<b>HERNÁNDEZ GÓMEZ, JOAQUÍN</b>			
La Labor Pedagógica de Puig Adam.....	100	32	15
<b>HERNÁNDEZ PEÑALVER, GREGORIO</b>			
Cuadrangulando polígonos .....	94	29	13
<b>HERNANDO, ANTONIO (ver ROANES LOZANO, E.)</b>			

<b>AUTORES y Títulos</b>	<b>Boletín, Pág. y año</b>		
<b>HERNANDO, ANTONIO y DE LEDESMA, LUIS y LAITA, LUIS</b> Un Estudio Teórico de los Cambios de Representación en los Espacios de Problemas .....	79	32	08
<b>JIMÉNEZ GUERRA, PEDRO</b> (ver BOMBAL GORDÓN, FERNANDO)			
<b>JURADO MÁLAGA, ELENA</b> Alan Turing, 1912-1954: El origen de la computación .....	92	61	12
<b>KUTZLER, BERNHARD</b> Numerics versus Symbolics .....	77	14	07
<b>LAITA, LUIS</b> (ver HERNANDO, ANTONIO y también ver ROANES LOZANO, E.)			
<b>LEINBACH, PATRICIA Y CARL y BÖHM, JOSEF</b> Directing our Suspicions (Using Matrix Algebra to organize the results of an investigation) .....	80	23	08
<b>LISÓN MARTÍN, FERNANDO</b> (ver ALÍ GAGO, ISMAIL y también ver GÓMEZ AGULLÓ, OLGA)			
<b>LOSADA, RAFAEL y RECIO, TOMÁS y VALCARCE, JOSÉ LUIS</b> Sobre el descubrimiento automático de diversas generalizaciones del Teorema de Steiner-Lehmus .....	82	53	09
<b>MACIÁ, FABRICIO</b> (ver GONZÁLEZ, LEO M.)			
<b>MALLAVIBARRENA, RAQUEL</b> Federico Gaeta (1923–2007), in memoriam .....	76	17	07
Acciones Formativas de Posgrado en Educación Matemática .....	76	19	07
Acciones Formativas de Posgrado en Educación Matemática .....	79	19	08
<b>MARTÍN HERNÁNDEZ, JESÚS PABLO</b> Una aproximación a la Física-Matemática en el aula en el contexto del Efecto Compton Inverso .....	79	74	08

<b>AUTORES y Títulos</b>	<b>Boletín, Pág. y año</b>		
<b>MARTÍN PEINADOR, E.</b> (ver DE LA BARRERA, D.)			
<b>MARTÍN PRIETO, PABLO</b> San Agustín y las matemáticas .....	85	58	10
<b>MARTÍN, ALBERTO y PLAZA, ÁNGEL y FALCÓN, SERGIO</b> Razones metálicas en un circuito eléctrico ilimitado .....	79	26	08
<b>MARTÍNEZ DE AZAGRA PAREDES, ANDRÉS y PANDO FERNÁNDEZ, VALENTÍN y DEL RÍO SAN JOSÉ, JORGE</b> Del teorema de $\Pi$ al axioma de las conjeturas razonadas...	86	55	10
<b>MARTÍNEZ ZARZUELO, ANGÉLICA y ROANES LOZANO, E.</b> Sobre la generación y resolución automática de ejercicios con medios tecnológicos y la educación matemática .....	89	53	11
Sobre la generación y resolución automática de ejercicios con medios tecnológicos y la educación matemática – II... (ver también ROANES LOZANO, E.)	92	76	12
<b>MAZ-MACHADO, ALEXANDER</b> (ver RICO, LUIS)			
<b>MAZUELAS FRANCO, SANTIAGO</b> Proyecciones estereográficas y Geometrías en el plano.....	78	46	08
Rectas Proyectivas sobre $R$ -álgebras bidimensionales y cuádricas en el espacio proyectivo .....	80	57	08
<b>MEDINA RODRÍGUEZ, PEDRO</b> (ver FALCÓN SANTANA, SERGIO)			
<b>MERCHÁN RUBIRA, SUSANA</b> Los bloqueos en matemáticas a través del aprendizaje cooperativo .....	102	73	16
<b>MONTESINOS AMILIBIA, JOSÉ MARÍA</b> En torno a los números perfectos .....	94	12	13

**ORENO CASTILLO, RICARDO**

Algunos problemas diofánticos .....	88	64	11
La ecuación $x^m + y^n = z^p$ .....	91	18	12
Juan Bosco Romero Márquez, in memoriam .....	93	18	13
Sobre una curva algebraica .....	95	43	13
Sobre el problema 15 del libro VII de la <i>Aritmética</i> de Diofanto .....	97	26	14
Sobre sumas y diferencias de cubos .....	99	26	15
Sobre una familia de cuárticas .....	100	76	15
Unas curvas estrafalarias .....	102	51	16
Sobre el cuadrilátero de superficie máxima .....	103	69	17
Problema 3 del libro III de la <i>Aritmética</i> de Diofanto .....	104	79	17

**MUNTEAN, AUREL**

Sobre algunos errores en libros de texto de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato .....	87	30	11
Estrategias para generar ecuaciones polinomiales con raíces valores de funciones trigonométricas .....	88	14	11
Procedimientos trigonométricos en la resolución de problemas específicos del álgebra .....	90	16	12
Resolución de problemas de optimización basada en procedimientos trigonométricos .....	91	42	12
Cauchy-L'Hôpital contra L'Hôpital, con aplicaciones y comentarios .....	97	49	14

**NAVARRO QUILES, A. (ver CORTÉS LÓPEZ, J.C.)****NAVARRO, ANA (ver CORTÉS LÓPEZ, J.C.)****NICOLÁS ROSILLO FERNÁNDEZ**

La curva... ¿de Rosillo? .....	85	40	10
--------------------------------	----	----	----

**NÚÑEZ, JUAN y OLIVARES, ALBA V. y RODRÍGUEZ, ESTRELLA y SILVERO, MARITHANIA**

Enheduanna, Teano y Aglaonike, precursoras de Hipatia ...	85	45	10
---	----	----	----

<b>AUTORES y Títulos</b>	<b>Boletín, Pág. y año</b>		
<b>OLIVARES, ALBA V.</b> (ver NÚÑEZ, JUAN)			
<b>ORTEGA PULIDO, P.</b> (ver ROANES LOZANO, E.)			
<b>ORTIZ VALLEJO, MARÍA</b>			
Cálculo mental en el aula .....	86	74	10
<b>PACHECO, JOSÉ M.</b>			
¿Es posible una enseñanza “inocente” de las Matemáticas?	100	66	15
<b>PANDO FERNÁNDEZ, VALENTÍN</b> (ver MARTÍNEZ DE AZAGRA PAREDES, ANDRÉS)			
<b>PERALTA, JAVIER</b>			
Rey, Reyes y la introducción de la lógica matemática en España .....	83	54	09
Exposición matemática .....	85	85	10
Don Javier Etayo (recuerdos de un discípulo) .....	93	20	13
Cuadros con sabor matemático .....	94	70	13
Mitos en la historia de las matemáticas .....	98	65	14
Puig Adam y su obra didáctica en el seno de la Sociedad Matemática Española .....	101	16	16
<b>PÉREZ GALLARDO, MIGUEL L.</b>			
Primera derivada y convexidad .....	81	48	09
<b>PESCADOR DÍAZ, PEDRO</b>			
Interpretación del teorema de Tales con los métodos del Análisis Dimensional .....	77	62	07
Distribución del número de elementos invariantes en las permutaciones .....	87	78	11
<b>PICADO, MIGUEL</b> (ver RICO, LUIS)			
<b>PLAZA DE LA HOZ, ÁNGEL</b> (ver FALCÓN SANTA-NA, SERGIO)			
<b>PLAZA, ÁNGEL</b> (ver MARTÍN, ALBERTO)			
<b>PLAZA, ÁNGEL y FALCÓN, SERGIO</b>			
Dos resultados del valor medio .....	90	84	12

<b>AUTORES y Títulos</b>	<b>Boletín, Pág. y año</b>		
<b>PRIETO MARTÍNEZ, JUAN JOSÉ</b>			
Una nota sobre la Agenda Escolar: algo más que una herramienta de trabajo .....	77	82	07
El rendimiento escolar en secundaria: estudio del impacto de algunas variables de factores de riesgo .....	99	73	15
<b>QUEIRUGA, MIGUEL ÁNGEL</b>			
Periódico científico “Todo Ciencia” .....	83	90	09
<b>QUEIRUGA, MIGUEL ANGEL y GUTIÉRREZ ADRIÁN, EVA Y MARTA</b>			
Fotografía Matemática .....	77	85	07
<b>QUESADA, ANTONIO</b>			
Extending The Jagged-Boundary Edge Problem to Angles.	94	44	13
<b>QUESADA, ANTONIO y COOPER, ANDREW y DUNLAP, LAURIE</b>			
The Jagged Boundary-Edge Problem .....	89	14	11
<b>RECIO, TOMÁS</b> (ver BOTANA, FRANCISCO y ver también LOSADA, RAFAEL)			
<b>RICO SAROMPAS, MANUEL</b>			
Química Física y en el Centro de Cálculo Electrónico del CSIC .....	96	61	14
<b>RICO, LUIS y MAZ-MACHADO, ALEXANDER y PICADO, MIGUEL</b>			
Historia de la matemática y la educación matemática en España. Aportaciones de Javier Peralta .....	104	29	17
<b>ROANES LOZANO, E.</b>			
Presentación del Dr. B. Kutzler .....	77	13	07
Curso de Verano de El Escorial .....	79	17	08
Connotaciones matemáticas de una sentencia de Derecho Laboral .....	89	88	11
Dibujando caleidoscopios con una coreografía de tortugas. (ver también MARTÍNEZ ZARZUELO, ANGÉLICA y ROANES MACÍAS, E.)	99	44	15

<b>AUTORES y Títulos</b>	<b>Boletín, Pág. y año</b>		
<b>ROANES LOZANO, E. y CABEZAS CORCHERO, J. y ORTEGA PULIDO, P. y ROANES MACÍAS, E y ROMO SANTOS, C. y VARA GANUZA, M. DE LA V.</b> Un proyecto para el uso del sistema de cómputo algebraico <i>Maxima</i> en Educación Secundaria .....	76	68	07
<b>ROANES LOZANO, E. y GONZÁLEZ REDONDO, FRANCISCO A.</b> Implementación del sistema de numeración maya en <i>Maple</i> : una experiencia interdisciplinar .....	83	34	09
<b>ROANES LOZANO, E. y HERNANDO, ANTONIO</b> Estimación de la influencia del carácter inconexo de una red de transporte por ferrocarril .....	87	69	11
<b>ROANES LOZANO, E. y LAITA, LUIS y ROANES MACÍAS, E.</b> Un sistema predictivo para la toma de decisiones inspirado por el modelo gravitacional .....	79	43	08
<b>ROANES LOZANO, E. y MARTÍNEZ ZARZUELO, ANGÉLICA y GARCÍA ÁLVAREZ, ALBERTO y ROANES MACÍAS, E.</b> Unas reflexiones sobre el reconocimiento de rutas en mapas ferroviarios y la teoría de grafos .....	78	79	08
<b>ROANES LOZANO, E. y ROANES MACÍAS, E. y RUIZ LOZANO, J.L.</b> Otro modo de presentar la matemática elemental, visualizando y explorando con GeoGebra .....	98	23	14

**ROANES MACÍAS, E.**

Una introducción a la estructura de grupo de tipo finito a partir de unos rosetones grecorromanos .....	87	10	11
Sobre la construcción de configuraciones del Teorema de Napoleón extendido a polígonos de más de tres lados .....	90	36	12
Direcciones de Cavalieri entre dos triángulos .....	92	30	12
La labor de Julio Fernández Biarge en la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas y en su Boletín .....	96	70	14
(ver también ROANES LOZANO, E.)	100	53	15

**ROANES MACÍAS, E. y ROANES LOZANO, E. y FERNÁNDEZ BIARGE, J.**

Extensión natural a 3D del teorema de Pappus y su configuración completa .....	80	38	08
--	----	----	----

**ROANES MACÍAS, E. y ROANES LOZANO, E.**

Determinación de lugares geométricos, vía sintética y computacional, aplicada a lugares de tipo cisoide .....	76	32	07
Dificultades encontradas al demostrar vía algebraica algunos teoremas de geometría euclídea .....	94	55	13
Un método algebraico-computacional para demostración automática en geometría euclídea .....	88	31	11
Recreando con GeoGebra el cálculo del volumen de la esfera ideado por Arquímedes .....	102	62	16
Una lección modélica de D. Pedro Puig Adam: algoritmo manipulativo para la raíz cuadrada .....	100	53	15
Descubrir relaciones entre conceptos básicos de geometría elemental explorando con GeoGebra .....	104	52	17

**RODRÍGUEZ RODRÍGUEZ, ARTURO y RODRÍGUEZ RODRÍGUEZ, M. BELÉN**

Ideales maximales en anillos de polinomios .....	89	34	11
Formas canónicas de extensiones de Galois de grados 3 y 4	90	70	12
Una demostración de la Regla de los Signos de Descartes	91	26	12
El retículo de subextensiones del cuerpo de descomposición del polinomio $t^p - a$ , .....	102	21	16
El Teorema 90 de Hilbert y algunas ecuaciones diofánticas (ver también RODRÍGUEZ RODRÍGUEZ, ARTURO)	101	33	16

**RODRÍGUEZ SOALLEIRO, M<sup>a</sup> DOLORES y SÁNCHEZ RODRÍGUEZ, DIANA**

Actividades saludables para la clase de Matemáticas .....	81	65	09
---	----	----	----

**RODRÍGUEZ, ESTRELLA** (ver NÚÑEZ, JUAN)**RODRÍGUEZ, GERARDO** (ver GARCÍA, ALFONSA)**RODRÍGUEZ, VICTORIA** (ver GARCÍA, ALFONSA)**RODRÍGUEZ-MOLDES REY, COVADONGA**

Descubriendo un tesoro: Las circulares de Puig Adam .....	100	41	15
---	-----	----	----

**ROMERO MÁRQUEZ, JUAN BOSCO**

Problemas de álgebra y teoría de números .....	84	37	10
Algunos límites en Geometría y en Análisis .....	87	54	11

**ROMO SANTOS, M<sup>a</sup> CONCEPCIÓN**

Importancia de la Aritmética Comercial a lo largo de la Historia .....	82	77	09
La Escuela de Traductores de Toledo .....	97	84	14
Sistemas antiguos de numeración .....	99	63	15
El maravilloso mundo de los números .....	93	66	13
Lope de Vega y la Academia de matemáticas de Madrid ... (ver también ROANES LOZANO, E.)	104	93	17

<b>AUTORES y Títulos</b>	<b>Boletín, Pág. y año</b>		
<b>ROSILLO FERNÁNDEZ, NICOLÁS</b>			
Resolviendo un problema geométrico sobre triángulos con la ayuda de un sistema de cómputo algebraico .....	88	78	11
Distintas aproximaciones a un lugar geométrico con Geogebra .....	100	84	15
Una aplicación didáctica: resolver sistemas algebraicos sencillos usando bases de Groebner en GeoGebra .....	101	65	16
<b>RUBIO SEGOVIA, BALDOMERO</b>			
Inundaciones en la isla estrecha: una imagen del conjunto de Cantor .....	82	26	09
<b>RUIZ LOZANO, J.L. (ver ROANES LOZANO, E.)</b>			
<b>SÁNCHEZ, ALMUDENA (ver CORTÉS LÓPEZ, J.C.)</b>			
<b>SÁNCHEZ BENITO, M<sup>a</sup>. MERCEDES</b>			
Desarrollo de competencias básicas a través de las matemáticas .....	81	40	09
<b>SÁNCHEZ GONZÁLEZ, VÍCTOR MANUEL</b>			
Probabilidad condicionada: tratando de atar algunos cabos sueltos .....	92	51	12
<b>SÁNCHEZ RODRÍGUEZ, DIANA (ver RODRÍGUEZ SOALLEIRO, M<sup>a</sup> DOLORES)</b>			
<b>SÁNCHEZ SÁNCHEZ, JUAN MIGUEL</b>			
Julio Fernández Biarge, “Emérito .....	96	66	14
<b>SCHUMANN, HEINZ</b>			
Interactive Geometric Constructions in the Virtual Space...	86	12	10
<b>SILVERO, MARITHANIA (ver NÚÑEZ, JUAN)</b>			
<b>SOLS, IGNACIO</b>			
El Último de los vivos .....	77	10	07
Sancho, palabras verdaderas .....	90	12	12
<b>SORDO JUANENA, JOSÉ MARÍA</b>			
Presentación del Profesor Bruno D’Amore .....	78	9	08

**SOUTO IGLESIAS, ANTONIO**

Software libre y propietario en el contexto de la Educación Superior en España: elementos para un debate .....	97	32	14
(ver también GONZÁLEZ, LEO M.)			

**TARRÉS FREIXENET, JUAN**

La escalera que se desliza .....	85	25	10
Joaquín Arregui, Maestro y Amigo .....	91	7	12
Una bagatela matemática: divagaciones sobre el cálculo de la raíz cuadrada .....	93	74	13

**TRECEÑO LOSADA, FRANCISCO**

Figuras geométricas en madera: curvas, cónicas y cono de Apolonio .....	87	85	11
---	----	----	----

**VALCARCE, JOSÉ LUIS** (ver BOTANA, FRANCISCO y ver también LOSADA, RAFAEL)**VARA GANUZA, M.** (ver ROANES LOZANO, E.)**VIVIENTE MATEU, JOSÉ LUIS**

In memoriam de un querido amigo y colega .....	93	62	13
--	----	----	----

## Reseña de libros

**Palabras con las cinco vocales (sin repetición de vocal). Matemáticas y juegos.** *Baldomero Rubio*. ISBN: 978-84-9011-873-3. Depósito Legal: M-16914-2017. Páginas: 142. Ed. Visión Libros. c/. San Ildefonso, nº 17 Madrid 28012. Tel: 913117696. Web: [www.visionlibros.com](http://www.visionlibros.com)

El autor, conocido y estimado por muchas generaciones de matemáticos formados en la Univ. Complutense de Madrid, fue Decano y posteriormente Catedrático Emérito de Análisis Matemático en la Facultad de Ciencias Matemáticas de dicha Universidad.

Este nuevo libro, como otros del autor, es absolutamente original. Inicialmente, el material didáctico utilizado son las palabras que contienen las cinco vocales, sin repetición de vocal, de modo que cada palabra considerada contiene una sola vez cada una de las cinco vocales, como, por ejemplo:

*conseguirán      educación      estudiando      concienzuda*

La primera labor consistió en conseguir una buena colección de palabras que verificaran las condiciones antes mencionadas, sin utilizar diccionario.

La colección de 590 palabras elegidas se presenta en el capítulo 3. Se comienza dividiendo dicha colección en cinco *tramos*. En cada tramo están las palabras cuya vocal inicial de su base es la misma.

A su vez, cada tramo se parte en cuatro *bloques* atendiendo a la última vocal de su base: las palabras de cada uno de los veinte bloques se caracterizan por coincidir sus bases en la primera y la quinta posición. Ejemplo: en el bloque e-o están las palabras cuyas bases empiezan por e y terminan con o.

Finalmente, cada bloque admite seis *bases* distintas, pues al estar fijadas en sus bases las vocales inicial y final, las tres vocales intermedias se pueden ordenar de  $3!$  maneras distintas.

En cada uno de los subconjuntos considerados de la colección total se presentan las correspondientes palabras en el orden lexicográfico (como en un diccionario).

Naturalmente aparecen así bases muy numerosas junto a otras que pueden quedar vacías, a partir de la colección de palabras con las que se está operando.

A continuación se introducen los conceptos de relación de orden y relación de equivalencia, subyacentes en todo el proceso anteriormente descrito. A partir de

las experiencias anteriores, se presentan situaciones conducentes a abstraer ideas básicas de combinatoria (sin repetición) y números combinatorios.

Finalmente se proponen varios juegos y pasatiempos relacionados con las experiencias anteriores. En una de las más curiosas, partiendo de la descomposición factorial de un número natural,  $n$ , se disponen sus divisores en filas y columnas, de modo que al pasar de una posición a otra contigua (fila o columna) suponga multiplicar (o dividir) por solo uno de los divisores primos de  $n$ . Al considerar los posibles caminos que pasan, por ejemplo del número 1 al  $2016=2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ , se llega a la conclusión de que el número de tales caminos resulta ser  $(5+2+1)! / (5!2!1!)$ , llegándose a generalizar este resultado.

El libro está dedicado a dos chicos, Miguel y Lucía, del grupo de personas con los que experimentó contenidos del libro y a los cuales ya dedicó otro libro reseñado en el nº 95 de nuestro Boletín.

**Eugenio Roanes Macías**

**Nicolás de Oresme y la ciencia en el siglo de la peste.** *Pablo Martín Prieto.* Editorial Nivola. Colección: La matemática en sus personajes. 106 páginas (2016). ISBN: 978-84-15913-25-2.

Sobre la Edad Media existen muchos prejuicios, pero el Renacimiento no habría tenido lugar sin la labor de muchos estudiosos medievales como Jordano Nemorario, Campanus de Novara, Tomás Bradwardine y Nicolás de Oresme. Las contribuciones matemáticas y físicas del último se consideran las más originales de su época y le conceden un lugar de honor en la historia de la ciencia.

El libro objeto de esta reseña tiene ocho capítulos. El 1º es una introducción al siglo XIV, el 2º una biografía de Oresme y el 3º una valoración global de su obra. En el capítulo 4º se estudian sus aportaciones sobre los exponentes y las relaciones entre los que son conmensurables y los que no. El 5º trata sobre la oposición de Oresme hacia la astrología y a la idea aristotélica de ser el centro del universo el “lugar natural” de la tierra. El capítulo 6º habla de física y de la teoría del *impetus*, tema en su tiempo muy candente. El 7º describe un método creado por Oresme para representar magnitudes que prefigura la geometría analítica y de sus descubrimientos sobre las series infinitas y la serie armónica. El capítulo 8º trata sobre las ideas de Oresme acerca de la teoría monetaria.

El autor de este libro, Pablo Martín Prieto es profesor de Historia Medieval en la Universidad Complutense, y autor de *Las matemáticas en la Edad Media. Una historia de las matemáticas en la Edad Media occidental* (editorial La Ergástula), obra muy recomendable.

Pero sobre todo ello hay que añadir algo fundamental: es un profesor de las llamadas Humanidades (como si la física o las matemáticas hubieran sido creadas por marcianos) que se atreve con temas de ciencias, y lo hace además con una competencia no frecuente entre los hombres de letras.

Estos estudiosos son quienes mantienen el frágil puente que une dos mundos que, lamentablemente, están cada vez más lejos. Y para que la distancia no se haga infranqueable, ha de cundir el ejemplo de Martín Prieto, y que más profesores de uno y otro campo se animen a entrar en el campo contrario. Así se harán posibles unos encuentros muy fructíferos que a nadie perjudican y benefician a todos.

**Ricardo Moreno Castillo**

## Instrucciones para el envío de originales, para su publicación en el Boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, congresos, etc., deben enviarse *en formato electrónico*, del modo especificado a continuación.

Formato: Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTeX.

### En caso de usar Word

El formato de texto debe ser 17 cm (alto) x 12.8 cm (ancho). En cuanto al Diseño de página, en Configurar Página, elegir estos márgenes: superior 3 cm; inferior 9,7 cm; izquierdo 4,1 cm; derecho 4,1 cm; encuadernación 0 cm. Usar estilo de letra Times New Roman con "Interlineado sencillo" (en vez de múltiple).

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos en el estilo de letra usual; debajo el nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en estilo de letra negrita; debajo la referencia de su departamento o institución de trabajo en 11 puntos en el estilo de letra usual; y debajo la dirección de correo electrónico en estilo de letra Courier New en 11 puntos.

A continuación la palabra Abstract, en minúsculas de 12 puntos en estilo de letra negrita y debajo su contenido en inglés el tamaño de letra de texto 11 puntos en estilo itálica o cursiva, estrechado a ambos lados aproximadamente 1 cm.

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto. La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como en estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

### En caso de usar Latex

Usar estilo "article" en 11 puntos, eligiendo: *textheight=17cm*, *textwidth=12.8cm* y *hoffset=0.3cm*. Por lo demás, tener en cuenta lo indicado para usuarios de Word. Para la dirección de correo electrónico usar el tipo de letra `\texttt`.

Si se usan paquetes específicos de Latex distintos de los usuales, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

### Respecto de las Figuras

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser impresas. Las figuras deben llevar debajo numeración (Figura 1, Figura 2, ...), para referirse a ellas en el texto. No debe escribirse texto a ninguno de los lados de la figura, ni a la izquierda ni a la derecha (es decir, las figuras no deben intercalarse en el texto).

### Reseñas de libros

Las reseñas de libros, se enviarán en el formato en que aparecen en este número del Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

### **Envío de originales**

Se enviarán en formato electrónico, en Word o Latex, a nuestra cuenta de la Sociedad: [puigadam@mat.ucm.es](mailto:puigadam@mat.ucm.es)

### **Selección de originales**

Serán evaluados por miembros del Comité Editorial (ver págs 4 de este número del Boletín), que decidirán sobre la originalidad, calidad y ajuste a la línea general del Boletín (y, en casos especiales, por revisores externos). Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que hagan modificaciones en su contenido.

## Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de diez euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son del 39 en adelante.

El importe puede ser abonado mediante transferencia a la nueva cuenta de la Sociedad, ES58 3025 0006 2114 3326 8241, domiciliada en la entidad bancaria *Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28003* (o bien mediante un cheque a nombre de *la Sociedad*).

La carta o mensaje de petición se enviará a la Sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En ella se indicará el número o números a adquirir, incluyendo la *dirección* a donde se han de enviar y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia*.