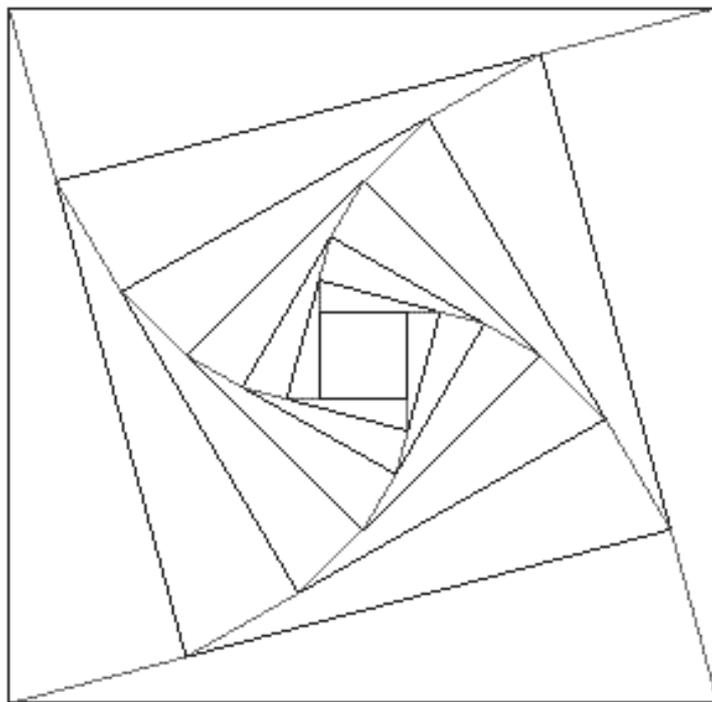


**SOCIEDAD «PUIG ADAM»  
DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS**



**BOLETÍN N.º 103  
ABRIL DE 2017**

## ÍNDICE

	<i>Págs.</i>
Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas .....	2
Edición del Boletín y Comité Editorial .....	4
Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2017 .....	6
Convocatoria del XXXV Concurso de Resolución de Problemas .....	7
XVI Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid, por <i>Joaquín Hernández y Juan Jesús Donaire</i> .....	8
Fallecimiento del Prof. Fco. Javier Peralta Coronado .....	15
Número especial dedicado al Prof. Javier Peralta .....	16
Fallecimiento del Prof. Luis Laíta .....	16
El Problema de Castillon y la Recta Proyectiva Real, por <i>Julio Castiñeira</i> .....	17
Ecuaciones algebraicas y soluciones racionales, por <i>Jesús Álvarez Mesa</i> .....	41
Aleatorizando el modelo de crecimiento malthusiano, por <i>J.C. Cortés López, E. García Moreno y A. Navarro Quiles</i> .....	52
Determinación de la “circunferencia de los 9 puntos” mediante relaciones cuadrangulares cíclicas entre ellos, por <i>José Alberto García Suárez</i> .....	66
Sobre el cuadrilátero de superficie máxima, por <i>Ricardo Moreno Castillo</i> .....	69
¿Comprenden los alumnos los enunciados de los problemas? por <i>Sergio Falcón Santana, Pedro Medina Rodríguez y Ángel Plaza de la Hoz</i> .....	72
Reseña de libros .....	90
Instrucciones para el envío de originales .....	94
Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín .....	95
Boletín de inscripción en la Sociedad “Puig Adam” .....	96

## **SOCIEDAD “PUIG ADAM” DE PROFESORES DE MATEMATICAS**

SEDE: Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra) Despacho 3215  
Rector Royo Villanova, s/n 28040 – Madrid  
Correo electrónico: [puigadam@mat.ucm.es](mailto:puigadam@mat.ucm.es)

---

### **Junta Directiva de la Sociedad “Puig Adam”**

*Presidente:* José Javier Etayo Gordejuela

*Vicepresidente:*

Eugenio Roanes Macías

*Vocales:*

Enrique Rubiales Camino (Relaciones Institucionales)

Eugenio Roanes Lozano (Gestión de publicaciones)

Joaquín Hernández Gómez (Actividades y concursos)

Juan Jesús Donaire Moreno (Redacción de Publicaciones)

*Secretario:* José María Sordo Juanena

*Vicesecretaria:* María Gaspar Alonso-Vega

*Tesorero:* José Manuel Gamboa Mutuberría

*Bibliotecario:* Antonio Hernando Esteban

---

### **Boletín de la Sociedad “Puig Adam”**

ISSN: 1135-0261 Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).

Telf.: 91 611 59 94 – [loureiro@graficasloureiro.es](mailto:loureiro@graficasloureiro.es)

El Boletín se distribuye gratuitamente a nuestros socios. Las instrucciones para hacerse socio aparecen en la página 96 del mismo.

Las instrucciones para publicar en el Boletín aparecen en la página 94 del mismo. Las propuestas de publicación de artículos, reseñas, etc, deben hacerse a través del correo electrónico de la Sociedad: [puigadam@mat.ucm.es](mailto:puigadam@mat.ucm.es)

En la portada aparece la figura adoptada como logotipo de la Sociedad "Puig Adam". Se trata de la figura de portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado “La Matemática y su enseñanza actual”.

## **Página web de la Sociedad**

<http://www.sociedadpuigadam.es>

### Contenido:

Nuestra nueva web (aun en preparación) contiene varias secciones: *Historia* de la Sociedad, *Boletín* de la Sociedad y *Concursos* de Problemas (el Concurso “Puig Adam” y otros concursos en que colaboran miembros de nuestra Junta Directiva).

### Sobre la publicación del Boletín en nuestra web:

Nuestro Boletín se ha publicado ininterrumpidamente desde 1983 en que se fundó nuestra Sociedad. Muchos de los números antiguos están agotados y, con frecuencia se nos pide información sobre artículos publicados en ellos. La incomodidad de copiar reiteradamente dichos artículos por escaneo y de enviarlos nos ha llevado a adoptar la solución indicada a continuación.

Teniendo en cuenta la información solicitada a la Sociedad y, particularmente a algunos de nuestros socios, por parte de profesores y entidades (españolas y también de países sudamericanos) sobre artículos aparecidos en nuestro Boletín, varios de nuestros socios han propuesto incorporar parcialmente el Boletín a nuestra web, al igual que se está haciendo en otras Sociedades Matemáticas que publican revistas.

En respuesta a esta propuesta, se ha acordado que sean colgados en nuestra web en formato pdf los contenidos íntegros de los números de nuestro Boletín con más de cinco años de antigüedad y el índice de contenidos de los números publicados en los cinco últimos años.

Ya se ha comenzado a realizar esa pesada tarea, comenzando desde los últimos números hacia atrás. Esperamos que, cuando este número sea distribuido, ya estén colgados en la web los contenidos íntegros de los números correspondientes a los años 2001 al 2011, así como los índices de los contenidos de estos cinco últimos años. Y, poco a poco (pues esta labor es pesada), se irán incorporando números con mayor antigüedad.

### Mantenedoras de la página web:

Beatriz Barrero Díaz y Carolina Bravo Sanz, bajo la dirección del Secretario de nuestra Sociedad.

## **Edición del Boletín**

### *Comité Editorial*

Gabriel Aguilera Venegas, Universidad de Málaga  
José Antonio Alonso, Universidad de Sevilla  
Francisco Baena Muñoz, Profesor de Instituto  
Bärbel Barzel, University of Duisburg-Essen (Alemania)  
Michel Beaudin, École de Technologie Supérieure, Montreal (Canadá)  
Josef Böhm, Profesor de Instituto (Austria)  
Joaquín Borrego, Universidad de Sevilla  
Francisco Botana, Universidad de Vigo  
Justo Cabezas, Profesor de Instituto y Univ. de Extremadura  
Agustín Carrillo de Albornoz Torres, Profesor de Instituto y Univ. de Córdoba  
Juan Carlos Cortés López, Universidad Politécnica de Valencia  
Juan Jesús Donaire Moreno, Profesor del Instituto “Ramiro de Maeztu”, Madrid  
Fernando Etayo Gordejuela, Universidad de Cantabria  
José Javier Etayo Gordejuela, Universidad Complutense de Madrid  
Jose Luis Galán García, Universidad de Málaga  
José Manuel Gamboa, Universidad Complutense de Madrid  
María Gaspar Alonso-Vega, Profesora de Instituto y Univ. Complutense Madrid  
Joaquín Hernández Gómez, Profesor de Instituto y Univ. Complutense Madrid  
Gregorio Hernández Peñalver, Universidad Politécnica de Madrid  
Antonio Hernando Esteban, Universidad Politécnica de Madrid  
David J. Jeffrey, University of Western Ontario (Canadá)  
Nuria Joglar Prieto, Universidad Complutense de Madrid  
Wolfram Koepf, Universität Kassel (Alemania)  
Zoltán Kovács, The Private University College of Education, Linz (Austria)  
Ricardo Luengo González, Universidad de Extremadura  
Edgar Martínez Moro, Universidad de Valladolid  
Ricardo Moreno Castillo, Profesor de Instituto y Univ. Complutense Madrid  
Aleksandr Myllari, Åbo Akademi University (Finlandia)  
John Olive, The University of Georgia (USA)  
Pavel Pech, University of South Bohemia (República Checa)

Pedro Quaresma, Universidade de Coimbra (Portugal)  
Antonio Quesada, Akron University (USA)  
Tomás Recio, Universidad de Cantabria  
Luis Rico, Universidad de Granada  
Eugenio Roanes Lozano, Universidad Complutense de Madrid  
Eugenio Roanes Macías, Universidad Complutense de Madrid  
Ana Romero, Universidad de La Rioja  
Enrique Rubiales Camino, Profesor de Instituto y Univ. Complutense Madrid  
Julio Rubio, Universidad de La Rioja  
José Luis Ruiz Reina, Universidad de Sevilla  
Eduardo Sáenz de Cabezón, Universidad de La Rioja  
Fernando Sánchez Fernández, Universidad de Extremadura  
Tomás Sánchez Giralda, Universidad de Valladolid  
José María Sordo Juanena, Universidad Complutense de Madrid  
Jon R. Star, Harvard Graduate School of Education (USA)  
Stanly Steinberg, University of New Mexico (USA)  
Elena Varbanova, Technical University of Sofia (Bulgaria)  
Nikolay N. Vassiliev, Russian Academy of Sciences (Rusia)  
Michael J. Wester, Cotopaxi and University of New Mexico (USA)

### Edición de este número 103

La coordinación de la edición de este número 103 ha estado a cargo de Eugenio Roanes Macías.

### Recensiones de los artículos

- 1) Recensiones de los artículos publicados en el Boletín aparecen en “MathEduc”, lo que antes era Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM).
- 2) El Boletín aparece también en la base de datos de publicaciones periódicas UlrichsWeb.
- 3) Los abstracts de los artículos vuelven a estar accesibles en el portal Dialnet.

## Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2017

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas correspondiente al año 2017 para el *sábado día 22 de abril de 2017*, en los locales de la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, Ciudad Universitaria, a las 11:30 en primera convocatoria y a las 12:00 en segunda, con el siguiente:

### ORDEN DEL DIA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.
2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.
3. Informe del Tesorero.  
Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Elección de nuevos cargos directivos.
5. Asuntos de trámite.
6. Ruegos y preguntas.

### Cuotas del año 2017 y siguientes

Se recuerda a nuestros socios que en la Asamblea General Ordinaria de 2014 se aprobó que los recibos anuales sean pasados al cobro en el mes de enero de cada año (véase Boletín nº 97), ya que hemos de pagar a primeros de año la cuota a la Federación de Sociedades Matemáticas, por la que recibimos la revista SUMA.

# XXXV Concurso de Resolución de Problemas convocado por

## la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas

(con la colaboración del Colegio de Doctores y  
Licenciados en Filosofía y Letras y en Ciencias)

### BASES DEL CONCURSO

**Primera:** Los alumnos podrán participar en el Concurso en tres niveles:

- a) *Primer nivel:* alumnos de 3º de E.S.O.
- b) *Segundo nivel:* alumnos de 4º de E.S.O.
- c) *Tercer nivel:* alumnos de 1º Bachillerato

**Segunda:** Las pruebas consistirán en la resolución de Problemas de Matemáticas (los mismos para todos los concursantes de un mismo nivel) y se realizarán en la mañana del *sábado 3 de junio del 2017* a partir de las 10 horas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

**Tercera:** A los mejores de cada nivel, se concederán diplomas y premios.

**Cuarta:** Los Centros que deseen presentar alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del día 18 de Mayo del 2017, dirigiéndose por correo electrónico, carta o fax al presidente de nuestra Sociedad:

*Prof. Javier Etayo Gordejuela*  
*Departamento de Algebra*  
*Facultad de Ciencias Matemáticas*  
*28040-Madrid Fax: 91 394 4662*  
*Correo electrónico: jetayo@mat.ucm.es*

En la preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

**Quinta:** Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 2016-2017.

## XVI Concurso Intercentros

Como todos los años y a pesar de las dificultades de financiación para los premios, la Sociedad Puig Adam, con la colaboración de unos animosos profesores miembros de la misma, sigue patrocinando este Concurso Intercentros junto con el tradicional de la Sociedad que tiene lugar en el mes de junio.

En esta ocasión se han superado los 76 equipos del año pasado y hemos llegado a 83 correspondientes a 50 centros de enseñanza, tanto públicos como privados.

Como cada equipo consta de seis estudiantes, hubo un total de 498 estudiantes junto con muchos de sus profesores y algunos padres en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid en la mañana del sábado 19 de noviembre.

Muchos de estos estudiantes, asiduos a los concursos, participaron a la semana siguiente en la LIII Olimpiada Matemática en la fase local de Madrid y esperamos que también participen durante el mes de junio en el concurso Puig Adam.

Incluimos a continuación la relación de los centros ganadores y todos los problemas propuestos en esta ocasión. Las soluciones pueden encontrarse buscando en Internet en las páginas correspondientes a los Concursos de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas.

### Prueba por equipos (45 minutos) 1º y 2º de E.S.O.

1. El cuadrado de la Figura 1 es mágico respecto del producto, es decir, el producto de los tres números de cada fila, de cada columna y de cada diagonal es el mismo. Si en ninguna casilla hay un cero, complétalo.

	32	
16	8	

Figura 1

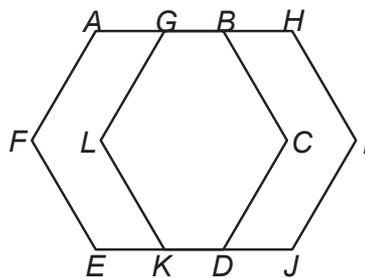


Figura 2

2. Los hexágonos regulares  $ABCDEF$  y  $GHIJKL$  de la Figura 2 son iguales, siendo la longitud de cada lado 24 cm. Estos hexágonos se solapan pues  $G$  está en el lado  $AB$ ,  $B$  está en  $GH$ ,  $K$  en  $DE$  y  $D$  en  $JK$ . Si el área del hexágono  $GBCDKL$  es la mitad de la del  $ABCDEF$ , calcula la longitud  $FL$ .

3. Escribe todas las parejas de números de dos cifras, de la forma  $[ab]$  y  $[ac]$  tales que la suma de sus cuadrados sea 1313.

3° y 4° de E.S.O.

1. Completa el “crucinúmeros” de la Figura 3. Cada uno de los tres números en horizontal es un número de cuatro cifras (Ninguno empieza por cero).

1H: Cubo de la suma de las cifras de 1V

2H: Sus cifras, de izquierda a derecha, están en orden estrictamente decreciente

3H: Sus cifras, de izquierda a derecha, están en orden estrictamente decreciente

1V: Cuarta potencia de un número entero

2V: Cuadrado perfecto

3V: Sus cifras están en progresión geométrica

4V: Uno de sus factores primos es un número de dos cifras.

	1V	2V	3V	4V
1H				
2H				
3H				

Figura 3

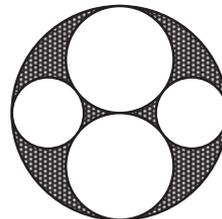


Figura 4

2. En la Figura 4 se observan cinco circunferencias tangentes entre sí: dos pequeñas iguales, dos medianas también iguales y una grande. Si el radio de la circunferencia grande es  $\frac{30}{\sqrt{\pi}}$ , calcula el área sombreada.

3. Encuentra el mayor número de cuatro cifras que es igual a la suma de los factoriales de sus centenas, decenas y unidades.

### Bachillerato

1. Encuentra todos los números primos  $p$  para los que  $p^2 + 21p - 1$  es también un número primo.
2. La función  $f(x) = \frac{x^4 + 3x^3 - 4x^2}{x^2 + 4x - 4}$  es negativa en dos intervalos de  $\mathbb{R}$ . Calcula la suma de las longitudes de estos intervalos.
3. Calcula el menor entero positivo  $t$  que verifica la ecuación  $2^{13} + 2^{10} + 2^x = t^2$  en la que  $x$  es un entero positivo.

### **Prueba Individual (90 minutos) 1º y 2º de E.S.O.**

1. En la Figura 5 se observan dos triángulos rectángulos isósceles iguales,  $ABC$  y  $XYZ$  y dos cuadrados  $KLMB$  y  $PQRS$ . Si el área del cuadrado  $KLMB$  es 189, ¿cuál es el área del cuadrado  $PQRS$ ?

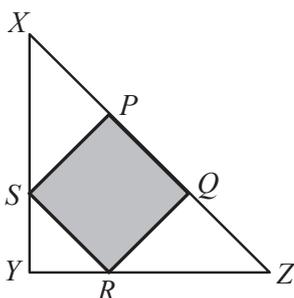
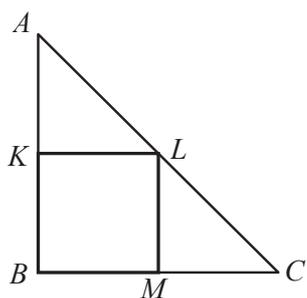


Figura 5

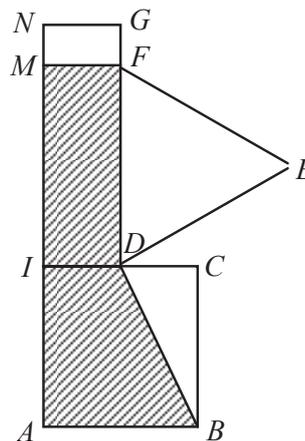


Figura 6

2. En un edificio de apartamentos la mitad de las ventanas tienen cortinas, la cuarta parte de las ventanas tienen macetas con flores y la sexta parte tienen cortinas y macetas con flores. Hay 375 ventanas que no tienen ni cortinas ni macetas con flores. Por otra parte sabemos que un quinto de los apartamentos tienen 5 ventanas, dos quintos de los apartamentos tienen 3 ventanas y el resto tienen 2 ventanas. ¿Cuántos apartamentos tiene el edificio?
3. ¿Cuántos números, de los cien primeros enteros positivos, verifican que sus inversos tienen un desarrollo decimal periódico?

4. El rectángulo  $DGNI$ , el cuadrado  $ABCI$  y el triángulo equilátero  $DEF$  de la Figura 6 tienen 24 cm de perímetro cada uno de ellos.  $D$  es el punto medio de  $IC$  y  $MF$  es paralelo a  $NG$ . Se pregunta:

i ¿Cuál es el área de la figura sombreada de vértices  $ABDFM$ ?

ii ¿Cuál es el perímetro de la figura de vértices  $ABCDEFNG$ ?

### 3º y 4º de E.S.O.

1. ¿Cuántos enteros positivos, menores que 2016, pueden escribirse como diferencia de dos cuadrados perfectos?

2. En un hexágono regular de lado 1 consideramos los veinte triángulos cuyos vértices son vértices del hexágono. Calcula la media de las áreas de estos veinte triángulos.

3. Un fabricante de tres productos, de precios unitarios 50, 65 y 70 €, recibe un pedido de 100 unidades por un total de 6850 € con la condición de que envíe el máximo número posible del producto más caro. ¿Cuántas unidades de cada producto debe enviar?

4. Los cinco hermanos Pérez se llevan muy bien y han pasado un verano bastante entretenido. Cada uno de los seis días de la semana, de lunes a sábado, cuatro de ellos hacían una determinada actividad siendo 38, 35, 36, 36, 38 y 39 la suma de las edades de los cuatro. Si ninguno estuvo los seis días, averigua las edades de cada uno de los cinco.

### Bachillerato

1. Demuestra que en cualquier triángulo rectángulo la suma de los inversos de las longitudes de los catetos es igual al inverso de la distancia del pie de la bisectriz del ángulo recto a cualquiera de los catetos.

2. Las ecuaciones  $x^3 + Ax + 10 = 0$  y  $x^3 + Bx^2 + 50 = 0$  tienen dos raíces comunes. Calcula el producto de estas dos raíces comunes.

3. En una reunión de afectados por un accidente nuclear, cada uno de los asistentes tiene 3, 4, 5, 6 ó 7 dedos en cada mano, siendo

siendo 
$$p(k) = \frac{2^{2-|5-k|}}{10}$$

la probabilidad de tener  $k$  dedos en una mano. Si el número de dedos en la mano

izquierda es independiente del número de dedos en la mano derecha, calcula la probabilidad de que un asistente elegido al azar tenga al menos 10 dedos entre ambas manos.

4. ¿Cuántos enteros no negativos  $x$  verifican la ecuación  $\left[\frac{x}{44}\right] = \left[\frac{x}{45}\right]$ ? (Recuerda:  $[a]$  es la parte entera de  $a$ , es decir, el mayor entero menor o igual que  $a$ )

**Prueba por relevos (60 minutos) 1º y 2º de ESO**

**1A.** Los puntos  $P, Q, R$  y  $S$  están alineados en ese orden. Si  $PR = 15$  cm,  $QS = 12$  cm y  $PS = 20$  cm, calcula, en cm, la distancia entre  $Q$  y  $R$ . *(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)*

**1B.** Sea "T" la respuesta del problema 2B. En la Figura 7 se observan tres cuadrados iguales de lado  $T/5$  cm y tal que el punto medio del lado inferior del cuadrado de arriba es un vértice de los de abajo. ¿Cuántos  $\text{cm}^2$  tiene el área sombreada? *(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)*

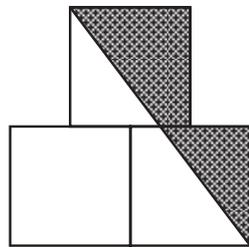


Figura 7

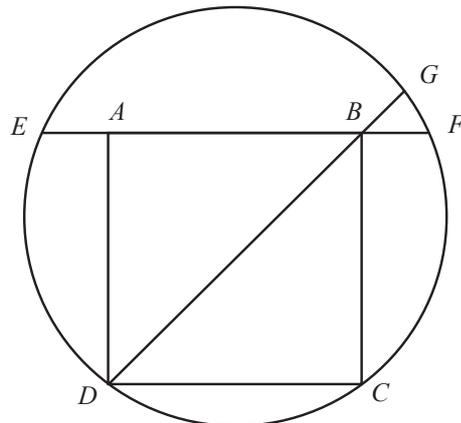


Figura 8

**1C.** Sea "T" la respuesta del problema 2C. Isa y Alicia parten al mismo tiempo de dos puntos diametralmente opuestos de una pista circular y corren a distintas velocidades y en sentido contrario. Cuando se encuentran la primera vez Alicia ha recorrido  $T$  metros y, desde ese momento y hasta que se encuentran por segunda vez, Isa ha recorrido  $3T/2$  metros. Si sus velocidades son constantes, ¿cuál es la longitud, en metros, de la pista?

### 3º y 4º de ESO

**2A.** Sea "T" la respuesta del problema 3A. En la Figura 8 observas un cuadrado  $ABCD$ , de lado  $T$ , dos de cuyos vértices,  $C$  y  $D$ , están en una circunferencia. Si la cuerda  $EF$  tiene longitud 98 y la cuerda  $DG$  pasa por  $B$ , calcula  $BG$ . *(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)*

**2B.** Hoy es el cumpleaños de tres chicos cuya suma de edades es 44 años. ¿Cuál será la suma de sus edades la próxima vez que dicha suma vuelva a ser un número con dos cifras iguales? *(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO).*

**2C.** Sea "T" la respuesta del problema 3C. Calcula el área del trapecio limitado por los ejes de coordenadas y las rectas  $x + y = T$ ,  $x + y = T - 10$ . *(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)*

### Bachillerato

**3A.** Sea "T" la respuesta del problema 1A. Considera los diez enteros positivos más pequeños que puedas, de forma que haya exactamente  $T$  divisibles entre  $T$ , y exactamente  $T - 2$  divisibles entre  $T - 2$ . ¿Cuál es el mayor de los diez números? *(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)*

**3B.** Sea "T" la respuesta del problema 1B y  $k$  la suma de las cifras de  $T$ . En un triángulo rectángulo la longitud de la hipotenusa es  $k$  veces la longitud de la altura sobre ella. Calcula el cociente entre las longitudes del mayor y el menor de los segmentos en que dicha altura divide a la hipotenusa. *(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)*

**3C.** Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son enteros positivos con  $a + b + c = 7$ , calcula el menor valor posible para  $a^2 + b^2 + c^2$ . *(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)*

### **Centros ganadores**

1. *Colegio Alemán de Madrid (Equipo A)*
2. *IES Fortuny*
3. *Colegio Alemán de Madrid (Equipo B)*

## **Estudiantes ganadores**

### **Nivel I (1º, 2º ESO)**

1. *Jimena Lozano Simón* (Colegio Alemán)
2. *Pablo Ávila Verdú* (Colegio Obispo Perelló)

### **Nivel II (3º, 4º ESO)**

1. *Pablo Soto Martín* (IES José Luis Sampedro)
2. *Fabián Arnold* (Colegio Alemán)

### **Nivel III (1º, 2º Bachillerato)**

1. *Pablo Álvarez Domínguez* (IES Fortuny)
2. *Adrián Pérez Peinador* (Colegio Corazón de María)

## **Relación de los 10 centros con mayor puntuación**

1. *Colegio Alemán de Madrid A* 40,5
2. *IES Fortuny A* 32,9
3. *Colegio Alemán de Madrid B* 31,7
4. *Colegio Fray Luis de León A* 30,3
5. *IES José Luis Sampedro A* 29,9
6. *IES Ramiro de Maeztu B* 29,5
6. *Colegio San Agustín A* 29,5
8. *Colegio San Agustín B* 27,8
9. *IES Burgo de las Rozas B* 27,2
10. *IES Ramiro de Maeztu A* 27,1
10. *Colegio San José del Parque A* 27,1

Y, como siempre, enhorabuena a todos y un agradecimiento especial a los profesores que se preocupan de preparar y seleccionar a los alumnos de sus centros. Con su ayuda hemos llegado hasta aquí y con su ayuda seguiremos muchos años.

**Joaquín Hernández Gómez**  
**Juan Jesús Donaire Moreno**

## Fallecimiento del Prof. Fco. Javier Peralta Coronado (Vicepresidente de nuestra Sociedad)

Con profundo pesar, comunicamos a nuestros socios y lectores el repentino fallecimiento el pasado mes de diciembre de nuestro querido compañero el Profesor Francisco Javier Peralta Coronado.

Licenciado en CC. Matemáticas por la Universidad Complutense en 1972, fue inicialmente Profesor Ayudante en la misma. Desde 1977 fue Catedrático de Enseñanza Media, lo que compatibilizó como Profesor de Metodología de la Matemática en la Facultad de Matemáticas de la UCM.

Realizó su Tesis Doctoral en Geometría Diferencial, bajo la dirección del Prof. D. Javier Etayo Miqueo (que fue Presidente de nuestra Sociedad).

En 1991 obtuvo plaza de Catedrático de Escuela Universitaria, pasando posteriormente a Profesor Titular de Universidad de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad Autónoma de Madrid, hasta su prematuro fallecimiento.

Durante un tiempo ocupó cargos directivos en el Colegio Oficial de Doctores y Licenciados de Madrid y ha colaborado durante muchos años en nuestra Sociedad, siendo autor de varios artículos publicados en nuestro Boletín. En la actualidad era Vicepresidente de nuestra Sociedad.

Desarrolló intensa actividad en varios campos relacionados con las matemáticas, como son la Historia de la Matemática Española, las relaciones entre las matemáticas y el arte, la literatura y la música.

Fruto de esas actividades fueron numerosas publicaciones, tanto artículos como libros. Varios de ellos han sido publicados en nuestro Boletín, donde también han aparecido reseñados varios de sus libros, entre ellos, *El rostro humano de las matemáticas* y *Las mates en verso*, publicados por Editorial Nivola.

En relación con la música, recordemos sus *Coplas a la Historia de la Matemática* (Boletín nº 96), composición para orquesta y cuarteto vocal con texto de J. Peralta y música del Profesor Enrique Muñoz Rubio, director de la Orquesta y Coro de la UAM.

En la actualidad estaba dirigiendo varias Tesis Doctorales. Una de ellas a su alumno chino Di Yu, con el que había escrito un artículo sobre *La Enseñanza del ábaco en la Escuela China*, que aparecerá en el próximo número del Boletín.

Descanse en paz.

**La Junta Directiva**

## Número especial dedicado al Prof. Javier Peralta

A petición de muchos socios y amigos, está previsto proponer en nuestra próxima Asamblea de abril de 2017 la dedicación al Prof. Javier Peralta de un número especial de nuestro Boletín, invitando a presentar artículos a cuantos compañeros, alumnos y amigos lo deseen. Dicho número especial está previsto que sea el nº 104, correspondiente a Octubre del presente año.

Las normas de presentación serán las habituales del Boletín, que aparecen en la página 94 de este número. Los artículos serán revisados, según las normas usuales de nuestro Boletín. La fecha límite de envío de trabajos será el 10 de septiembre de 2017.

**La Junta Directiva**

## Fallecimiento del Prof. Luis Laíta

Cuando estábamos cerrando este número del Boletín, hemos recibido la triste noticia del fallecimiento del Profesor Luis Laíta, miembro de nuestra Sociedad y coautor de varios artículos publicados en nuestro Boletín, en los números 39, 44, 63, 65, 74 y 87.

El Profesor Laíta realizó sus estudios de Licenciatura en la UCM y después de bastantes años de profesor en EEUU, fue sucesivamente catedrático de Álgebra, de Lógica Matemática y de Inteligencia Artificial en las Universidades de Sevilla, Complutense de Madrid y Politécnica de Madrid.

El Profesor Laíta creó Escuela, siendo no pocos los profesores de las disciplinas antes mencionadas, que se formaron a su lado, muy especialmente en Lógica e Inteligencia Artificial. Su carácter afable y bondadoso le hizo ser muy querido por todos ellos.

Descanse en paz.

**La Junta Directiva**

# Castillon Problem and the Completed Real Line

## El Problema de Castillon y la Recta Proyectiva Real

**Julio Castiñeira Merino**  
juliocmrr@gmail.com

### Resumen

*This paper shows the geometry of the completed real line and its projective transformations. We use these facts for solving Castillon Problem and its generalizations. Moreover, we simplify the method for solving Pappus Problem.*

A mis queridos nietos:  
Santiago, Gonzalo, Nicolás y Owen.

## 1. El Problema de Castillon

El problema de Castillon consiste en construir un triángulo inscrito  $\triangle EFG$  en una circunferencia dada, cuyos lados o sus prolongaciones pasen por tres puntos dados  $A$ ,  $B$  y  $C$  [7].

Este problema fue propuesto por Cramer en 1742 a su amigo Giovanni Francesco Salvemini, más conocido como Castillon por el pueblo en que nació. Castillon lo resolvió en 1776 muchos años después de la muerte de Cramer. Durante años ha sido un quebradero de cabeza para muchos matemáticos. Estudiado y resuelto por figuras señeras como Lagrange, Euler y Carnot y por el matemático italiano Anibal Giordano, conocido como Ottaiano, con regla y compás [1], [4] y [3]. Poncelet puso de manifiesto su naturaleza proyectiva [6] y lo generalizó a un número cualquiera de puntos. Generalmente el problema tiene dos soluciones como vemos en la Figura 1, pero puede tener infinitas soluciones, una solución o carecer de ella.

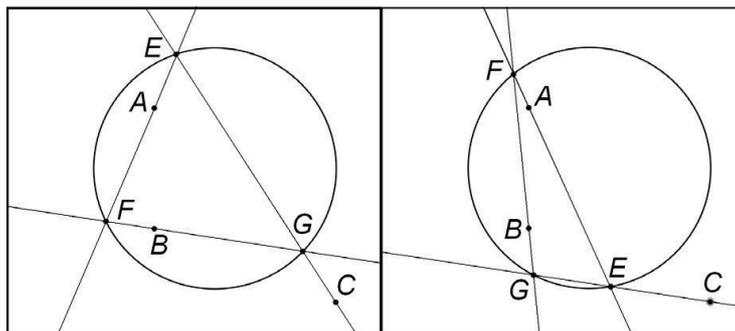


Figura 1: *El Problema de Castillon*

## 2. La Recta Projectiva Real

La recta projectiva real o recta real completada, se obtiene añadiendo a la recta real un punto, llamado punto del infinito, *punto impropio* o punto del horizonte. A este punto se le asocia la *abscisa*  $\infty$  (sin signo), asignación coherente con el hecho de ser la abscisa de un punto  $P$  la distancia de dicho punto a uno fijo  $O$ , llamado origen de coordenadas [2].

### 2.1. Transformaciones projectivas

Las transformaciones propias de la recta projectiva se llaman *projectividades*, aunque también se emplean los nombres de *homografías* y de transformaciones de *Möbius*. Su expresión analítica es:

$$h(t) = \frac{at + b}{ct + d}, \text{ con } \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Si  $c = 0$ , la imagen del punto impropio es el mismo, y si  $c \neq 0$  el punto impropio es imagen del punto de abscisa  $-d/c$ , y la imagen del punto impropio es el punto de abscisa  $h(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{at+b}{ct+d} = \frac{a}{c}$ .

Dos homografías  $h$  y  $g$  son iguales si, y solo si, sus coeficientes son proporcionales, es decir,

$$h = g \Leftrightarrow \frac{at + b}{ct + d} = \frac{mt + n}{pt + q} \Leftrightarrow \frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} = \frac{d}{q}.$$

Por tanto una homografía depende sólo de tres parámetros. En consecuencia una homografía queda determinada por las imágenes de tres puntos distintos.

Además dados tres puntos distintos  $p, q$ , y  $r$ , existe una única homografía  $h$ , cuyas imágenes son los tres puntos distintos  $u, v$  y  $w$ . El conjunto de todas las homografías con la operación de composición es un *grupo no conmutativo* cuyo elemento neutro es la transformación identidad y donde la homografía inversa de  $h$  es

$$h^{-1}(t) = \frac{dt - b}{-ct + a}.$$

Las homografías iguales a sus inversas se llaman *involuciones* u homografías involutivas.

- Ejercicio 2.1.** a) Una homografía es una involución si, y sólo si,  $d = -a$ .  
 b) Toda homografía es una involución o el producto de dos involuciones.  
 c) Una homografía  $h$  conserva la razón simple si, y sólo si, su expresión analítica es  $h(t) = at + b$ .  
 d) Las homografías son las únicas transformaciones de la recta proyectiva que conservan la razón doble.

Dada una homografía  $h$ , los puntos que satisfacen la igualdad  $h(t) = t$  se llaman elementos unidos, puntos invariantes o *puntos dobles* de la homografía. Si  $h$  es una función afín, el punto del infinito es doble y recíprocamente. Una homografía distinta de la identidad, puede tener dos puntos dobles, uno o ninguno; dado que la ecuación anterior es lineal o cuadrática. Si la homografía tiene dos puntos dobles se llama *hiperbólica*, si tiene uno *parabólica* y si no tiene ninguno *elíptica*.

**Ejercicio 2.2.** Caracterizar el tipo de homografías por sus coeficientes.

### 3. Otro modelo de la recta proyectiva

La recta proyectiva admite varios modelos. Uno es el ya estudiado de la recta completada, otro el de haz de rectas de vértice un punto dado, otro más es la circunferencia. En lo que sigue analizamos este modelo, su relación con la recta real completada y la interpretación geométrica de sus transformaciones. Consideremos la circunferencia de centro el origen y radio unidad (Figura 2). Esta circunferencia tiene por ecuación  $x^2 + y^2 = 1$  y pasa por el punto  $N(0, 1)$ . De aquí en adelante denotaremos a dicha circunferencia como  $\mathcal{C}$ .

A un punto cualquiera  $T$  de la circunferencia  $\mathcal{C}$  le podemos asignar dos tipos de coordenadas:

- Las coordenadas cartesianas  $(a, b)$ , ligadas por la relación  $a^2 + b^2 = 1$ .
- La abscisa  $t$  de la proyección central desde el punto  $N$  del punto  $T$  sobre el eje  $OX$ . A esta coordenada la llamaremos *la etiqueta* del punto  $T$  para distinguirla de la abscisa del caso anterior. Al punto  $N$  le asociamos el *punto del infinito* de la recta completada y la etiqueta  $\infty$ .

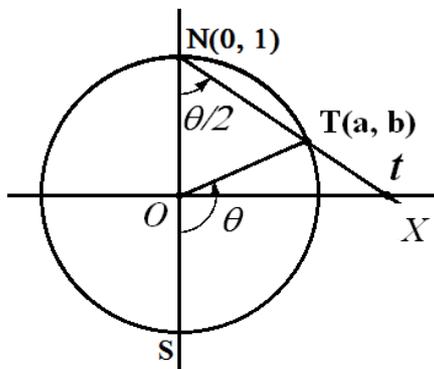


Figura 2: Circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$

La proyección de centro  $N$  de la circunferencia sobre la recta completada y su aplicación inversa vienen dadas por las fórmulas:

$$t = P_N(a, b) = \begin{cases} \frac{a}{1-b} & \text{si } b \neq 1 \\ \infty & \text{si } b = 1 \end{cases} \text{ y } P_N^{-1}(t) = \begin{cases} \left( \frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1} \right) & \text{si } t \neq \infty \\ (0, 1) & \text{si } t = \infty \end{cases}$$

Esta última fórmula es *una parametrización racional* de la circunferencia unidad.

## 4. Transformaciones de la Circunferencia

Las homografías de la recta completada tienen sus correspondientes transformaciones en la circunferencia  $\mathcal{C}$ . Antes de analizar el caso general estudiaremos algunos casos particulares. Los ejemplos más sencillos son las restricciones a la circunferencia de los giros y las simetrías axiales del plano.

### 4.1. Giro de ángulo $\theta$

Sea  $\theta$  el ángulo de giro, positivo en sentido antihorario. La fórmula del giro es

$$u = \begin{cases} \frac{t+k}{-kt+1} & \text{si } \theta \neq \pi \\ -1/t & \text{si } \theta = \pi \end{cases}, k = \tan \frac{\theta}{2}.$$

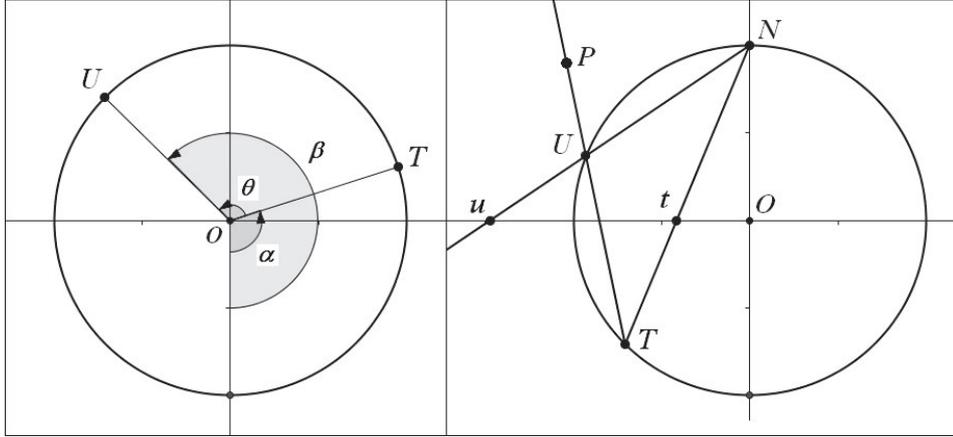


Figura 3: *Giro de ángulo  $\theta$  e Inversión de centro  $P$*

En efecto sean  $t$ , y  $u$  las etiquetas de los puntos  $T$ , y  $U$  respectivamente, y sean estos puntos homólogos respecto de un giro en la circunferencia de ángulo  $\theta$ . Sean  $\alpha$  y  $\beta$  los ángulos que determinan los radios  $\overline{OT}$  y  $\overline{OU}$  con el semieje negativo de ordenadas. Se cumple la relación  $\beta = \alpha + \theta$ , luego si  $\theta \neq \pi$ :

$$\tan \frac{\beta}{2} = \frac{\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\theta}{2}} \Rightarrow u = \frac{t + k}{-kt + 1}.$$

Análogamente si  $\theta = \pi$  obtenemos  $u = -1/t$ . Recíprocamente, toda transformación  $u = \frac{at+b}{-bt+a}$  con  $a^2 + b^2 \neq 0$ , es un giro de ángulo  $\theta = 2 \arctan \frac{b}{a}$ .

## 4.2. Simetría de eje $r$

La simetría respecto de la recta  $r \equiv y = mx$  tiene por ecuación

$$u(t) = \frac{mt + 1}{t - m}.$$

En efecto sean  $t$ , y  $u$  las etiquetas de los puntos  $T$ , y  $U$  respectivamente, y sean estos puntos simétricos respecto de la recta de ecuación  $y = mx$ . El vector  $\overrightarrow{TU}$  es ortogonal al vector  $(1, m)$ , que es el vector dirección del eje de simetría. Luego:

$$\overrightarrow{TU} \cdot (1, m) = 0 \Leftrightarrow (m - t)u^2 + (t^2 + 1)u - mt^2 - t = 0$$

Resolviendo la ecuación obtenemos:

$$u = \frac{mt + 1}{t - m}, \text{ ó } u = t.$$

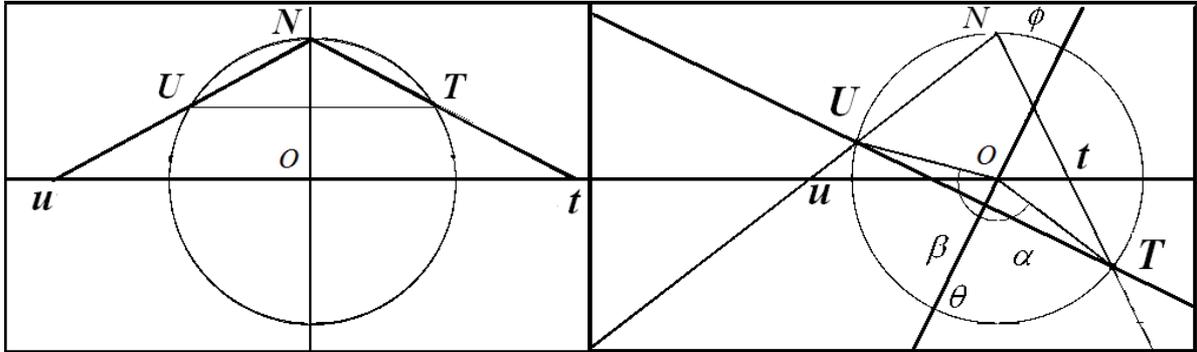


Figura 4: *Simetrías axiales*

Es fácil demostrar que la simetría respecto del eje  $OY$  queda descrita analíticamente por la ecuación  $u(t) = -t$ ,  $u(\infty) = \infty$ . Recíprocamente toda transformación de ecuación  $u = \frac{at+b}{bt-a}$  es una simetría axial. Si  $b = 0$  es la simetría respecto del eje  $OY$ , y si  $b \neq 0$  es la simetría respecto del eje  $y = \frac{a}{b}x$ .

### 4.3. Inversión de Centro $P$ de coordenadas $(p, q)$

Dado un punto  $P$  que no pertenece a la circunferencia  $\mathcal{C}$ , la inversión de centro  $P$  es la aplicación que a cada punto  $T$  de la circunferencia le hace corresponder el otro punto  $U$  intersección de la circunferencia con la secante  $\overline{PT}$ . Si la recta  $\overline{PT}$  es tangente a la circunferencia  $U = T$  (Figura 3 derecha). La inversión de centro  $P(p, q)$  tiene por expresión

$$u = \frac{pt - (1 + q)}{(1 - q)t - p}.$$

En efecto sean  $t$ , y  $u$  las etiquetas de los puntos de la circunferencia  $T$ , y  $U$  respectivamente, y sean estos puntos homólogos respecto de la inversión de centro el punto  $P(p, q)$ . Los puntos  $P, T$  y  $U$  están alineados, si y sólo si, se cumple:

$$\begin{vmatrix} 1 & p & q \\ 1 & \frac{2t}{t^2+1} & \frac{t^2-1}{t^2+1} \\ 1 & \frac{2u}{u^2+1} & \frac{u^2-1}{u^2+1} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ((q-1)tu + pt + pu - q - 1)(t-u) = 0$$

Operando y despejando  $u$  obtenemos la expresión buscada. Resumiendo podemos afirmar:

**Proposición 4.1.** *Siendo  $h(t) = \frac{at+b}{ct+d}$  una homografía, tenemos que*

- a)  $h$  es una involución si, y sólo si,  $a + d = 0$ .
- b)  $h$  es una simetría axial de eje  $ax - by = 0$  si, y sólo si,  $a + d = 0$  y  $c = b$ .
- c)  $h$  es una inversión de centro  $(\frac{-2a}{b-c}, \frac{b+c}{b-c})$  si, y sólo si,  $a + d = 0$  y  $c \neq b$ .
- d)  $h$  es un giro si, y sólo si,  $a = d$  y  $c = -b$ .

### Observaciones

- 1) La inversión de centro  $(0, 0)$  es la simetría respecto del centro de  $\mathcal{C}$ .
- 2) Sea  $k = p^2 + q^2 - 1$  la potencia del punto  $P(p, q)$  respecto de la circunferencia  $\mathcal{C}$ . La inversión de centro  $P$ , definida en este apartado, es la restricción a la circunferencia  $\mathcal{C}$  de la inversión en todo el plano de centro  $P$  y potencia  $k$  [7].
- 3) Las inversiones y las simetrías axiales son las únicas involuciones de  $\mathcal{C}$ .

## 4.4. Projectividad de eje $r$

Dada una recta cualquiera  $r$  y dos puntos  $P$  y  $Q$  de la circunferencia  $\mathcal{C}$ , la *projectividad de eje  $r$*  es la aplicación que a cada punto  $T$  de la circunferencia le asocia el punto  $U$  tal que las rectas  $\overline{TQ}$  y  $\overline{PU}$  se cortan en un punto  $M$  perteneciente a la recta dada  $r$ .

La construcción geométrica del homólogo de un punto  $T$  se puede hacer sólo con regla. Veamos la forma de construcción (Figura 5):

- a) Tracemos la recta  $\overline{TQ}$ , y hallamos  $M$ , punto intersección de  $\overline{TQ}$  con  $r$ .
- c) Tracemos la recta que pasa por  $M$  y  $P$ .
- d) El punto  $U$ , intersección de  $\overline{MP}$  y la circunferencia es el homólogo de  $T$ .

### Observaciones

- 1) El homólogo del punto  $P$  es por definición el punto  $Q$ .
- 2) Los puntos  $P$  y  $Q$  de la definición no pertenecen simultáneamente a la recta  $r$  y a la circunferencia  $\mathcal{C}$ .

3) Una proyectividad no queda determinada sólo por su eje  $r$ . Si fijamos el punto  $P$  y la recta  $r$ , existe una proyectividad distinta para cada punto  $Q$  de la circunferencia  $\mathcal{C}$ .

4) Si  $\overline{TQ}$  es paralela a la recta  $r$ , el punto  $M$  es el *punto del infinito* asociado al haz de rectas paralelas a la recta  $\overline{TQ}$ . La recta  $\overline{MP}$  es la paralela a  $r$  que pasa por  $P$ .

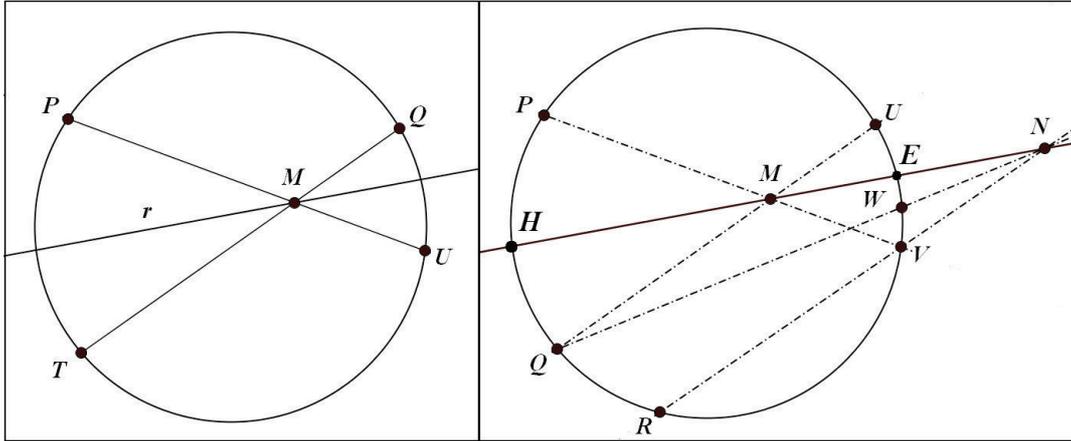


Figura 5: *Proyectividad de eje  $r$  y Problema de Steiner.*

**Teorema 4.2.** *Dados la recta  $r$  de ecuación  $Ax + By + C = 0$  y dos puntos distintos  $P$  y  $Q$  de la circunferencia  $\mathcal{C}$  que no pertenezcan a la recta dada. La expresión analítica de la proyectividad de eje  $r$  y tal que  $u(P) = Q$  es:*

$$u(t) = \frac{(2Aq + (B + C)pq - (B - C))t + (B - C)(p - q)}{(B + C)(p - q)t + (2Ap + (B + C)pq - (B - C))}$$

Donde  $p, q, t$  y  $u$  son las etiquetas de los puntos  $P, Q, T$  y  $U$  respectivamente.

*Demostración.* Las ecuaciones de las rectas  $TQ$  y  $PU$  son respectivamente:

$$(q + t)x + (qt - 1)y - qt - 1 = 0, (p + u)x + (pu - 1)y - pu - 1 = 0$$

Estas dos rectas se cortan con la recta  $r$  en un punto  $M$  si, y sólo si, se cumple:

$$\begin{vmatrix} q + t & qt - 1 & -qt - 1 \\ p + u & pu - 1 & -pu - 1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$$

Despejando  $u$  obtenemos la expresión buscada. Observemos que el determinante de la homografía es:

$$\left( A \frac{2p}{p^2 + 1} + B \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1} + C \right) (p^2 + 1) \left( A \frac{2q}{q^2 + 1} + B \frac{q^2 - 1}{q^2 + 1} + C \right) (q^2 + 1) \neq 0$$

porque los puntos  $P$  y  $Q$  no pertenecen a la recta  $r$ .

□

**Teorema 4.3.** *Toda homografía  $u(t) = \frac{at+b}{ct+d}$  es una proyectividad de eje  $r \equiv (a-d)x - (b+c)y + b-c = 0$  o un giro de ángulo  $2 \arctan b/a$ .*

*Demostración.* Si  $a-d = b+c = 0$  la homografía es el giro de ángulo  $\theta = 2 \arctan b/a$ . Este caso incluye la identidad, que es el giro de ángulo 0.

Si la homografía no es la identidad existen dos puntos distintos  $P$  y  $Q$  homólogos, luego sus abscisas  $p$  y  $q$  satisfacen  $h(p) = q$ . Por tanto

$$q = \frac{ap+b}{cp+d} \Rightarrow \begin{cases} ap = cpq - b + dq \\ dq = ap + b - cpq \end{cases}$$

Por otra parte sea  $f(t) = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$  la proyectividad cuyo eje es la recta  $r \equiv (d-a)x + (b+c)y - b = 0$  y tal que  $f(p) = q$ , por el teorema anterior sus coeficientes son:

$$\begin{aligned} \alpha &= 2(a-d)q + (-(b+c) + (b-c))pq - (-(b+c) - (b-c)) \\ \beta &= (-(b+c) - (b-c))(p-q) \\ \gamma &= (-(b+c) + (b-c))(p-q) \\ \delta &= 2(a-d)p + (-(b+c) + (b-c))pq - (-(b+c) - (b-c)) \end{aligned}$$

Operando y sustituyendo  $dq$  y  $ap$  por sus valores:

$$\begin{aligned} \alpha &= 2(aq + b - cpq - dq) = 2a(q-p) \\ \beta &= 2b(q-p) \\ \gamma &= 2c(q-p) \\ \delta &= 2(ap - cpq + b - dp) = 2d(q-p) \end{aligned}$$

luego

$$f(t) = \frac{2a(q-p)t + 2b(q-p)}{2c(q-p)t + 2d(q-p)} = \frac{at+b}{ct+d} = h(t).$$

□

Si aplicamos el teorema anterior a los movimientos estudiados tenemos los resultados siguientes:

- a) El eje de proyectividad de una simetría axial es su eje de simetría.
- b) El eje de proyectividad de una involución de centro  $P(p, q)$ , es la *recta polar*  $px + qy - 1 = 0$  de  $P$  respecto de la circunferencia  $\mathcal{C}$ .
- c) El eje de proyectividad de un giro es *la recta del infinito* del plano proyectivo.

#### 4.5. El Problema de Steiner

Sabemos que dados tres puntos cualesquiera  $P$ ,  $Q$  y  $R$  de la circunferencia existe una única homografía cuyos puntos homólogos son respectivamente los puntos de la circunferencia  $U$ ,  $V$  y  $W$ . El eje de proyectividad de dicha homografía es la recta  $\overline{MN}$ , donde  $M$  es la intersección de las rectas  $\overline{PV}$  y  $\overline{QU}$ , y  $N$  es la intersección de las rectas  $\overline{QW}$  y  $\overline{RV}$ . Conocido el eje de proyectividad, podemos construir el homólogo de cualquier punto  $X$  como se describe en la definición de proyectividad. Es decir los conceptos de homografía y proyectividad en la circunferencia son equivalentes.

Si el eje de proyectividad corta a la circunferencia, los puntos de corte son los elementos unidos o puntos dobles de la homografía. En la figura son los puntos  $E$  y  $H$ . Este problema es conocido como *la construcción de los elementos dobles de Steiner* [4].

#### 4.6. Producto de Inversiones

**Teorema 4.4.** *El producto de dos inversiones distintas es una proyectividad, cuyo eje es la recta que pasa por sus centros.*

*Demostración.* Sean  $P(p, q)$  y  $R(r, s)$  dos puntos distintos. La composición de las dos inversiones es:

$$I_R \circ I_P(t) = \frac{(pr + (q - 1)(s + 1))t + p(s + 1) - (q + 1)r}{(-p(s - 1) + r(q - 1))t + pr + (q + 1)(s - 1)}$$

que, en virtud del teorema 4.2, la ecuación de su eje de proyectividad es  $(q - s)x + (r - p)y + ps - qr = 0$ .

La ecuación anterior se puede expresar

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p & q & 1 \\ r & s & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Luego los puntos  $P$  y  $R$  pertenecen al eje de proyectividad. □

**Corolario 4.5.** *Toda proyectividad  $h$  es una involución o el producto de dos involuciones.*

*Demostración.* Si  $h$  es un giro,  $h$  es el producto de dos simetrías cuyos ejes forman un ángulo que es la mitad del ángulo de giro.

Si  $h$  es la proyectividad de eje  $e$  que transforma el punto  $P$  en  $Q$ , elijamos un punto  $M$  de la circunferencia y construyamos los puntos  $U$  y  $V$  intersección de las rectas  $\overline{MP}$  y  $\overline{MQ}$  con el eje  $e$  respectivamente. Es obvio que  $h = I_V \circ I_U$ . □

Recordemos que dos puntos para los cuales la polar de uno pasa por el otro se llaman *puntos conjugados*. Como  $px + qy = 1$  y  $rx + sy = 1$  son las ecuaciones de las polares de  $P$  y  $R$  respecto de la circunferencia  $\mathcal{C}$ .  $P$  y  $R$  son conjugados si, y sólo si  $pr + qs = 1$ . Con esta terminología podemos afirmar:

**Corolario 4.6.** *El producto  $h = I_R \circ I_P$  de dos inversiones  $I_P$  e  $I_R$  es una involución, si y sólo si, los centros de inversión  $P$  y  $R$  son puntos conjugados. La involución  $h$  es la simetría de eje  $\overline{PR}$  si esta recta es un diámetro de la circunferencia  $\mathcal{C}$  y la inversión de centro  $U$ , donde  $U$  es el polo de la recta  $\overline{PR}$  en caso contrario.*

*Demostración.* La homografía  $h = I_R \circ I_P$  es una involución si, y sólo si,

$$pr + (q - 1)(s + 1) + pr + (s - 1)(q - 1) = 0 \Leftrightarrow pr + qs = 1,$$

es decir, si los puntos  $P$  y  $R$  son conjugados respecto de  $\mathcal{C}$ . Sabemos que es una simetría axial si, y sólo si,  $ps - qr = 0$ . Lo que equivale a que el punto  $O(0, 0)$ , centro de la circunferencia  $\mathcal{C}$ , pertenece al eje de proyectividad de  $h$ . En caso contrario es una inversión de centro

$$U \left( \frac{q - s}{qr - ps}, \frac{r - p}{qr - ps} \right).$$

que es el polo de la recta  $\overline{PR}$  □

Recordemos que un triángulo donde los lados son las polares de sus vértices se llama *autopolar*. El corolario anterior nos permite afirmar

**Corolario 4.7.** *El producto de tres inversiones cuyos centros son los vértices de un triángulo autopolar es la identidad.*

*Demostración.* Con las notaciones del corolario anterior, podemos observar que

$$I_U(t) = \frac{(q-s)t + p(s+1) - r(q+1)}{(r(q-1) - p(s-1))t - (q-s)}$$

es igual a  $I_R \circ I_P$  puesto que los puntos  $P$  y  $R$  son conjugados y por tanto  $pr + qs = 1$ .  $\square$

**Teorema 4.8.** *El producto de una proyectividad  $h$  de eje  $e \equiv Ax + By + C = 0$  y una inversión de centro  $P(p, q)$  es una involución si, y solo si, el punto  $P$  pertenece a la recta  $e$ .*

*Caso de ser inversión su centro  $J$  pertenece también al eje  $e$ , y si es una simetría axial su eje es el diámetro de  $C$  perpendicular al eje  $e$ .*

*Demostración.* En virtud del teorema 4.2 podemos expresar la proyectividad  $h$  por la expresión:

$$h(t) = \frac{2(\delta - A)t + B - C}{(B + C)t + 2\delta}$$

para algún valor  $\delta$ . Luego:

$$I_P \circ h(t) = \frac{(2Ap + (B + C)(q + 1) - 2p\delta)t + 2\delta(q + 1) + (C - B)p}{(2(\delta - A)(q - 1) + (B + C)p)t + (B - C)(q + 1) + 2p\delta}$$

Esta homografía es una involución si, y sólo si,  $Ap + Bq + C = 0$ , es decir cuando  $P$  pertenece al eje  $e$ .

Si la homografía es una inversión el centro de inversión es el punto  $J$  de coordenadas:

$$J \left( \frac{Ap + B + Cq - 2p\delta}{A(1 - q) + Bp - 2\delta}, \frac{A(q - 1) - Cp - 2q\delta}{A(1 - q) + Bp - 2\delta} \right)$$

Sustituyendo en la ecuación de  $e$  y simplificando obtenemos

$$2(\delta - A)(Ap + Bq + C) = 0,$$

y por tanto el punto  $J$  pertenece a la recta  $e$ .

Si la homografía es una simetría axial el parámetro  $\delta = (1 + Bp - Aq)/2$  y su eje tiene por ecuación

$$(Bp^2 - (Ap + B + C)(q + 1))x + (A(1 - q^2) + Bpq + Cp)y = 0$$

que es un diámetro de  $\mathcal{C}$  perpendicular a la recta  $e$ , pues el producto escalar de sus vectores normales es

$$(Ap + Bq + C)(Bp - Aq - A) = 0$$

porque el punto  $P$  pertenece a la recta  $e$ . □

**Corolario 4.9.** *El producto de tres inversiones cuyos centros están alineados es otra inversión cuyo centro pertenece a la recta determinada por los centros de inversión o la simetría axial cuyo eje es el diámetro de  $\mathcal{C}$  perpendicular a la recta dada.*

## 5. Solución proyectiva del problema de Castillon

Dados tres puntos del plano  $A$ ,  $B$ , y  $C$  y una circunferencia  $\mathcal{C}$ , inscribir un triángulo en la circunferencia cuyos lados o sus prolongaciones pasen por los puntos dados.

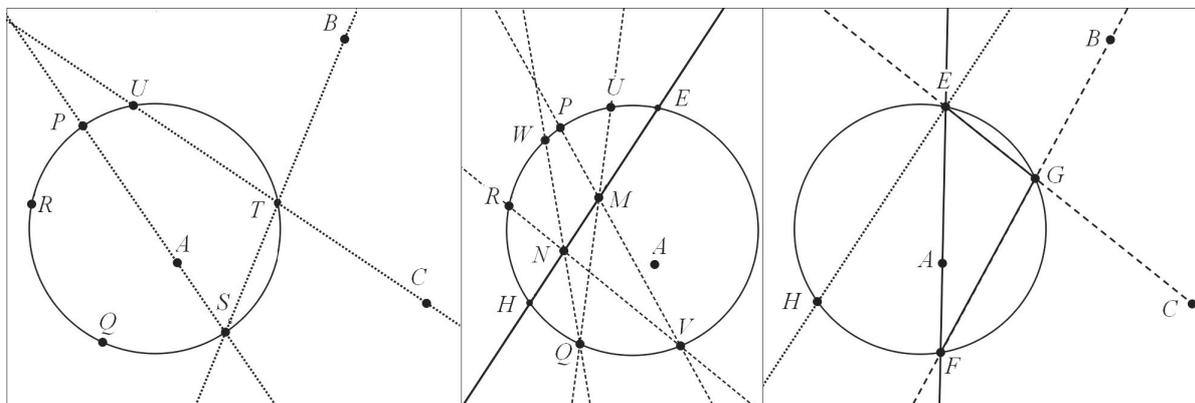


Figura 6: *Construcción del Eje de proyectividad*

Sean  $I_A$ ,  $I_B$ , e  $I_C$  las inversiones en la circunferencia  $\mathcal{C}$  respecto de los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  respectivamente. Denotemos por  $h$  la homografía  $I_C \circ I_B \circ I_A$

y sean  $P, Q$  y  $R$  tres puntos distintos de  $\mathcal{C}$ . Hallemos sucesivamente los puntos  $S = I_A(P)$ ,  $T = I_B(S)$  y  $U = I_C(T)$ . Obviamente  $U = h(P)$ . Eventualmente  $U = P$  y  $P$  es un punto doble de  $h$ . Si esto sucede el triángulo  $\triangle PST$  es una solución del problema. Repitamos el procedimiento con los puntos  $Q$  y  $R$  y obtenemos los puntos  $V = h(Q)$  y  $W = h(R)$ . Tenemos dos casos:

1) Si  $P, Q$  y  $R$  son puntos dobles, los puntos  $A, B$  y  $C$  son los vértices de un triángulo autopolar, la homografía  $h$  es la identidad y el problema tiene infinitas soluciones. A partir de cualquier punto  $E$  de la circunferencia, construimos sucesivamente  $F = I_A(E)$  y  $G = I_B(F)$ . Como  $h(E) = E$ , es claro que el triángulo  $\triangle EFG$  es solución del problema de Castillon (Fig. 7).

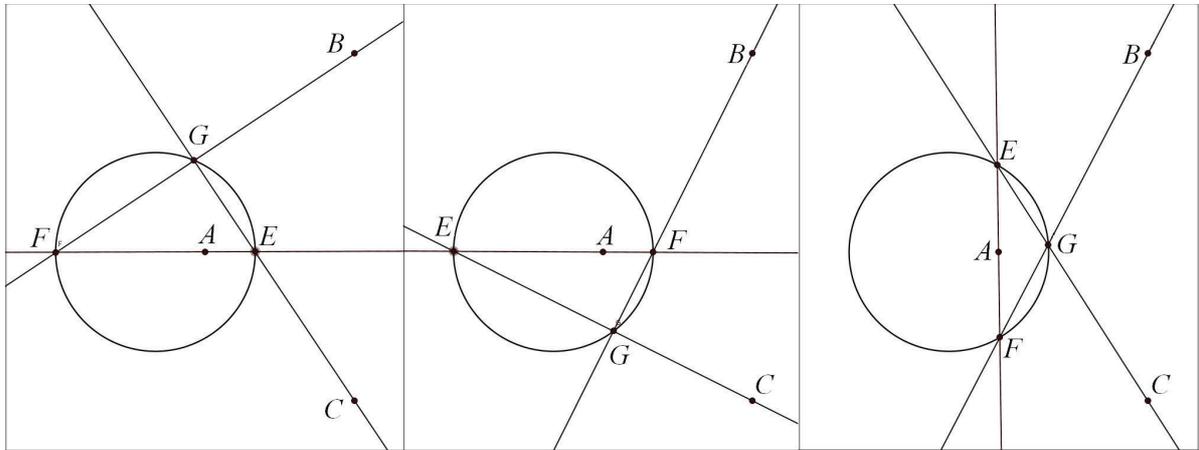


Figura 7: *Tres soluciones cuyos lados pasan por los vértices del  $\triangle ABC$*

2) Con la terna de puntos  $P, Q$  y  $R$  y sus homólogos  $U, V$  y  $W$  construimos el eje de proyectividad  $e \equiv \overline{MN}$ , tal como hemos descrito en el apartado 4.5. Los puntos  $E$  y  $H$ , intersección del eje  $e$  y la circunferencia  $\mathcal{C}$ , son los puntos dobles de  $h$ . Dependiendo de la posición relativa de  $e$  y  $\mathcal{C}$ ,  $h$  tiene 0, 1 ó 2 puntos dobles, y como hemos visto anteriormente cada uno de los puntos dobles de la proyectividad proporciona una solución al problema.

### 5.1. El Problema de Pappus

En el libro VII de la Colección, proposición 117, se encuentra resuelto el siguiente problema: Dada una circunferencia de centro  $O$  y tres puntos alineados  $A, B$ , y  $C$ , determinar un punto  $M$  sobre la circunferencia tal que si

$L$  y  $N$  son las intersecciones de las rectas  $MA$  y  $MB$  con la circunferencia dada, los puntos  $L$ ,  $N$ , y  $C$  esten alineados.

La construcción del punto  $M$  se puede simplificar usando el hecho de que el producto de tres inversiones  $I_A$ ,  $I_B$  e  $I_C$  cuyos centros están alineados es otra inversión  $I_G$  cuyo centro  $G$  está en la misma recta  $AB$ .

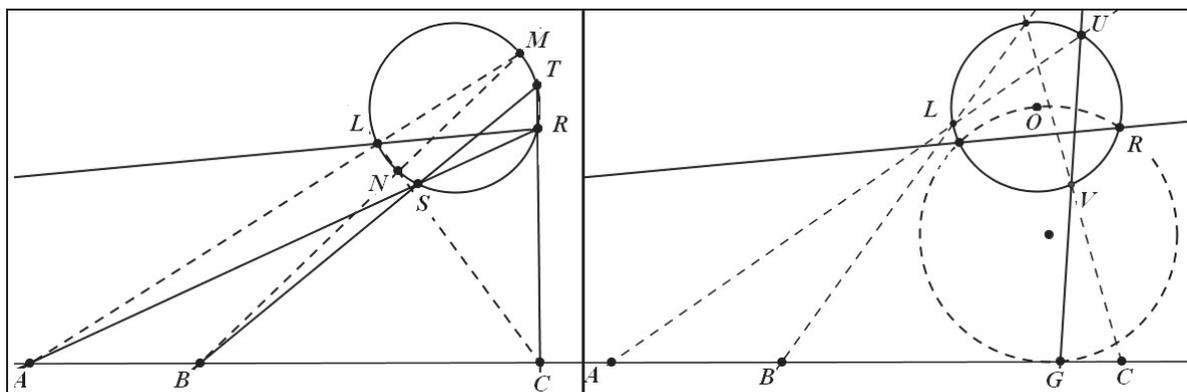


Figura 8: Hallando el eje de proyectividad, si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son alineados

En efecto, sea  $U$  un punto cualquiera de la circunferencia dada  $\mathcal{C}$ . Calculemos el punto  $V$  homólogo de  $U$  aplicando sucesivamente las inversiones de centros  $A$ ,  $B$ ,  $C$  respecto de la circunferencia. Sea  $G$  el punto intersección de la recta  $UV$  con la recta  $AB$ . Este punto es el centro de la inversión  $I_G = I_C \circ I_B \circ I_A$ . La recta polar del punto  $G$  respecto de la circunferencia  $\mathcal{C}$ , se constuye con la ayuda de la circunferencia de centro el punto medio del segmento  $\overline{GO}$  y diámetro la longitud de dicho segmento. Sean  $L$  y  $R$  los puntos intersección de ambas circunferencias. Ambos puntos son solución del problema de Pappus y los triángulos de vértices  $\triangle LMN$  y  $\triangle RST$ , donde  $M = I_A(L)$ ,  $N = I_B(M)$ ,  $S = I_A(R)$  y  $T = I_B(S)$  soluciones del problema de Castillon.

## 6. Estudio Analítico

Veamos algunos ejemplos del problema de Castillon resueltos analíticamente. Sean los puntos  $A(4, 1)$ ,  $B(-6, 5)$  y  $C(0, -3)$  y la circunferencia  $\mathcal{C}$  de ecuación  $x^2 + y^2 = 1$ . Las inversiones de la circunferencia respecto de los puntos  $A$ ,  $B$ , y  $C$  son respectivamente:

$$I_A(t) = -t + 1/2, I_B(t) = \frac{3t + 3}{2t - 3}, I_C(t) = 1/2t$$

Por tanto la homografía  $h = I_C \circ I_B \circ I_A$  tiene por ecuación:

$$h(t) = \frac{2t + 2}{6t - 9},$$

Los puntos dobles en la recta completada satisfacen la ecuación:

$$h(t) = t \Rightarrow \frac{2t + 2}{6t - 9} = t \Rightarrow 6t^2 - 11t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 2, \text{ y } t_2 = -1/6$$

El problema de Castillon tiene, en este caso, dos soluciones.

Construyamos la primera: Los puntos  $2, I_A(2) = -3/2, I_B(-3/2) = 1/4$  de la recta completada nos determinan los puntos

$$P_N^{-1}(2) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), P_N^{-1}\left(\frac{-3}{2}\right) = \left(\frac{-12}{13}, \frac{5}{13}\right) \text{ y } P_N^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{8}{17}, \frac{-15}{17}\right)$$

de la circunferencia  $\mathcal{C}$ , que llamaremos  $E, F$  y  $G$  respectivamente.

Las ecuaciones de los lados son:

$$\overline{AEF} \equiv x - 8y = -4, \overline{BFG} \equiv 10x + 11y = -5, \text{ y } \overline{CGE} \equiv 9x - 2y = 6.$$

Análogamente con el otro valor  $t_2 = -1/6$  obtenemos los vértices del otro triángulo cuyas coordenadas son:

$$I(-12/3, -35/17), J(12/13, -5/13) \text{ y } K(-3/5, 4/5),$$

Las ecuaciones de los lados son:

$$\overline{AIJ} \equiv 9x - 20y = 16, \overline{BJK} \equiv 7x + 9y = 3, \overline{CKI} \equiv 19x + 3y = -9$$

y el eje de proyectividad de  $h$  es la recta  $EI \equiv 11x - 8y = 4$ .

**Ejercicio 6.1.** *Comprobar que*

a) *Para los puntos  $A(-2, 2), B(2, 2)$  y  $C(0, 3/5)$  el problema de Castillon tiene solución única y que el eje de proyectividad de la homografía asociada es tangente a la circunferencia unidad.*

b) *Para los puntos  $A(-2, 2), B(2, 2)$  y  $C(0, 1/2)$  el problema de Castillon no tiene solución.*

c) *Para los puntos  $A(-2, 2), B(3/2, 2)$  y  $C(0, 1/2)$  el problema de Castillon tiene infinitas soluciones y construir tres de ellas.*

Si la circunferencia  $\mathcal{D}$  tiene ecuación  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ , podemos reducir este problema a uno similar a los anteriores con ayuda de la semejanza:

$$\begin{cases} x = r\bar{x} + a \\ y = r\bar{y} + b \end{cases}$$

que transforma la circunferencia  $\mathcal{D}$  en la circunferencia  $\mathcal{C} \equiv \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1$ .

## 6.1. Patologías

Algunas veces la poligonal descrita por la trayectoria generada por las inversiones no forma un triángulo, por ejemplo, si  $A(-3/2, 0)$ ,  $B(-1, 1)$  y  $C(3/2, 0)$ , la proyectividad  $h(t) = I_C \circ I_B \circ I_C(x) = \frac{7t+18}{8t+17}$  tiene dos puntos dobles  $t_1 = -9/4$  y  $t_2 = 1$  y su eje de proyectividad es la recta secante a la circunferencia  $\mathcal{C}$  de ecuación  $5x + 13y = 5$ .

Mientras el primer valor genera el triángulo de coordenadas  $E(-72/97, 65/97)$ ,  $F(-228/397, 325/397)$ , y  $G(84/85, 13/85)$ , el valor  $t_1 = 1$  genera la trayectoria  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(-1, 0)$  y  $(1, 0)$  que recorre un segmento.

**Ejercicio 6.2.** *Dados los puntos  $A(2, 1)$ ,  $B(-1, -2)$  y  $C(1, -1)$ , comprobar que el problema de Castillon no tiene solución aunque la homografía correspondiente tiene dos puntos dobles.*

## 7. Variaciones del problema de Castillon

### 7.1. El problema con puntos del infinito

Consiste en sustituir la condición *pasar por un punto* por la de *ser paralelo a una recta dada*. Proyectivamente es pedir que pase por el *punto del infinito* determinado por el *haz de rectas* paralelas a la recta dada. El problema se resuelve con las herramientas anteriormente descritas teniendo en cuenta que la homografía asociada a esta condición es la simetría cuyo eje es el diámetro de la circunferencia  $\mathcal{C}$  perpendicular a la recta dada.

Un caso interesante es construir el triángulo inscrito en la circunferencia y que sus lados sean paralelos a tres rectas dadas. Sabemos que la composición de tres simetrías axiales, cuyos ejes concurren en un punto como es nuestro caso, es la simetría cuyo eje  $e$  forma con el tercero  $t$  el mismo ángulo que

forman los ejes  $s$  y  $t$  de las dos primeras (Figura 9). Este hecho permite una construcción fácil con regla y compás cuyos detalles dejamos al lector.

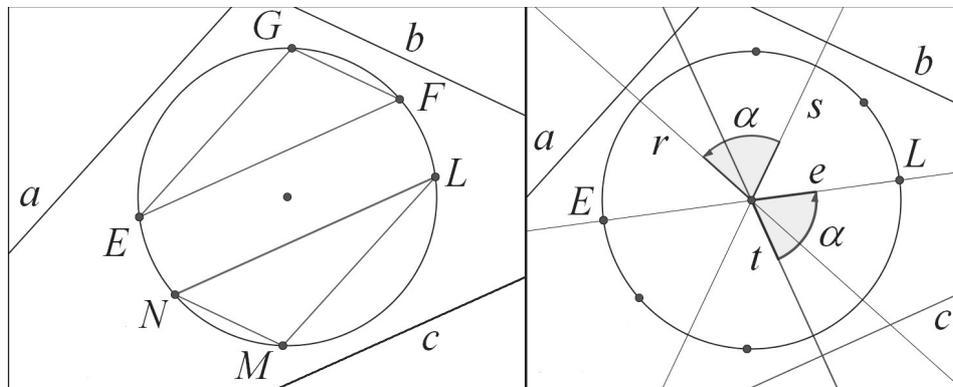


Figura 9: Triángulos inscritos de lados paralelos a tres rectas dadas. Composición de tres simetrías

## 7.2. Castillon para $n$ puntos

El problema de Castillon se generaliza para  $n$  puntos indicando el orden por el cual los lados, o sus prolongaciones, pasan por los puntos dados. En la Figura 10 se muestran tres soluciones del problema para los puntos  $A, B, C, D,$  y  $E$ . Los lados del polígono  $JKLMN$  pasan sucesivamente por los puntos  $ABCDE, ACBDE$  y  $ADBCE$  respectivamente.

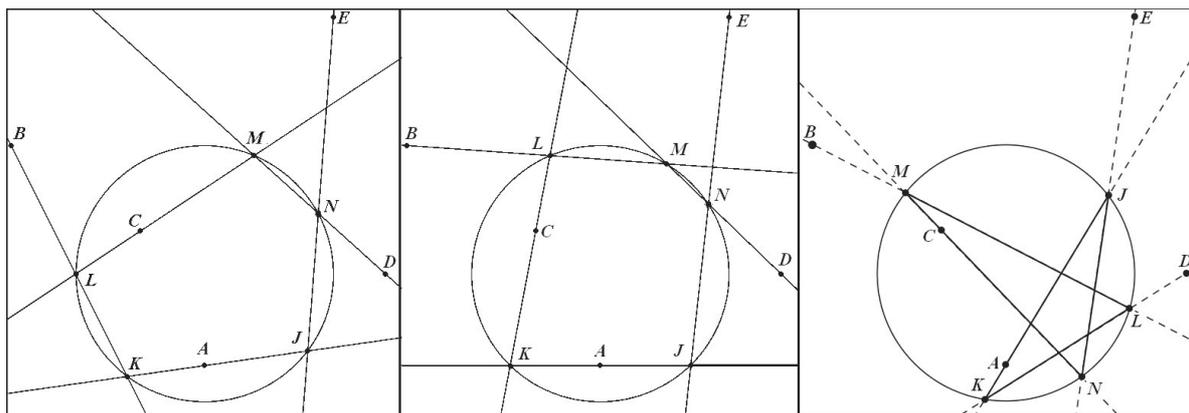


Figura 10: Castillon  $n = 5$  ordenes  $ABCDE, ACBDE$  y  $ADBCE$ .

Observemos que la tercera solución es un polígono estrellado. Para  $n$  puntos el número de circuitos esencialmente diferentes es  $(n - 1)!/2$ , para cada uno de ellos hay, generalmente, dos poligonales cerradas cuyos segmentos pasan sucesivamente por los puntos dados. El problema de Castillon tiene, en general,  $(n - 1)!$  soluciones.

**Ejemplo 7.1.** Dados los puntos  $A(0, -5/7)$ ,  $B(-3/2, 1)$ ,  $C(-1/2, 1/3)$ ,  $D(7/5, 0)$ ,  $E(1, 2)$  y la circunferencia unidad, consideremos la homografía  $h_1 = I_E I_D I_C I_B I_A$ . Sus puntos fijos son  $t_1 = 1/2$  y  $t_2 = -22/15$ . El primer valor nos proporciona la solución:

$$J\left(\frac{4}{5}, \frac{-3}{5}\right), K\left(\frac{-3}{5}, \frac{-4}{5}\right), L(-1, 0), M\left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right), \text{ y } N\left(\frac{15}{17}, \frac{8}{17}\right)$$

que son los vértices de un pentágono. El otro valor proporciona una poligonal cerrada que no es un polígono.

### 7.3. El problema dual de Castillon

Construir un triángulo  $\triangle EFG$  circunscrito a una circunferencia dada, y cuyos vértices pertenecen a tres rectas dadas  $a, b$  y  $c$  (Figura 11).

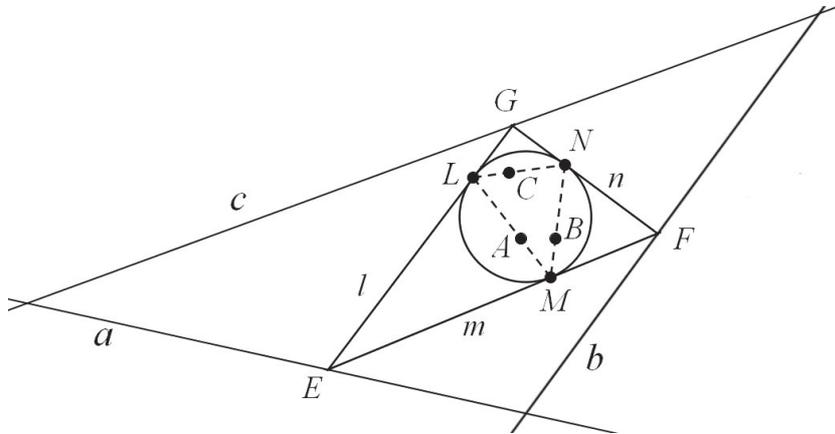


Figura 11: *Problema Dual*

*Solución:* Basta resolver el problema de Castillon para los polos  $A, B$  y  $C$  de las rectas dadas. Para cada triángulo solución  $\triangle LMN$  trazamos por sus vértices las tangentes a la circunferencia. El triángulo así obtenido es una solución del problema. Observemos que los vértices  $E, F$ , y  $G$  son los polos de las rectas  $\overline{LM}$ ,  $\overline{MN}$  y  $\overline{NL}$  respectivamente.

**Ejemplo 7.2.** Sean las rectas  $a \equiv 2x + 9y = -27$ ,  $b \equiv 11x - 8y = 24$ , y  $c \equiv 7x - 19y = -28$ . Sus polos respecto de la circunferencia unidad son los puntos  $A(-2/27, -1/3)$ ,  $B(11/24, -1/3)$ , y  $C(-1/4, 19/28)$ . La homografía  $h = I_C I_B I_A$  tiene dos puntos dobles  $t_1 = -2$  y  $t_2 = -19/11$ . El valor  $t_1 = -2$  determina los puntos  $L(-4/5, 3/5)$ ,  $M(5/13, -12/13)$ , y  $N(3/5, 4/5)$ . Las rectas tangentes en estos puntos son:

$$l \equiv 4x - 3y = -5, m \equiv 5x - 12y = 13, \text{ y } n \equiv 3x + 4y = 5.$$

y los vértices del triángulo son  $E(-3, -7/3)$ ,  $F(2, 1/4)$  y  $G(-1/5, 7/5)$ . El valor  $t_2 = -19/11$  proporciona otra solución similar a este problema.

## 8. Extensión a cónicas

### 8.1. El problema de Castillon en las cónicas

Dado que el problema de Castillon es de naturaleza proyectiva, se generaliza obviamente a cualquier cónica no degenerada. En palabras de Poncelet *Dada una cónica inscribir un polígono de  $m$  vértices, cuyos lados, prolongados si fuera necesario, pasan respectivamente, y en un orden asignado, por otros tantos puntos dados arbitrariamente en un plano [6].*

En esta sección resaltamos las propiedades afines: incidencia, intersección, punto medio y paralelismo. Recordemos que desde el punto de vista afín hay tres tipos de cónicas no degeneradas dependiendo del número de puntos que tienen en común con la recta del infinito: ninguno la *elipse*, uno la *parábola* y dos la *hipérbola*. Un representante de cada tipo es la circunferencia unidad  $x^2 + y^2 = 1$ , la parábola  $y^2 = x$  y la hipérbola equilátera  $x^2 - y^2 = 1$ . Desde un punto de vista sintético las definiciones de proyectividad, e inversión en un punto son análogas en las cónicas y en la circunferencia. También el problema de Steiner y su solución y los puede hacer el lector fácilmente. Conviene, sin embargo, precisar las definiciones de simetría y giro en las cónicas, y explicitar las expresiones analíticas de los conceptos anteriores.

### 8.2. La Hipérbola

Con el haz de rectas  $y = -x + t$  paralelas a la asíntota  $y = -x$ , obtenemos la parametrización de la hipérbola  $\left(\frac{t^2+1}{2t}, \frac{t^2-1}{2t}\right)$ . La rama izquierda corresponde con los valores del parámetro negativo y la rama derecha con los valores positivos del parámetro. El punto de etiqueta 0 corresponde con el punto del

infinito de la hipérbola determinado por la asíntota  $y = x$ , y la etiqueta  $\infty$  con el punto del infinito de la hipérbola determinado por la asíntota  $y = -x$ .

### 8.3. Transformaciones proyectivas en la hipérbola equilátera

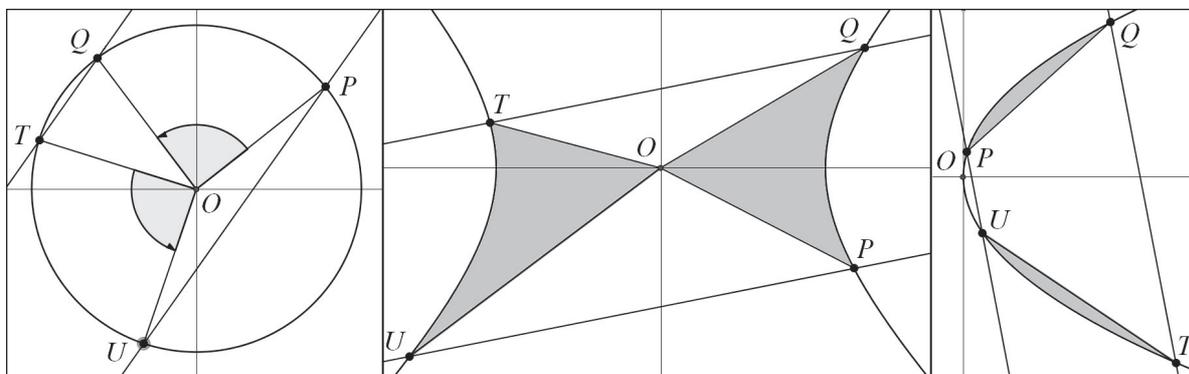


Figura 12: *Giro en las cónicas*

Giro hiperbólico: Sean  $P$  y  $Q$  dos puntos en la misma rama de la hipérbola, a cada punto  $T$  le asocia el punto  $U$  tal que las rectas  $\overline{TQ}$  y  $\overline{PU}$  sean paralelas. Con esta construcción los sectores  $OPQ$  y  $OTU$  tienen igual área cuyo valor es:

$$\frac{1}{2} \ln \frac{q}{p} = \frac{1}{2} \ln \frac{u}{t}$$

Despejando  $u$  obtenemos la ecuación del giro hiperbólico

$$u = \frac{q}{p}t \text{ ó } u = kt, \text{ siendo } k > 0$$

A la cantidad  $\ln k = \ln(q/p)$  se le llama *ángulo hiperbólico*  $POQ$ , por analogía con la circunferencia donde el área del sector circular  $OPQ$  es la mitad del ángulo  $\angle POQ$  medido en radianes y la fórmula  $(x, y) = (\cosh(\ln t), \sinh(\ln t))$  para  $t > 0$  es una parametrización de la rama derecha de la hipérbola. Observemos que, si el ángulo hiperbólico es positivo el sentido del giro es anti-horario en la rama derecha y horario en la izquierda. Si el ángulo hiperbólico es negativo los sentidos son los opuestos a los anteriores [8].

Si los puntos  $P$  y  $Q$  están en distinta rama, también lo estarán los puntos  $T$  y su homólogo  $U$ , el cociente  $q/p = u/t$  es negativo y  $\ln(q/p) = \ln(-q/p) + \pi i$  es un número complejo. Un ejemplo es la *simetría central* de

ecuación  $u = -t$ , cuyo ángulo hiperbólico es  $\ln(-1) = \pi i$ . La transformación  $u = kt$  con  $k$  negativo se llama *giro hiperbólico impropio* y es la composición de un giro hiperbólico de amplitud  $\ln |k|$  y la simetría central.

Simetría afín de eje  $r$ : Esta transformación está caracterizada porque el punto medio  $M$  del segmento de extremos  $T$  y su homólogo  $U$  pertenece al eje  $r$ . En términos de geometría proyectiva el eje  $r$  es un *diámetro conjugado* de la dirección  $\overline{TU}$ . Si el eje de simetría es  $y = mx$ , su diámetro conjugado es  $y = x/m$  y la ecuación de la simetría de eje  $r$  es  $u = \frac{1+m}{(1-m)t}$  y si el eje es el eje  $OY$  ( $m = \infty$ ), su diámetro conjugado es el eje  $OX$ , y la ecuación es  $u = -1/t$ . La simetría respecto del eje  $OX$  (ecuación  $u = -1/t$ ) y la simetría respecto al eje  $OY$  son las únicas simetrías ortogonales de esta familia.

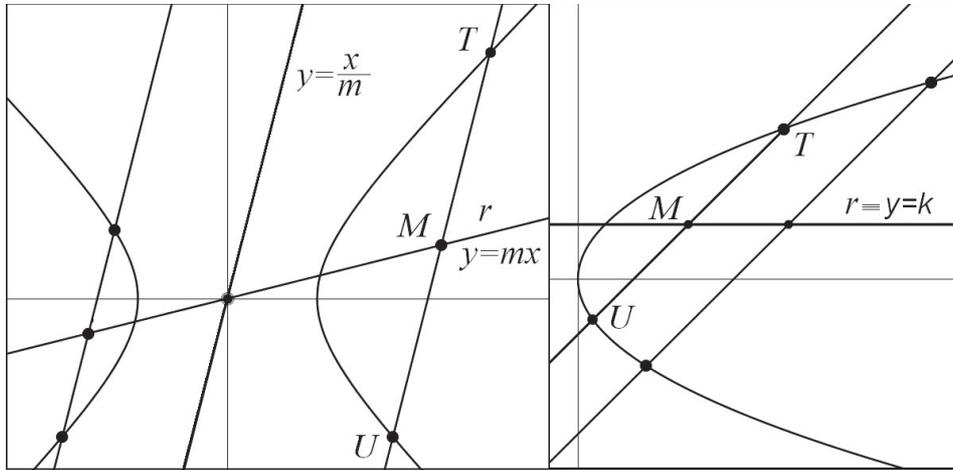


Figura 13: *Simetrías de eje  $r$*

Análogamente a como ocurre con las simetrías axiales en la circunferencia, el producto de dos simetrías afines es un giro hiperbólico y caso de ser los ejes de dichas simetrías diámetros conjugados de la hipérbola su producto es la simetría central.

Inversión de centro  $P(p, q)$ : Definida de forma análoga a la inversión en la circunferencia, se demuestra que su ecuación es

$$u = \frac{t - (p + q)}{(p - q)t - 1}.$$

La inversión de centro el origen de coordenadas es la simetría central. Las

inversiones y las simetrías son las únicas involuciones en la hipérbola. Si consideramos la recta del infinito, todas las homografías son perspectivas. La homografía  $h(t) = \frac{at+b}{ct+d}$  tiene como eje de proyectividad la recta de ecuación  $(b-c)x + (d-a)y + (b+c) = 0$ .

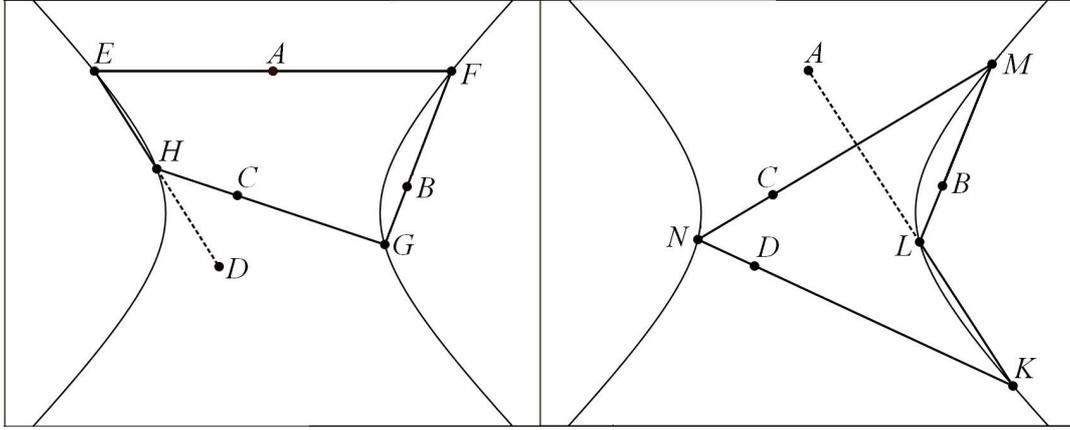


Figura 14: Cuadriláteros inscritos en la hipérbola.

**Ejemplo 8.1.** Sea la hipérbola de ecuación  $x^2 - y^2 = 1$  y los puntos  $A(0, 4/3)$ ,  $B(5/4, 1/4)$ ,  $C(-1/3, 1/6)$ , y  $D(-1/2, -1/2)$ . La ecuación de los puntos dobles de  $I_D I_C I_B I_A$  es  $138t^2 + 7t - 13 = 0$  cuyas raíces son  $t_1 = -1/3$  y  $t_2 = 13/46$ . La primera raíz proporciona el cuadrilátero convexo de vértices  $E(-5/3, 4/3)$ ,  $F(5/3, 4/3)$ ,  $G(25/24, -7/24)$  y  $H(-13/12, 5/12)$

La segunda proporciona el cuadrilátero cóncavo

$$K\left(\frac{2285}{1196}, \frac{-1947}{1196}\right), L\left(\frac{2285}{2204}, \frac{-603}{2204}\right), M\left(\frac{865}{504}, \frac{703}{504}\right) \text{ y } N\left(\frac{-5597}{5428}, \frac{-1365}{5428}\right)$$

Si el orden de los puntos es  $ACBD$ , la ecuación asociada es  $2t^2 + 133t = -258$ , y la solución que corresponde a la etiqueta  $t_1 = -2$  es una poligonal abierta.

#### 8.4. La parábola

Con el haz de rectas paralelas  $y = t$ , obtenemos la parametrización  $x = t^2, y = t$ . Las transformaciones se definen de igual forma que en la hipérbola, las expresiones analíticas de las transformaciones son: Inversión de centro  $P(p, q)$ ,  $u = (qt - p)/(t - q)$ . Simetría de eje  $y = k$ ,  $u = -t + 2k$ . Giro parabólico  $y = t + k$ . El eje de proyectividad de la homografía  $h(t) = \frac{at+b}{ct+d}$  es  $cx + (d-a)y - b = 0$ .

## Epílogo

Existen en la literatura otras variantes del problema de Castillon como por ejemplo el dual de Castillon para cónicas. Una mirada al número de artículos dedicados a estos problemas indica que no se ha cumplido el deseo de Castillon, quien publicó su trabajo para *ahorrar a los geómetras del futuro la molestia y la pérdida de tiempo que este problema pudiera ocasionarles* [9].

Es menos conocida la idea del matemático danés *Julius Petersen* de resolver el problema de Apolonio de trazar los círculos tangentes a tres círculos dados usando la resolución del problema de Castillon [5, pág 102]. De hecho basta con usar la solución del problema de Pappus. Pero esto es otra historia.

## Referencias

- [1] W. W. Rouse Ball, (1960). *A Short Account of the History of Mathematics*, Dover.
- [2] R.P. Burn, (1985). *Groups. A path to geometry*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] Jean-Claude Carrega, (1989). *Théorie des corps. La règle et le compas*, Hermann, Paris.
- [4] Heinrich Dörrie, (1965). *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover.
- [5] Julius Petersen, (1901). *Constructions Géométriques*, Gauthiers-Villars, Paris.
- [6] J. V. Poncelet, (1865). *Traité des Propriétés Projectives des Figures*, Vol. I Gauthiers-Villars, Paris.
- [7] P. Puig Adam (1979), *Curso de geometría métrica*, Vol. I y II. Gómez Puig Ediciones, Madrid.
- [8] V. G. Shervátov,(1975), *Funciones hiperbólicas*, Editorial MIR, Moscú.
- [9] William Walton, (1851). *Problems in illustration of the principles of plane coordinate geometry*, Simpkin & Co. Londres.
- [10] I.M. Yaglom, (1962). *Geometric Transformations*, Vol. I, II y III. New Mathematical Library, Random House, New York.

# Algebraic Equations and Rational Solutions

## Ecuaciones algebraicas y soluciones racionales

**Jesús Álvarez Mesa**

Dpto. de Matemáticas. IES Calatalifa  
jalvarezconsusmates@hotmail.com

### Resumen

*It is known that rational explicit solutions of an algebraic equation of two unknown factors, if they do exist, will depend on a rational parameter. For this, some existence conditions will have to be fulfilled. Otherwise, there will not be any rational solution. This is what happens with a certain family of equations related to a known theorem that are studied in this work. In addition to this, an algebraic equation with three unknown factors is also solved, and all the rational solutions are obtained and their corresponding geometric interpretation is given.*

### Introducción

Dada una ecuación algebraica de la forma  $x^p + y^p = 1$ , siendo  $p$  un número primo impar, las soluciones reales se pueden expresar en forma explícita y dependerán de un parámetro. Sin embargo, no existen soluciones racionales porque no se puede eliminar adecuadamente de las soluciones reales el factor radical que provoca que todas las soluciones sean irracionales [2]. La pretensión de este trabajo es doble: En primer lugar demostrar, o al menos justificar, que esta familia de ecuaciones con dos incógnitas carece de soluciones racionales y, por otra parte, resolver en números racionales una ecuación con tres incógnitas. Estas soluciones nos llevarán a un nuevo método de obtención de cuaternas pitagóricas con el fin de aplicarlas al teorema de Pitágoras en tres dimensiones.

## 1. Ecuaciones sin soluciones racionales

Dada la ecuación de Fermat con dos incógnitas,  $x^p + y^p = 1$ , trataremos de probar si para algún valor de  $m = y/x$  racional ( $0 < m < 1$ ) y de  $p$  primo impar hay alguna solución paramétrica de dicha ecuación que corresponda a un número racional. Esto equivale a que  $\sqrt[p]{1 + m^p}$  sea, también, racional [2]. Para ello definimos el siguiente polinomio de grado  $p$ , primo impar, en la indeterminada  $m$ :  $G_p(m) = m^p + 1$ . En virtud del teorema fundamental del álgebra, las raíces de  $G_p(m)$  son las  $p$  raíces complejas del número entero  $-1$ , pero, al ser  $p$  impar, una raíz es entera e igual a  $-1$ . Las  $p$  raíces complejas las denominaremos  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-2}, \alpha_{p-1}$ . Cada raíz  $\alpha_k$  es de la forma  $\alpha_k = e^{i(\pi+2k\pi)/p}$ , siendo  $k = 0, 1, 2, \dots, p-2, p-1$ . La descomposición [3] de  $G_p(m) = m^p + 1$  en  $\mathbb{C}[m]$  como producto de  $p$  factores irreducibles es:

$$G_p(m) = \prod_{k=0}^{p-1} (m - e^{i(\pi+2k\pi)/p}) \quad (1)$$

Para un cierto valor de  $m \in \mathbb{Q}$ ,  $0 < m < 1$  y de  $p$  primo impar, ¿podemos asegurar que  $G_p(m)$  sea una potencia de exponente  $p$  de un número racional? Es decir, ¿será racional  $\sqrt[p]{1 + m^p}$  para cierto valor de  $m \in \mathbb{Q}$ ,  $0 < m < 1$ ?

**Proposición 1.1:** *El polinomio  $G_p(m) = m^p + 1$ , con  $p$  primo impar, tiene  $p$  raíces complejas conjugadas dos a dos [3]. Además, de las  $p$  raíces,  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-3}, \alpha_{p-2}, \alpha_{p-1}$ , son complejas conjugadas las que equidistan de los extremos. Esto último se puede comprobar gráficamente en el caso  $p = 5$  [2].*

**Proposición 1.2:** *Si  $e^{i\beta}$  y  $e^{-i\beta}$  representan dos raíces conjugadas del polinomio  $G_p(m)$ , con  $p$  primo impar, el producto  $(m - e^{i\beta})(m - e^{-i\beta})$  cumple:*

$$(m - e^{i\beta})(m - e^{-i\beta}) = m^2 - 2m\cos\beta + 1$$

(La demostración es elemental).

**Proposición 1.3:** *Si  $k_0 = (p - 1)/2$ , la descomposición de  $G_p(m)$ , con  $p$  primo impar, en producto de  $p$  factores irreducibles es, en  $\mathbb{C}[m]$ :*

$$G_p(m) = \prod_{k=0}^{k_0-1} (m - e^{i(\pi+2k\pi)/p}) \cdot (m + 1) \cdot \prod_{k_0+1}^{p-1} (m - e^{i(\pi+2k\pi)/p}) \quad (2)$$

*Demostración:* Para cierto valor de  $k$ , que podemos llamar  $k_0$ , se tiene que  $\alpha_{k_0} = e^{i(\pi+2k_0\pi)/p} = e^{i\pi} = -1$ . Para ello es suficiente que  $2k_0 + 1 = p$ , es

decir,  $k_0 = (p-1)/2$ . Por tanto, al ser  $\alpha_{k_0} = -1$ , si tenemos en cuenta (1) se llega a (2).  $\square$

**Proposición 1.4:** *La descomposición de  $G_p(m)$ , con  $p$  primo impar, en producto de  $(p+1)/2$  factores irreducibles es, en  $\mathbb{R}[m]$ :*

$$G_p(m) = \prod_{k=0}^{\frac{p-3}{2}} \left( m^2 - 2m \cos \frac{(2k+1)\pi}{p} + 1 \right) \cdot (m+1)$$

Además, la descomposición es única, salvo el orden en los factores.

*Demostración:* Para obtener dicha descomposición se ha partido de (2) y se han tenido en cuenta las proposiciones 1.2 y 1.3. En cualquier texto de álgebra se prueba la unicidad de la descomposición factorial de polinomios de una variable, tanto en  $\mathbb{C}[m]$  como en  $\mathbb{R}[m][3]$ .  $\square$

**Proposición 1.5:** *Supongamos que  $p$  representa un número primo y  $m \in \mathbb{Q}$ ,  $0 < m < 1$ . Definimos el polinomio de grado dos en la variable  $m$ , dependiente de un parámetro  $p$ ,  $F_p(m)$ , así:*

$$F_p(m) = m^2 - 2m \cos \frac{\pi}{p} + 1$$

Entonces  $F_p(m)$  se puede expresar, para ciertos valores de  $m$ , como el cuadrado de una expresión racional si  $p = 2$  o  $p = 3$  y no se puede expresar como el cuadrado de una expresión racional en los demás casos.

*Demostración:* Para probar dicha afirmación nos damos cuenta que, al ser  $\cos(\pi/p) < 1$ ,  $F_p(m)$  toma valores positivos. Intentamos expresarlo como el cuadrado de un número racional positivo,  $q$ . Es decir,  $F_p(m) = q^2$ . Si descomponemos  $q$  en dos sumandos [1],  $q = m + a$ , se tiene que:

$$m^2 - 2m \cos \frac{\pi}{p} + 1 = (m + a)^2$$

Despejando  $m$ :

$$m(a) = \frac{1 - a^2}{2(a + \cos \frac{\pi}{p})}$$

Para que  $m$  sea racional es necesario y suficiente que  $\cos(\pi/p)$  sea racional, ya que  $a \in \mathbb{Q}$ . Ahora bien, considerando el teorema 6.16 de [4], solo en los casos  $p = 2$  y  $p = 3$  se cumple que  $\cos(\pi/p)$  es racional, por lo que en dichos casos

exclusivamente  $F_p(m)$  se puede expresar como el cuadrado de una expresión racional, de forma similar a [1]. En los demás,  $F_p(m)$  es irracional y, en consecuencia,  $m$  también.  $\square$

**Corolario:**  $F_p(m)$  no se puede expresar como una potencia de exponente  $p$  primo de una expresión racional si  $p > 3$ .

**Teorema:** Supongamos que  $p > 3$  representa un número primo y  $m \in \mathbb{Q}$ ,  $0 < m < 1$ . Dada la descomposición de  $G_p(m)$  en  $\mathbb{R}[m]$ , que sabemos que es única:

$$G_p(m) = \prod_{k=0}^{\frac{p-3}{2}} (m^2 - 2 \cdot m \cdot \cos \frac{(2k+1)\pi}{p} + 1) \cdot (m+1) \quad (3)$$

Entonces  $G_p(m)$  no se puede expresar como una potencia de exponente  $p$  de una expresión racional.

*Demostración* (por reducción al absurdo): Supongamos que  $G_p(m)$  se puede expresar como una potencia de exponente  $p$  de una expresión racional. Designemos al ángulo que aparece en (3) como  $\beta_{k,p} = (2k+1)\pi/p$ , con  $k = 0, 1, 2, \dots, (p-3)/2$ . En virtud de [4] todos los valores de  $\cos \beta_{k,p}$  son irracionales para  $p > 3$ . Según la hipótesis de partida debe existir  $q \in \mathbb{Q}$  que verifique  $q^p = 1 + m^p$ . Por tanto:

$$q^p = \prod_{k=0}^{\frac{p-3}{2}} (m^2 - 2m \cos \beta_{k,p} + 1) \cdot (m+1) \quad (4)$$

Al ser el coseno estrictamente decreciente en  $(0, \pi)$ , todos los factores del segundo miembro de (4) son distintos y la igualdad descrita solo se puede cumplir cuando cada uno de ellos sea una potencia de exponente  $p$  de un término o número racional. El factor  $(m+1)$  se puede expresar, para ciertos valores de  $m$ , como una potencia  $p$ -ésima de un factor racional. Pero, admitiendo la hipótesis inicial, existirán factores que son potencias  $p$ -ésimas de ciertos términos racionales,  $q_k$ . Es decir:

$$q_k^p = m^2 - 2m \cos \beta_{k,p} + 1 \quad (5)$$

con  $q_k \in \mathbb{Q}$ , para todo  $k$  natural desde  $k = 0$  hasta  $k = (p-3)/2$ . Si nos fijamos en el primer miembro de (5) tenemos un número racional, pues  $q_k \in \mathbb{Q}$ , y si nos fijamos en el segundo miembro lo tenemos irracional, ya

que  $\cos\beta_{k,p} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , si  $p > 3$ . Tenemos, en consecuencia, una contradicción. Así pues,  $G_p(m)$  no se puede expresar como una potencia de exponente  $p$  de una expresión racional, si  $p > 3$ .  $\square$

**Aclaración:** Esto equivale a que (si  $p > 3$  y  $0 < m < 1$ ,  $p$  primo y  $m$  racional) el número  $\sqrt[p]{1+m^p}$  es irracional y las soluciones de la ecuación de Fermat con dos incógnitas también lo son para dichos valores del exponente [2]. Como la existencia de soluciones racionales de la ecuación de Fermat con dos incógnitas equivale a la de soluciones enteras de la ecuación de Fermat con tres incógnitas [5], el teorema anterior deja claro que si  $p > 3$  (con  $p$  primo) la ecuación de Fermat carece de soluciones enteras. Asimismo, si se demuestra la ausencia de las soluciones enteras con exponente  $p$  primo impar, queda probada para cualquier valor natural del exponente [6]. Es lo que se ha pretendido conseguir en este apartado (excepto para  $p = 3$ , ya estudiado en [2]).

## 2. Descomposición del 1 en suma de tres cuadrados

Se trata de expresar el 1 como suma de tres cuadrados de números racionales. Esto es, buscar las soluciones racionales de la ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Las soluciones dependerán de dos parámetros racionales [2]. Dividimos por  $x^2$  la ecuación por resolver:

$$1 + \frac{y^2}{x^2} + \frac{z^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} \implies 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$$

Se definen los parámetros racionales  $m$  y  $b$ :

$$m = \frac{y}{x}, \quad m + b = \frac{z}{x} \iff b = \frac{z - y}{x}$$

Por lo tanto,  $1 + m^2 + (m + b)^2 = 1/x^2$ . Si llamamos  $q$  a  $1/x$  se tiene la ecuación:

$$1 + m^2 + (m + b)^2 = q^2$$

Efectuamos la descomposición de  $q$  en dos sumandos,  $m$  y  $a$  [2], siendo  $a \in \mathbb{Q}$ ,  $a > 0$ :  $q = m + a$ . Tenemos, pues, que  $1 + m^2 + (m + b)^2 = (m + a)^2$ . Si se desarrolla, se despeja  $m$  y se toma la solución positiva, se llega a:

$$m = a - b + \sqrt{2a^2 - 2ba - 1} \tag{6}$$

Para que  $m$  sea racional el factor  $2a^2 - 2ba - 1$  ha de ser el cuadrado de una expresión racional. Se observa que  $2a^2 - 2ba - 1 = (a - b)^2 - (b^2 - a^2 + 1)$ . Ahora efectuamos los siguientes cambios de variables:

$$a - b = \xi > 0 \quad , \quad b^2 - a^2 + 1 = \eta$$

Para hallar  $a$  y  $b$  resolvemos el sistema formado por las ecuaciones anteriores, obteniéndose:

$$a = \frac{-\eta + \xi^2 + 1}{2\xi} \quad b = \frac{\eta + \xi^2 - 1}{-2\xi} \quad (7)$$

De acuerdo con (6), para que  $m$  sea racional,  $\xi^2 - \eta$  ha de ser el cuadrado de una expresión racional. Para ello se plantea  $\xi^2 - \eta = (\xi - c)^2$ , de forma similar a [1]:

$$\xi^2 - \eta = (\xi - c)^2 \implies \xi = \frac{\eta + c^2}{2c} \quad (8)$$

Como  $2a^2 - 2ba - 1 = \xi^2 - \eta$ , entonces, según (6) y (8):

$$m = \xi + \sqrt{(\xi - c)^2} = \xi + \xi - c = 2\xi - c = 2\left(\frac{\eta + c^2}{2c}\right) - c = \frac{\eta}{c}$$

Expresaremos las soluciones en función de los parámetros  $c$  y  $\eta$ . A partir de (7) y (8):

$$a = \frac{-\eta + \left(\frac{\eta+c^2}{2c}\right)^2 + 1}{2\left(\frac{\eta+c^2}{2c}\right)} = \frac{c^4 - 2c^2\eta + 4c^2 + \eta^2}{4c(c^2 + \eta)}$$

$$b = \frac{\eta + \left(\frac{\eta+c^2}{2c}\right)^2 - 1}{-2\left(\frac{\eta+c^2}{2c}\right)} = -\frac{c^4 + 6c^2\eta - 4c^2 + \eta^2}{4c(c^2 + \eta)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a(c, \eta) = \frac{c^4 - 2c^2\eta + 4c^2 + \eta^2}{4c(c^2 + \eta)} \\ b(c, \eta) = -\frac{c^4 + 6c^2\eta - 4c^2 + \eta^2}{4c(c^2 + \eta)} \\ m(c, \eta) = \frac{\eta}{c} \end{array} \right. \quad (9)$$

A partir de (9) y de las definiciones de  $m$  y  $b$  calculamos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$(m + a)^2 = \left( \frac{\eta}{c} + \frac{c^4 - 2c^2\eta + 4c^2 + \eta^2}{4c(c^2 + \eta)} \right)^2 = \frac{(c^4 + 2c^2\eta + 4c^2 + 5\eta^2)^2}{16c^2(c^2 + \eta)^2}$$

Como  $1/x^2 = q^2 = (m + a)^2$ , entonces:

$$x^2 = \frac{16c^2(c^2 + \eta)^2}{(c^4 + 2c^2\eta + 4c^2 + 5\eta^2)^2}$$

Al extraer la raíz cuadrada se halla  $x$ :

$$x = \frac{4c(c^2 + \eta)}{c^4 + 2c^2\eta + 4c^2 + 5\eta^2}$$

A continuación encontramos el valor de  $y$ :

$$y = mx = \frac{\eta}{c} \cdot \frac{4c(c^2 + \eta)}{c^4 + 2c^2\eta + 4c^2 + 5\eta^2} = \frac{4\eta(c^2 + \eta)}{c^4 + 2c^2\eta + 4c^2 + 5\eta^2}$$

Como  $m + b = z/x$ , entonces  $z = (m + b)x$ . Es decir:

$$\begin{aligned} z &= \left( \frac{\eta}{c} - \frac{c^4 + 6c^2\eta - 4c^2 + \eta^2}{4c(c^2 + \eta)} \right) \cdot \frac{4c(c^2 + \eta)}{c^4 + 2c^2\eta + 4c^2 + 5\eta^2} = \\ &= \frac{-c^4 - 2c^2\eta + 4c^2 + 3\eta^2}{c^4 + 2c^2\eta + 4c^2 + 5\eta^2} \end{aligned}$$

Las ecuaciones paramétricas buscadas son:

$$\begin{cases} x(c, \eta) = \frac{4c(c^2 + \eta)}{c^4 + 2c^2\eta + 4c^2 + 5\eta^2} \\ y(c, \eta) = \frac{4\eta(c^2 + \eta)}{c^4 + 2c^2\eta + 4c^2 + 5\eta^2} \\ z(c, \eta) = \frac{-c^4 - 2c^2\eta + 4c^2 + 3\eta^2}{c^4 + 2c^2\eta + 4c^2 + 5\eta^2} \end{cases} \quad (10)$$

Una tabla de valores de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , para algunos valores de  $c$  y  $\eta$  es, teniendo en cuenta (10):

Tabla 1: Soluciones de  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , según (10)

$c$	$\eta$	$x$	$y$	$z$
7/6	7/12	6/7	3/7	2/7
43/76	129/304	304/461	228/461	261/461
1/2	1/3	168/257	112/257	159/257
-2	-8	1/9	4/9	8/9
1	4	20/93	80/93	43/93
10/11	20/33	132/173	88/173	69/173

## 2.1. Cuaternas y ternas Pitagóricas

Si en la ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , cuyas soluciones racionales han sido halladas, se multiplican los dos miembros por  $w^2$ , siendo  $w$  el denominador común de  $x, y, z$ , resulta:

$$(wx)^2 + (wy)^2 + (wz)^2 = (w)^2 \quad (11)$$

Como  $wx, wy, wz$  son naturales, los números  $(wx, wy, wz, w)$  forman lo que podríamos denominar una cuaterna pitagórica. Y si se consigue que el cociente  $m(c, \eta) = \eta/c$  (que se puede fijar de antemano) sea igual a uno de los valores de  $m$  que pueden generar ternas pitagóricas [1], podremos obtener cuaternas pitagóricas cuyos dos términos también formen ternas pitagóricas. Por ejemplo, si  $m(43/76, 129/304) = 3/4$ , de los valores de la tabla 1 tenemos:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{304}{461}\right)^2 + \left(\frac{228}{461}\right)^2 = \left(\frac{380}{461}\right)^2$$

y además:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{304}{461}\right)^2 + \left(\frac{228}{461}\right)^2 + \left(\frac{261}{461}\right)^2 = 1$$

Una cuaterna pitagórica sería, en virtud de lo expuesto,  $(304, 228, 261, 461)$  y de aquí, una terna pitagórica sería  $(304, 228, 380)$ . Se puede obtener un cociente entre  $y$  y  $x$  igual a cierto valor racional exacto fijado de antemano ya que  $m = y/x = \eta/c$ , pero no es posible que el cociente entre  $z$  y  $x$  sea exactamente un valor racional fijado previamente. No obstante, es factible lograr que dicho cociente se aproxime cuanto se quiera al valor que deseemos.

Basta fijar el cociente  $\eta/c$  y dar el valor a  $b$  que queramos fijar para encontrar los valores racionales  $c$  y  $\eta$ . Para ello hay que tener presente que, para que  $\eta$  y  $c$  sean racionales, el valor racional de  $b$  que se consiga obtener no será, en la mayoría de los casos, exactamente igual al valor que se deseaba fijar, aunque sí tan próximo como se quiera. Por ejemplo, si pretendemos que  $b$  valga 0,5 y  $\eta/c = 3/4$ , para que  $z/x$  valga 1,25, debemos resolver, de acuerdo con (9), el sistema

$$\frac{1}{2} = -\frac{c^4 + 6c^2\eta - 4c^2 + \eta^2}{4c(c^2 + \eta)}, \quad \frac{3}{4} = \frac{\eta}{c}$$

La solución,  $c = 5\sqrt{2}/2 - 13/4 \approx 0,28553$  y  $\eta = 15\sqrt{2}/8 - 39/16 \approx 0,21415$ , corresponde a valores irracionales. Para conseguir que  $c$  y  $\eta$  tomen valores racionales, se toman valores aproximados, pero imponiendo que el cociente  $\eta/c$  sea exactamente igual a  $3/4$ . No valdrían los valores de  $c = 28553/100000$  y  $\eta = 21415/100000$ , pues  $\eta/c$  no sería igual a  $3/4$ . Con la ayuda de una hoja de cálculo, que da fracciones irreducibles y redondeadas, obtenemos fracciones simplificadas con números más pequeños para hallar los valores de  $\eta$  y  $c$ :  $\eta = 3/14$  y  $c = 2/7$ . Se cumple que  $\eta/c = 3/4$ . Para dichos valores de  $c$  y  $\eta$ , utilizando (10), resulta:  $x = 3248/5741$ ,  $y = 2436/5741$ ,  $z = 4059/5741$ . Se observa, de (9), que  $b = 1623/3248 = 0,49969... \approx 0,5$ . Con estos datos no es difícil darse cuenta de que otra cuaterna pitagórica sería (3248, 2436, 4059, 5741). Además,  $2436/3248 = 3/4$  y  $4059/3248 \approx 3/4 + 0,5$ . También aquí hay dos términos que forman parte de una terna pitagórica, (3248, 2436, 4060), pues  $3248^2 + 2436^2 = 4060^2$ . Una tabla de cuaternas pitagóricas en la que dos términos pertenecen a ternas pitagóricas se escribe a continuación (Tabla 2). Indicamos el cociente  $\eta/c$  con  $\eta$  y  $c$  iguales al numerador y denominador respectivamente de la fracción numérica que aparece en la tabla, excepto el primer ejemplo, explicado más arriba.

Tabla 2: Soluciones de (11), según (10)

$\eta/c$	$wx$	$wy$	$wz$	$w$
3/4	3248	2436	4059	5741
3/4	304	228	261	461
5/12	7152	2980	21525	22877
8/15	13980	7456	53133	55445
9/40	257440	57924	2582157	2595605

## 2.2. Interpretación geométrica

Si en la descomposición de la unidad en suma de tres cuadrados, según (10), se toman aquellos valores de  $x$  e  $y$  cuyo cociente  $y/x$  sea igual a alguno de los valores de  $m$  que generan ternas pitagóricas, según la fórmula  $m = (1 - a^2)/2a$ , estudiada en [1], esto equivale a suponer que podemos disponer de un ortoedro de dimensiones  $(x, y, z)$  encajado en una esfera de diámetro la unidad, tal que la diagonal del rectángulo de lados  $x$  e  $y$  sea un número racional y la diagonal del ortoedro mida la unidad indicada. De forma equivalente, se pueden calcular las dimensiones de un ortoedro, tal que una cara del ortoedro tenga su diagonal entera y la diagonal del ortoedro, también. Todo ello utilizando, sin más, cuaternas pitagóricas de las que dos términos pertenezcan a una terna pitagórica.

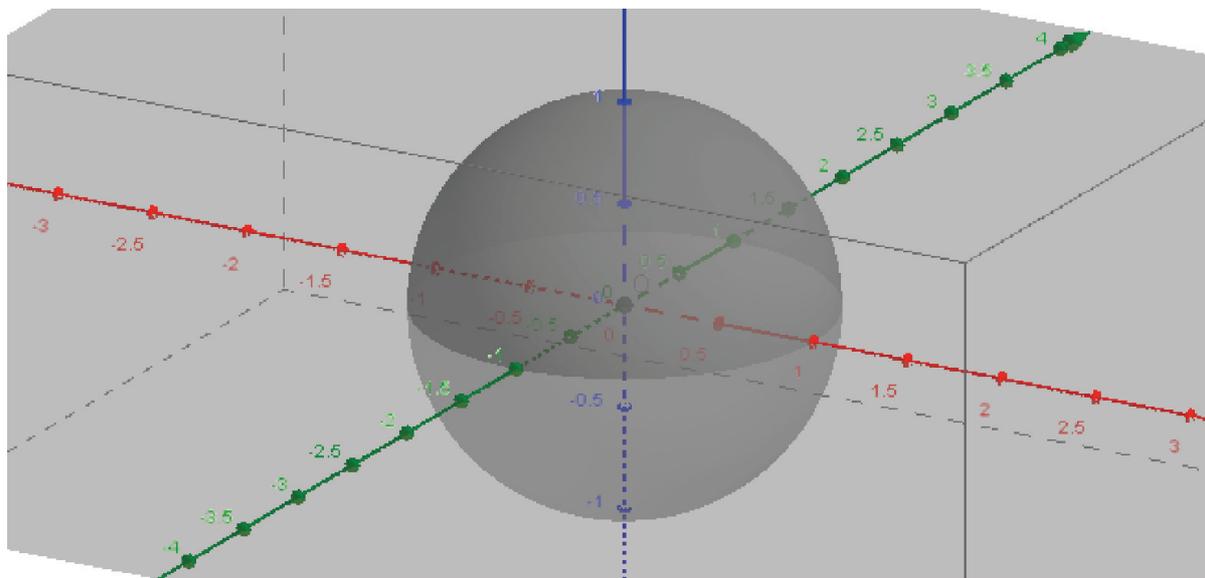


Figura 1: *Esfera unitaria donde se encajan ortoedros racionales*

## Conclusiones

En la primera parte del trabajo se ha probado un teorema que, teniendo en cuenta [5] y [6], implica el Último Teorema de Fermat, a excepción del caso  $p = 3$ , estudiado en [2]. Para ello ha bastado considerar las soluciones

reales explícitas dependientes de un solo parámetro racional, aplicar el teorema fundamental del álgebra para la descomposición del polinomio  $m^p + 1$  en factores reales y tener en cuenta que hay una infinidad de valores del coseno que son irracionales [4], pues esta irracionalidad de los factores de la descomposición única es suficiente para que no se pueda expresar dicho polinomio como una potencia  $p$ -ésima. En la segunda parte del trabajo se ha conseguido que las soluciones de la descomposición de la unidad en suma de tres cuadrados dependan del menor número de parámetros posible, lo que ha permitido encontrar un nuevo método de obtención de cuaternas pitagóricas, muchas de las cuales forman, además, parte de ternas pitagóricas, con su consiguiente interpretación geométrica.

## Referencias

- [1] Álvarez Mesa, J. (2014), Condiciones algebraicas de existencia de Ternas Pitagóricas, *Boletín de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, **98**, págs. 82–92.
- [2] Álvarez Mesa, J. (2016), Consideraciones en torno a ecuaciones diofánticas no lineales, *Boletín de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, **101**, págs 50–64.
- [3] Lentin, A. y Rivaud, J. (1982), *Álgebra moderna*, Editorial Aguilar, Madrid.
- [4] Niven, I. Zuckerman, H. Montgomery, H. (1991), *An introduction to the theory of numbers*, John Wiley and sons, fifth edition. New York.
- [5] Del Rio Mateos, A. (2005), *El reto de Fermat*. Editorial Nivola, Madrid.
- [6] Singh, S. (1998), *El enigma de Fermat*. Editorial Planeta, Barcelona.

# Randomizing Malthusian growth model

## Aleatorizando el modelo de crecimiento malthusiano

**J.C. Cortés López, E. García Moreno, A. Navarro Quiles**

Departamento de Matemática Aplicada  
Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar  
Universitat Politècnica de València  
jccortes@mat.upv.es, egarmo3@alumni.uv.es,  
annaqui@doctor.upv.es

### Resumen

*Este trabajo ilustra, mediante el modelo de crecimiento clásico malthusiano, cómo introducir la aleatoriedad utilizando el enfoque markoviano. Se prueba que la función generatriz de probabilidad del proceso estocástico solución, denominado de nacimiento, es una distribución binomial negativa desplazada. Se detalla una técnica para simular el proceso estocástico solución. También se realiza una breve digresión acerca de otras formas posibles de introducir la incertidumbre en el modelo determinista malthusiano.*

### Abstract

*This paper deals with the randomization of the classical Malthusian growth model, using a Markovian approach. We show that the solution stochastic process, usually referred to as birth process, corresponds to the shift negative binomial distribution. A simulation procedure is included. A brief discussion regarding alternative ways to consider randomness into the Malthusian model are also included.*

### Introducción

La ubicuidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) en la modelización matemática de fenómenos reales (leyes físicas, reacciones químicas,

procesos biológicos, etc) tiene sus raíces en los trabajos pioneros de los hermanos Bernoulli en el siglo XVII y llega hasta nuestros días. La aplicación de las EDOs clásicas a datos reales requiere asignar un valor nominal para cada uno de los *inputs* (coeficientes, término fuente, condiciones iniciales y/o frontera). Sin embargo, debido a la incertidumbre de los fenómenos bajo estudio y/o de los errores asociados a las mediciones para fijar los valores nominales de los *inputs*, es natural considerar aleatoriedad en la formulación de las EDOs de los modelos matemáticos. En este trabajo se estudia, a partir de un ejemplo sencillo -el modelo de crecimiento de Malthus- una forma de introducir aleatoriedad en modelos matemáticos basados en EDOs usando para ello un enfoque markoviano. A lo largo del trabajo la terna  $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$  denotará un espacio de probabilidad.

Como se verá posteriormente la distribución binomial negativa desempeñará un papel clave en el estudio que se realizará en este trabajo. Por ello, empezaremos recordando que una variable aleatoria (v.a.)  $X$  se dice que tiene una distribución binomial negativa de parámetros  $n \in \{1, 2, \dots\}$  y  $p \in (0, 1)$ ,  $X \sim \text{Binég}(n; p)$ , si su función de probabilidad (f.p.) es

$$f_X(x) = \mathbb{P}[X = x] = \binom{x+n-1}{n-1} p^n (1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

El valor de  $f_X(x)$  puede ser interpretado como la probabilidad de  $n$  éxitos en  $n+x$  intentos o pruebas, siendo  $p$  la probabilidad de éxito. Se puede probar, [3, 8, 10], que la función generatriz de probabilidad (f.g.p.) de  $X$ ,  $\mathcal{P}_X(z)$ , su media,  $\mu_X$ , y su varianza,  $\sigma_X^2$  están dadas respectivamente por

$$\mathcal{P}_X(z) = \mathbb{E}[z^X] = \frac{p^n}{(1 - (1-p)z)^n}, \quad z \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

$$\mu_X = \mathbb{E}[X] = \frac{n(1-p)}{p}, \quad \sigma_X^2 = \mathbb{V}[X] = \frac{n(1-p)}{p^2}. \quad (3)$$

A partir de (1) se puede definir la f.p.,  $f_Y(y)$ , de una v.a. binomial negativa desplazada,  $Y \sim \widehat{\text{Binég}}(n; p)$ , que en lugar de empezar en el valor  $y = 0$  empieza en el valor  $y = n$ , siendo  $n$  un entero positivo (téngase en cuenta (1) y que  $x = y - n$ )

$$f_Y(y) = \binom{y-1}{n-1} p^n (1-p)^{y-n}, \quad y = n, n+1, \dots \quad (4)$$

Por tanto, la f.g.p. de  $Y \sim \widehat{Bin}(n; p)$  está dada por

$$\mathcal{P}_Y(z) = \mathbb{E}[z^Y] = \mathbb{E}[z^{X+n}] = z^n \mathbb{E}[z^X] = z^n \mathcal{P}_X(z) = \frac{(pz)^n}{(1 - (1-p)z)^n}. \quad (5)$$

Claramente como  $Y = X + n$ , por las propiedades de la media y la varianza se tiene, por (3), que

$$\mu_Y = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X] + n = \frac{n}{p}, \quad \sigma_Y^2 = \mathbb{V}[Y] = \mathbb{V}[X] = \frac{n(1-p)}{p^2}. \quad (6)$$

## 1. El modelo de crecimiento malthusiano determinista: una revisión

Uno de los modelos clásicos de crecimiento más conocidos y, posiblemente el más sencillo, es el modelo de crecimiento geométrico o malthusiano. Se asumen las siguientes hipótesis: H1: Inicialmente hay  $n_0$  individuos; H2: Ningún individuo muere, es decir, solo se producen nacimientos; H3: No existe interacción entre los individuos; H4: La tasa de nacimiento,  $b > 0$ , para todos los individuos es la misma.

Denotando por  $n(t)$  el número de individuos en el instante  $t > 0$ , entonces por la ley de conservación de masas (en este caso de la población) en un intervalo de longitud  $\Delta t$ , se cumple:

$$n(t + \Delta t) - n(t) = bn(t)\Delta t, \quad (7)$$

siendo la constante de proporcionalidad  $b > 0$  (que por H4 no depende de  $t$ ). De (7) se deduce, mediante un paso al límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  y utilizando la definición de derivada, que

$$n'(t) = bn(t). \quad (8)$$

Teniendo en cuenta H1 (con tiempo inicial  $t_0 = 0$ ),

$$n(0) = n_0, \quad (9)$$

y resolviendo el problema de valor inicial (PVI) (8)–(9), se obtiene la dinámica poblacional en cualquier instante  $t$  finito,

$$n(t) = n_0 e^{bt}. \quad (10)$$

Este modelo ha sido aplicado para estudiar, por ejemplo, el crecimiento de especies en intervalos de tiempo finitos donde es plausible asumir H1–H4, pero obviamente no es válido en el largo plazo, ya que, al ser  $b > 0$ , la expresión (10) predice un crecimiento ilimitado ( $n(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$ ), y los recursos siempre son limitados [5].

## 2. Aleatorización del modelo de crecimiento malthusiano: ecuaciones de Kolmogorov

El objeto de este apartado es mostrar una posible aleatorización del modelo de Malthus (8)–(9), basado en el hecho de que los nacimientos, en la práctica, no se producen de forma “segura”, sino con cierta probabilidad. En primer lugar, conviene señalar que existen diferentes formas de llevar a cabo la aleatorización:

1) Asumiendo directamente que la tasa de nacimiento  $b > 0$  es una v.a. positiva,  $B$ , en cuyo caso la ecuación (8) se denomina *Ecuación Diferencial Aleatoria (EDA)*. La solución del PVI (8)–(9) es el proceso estocástico (p.e.)  $N^{\text{EDA}}(t)$ , [11], con funciones media,  $\mu_N(t)$ , y desviación típica,  $\sigma_N(t)$ ,

$$N^{\text{EDA}}(t) = n_0 e^{Bt}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_{N^{\text{EDA}}}(t) = n_0 \mathbb{E} [e^{Bt}], \\ \sigma_{N^{\text{EDA}}}(t) = (n_0)^2 \left\{ \mathbb{E} [e^{2Bt}] - (\mathbb{E} [e^{Bt}])^2 \right\}. \end{array} \right.$$

2) Perturbando la tasa de nacimiento  $b$  mediante un ruido aleatorio con cierta intensidad  $\sigma > 0$ . Típicamente se elige esta perturbación a través de la derivada del proceso de Wiener,  $W'(t)$ , que se denomina ruido blanco. Esto conduce a una *Ecuación Diferencial Estocástica (EDE)* de tipo Itô:

$$n'(t) = bn(t) \xrightarrow[n(t) \equiv N(t)]{b \Rightarrow b + \sigma W'(t), b, \sigma > 0} \frac{dN(t)}{dt} = (b + \sigma W'(t)) N(t),$$

$$dN(t) = (b + \sigma W'(t)) N(t) dt \implies dN(t) = bN(t) dt + \sigma N(t) W'(t) dt,$$

y teniendo en cuenta la definición formal de la diferencial,  $dW(t) = W'(t) dt$  se llega a

$$dN(t) = bN(t) dt + \sigma N(t) dW(t). \quad (11)$$

El modelo (8) y (11) se ha utilizado en el área de las Finanzas para estudiar la dinámica de un subyacente, [1, 6]. Utilizando el cálculo de Itô se puede probar, [6],

$$N^{\text{EDE}}(t) = n_0 e^{\left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)}, \quad \begin{cases} \mu_{N^{\text{EDE}}}(t) = n_0 e^{bt}, \\ \sigma_{N^{\text{EDE}}}^2(t) = (n_0)^2 e^{2bt} (e^{\sigma^2 t} - 1). \end{cases}$$

En estas páginas adoptamos otro enfoque, inspirado en [7, Cap.1], para introducir la aleatoriedad en el modelo malthusiano, asumiendo que el número de ejemplares de la población, en lo sucesivo denotado por  $N_t$ , solo puede tomar los valores discretos,  $n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$ , en cualquier instante de tiempo  $t > 0$ . Por tanto, formalmente tenemos un p.e. discreto en tiempo continuo:

$$\{N_t : t \geq 0 : N_t \in \{n_0, n_0 + 1, \dots\}\}, \quad (12)$$

y, por conveniencia, introducimos la siguiente notación:

$$P_n(t) = \mathbb{P}[N_t = n], \quad n = 0, 1, 2, \dots, n_0 - 1, n_0, n_0 + 1, \dots \quad (13)$$

asumiendo que al inicio, la población es  $n_0$  con probabilidad 1:

$$P_{n_0}(0) = 1, \quad P_n(0) = 0, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots, n_0 - 1, n_0 + 1, \dots \quad (14)$$

y que en ningún instante hay un número de ejemplares menor que el inicial,  $n_0$ :

$$P_n(t) = 0, \quad \forall n = 0, 1, \dots, n_0 - 1. \quad (15)$$

Esta condición asegura que  $\{N_t, t \geq 0\}$  es un *proceso de nacimiento*.

Del mismo modo que en el modelo malthusiano determinista se han asumido H1–H4, en el contexto aleatorio en lo sucesivo se asumirán las hipótesis:  $\hat{H}1$ : Inicialmente la población es  $n_0$ , (véase (14));  $\hat{H}2$  y  $\hat{H}3$  las mismas que H2 y H3;  $\hat{H}4$ : La probabilidad de que en un intervalo de tiempo de longitud  $\Delta t$  ocurra un nacimiento es  $b\Delta t + o(\Delta t)$ , y que ocurra más de un nacimiento es  $o(\Delta t)$ , siendo  $o(\cdot)$  la notación “o”pequeña de Landau, [2, pp. 41–50]. Esta hipótesis nos indica que si  $\Delta t$  es suficientemente pequeño, en el intervalo  $(t, t + \Delta t)$  hay un nacimiento con probabilidad  $b\Delta t$  más una cantidad despreciable con respecto al tamaño  $\Delta t$ .

Observemos que a partir de  $\hat{H}1$ – $\hat{H}4$  se deducen las siguientes probabilidades para los incrementos de los nacimientos,  $\Delta N_t = N_{t+\Delta t} - N_t$ ,

$$P_{n+j,n}(\Delta t) = \mathbb{P}[\Delta N_t = j \mid N_t = n] = \begin{cases} 1 - bn\Delta t + o(\Delta t) & \text{si } j = 0, \\ bn\Delta t + o(\Delta t) & \text{si } j = 1, \\ o(\Delta t) & \text{si } j \geq 2, \\ 0 & \text{si } j < 0. \end{cases} \quad (16)$$

Por tanto, obsérvese que los incrementos,  $\Delta N_t$ , solo pueden tomar los valores 0 (no hay ningún nacimiento), ó 1 (si hay exactamente un nacimiento), en intervalos de longitud  $\Delta t$ ; y el resto de posibles valores del incremento son probabilísticamente despreciados. Esto implica que en el instante  $t + \Delta t$  la población es de tamaño  $n$  si en el instante  $t$  era de tamaño  $n$  y no se ha producido ningún nacimiento, o tamaño  $n - 1$  y se ha producido 1 nacimiento, durante el incremento de tiempo transcurrido,  $\Delta t$ .

Ahora vamos a establecer una relación clave, similar a la expresión (7) usada en el escenario determinístico, que mediante un paso al límite nos va a permitir establecer una ecuación diferencial cuya incógnita es la distribución de probabilidad  $P_n(t)$ . Para ello, obsérvese que teniendo en cuenta (13), (16) y aplicando el Teorema de la Probabilidad Total se tiene

$$\begin{aligned} P_n(t + \Delta t) &= \mathbb{P}[\Delta N_t = 0 \mid N_t = n] \mathbb{P}[N_t = n] \\ &+ \mathbb{P}[\Delta N_t = 1 \mid N_t = n - 1] \mathbb{P}[N_t = n - 1] \\ &= P_{n,n}(t)P_n(t) + P_{n,n-1}(t)P_{n-1}(t) \\ &= (1 - bn\Delta t + o(\Delta t)) P_n(t) + (b(n - 1)\Delta t + o(\Delta t)) P_{n-1}(t), \end{aligned}$$

es decir, reordenando términos

$$P_n(t + \Delta t) - P_n(t) = b(n - 1)\Delta t P_{n-1}(t) - bn\Delta t P_n(t) + (P_{n-1}(t) + P_n(t))o(\Delta t).$$

Ahora dividiendo por  $\Delta t$ , tomando límites cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  y teniendo en cuenta que por definición de  $o(\Delta t)$  se cumple que  $o(\Delta t)/\Delta t \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$ , tenemos

$$P'_n(t) = b(n - 1)P_{n-1}(t) - bnP_n(t), \quad t > 0, \quad n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots \quad (17)$$

Obviamente por (14) y (15) se tiene

$$\left. \begin{aligned} P'_n(t) &= 0, & t > 0, & \quad n = 0, 1, \dots, n_0 - 1, \\ P_n(0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

### 3. Resolviendo las ecuaciones de Kolmogorov

En este apartado resolveremos las ecuaciones diferenciales dadas en (17) y (18), denominadas ecuaciones de Kolmogorov, que determinan la distribución de probabilidad  $P_n(t)$  de que en el instante  $t > 0$  haya  $n$  individuos. Empezamos por el PVI (18), que es más sencillo, y cuya solución es

$$P_n(t) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, n_0 - 1, \quad t \geq 0. \quad (19)$$

Ahora observemos que tomando  $n = n_0$  en (17) y considerando que por (19)  $P_{n_0-1} = 0$ , se tiene

$$P'_{n_0}(t) = b(n_0 - 1)P_{n_0-1}(t) - bn_0P_{n_0}(t) = -bn_0P_{n_0}(t), \quad t > 0. \quad (20)$$

Así, de (20) y de la primera condición de (14) se obtiene el siguiente PVI

$$\left. \begin{aligned} P'_{n_0}(t) &= -bn_0P_{n_0}(t), & t > 0, \\ P_{n_0}(0) &= 1, \end{aligned} \right\}$$

cuya solución es

$$P_{n_0}(t) = e^{-bn_0t}, \quad t \geq 0. \quad (21)$$

Esto nos indica que la probabilidad de que haya  $n_0$  individuos en cualquier instante  $t$  decrece exponencialmente con la tasa de natalidad  $b$  y el tiempo, siendo esta probabilidad 1 en  $t = 0$  (obsérvese que  $P_{n_0}(t) \in [0, 1], \forall t > 0, \forall b > 0$ , pues  $n_0 > 0$ ).

Vamos ahora a determinar las probabilidades  $P_n(t)$  para  $n = n_0, n_0+1, \dots$  y  $t > 0$  (incluimos el valor  $n = n_0$ , aunque ya se ha calculado en (21) porque como veremos puede incluirse en la fórmula final), teniendo en cuenta la definición de la f.g.p. del p.e.  $N(t)$ , [9],

$$\mathcal{P}_N(z, t) = \mathbb{E} \left[ z^{N(t)} \right] = \sum_{n=n_0}^{\infty} P_n(t) z^n, \quad z \in \mathbb{R}, \quad (22)$$

siendo  $P_n(t)$  la probabilidad definida en (13).

Para ello vamos a establecer una ecuación en derivadas parciales para la f.g.p.  $\mathcal{P}_N(z, t)$  manipulando adecuadamente la relación (17) y teniendo en cuenta (22). El “truco” consiste en multiplicar (17) por  $z^n$  para  $n = n_0, n_0 + 1, \dots$  y sumar las expresiones obtenidas. Esto conduce a:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=n_0}^{\infty} P'_n(t)z^n &= b \sum_{n=n_0}^{\infty} (n-1)P_{n-1}(t)z^n - b \sum_{n=n_0}^{\infty} nP_n(t)z^n \\
&= bz^2 \sum_{n=n_0}^{\infty} (n-1)P_{n-1}(t)z^{n-2} - bz \sum_{n=n_0}^{\infty} nP_n(t)z^{n-1} \\
&= bz^2 \sum_{n=n_0-1}^{\infty} nP_n(t)z^{n-1} - bz \sum_{n=n_0}^{\infty} nP_n(t)z^{n-1} \\
&= bz^2 \sum_{n=n_0}^{\infty} nP_n(t)z^{n-1} - bz \sum_{n=n_0}^{\infty} nP_n(t)z^{n-1} \\
&= bz(z-1) \sum_{n=n_0}^{\infty} nP_n(t)z^{n-1}. \tag{23}
\end{aligned}$$

Notar que en el anterior desarrollo se ha aplicado la propiedad dada en (15).

Asumiendo que la serie que define la f.g.p. converge uniformemente respecto  $t$  y  $z$ , para poder conmutar la derivada respecto de  $t$  y  $z$  y la suma infinita que la define, de (22) y (23), formalmente se deduce

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{P}_N(z, t)) &= bz(z-1) \frac{\partial}{\partial z} (\mathcal{P}_N(z, t)), \\
\mathcal{P}_N(z, 0) &= z^{n_0}.
\end{aligned} \right\} \tag{24}$$

Obsérvese que se ha formulado una ecuación en derivadas parciales (EDP) para la f.g.p.,  $\mathcal{P}_N(z, t)$ , y una condición inicial, la cual ha sido establecida teniendo en cuenta (22) y que  $n_0$  es un valor determinístico

$$\mathcal{P}_N(z, 0) = \mathbb{E} [z^{N(0)}] = \mathbb{E} [z^{n_0}] = z^{n_0}.$$

Ahora necesitamos resolver el PVI (24), y para ello usaremos el método de las características [4]. Mediante este método se asume que la EDP puede ser

expresada como un sistema de EDOs a lo largo de las curvas características, las cuales se expresan en términos de ciertas variables auxiliares,  $s$  y  $r$ :

$$\mathcal{P}_N(z, t) \equiv \mathcal{P}_N(z(s, r), t(s, r)) \equiv \mathcal{P}(s, r).$$

Se asume que a lo largo de las curvas características la variable  $s$  es constante, por lo que

$$\mathcal{P}_N(z(s, r), t(s, r)) = \mathcal{P}(z(r), t(r)).$$

Las curvas características se determinan resolviendo los siguientes sistemas de EDOs (véase (24))

$$\left. \begin{aligned} \frac{dt}{dr} &= 1, \\ t(s, 0) &= 0, \end{aligned} \right\} \text{(I)} \quad \left. \begin{aligned} \frac{dz}{dr} &= -bz(z-1), \\ z(s, 0) &= s, \end{aligned} \right\} \text{(II)} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}_N}{dr} &= 0, \\ \mathcal{P}_N(s, 0) &= s^{n_0}. \end{aligned} \right\} \text{(III)}$$

Obsérvese que el método funciona porque a lo largo de las curvas características, las soluciones de las ecuaciones dadas en (25) son también soluciones de la EDP (24):

$$\left. \begin{aligned} 0 &\stackrel{\text{(III)}}{=} \frac{d\mathcal{P}_N}{dr} = \frac{\partial\mathcal{P}_N}{\partial z} \frac{dz}{dr} + \frac{\partial\mathcal{P}_N}{\partial t} \frac{dt}{dr} \stackrel{\text{(I)}}{=} -bz(z-1) \frac{\partial\mathcal{P}_N}{\partial z} + \frac{\partial\mathcal{P}_N}{\partial t}, \\ z^{n_0} &= \mathcal{P}_N(z, 0) = \mathcal{P}_N(s, 0) \stackrel{\text{(III)}}{=} s^{n_0}. \end{aligned} \right\}$$

Las soluciones de los PVI (25)–(I)–(III) son, respectivamente

$$t(s, r) = r. \quad z(s, r) = \frac{s}{s + (1-s)e^{-br}}. \quad \mathcal{P}_N(s, r) = s^{n_0}. \quad (26)$$

Por tanto, sustituyendo la primera igualdad de (26) en la segunda se tiene que  $z = s / (s + (1-s)e^{-bt})$  y despejando de aquí  $s$  en función de  $t$  se llega a que  $s = (ze^{-bt}) / (ze^{-bt} - (z-1))$  que sustituido en la última igualdad de (26) nos da la solución buscada

$$\mathcal{P}_N(z, t) = \left( \frac{ze^{-bt}}{ze^{-bt} - (z-1)} \right)^{n_0} = \frac{z^{n_0} e^{-bn_0t}}{[1 - z(1 - e^{-bt})]^{n_0}}. \quad (27)$$

Observemos que fijado  $t$ , (27) se corresponde con la f.g.p. de una v.a. binomial negativa desplazada (véase (5)) tomando  $n = n_0$  y  $p = e^{-bt} \in (0, 1)$ .

Utilizando la identificación  $Y = N_t$  y las relaciones dadas en (6), a partir de (27) se deduce el valor de las funciones media y varianza del proceso malthusiano de nacimiento,  $\{N_t : t \geq 0\}$ , definido en (12)–(15)

$$\mu_N(t) = n_0 e^{bt}, \quad \sigma_N^2(t) = n_0 e^{2bt} (1 - e^{-bt}) = n_0 e^{bt} (e^{bt} - 1). \quad (28)$$

En la Fig. 1 se muestra, para diferentes instantes temporales  $\hat{t}$  fijos, la f.p. del p.e. solución,  $P_n(t)$ , del modelo malthusiano, la cual está dada por (4), con  $Y \equiv N_{\hat{t}}$  y,  $n = n_0$  y  $p = e^{-bt} \in (0, 1)$ .

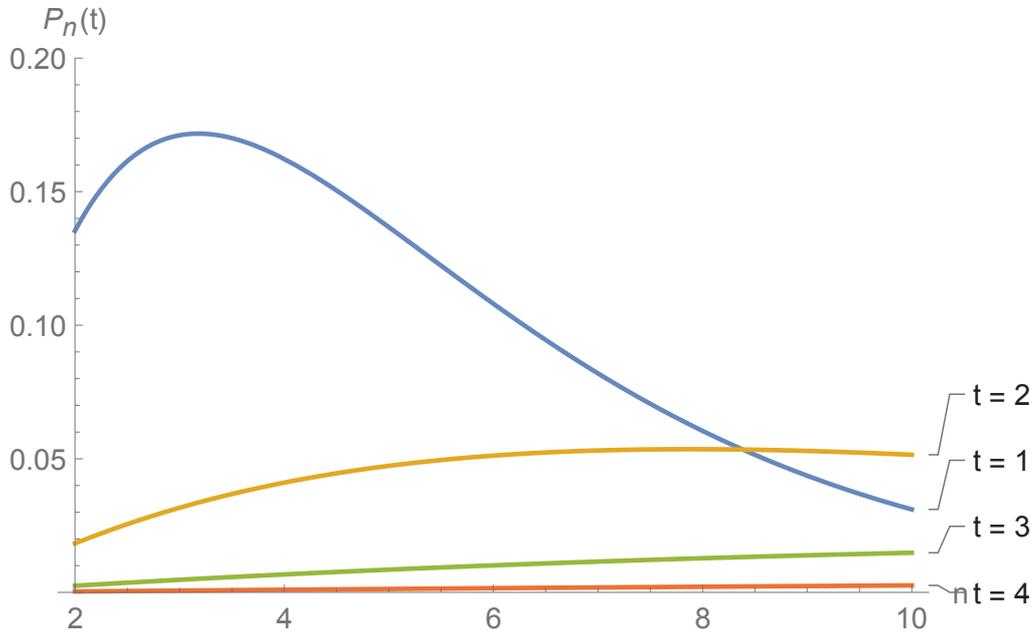


Figura 1: Representación de la f.p. del p.e. solución del modelo malthusiano aleatorizado tomando,  $n_0 = 2$ ,  $b = 1$ , para los instantes temporales  $t = 1, 2, 3, 4$  sobre el dominio  $n = 2, 3, \dots, 10$ .

Es interesante comparar estas expresiones de las funciones media y varianza del modelo malthusiano aleatorizado según el enfoque markoviano con las expresiones que se obtienen vía EDAs y EDEs. Esta comparativa se detalla en el Cuadro 1. A partir de estos resultados se observan importantes diferencias, sobre todo a nivel de variabilidad (varianza) que indican el impacto

que tiene la forma de modelizar la incertidumbre incluso en un modelo básico como es el proceso de nacimiento o modelo de crecimiento malthusiano. Este análisis comparativo se puede extender a otros momentos estadísticos de orden superior.

Enfoque	Media	Varianza
EDAs	$n_0 \mathbb{E} [e^{Bt}]$	$(n_0)^2 \left\{ \mathbb{E} [e^{2Bt}] - (\mathbb{E} [e^{Bt}])^2 \right\}$
EDEs	$n_0 e^{bt}$	$(n_0)^2 e^{2bt} (e^{\sigma^2 t} - 1)$
Markoviano	$n_0 e^{bt}$	$n_0 e^{bt} (e^{bt} - 1)$

Cuadro 1: Comparación de la media y de la varianza de la solución de un proceso de nacimiento en función del enfoque utilizado para introducir la incertidumbre en el modelo determinístico: EDA's, EDEs y el enfoque Markoviano.

#### 4. Simulación

En aras de poder realizar simulaciones del p.e.  $\{N_t : t \geq 0\}$ , definido en (12)–(15), es necesario a su vez simular los instantes temporales en los cuales tiene lugar un nacimiento. Con este propósito supongamos que  $N_{T_i} = n$  y que  $N_{T_{i+1}} = n + 1$  (los tiempos se denotan con letras mayúsculas para enfatizar que son consideradas como v.a.'s), y denotemos por  $\tau_i = T_{i+1} - T_i$  la v.a. continua y positiva que representa el tiempo hasta el siguiente nacimiento dado que el proceso está en el estado  $n$  ( $\tau_i$  se denomina *tiempo entre eventos*). Denotemos por  $H_n(t) = \mathbb{P}[t + T_i < T_{i+1}] = \mathbb{P}[\tau_i > t]$  la probabilidad de que el proceso permanezca en el estado  $n$  durante un período de tiempo  $t$ . Asumiendo que la probabilidad de permanecer en el estado  $n$  durante un período de tiempo mayor,  $t + \Delta t$ , vendrá dado por la probabilidad de permanecer en el estado  $n$  durante un tiempo  $t$ , por la probabilidad de pasar del estado  $n$  al mismo estado en un paso de tiempo  $\Delta t$ , y teniendo en cuenta (16), se tiene

$$H_n(t + \Delta t) = H_n(t)P_{n,n}(\Delta t) = H_n(t)(1 - bn\Delta t + o(\Delta t)). \quad (29)$$

Restando  $H_n(t)$  a ambos lados de la igualdad anterior, dividiendo por  $\Delta t$  y tomando límites nos queda:

$$\frac{dH_n(t)}{dt} = -bnH_n(t).$$

Como  $H_n(0) = \mathbb{P}[\tau_i > 0] = 1$ , resolviendo este problema de valor inicial obtenemos su solución,  $H_n(t) := \mathbb{P}[\tau_i > t] = e^{-bnt}$ , o equivalentemente  $\mathbb{P}[\tau_i < t] = 1 - H_n(t) = 1 - e^{-bnt}$ , lo cual nos indica que la v.a. tiempo  $\tau_i$  tiene una función de distribución exponencial de parámetro  $bn$ , ( $\tau_i \sim \text{Exp}(bn)$ ), [8]. Entonces, como para una v.a. exponencial se cumple  $\mathbb{E}(\tau_i) = 1/(bn)$ , el tiempo medio que estaremos esperando hasta que se produzca un nuevo nacimiento será  $1/(bn)$ . Es importante observar que la relación (29) es intrínseca a la distribución exponencial [8], y ello implica la propiedad de *falta de memoria* que tiene el proceso markoviano  $\{N_t : t \geq 0\}$  para sus tiempos entre eventos,  $\tau_i$ . En base a la distribución exponencial de  $\tau_i$  y utilizando el método de la función de distribución inversa para simular v.a.'s (véase [9]), a continuación se indican los pasos necesarios para obtener  $M$  simulaciones  $t = \tau_i(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ :

*Paso 1:* Generar un valor  $u$  de una distribución uniforme en el intervalo  $[0, 1]$ :  $u = U(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , siendo  $U \sim U([0, 1])$ .

*Paso 2:* Calcular  $t = -(\ln(1 - u))/bn$ .

*Paso 3:* Repetir  $M$  veces los Pasos 1 y 2.

En la Fig. 2 se muestran 2 simulaciones del p.e. solución,  $\{N_t : t \geq 0\}$ , del modelo malthusiano. También se han representado en dicha figura las funciones media más/menos una desviación típica a partir de las expresiones dadas en (28). Las simulaciones se han realizado con el software Mathematica<sup>©</sup> usando el siguiente código basado en los Pasos 1–3.

```

b = 1; time = 5; init = 2; t = List[0]; i = List[init]; j = 1;
While[i[[j]] > 0 && t[[j]] < time,
  U1 = RandomReal[];
  a = b*i[[j]];
  t = Append[t, t[[j]] - Log[U1]/a];
  i = Append[i, i[[j]] + 1];
  j = j + 1; ]

```

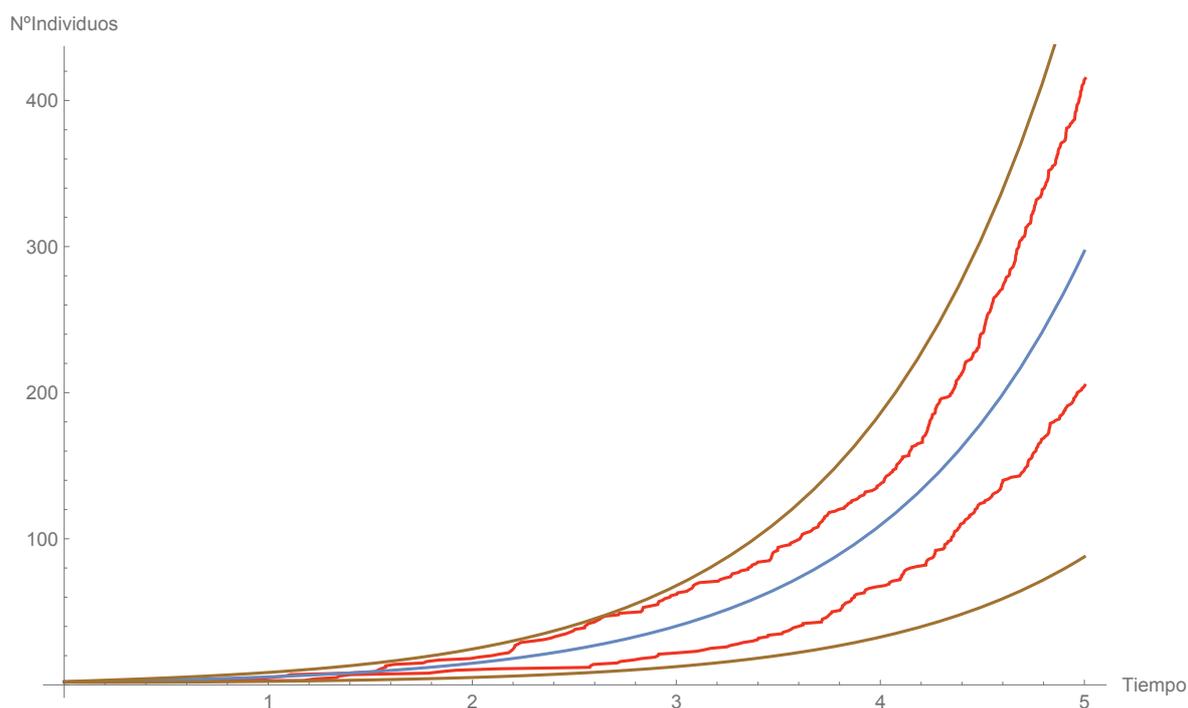


Figura 2: *Dos simulaciones del p.e. solución del modelo malthusiano aleatorizado tomando,  $n_0 = 2$ ,  $b = 1$  (líneas quebradas) junto a su función media (línea central) y la media más/menos una desviación típica (líneas continuas superior e inferior).*

## 5. Conclusiones

En este trabajo se han estudiado, con cierto detalle, los fundamentos matemáticos para introducir aleatoriedad en un sencillo, pero importante modelo, el modelo de crecimiento malthusiano. Para ello se ha seguido el paradigma markoviano. Al mismo tiempo, se han subrayado las diferencias a nivel de función media y varianza del proceso estocástico solución, respecto de otros importantes enfoques disponibles en la literatura. También se ha estudiado un método para simular el proceso estocástico solución. Las ideas expuestas en este trabajo pueden generalizarse a otros modelos relevantes de la biología, como por ejemplo el modelo logístico.

## Referencias

- [1] Calbo, G. (2009): El modelo matemático lognormal para valorar activos financieros: un enfoque didáctico. Bol. Puig Adam 81, pp: 13–25.
- [2] Cormen, T.H., Leiserson, C.E., Rivest, R.L. y Stein, C. (2001): Introduction to Algorithms. Second Edition. MIT Press and McGraw–Hill.
- [3] DeGroot, M.H. (1988): Probabilidad y Estadística, Ed. Addison-Wesley Iberoamericana. Madrid.
- [4] Evans, L.C. (2010): Partial Differential Equations, American Math. Soc. New Jersey.
- [5] Martínez Pérez, M.C. y Pérez de Vargas, A. (1993): Métodos Matemáticos en Biología. Ed. Centro de Estudios Ramón Areces. Madrid.
- [6] Mikosch, T. (2000): Elementary Stochastic Calculus with Finance in View. WorldScientific. Singapore.
- [7] Allen, L. (2008): Mathematical Epidemiology (Eds. Brauer, F., van den Driessche, P. y Wu, J.). Mathematical Biosciences Subseries. Lecture Notes in Mathematics. Springer. Heildelberg.
- [8] Quesada, V. y García A. (1988): Lecciones de Cálculo de Probabilidades, Ed. Díaz de Santos. Madrid.
- [9] Ross, S.M. (1997): Simulación. 2ª edición. Ed. Pearson-Prentice Hall. Madrid.
- [10] Ross, S.M. (2009): Introduction to Probability Models. 10th ed. Ed. Academic Press. New York.
- [11] Soong, T.T. (1973): Random Differential Equations in Science and Engineering. Ed. Academic Press. New York.

# Determining the “Nine Points Circumference” from Cyclic Quadrilateral Relations between them

## Determinación de la “circunferencia de los 9 puntos” mediante relaciones cuadrangulares cíclicas entre ellos

**José Alberto García Suárez**

Profesor de Matemáticas de Secundaria y de la USC jubilado

jalgasu@mundo-r.com

### **Abstract**

*In this paper, the “nine points circle” theorem is proved. To achieve this, certain quadrilaterals, such that three of its vertices are the middle points of the sides of the given triangle and the fourth is one of the six remaining points, are considered and proved to be cyclic.*

### **Introducción**

En todo triángulo, los pies de las alturas, los puntos medios de los lados y los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro con los vértices, a los que se denomina *puntos de Euler*, están en una misma circunferencia. Karl W. Feuerbach (1800-1834) probó que están los seis primeros, y Orly Terquem (1782-1862), que también los tres últimos pertenecen a esta “*circunferencia de los nueve puntos*”, conocida asimismo como “*de Euler*” o “*de Feuerbach*”.

En las elaboradas demostraciones de este teorema habitualmente recogidas en los textos ( ver p.ej. [1] ), se utilizan diversas propiedades del triángulo, como que las bisectrices interior y exterior de cada ángulo abarcan el diámetro de la circunferencia circunscrita que está sobre la mediatriz del lado opuesto; o la coincidencia de las alturas con las bisectrices de su triángulo órtico. La breve demostración elemental que aquí se expone, basada exclusivamente en la relación angular característica de los cuadriláteros cíclicos (y que, sorprendentemente, no encontré desarrollada en la numerosa bibliografía consultada), evidencia, al mismo tiempo, las estructuras poligonales que se configuran entre los citados puntos.

## 1. Configuraciones poligonales entre los 9 puntos de la circunferencia

*Teorema.* Los tres puntos medios de los lados de un triángulo, los pies de las alturas y los tres puntos de Euler, están en una misma circunferencia, situados de modo que los tres primeros forman con cada pie de altura un trapezio isósceles, y los puntos de Euler son diametralmente opuestos a los puntos medios, formando por lo tanto un triángulo simétrico al formado por éstos, respecto al centro de la circunferencia.

*Demostración.* Dado el triángulo  $ABC$ , sean  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , los pies de las alturas;  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ , los puntos medios de los lados  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ ;  $O$  el ortocentro; y  $P$ ,  $P'$  y  $P''$  los puntos de Euler (Figura 1). La altura  $QM$  del triángulo  $BQA'$  es paralela media del triángulo  $ABA'$  y, por tanto, el triángulo  $BQA'$  es isósceles. Pero, al ser  $SR$  paralela media de  $ABC$ , es  $SR=QB$ , y en consecuencia  $QA'RS$  es un trapezio isósceles, y por lo tanto, cíclico. Y lo mismo sucede con los cuadriláteros que tanto  $B'$  como  $C'$  forman con  $Q$ ,  $R$  y  $S$ , por lo que los seis puntos  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $Q$ ,  $R$  y  $S$  están en una misma circunferencia.

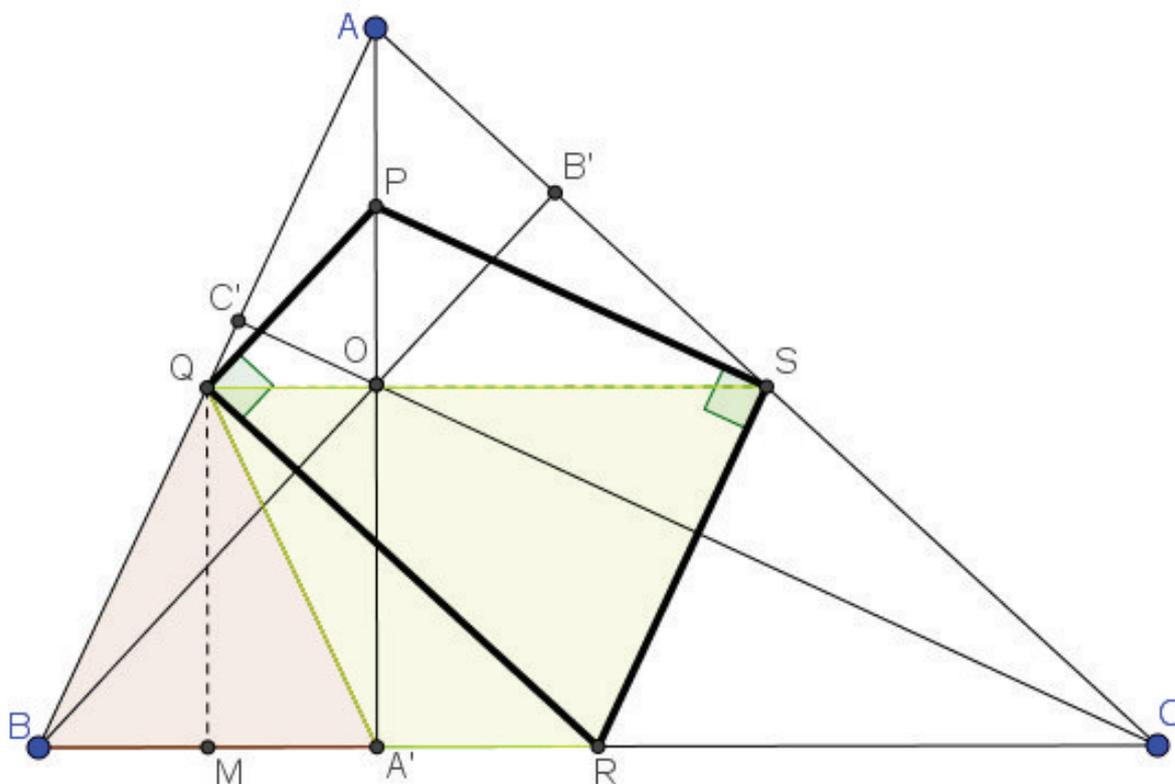


Figura 1

Veamos ahora que el cuadrilátero  $PQRS$  que determina el punto de Euler  $P$  con los puntos medios de lados (Figura 1) es cíclico, por ser rectos los ángulos opuestos  $PQR$  y  $PSR$ , lo que implica además que  $P$  y  $R$  sean diametralmente opuestos en la circunferencia  $QRS$ . Ello sigue de ser  $PQ$  paralela media del triángulo  $AOB$ , de ser  $QR$  paralela media de  $ABC$  y de ser  $OB$  perpendicular a  $AC$ .

Análogamente se prueba la perpendicularidad entre  $PS$  y  $SR$ . Por el mismo razonamiento, se deduce que los otros dos puntos de Euler,  $P'$  y  $P''$ , son diametralmente opuestos a  $S$  y  $Q$  respectivamente, resultando así que el triángulo  $PP'P''$  es simétrico al  $QRS$  respecto al centro,  $D$ , de la circunferencia  $QRS$  de los 9 puntos (Figura 2).

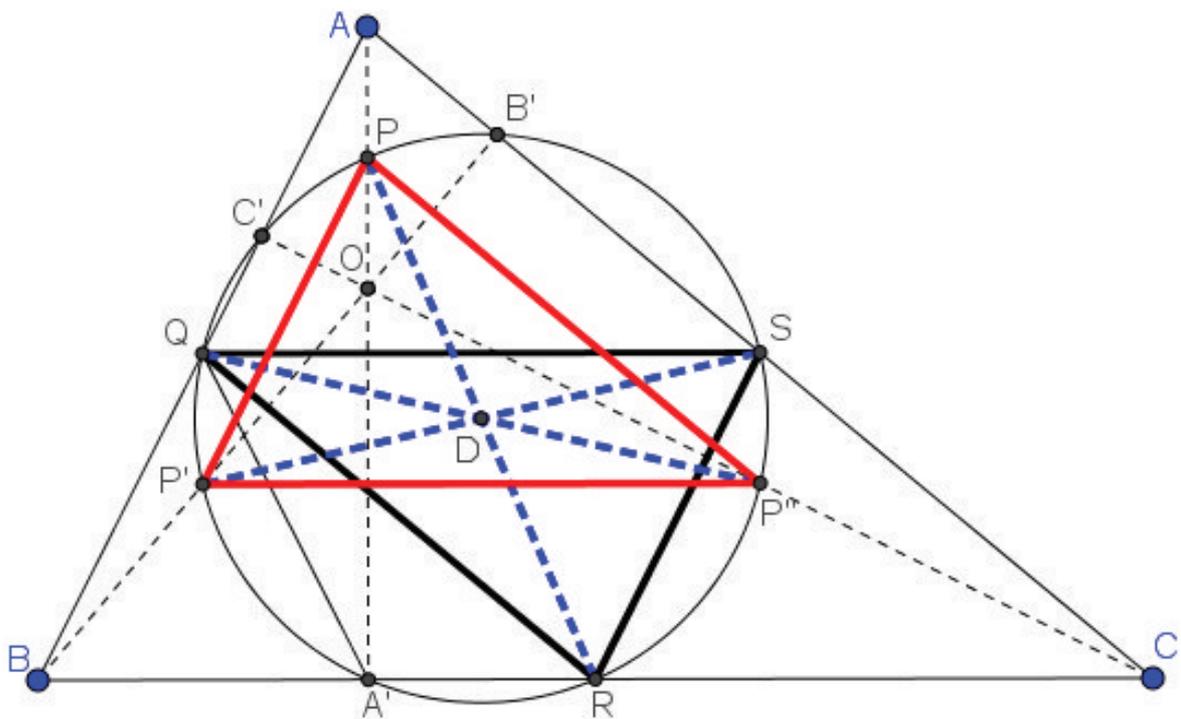


Figura 2

## Referencias

- [1] R. Moreno Castillo (2016), *La historia del triángulo*. Nivola (págs. 75-78).

# About the Maximum Area Quadrilateral Sobre el cuadrilátero de superficie máxima

**Ricardo Moreno Castillo**

Catedrático de instituto jubilado

moreno\_castillo@hotmail.es

## Abstract

*The aim of this article is to find the conditions under which a quadrilateral with sides of known length has maximum area*

## Planteamiento del problema

Consideremos cuatro segmentos de longitudes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  tales que con ellos se pueda fabricar un cuadrilátero (esto es, que la suma de las longitudes de tres cualquiera de ellos ha de ser mayor que la del restante). Se trata de saber, de todos los cuadriláteros convexos que se pueden formar con dichos segmentos (tomados en el orden que se ha dado), cómo es el de área máxima. La respuesta a este problema es conocida: es el cuadrilátero cíclico.

## 1. Fórmula de Coolidge

Sea  $p = (a + b + c + d)/2$  el semiperímetro del cuadrilátero,  $x$  e  $y$  dos ángulos opuestos y  $\alpha = (x + y)/2$ , como se puede ver en la Figura 1. En ella se ha dibujado una diagonal por razones que se verán después. Una fórmula debida a J. Coolidge proporciona su superficie:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \alpha}$$

La superficie es máxima cuando el sustraendo del radicando es cero, esto es, cuando  $\cos^2 \alpha = 0$ , lo cual sucede si  $x + y = \pi$ . Ahora bien, la condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea cíclico es que dos de sus ángulos opuestos sumen dos rectos (lo que implica que sumen dos rectos también los otros dos), con lo que ya tenemos el resultado. Y el cumplimiento de la condición convierte la fórmula de Coolidge en la de Brahmagupta.

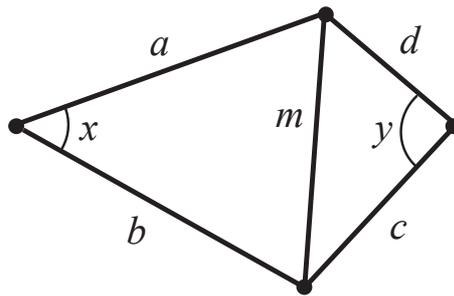


Figura 1

## 2. Otra demostración del mismo resultado

Propongo una demostración de lo mismo que no he encontrado en la bibliografía por mí manejada, si bien es tan elemental que, posiblemente, ya se le haya ocurrido a alguien y esté publicada en algún sitio.

Por un lado, la superficie del cuadrilátero, desglosada en dos triángulos de lado común  $m$  es la siguiente:

$$S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} cd \operatorname{sen} y$$

Por otra parte, aplicando el teorema del coseno al triángulo de lados  $a$ ,  $b$  y  $m$ , y al de lados  $c$ ,  $d$  y  $m$ , tenemos lo siguiente:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos x = c^2 + d^2 - 2cd \cos y$$

Derivamos en ambas igualdades, teniendo presente que fijado  $x$ , queda fijado  $y$ , de manera que  $y$  es función de  $x$ :

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{2} ab \cos x + \frac{1}{2} cd (\cos y) \frac{dy}{dx}$$

$$2ab \operatorname{sen} x = 2cd (\operatorname{sen} y) \frac{dy}{dx}$$

Eliminamos  $dy/dx$  (sabiendo que necesariamente  $\operatorname{sen} y \neq 0$ ) y llegamos a que:

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{2} ab \cos x + \frac{1}{2} ab (\cos y) \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y}$$

$$= \frac{ab}{2\operatorname{sen} y} (\cos x \operatorname{sen} y + \cos y \operatorname{sen} x) = \frac{ab}{2\operatorname{sen} y} \operatorname{sen}(x + y)$$

La superficie será máxima si  $\operatorname{sen}(x + y) = 0$ , esto es, si  $x + y = \pi$ , y el cuadrilátero es cíclico. Tenemos la primera conclusión. Ahora bien (debido a que  $\cos x = -\cos y$ ):

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos x = c^2 + d^2 + 2cd \cos x$$

Y de aquí se deduce que:

$$\cos x = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

De esto se puede calcular el seno:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 x &= \frac{4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4(ab + cd)^2} \\ &= \frac{(2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2)(2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{4(ab + cd)^2} \\ &= \frac{4(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}{(ab + cd)^2} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} cd \operatorname{sen} y = \frac{1}{2} (ab + cd) \operatorname{sen} x \\ &= (ab + cd) \frac{\sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}}{ab + cd} = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)} \end{aligned}$$

Y ya tenemos la fórmula de Brahmagupta.

## Bibliografía

- [1] R. Moreno Castillo (2016), *La historia del triángulo*, Editorial Nívola, Madrid.
- [2] P. Puig Adam (1986), *Geometría métrica*, Euler Editorial, Madrid.

# Do Students Really Understand the Statements of the Problems?

## ¿Comprenden los alumnos los enunciados de los problemas?

**Sergio Falcón Santana, Pedro Medina Rodríguez,  
Ángel Plaza de la Hoz**

Departamento de Matemáticas, Universidad de Las Palmas G. C.  
sergio.falcon@ulpgc.es, pedro.medina110@alu.ulpgc.es,  
aplaza@dmat.ulpgc.es

### **Abstract**

*Probably the first difficulty that a student has when he faces a math problem is the comprehension of the language of the problem. Sometimes the student does not understand the problem because he simply does not know the meaning of some words or does not understand the sentences, but most of the times the student does not understand it because he is unable to understand what exactly the question is. With the intention of understanding better this situation, we have developed a work with a group of students of the third course of ESO (Spanish Compulsory Secondary Education) involving the resolution of five math problems in two different ways: in the first one we propose the students to precise what is asked in each exercise; in the second one we propose the same exercise but the students are given four solutions in order to choose the correct one.*

### **Introducción**

En las últimas décadas, las reformas educativas han ido derivando hacia una preponderancia de la resolución de problemas en los programas educativos de matemáticas, convirtiéndose en la mayoría de los casos en el eje principal de desarrollo

de los contenidos. Las evaluaciones de la competencia matemática por parte de la OCDE, con la publicación de los informes PISA, donde se evalúan situaciones problemáticas contextualizadas, ha reforzado la necesidad de insistir en la resolución de problemas como objeto de aprendizaje por parte de los alumnos.

El actual sistema educativo español (LOMCE [1]), en el Real Decreto 1105/2014 establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato donde nos define la competencia matemática como “la habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver problemas diversos en situaciones cotidianas” (p.170). Este mismo decreto indica que debemos entender la resolución de problemas como uno de los ejes fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. También establece una relación necesaria entre el aprendizaje de las matemáticas y la competencia en comunicación lingüística, ya que se entiende la necesidad de que los alumnos tengan adquirida esta competencia en un grado suficiente que les facilite la capacidad de leer de forma comprensiva los enunciados de los problemas a los que se enfrenten, y que por lo tanto sean capaces de establecer un plan de acción y puedan comunicar los resultados obtenidos favoreciendo la reflexión, el diálogo y la comunicación matemática.

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)[2] en su propuesta de *Principios y Estándares para la educación matemática en EE.UU.*, establece entre sus estándares de procesos la resolución de problemas como un modo de adquirir y usar el conocimiento y, como consecuencia, propone que esta habilidad deba ser enseñada por los profesores.

Numerosas líneas de investigación han dado a la resolución de problemas un papel muy importante en el modo de hacer matemáticas, especialmente en el desarrollo del pensamiento matemático. Relacionando esta tarea de resolver problemas con la actividad matemática en sí, además, se entienden estos procesos de resolución de problemas como una oportunidad que tienen los alumnos para formular hipótesis, proponer conjeturas, desarrollar estrategias de solución, fomentar la creatividad, potenciar la comunicación, la abstracción, la generalización, etc.

Por lo tanto, nos encontramos con la necesidad de potenciar la resolución de problemas en la escuela, ya que, un por un lado forma parte del modo de hacer matemáticas, y por otro, es una necesidad para que los futuros ciudadanos sean capaces de enfrentarse a diferentes problemas en su vida diaria, por estos motivos el sistema educativo incluye la resolución de problemas no sólo como una mera

ejercitación de los contenidos aprendidos sino también como un objeto de enseñanza.

En educación secundaria obligatoria los profesores de matemáticas solemos partir de la base de que los alumnos tienen desarrollada la capacidad de resolver problemas, pues sabemos que se han trabajado desde la educación primaria por lo que han aprendido las estrategias necesarias para abordarlos. Como consecuencia, y desde un punto de vista conductual, creemos que la repetición frecuente de lo que se intenta enseñar se llega a automatizar. Por contra, nuestra experiencia nos demuestra que realmente los alumnos, incluso los de mayor nivel académico, tienen serias dificultades a la hora de enfrentarse a los problemas. Es un ejemplo, una vez más, de la diferencia que existe entre el currículo impartido por los profesores en la práctica docente y el currículo realmente alcanzado por los alumnos.

Otro aspecto que nos parece relevante es la falta de motivación que muestran los alumnos desde el momento en que oyen la palabra "problema". Entendemos que viene provocado por el fracaso que han experimentado durante años de escolarización generándose una actitud respecto a los problemas que afecta su rendimiento en esta tarea [3]. A pesar de que autores como Lester (citado en [4]) incluyen una cierta dosis de fracaso como elemento necesario en la resolución de problemas. Lógicamente es normal que los alumnos cometan errores y que de los errores se puede aprender, pero un exceso de fracaso suele provocar que los alumnos abandonen esta tarea con prontitud y se concentren en los aspectos más instrumentales de la Matemática donde tienen más posibilidades de éxito.

Además, es muy importante tener en cuenta la diferencia entre los conceptos de problema y ejercicio. Los profesores debemos preocuparnos por enseñar a nuestros alumnos a resolver problemas y para ello tenemos que distinguir dos situaciones a veces completamente diferentes cuando deberían ser coincidentes. La primera situación es la que creamos cuando planteamos problemas en clase a nuestros alumnos. Generalmente estos problemas son ideales, con escasas variantes y, a veces, sin demasiada conexión con el mundo real. Planteado el problema, el alumno encasilla la situación en el lugar adecuado y su resolución es entonces prácticamente automática. La segunda situación la constituyen las situaciones problemáticas entendiendo por tales aquéllas en la que no existe un proceso automático de resolución de dicha situación.

Los profesores solemos realizar los ejercicios en la pizarra y pretendemos que los alumnos aprendan imitándonos. Explicamos los ejercicios verbalizándolos,

pero normalmente los alumnos copian lo que escribimos en la pizarra, mas no lo que decimos.

Es evidente que la resolución de una situación matemática es distinta a reconocer cuándo aplicar dicha situación. Enseñar a nuestros alumnos a resolver problemas desde el área de matemáticas les facilitará transferir esta habilidad a otras áreas.

Desde los trabajos de Polya [5], continuando con Schoenfeld [6] hasta la actualidad, desde diferentes campos de investigación, numerosos autores han propuesto etapas o fases que un alumno debe recorrer a la hora de resolver un problema y en todas estas propuestas la fase de comprensión del problema juega un papel fundamental [7 - 17].

Es indiscutible que el primer escollo que los alumnos deben superar al enfrentarse a un problema requiere de una competencia lingüística suficiente, ya que la lectura comprensiva de los enunciados es muy importante en los procesos de resolución de problemas, el análisis de la información, la verbalización de los procesos seguidos, la formulación de preguntas, el debate generado en el proceso, la comunicación de los resultados, etc. Por todo esto es comprensible que si los alumnos trabajan problemas, especialmente en grupo pequeño donde tiene lugar una interacción entre los compañeros, mejorarán su competencia comunicativa. En este sentido la LOMCE ya establece una relación necesaria entre la competencia matemática, expresada a través de la resolución de los problemas, y la competencia lingüística [1].

Es habitual escuchar a los profesores argumentar el fracaso de sus alumnos en esta tarea por el hecho de que no comprenden lo que leen, sin valorar en la mayoría de las ocasiones que éste es un aspecto que debemos trabajar también desde el área de las matemáticas. En esta línea, hay autores que han demostrado que estrategias que creemos fáciles de aplicar, como la lectura en voz alta de los enunciados de los problemas, la enseñanza del vocabulario básico, la escritura de las ideas y de los procesos de resolución, dan buenos resultados en la solución de los problemas [18], [19], [20]. O estrategias más específicas, como proponer a los alumnos tareas matemático-literarias que han demostrado una mejora de la comprensión de los enunciados [21].

Comprender el problema según [22] “implica transformar la información recibida en una representación interna en la memoria del sujeto, e integrarla en un esquema cognitivo que permita darle significado”. Es por ello que los procesos de

resolución de problemas implican movilizar ciertas estrategias por parte del individuo que le conducen a comprender el enunciado del problema y “poder generar a partir del texto verbal una representación interna abstracta en que se recogen las distintas proposiciones, sus relaciones semánticas, así como la situación cualitativa descrita en el enunciado” [23]. [24] añade las intenciones del autor del enunciado como un factor muy importante para comprender el enunciado de un problema. En algunas ocasiones, cuando planteamos algunos problemas en clase, puede ocurrir que el significado del que nosotros partimos no sea el mismo que asumen los alumnos al intentar resolverlos [25].

Hay que tener en cuenta que en esta fase los alumnos tienen dificultades respecto al conocimiento del vocabulario, la falta de familiaridad con la situación planteada, la relación entre los datos y la pregunta [26], y si aparecen datos superfluos, especialmente si son números, les generan confusión al intentar averiguar dónde ubicarlos. Encontramos problemas de verbalización, fundamentalmente lexicales y gramaticales [24]. Un enunciado que no esté acorde a la capacidad de comprensión de los alumnos generará problemas no esperados a la hora de resolverlo por parte del profesor más preocupado de los aspectos matemáticos que lingüísticos.

Nuestra forma habitual de trabajar los problemas en clase ha consistido en la lectura del enunciado por parte del profesor y verbalización del procedimiento mientras los resolvemos. Las dificultades para que los alumnos resuelvan bien los problemas las situamos habitualmente en el ámbito de las matemáticas, aunque como ya señalamos anteriormente los problemas en la comprensión era un aspecto que había que considerar. Con este trabajo simplemente pretendíamos constatar si los alumnos tenían un nivel adecuado respecto a la comprensión del enunciado, como se podía esperar de alumnos de esta edad.

## **1. Metodología**

Como hemos mencionado, en este trabajo queríamos comprobar si el nivel de comprensión de los enunciados de los problemas de un grupo de alumnos de 3º de Educación Secundaria era suficiente para resolver un conjunto de problemas similares a los que podríamos encontrar en un libro de texto del nivel. Es decir, si este nivel de comprensión podía explicar las dificultades con las que nos encontramos los profesores a la hora de abordar los problemas en clase.

Para su consecución, desde una perspectiva empírico – analítica, la investigación parte de un diseño cuasi-experimental sin grupo control, usando grupos de alumnos ya formados en el centro educativo.

La experiencia se ha realizado en un centro privado – concertado de la ciudad de Las Palmas de Gran Canaria. En el centro, los alumnos pueden estudiar desde la educación infantil hasta el bachillerato. En la misma han participado un total de 72 alumnos de tercero de educación secundaria obligatoria, de los que se contabilizan 37 varones (51,4% del total) y 35 hembras (48,6%).

Para la medición elaboramos un cuestionario con cinco ejercicios similares a los que se resuelven en clase, es decir, problemas aritméticos de enunciado verbal que podemos encontrar en los libros de texto del nivel

Se realizaron dos versiones del mismo cuestionario: una primera que denominamos C1 y en el que las respuestas a los ejercicios implicaba una explicación por escrito por parte de los alumnos, y una segunda versión que denominamos C2 de respuesta múltiple con cuatro alternativas posibles. En el caso de C1, lo que pedimos a los alumnos es que sean capaces de definir la naturaleza del problema y entender lo que se pide. Se realizaron dos versiones del mismo cuestionario ya que en la versión C1 intuíamos que los alumnos podían tener dificultades al no ser la forma habitual con la que se enfrentan a los problemas en clase, ya que no están acostumbrados a explicar los procesos de resolución, sino intentar resolverlos directamente. En C2 entendíamos que les facilitaba la reflexión sobre lo que les pedíamos al tener que buscar la respuesta adecuada. El objetivo final era comprobar si había diferencias en los niveles de comprensión que manifestaban los alumnos en la resolución de ambos cuestionarios.

A la hora de valorar C1 hemos tenido en cuenta el hecho de que nosotros entendemos que la respuesta que da el alumno es válida para que posteriormente pueda resolver el problema. En el caso de C2 sólo hay una respuesta correcta de las cuatro alternativas por lo que la corrección es más objetiva.

Un factor importante a tener en cuenta en el desarrollo de la investigación es que los cuestionarios no han sido anónimos, pues pretendíamos poder comparar los resultados de los alumnos en los cuestionarios con sus calificaciones en matemáticas y porque, además, creemos que influye en la actitud de los alumnos a la hora de realizar las actividades propuestas.

Con objeto de analizar la variable tiempo, tomamos el tiempo que invirtió cada alumno en su realización.

Los cuestionarios fueron realizados en el primer trimestre del curso una vez que se repasaron los contenidos necesarios, también hay que considerar que en ningún momento se explicaron estrategias para la resolución de problemas, por lo que los alumnos se enfrentaron a la resolución de los problemas del cuestionario con los conocimientos adquiridos en cursos anteriores. Los contenidos utilizados en los problemas estaban relacionados con los números racionales, principalmente porque era el contenido que correspondía en la programación, además, es un contenido que por nuestra experiencia los alumnos manifiestan dificultades, aún habiéndolo trabajado previamente en los dos cursos anteriores de secundaria.

Previamente a la realización del cuestionario comentamos con los alumnos la necesidad de comprender el problema, hacernos las preguntas: ¿qué se pregunta?, ¿qué es lo que se desconoce?, ¿cuáles son los datos y condiciones? Además de realizar una lectura en voz alta y una revisión del significado de las palabras de cada uno de los problemas siguiendo las sugerencias de [18].

## 2. Cuestionarios

Seguidamente presentamos los cuestionarios mencionados así como los resultados obtenidos por los alumnos en su realización.

### 2.1 Cuestionario C1

A continuación encontrarás cinco problemas y queremos saber qué comprendes al leerlos. Para ello te pedimos que expliques el significado de cada uno de ellos. Es decir, ¿qué te pide este problema? o ¿en qué consiste este problema? Es importante que tengas en cuenta que no te pedimos que expliques cómo lo harías, ni cuál es la respuesta. Para ayudarte a entenderlo, te presentamos un ejemplo de cómo se realizan estos ejercicios.

*Ejemplo:* Marta tiene en su habitación una estantería en la que se pueden colocar 100 libros. La ha llenado con 18 libros de viajes, 44 libros de lectura y 26 libros escolares. También ha colocado una enciclopedia con muchos tomos. ¿Cuántos tomos tiene la enciclopedia?

*Respuesta:* Este problema consiste en averiguar qué cantidad de libros ocupan la estantería y calcular los que se pueden calcular todavía, siendo éstos el número de tomos que tiene la enciclopedia.

### Cuestiones:

1. El responsable de un concesionario de coches anota el color de los mismos cuando los traen y los divide en tres clases distintas en función del color. Esta información es muy importante para estacionarlos en tres zonas distintas de un aparcamiento. Ayer había aparcados 10 coches blancos, el mismo número de negros, cinco rojos y el mismo número de color amarillo. Los días quince de cada mes le hacen una entrega en función de tres gamas distintas, gama media, alta o baja. Hoy han traído 30 coches de color blanco, 10 de color negro y 20 de otros colores. ¿Qué fracción de coches de cada clase tenemos?
2. Un camionero transporta su mercancía desde una ciudad A hasta otra B separadas 3.500 km. Le han dado una semana para hacer el trabajo; el lunes sale de la ciudad A y conduce mañana y tarde, el martes sólo conduce durante la mañana, el miércoles sólo lo hace por la tarde, el jueves mañana y tarde, el viernes descansa, por último el sábado llega a la ciudad B. Suponiendo que hace el mismo número de kilómetros en cada etapa, ¿cuántos kilómetros recorre en cada una?
3. Un convoy está formado por una locomotora que arrastra tres vagones, V1, V2 y V3. La longitud de V1 es  $\frac{1}{3}$  de la longitud de V2 y la longitud de V3 es  $\frac{3}{4}$  de la longitud de V2. La locomotora tiene una longitud igual a  $\frac{2}{3}$  la longitud de V2. Si la longitud del V2 es de 21 metros. ¿Cuánto mide el convoy?
4. En una zona ha habido una fuerte tormenta de granizo y han sido dañadas 7 manzanas de las 15 que había en un árbol, y en otro árbol se han estropeado 4 de las nueve que tenía. ¿Qué árbol ha salido más perjudicado?
5. A la semana gasto  $\frac{1}{5}$  de lo que me dan mis padres en transporte,  $\frac{2}{3}$  en golosinas y el resto en el cine que cuesta 5 euros. ¿Cuál es la cantidad total que me dan mis padres?

## **2.2 Cuestionario C2**

A continuación encontrarás cinco problemas y queremos saber qué comprendes al leerlos. Para ello te pedimos que selecciones una de las respuestas que mejor responde a las preguntas: ¿qué te pide este problema? o ¿en qué consiste este problema?

1. (*El mismo enunciado que en C1*).

- a) Hallar el total de coches y relacionarlos con los tres tipos de gamas.
- b) Hallar el total de coches y relacionarlos los tres tipos de colores.
- c) Hallar el número de coches de cada color respecto al total de coches.
- d) Hallar el número de coches de cada gama respecto al total de coches.

2. (*El mismo enunciado que en C1*).

- a) Calcular la fracción resultante entre el total de kilómetros y los siete días de la semana.
- b) Calcular el número de etapas en total..
- c) Calcular el número total de kilómetros que hay que recorrer.
- d) Calcular el número de kilómetros que le queda por recorrer.

3. (El mismo enunciado que en C1).

- a) Calcular cada una de las partes que forman el convoy en función de V1 y V3.
- b) Calcular cada una de las partes que forman el convoy en función de V1.
- c) Calcular cada una de las cuatro partes que forman el convoy en función de V2.
- d) Calcular cada una de las cinco partes que forman el convoy en función de V1.

4. (El mismo enunciado que en C1).

- 1. Calcular la fracción de manzanas estropeadas en cada árbol.
- 2. Comparar la fracción de manzanas estropeadas en cada árbol.
- 3. Calcular el total de manzanas estropeadas respecto al total de manzanas.
- 4. Comparar la fracción de manzanas no estropeadas en cada árbol.

5. (El mismo enunciado que en C1).

- a) Calcular qué fracción del total me gasto en el cine.
- b) Calcular lo que me gasto en total.
- c) Calcular lo que me gasto en golosinas y en transporte.
- d) Calcular lo que me gasto en golosinas, en transporte y sumarle los cinco euros.

### 3. Resultados

Respecto a la redacción de los problemas, los alumnos no han manifestado dificultades en el lenguaje utilizado. En cambio, a la hora de responderlos, en el cuestionario C1 indicaron que no sabían muy bien cómo contestar argumentando falta de experiencia en este tipo de actividades mientras que en el C2 señalaban dificul-

tades al encontrar respuestas que interpretaban como muy parecidas, aunque el poder contar con las respuestas les había ayudado bastante.

Los datos han sido procesados con el programa informático SPSS Statistics en su versión 22.

### 3.1 Resultados con el cuestionario C1

Este cuestionario ha sido realizado por 72 alumnos de los que se contabilizan 37 varones (51,4% del total) y 35 hembras (48,6%).

En la siguiente tabla podemos observar las calificaciones obtenidas por los alumnos con sus frecuencias y porcentajes:

Calificación	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
0	24	33,3	33,3
1	20	27,8	61,1
2	12	16,7	77,8
3	9	12,5	90,3
4	6	8,3	98,6
5	1	1,4	100

En este cuadro se observa que el número de alumnos en cada estadillo está en proporción inversa al número de respuestas correctas. Como resultados relevantes indiquemos que en una tercera parte de los alumnos ha obtenido cero puntos y que sólo 16 alumnos (22,2%) han obtenido una calificación igual o superior a tres puntos, que era el valor mínimo para considerar la prueba como superada. En la tabla siguiente se observan los porcentajes de acierto en cada uno de los ejercicios:

Ejercicio número	1	2	3	4	5
Porcentaje de acierto	17,8	26,4	41,7	30,6	12,4

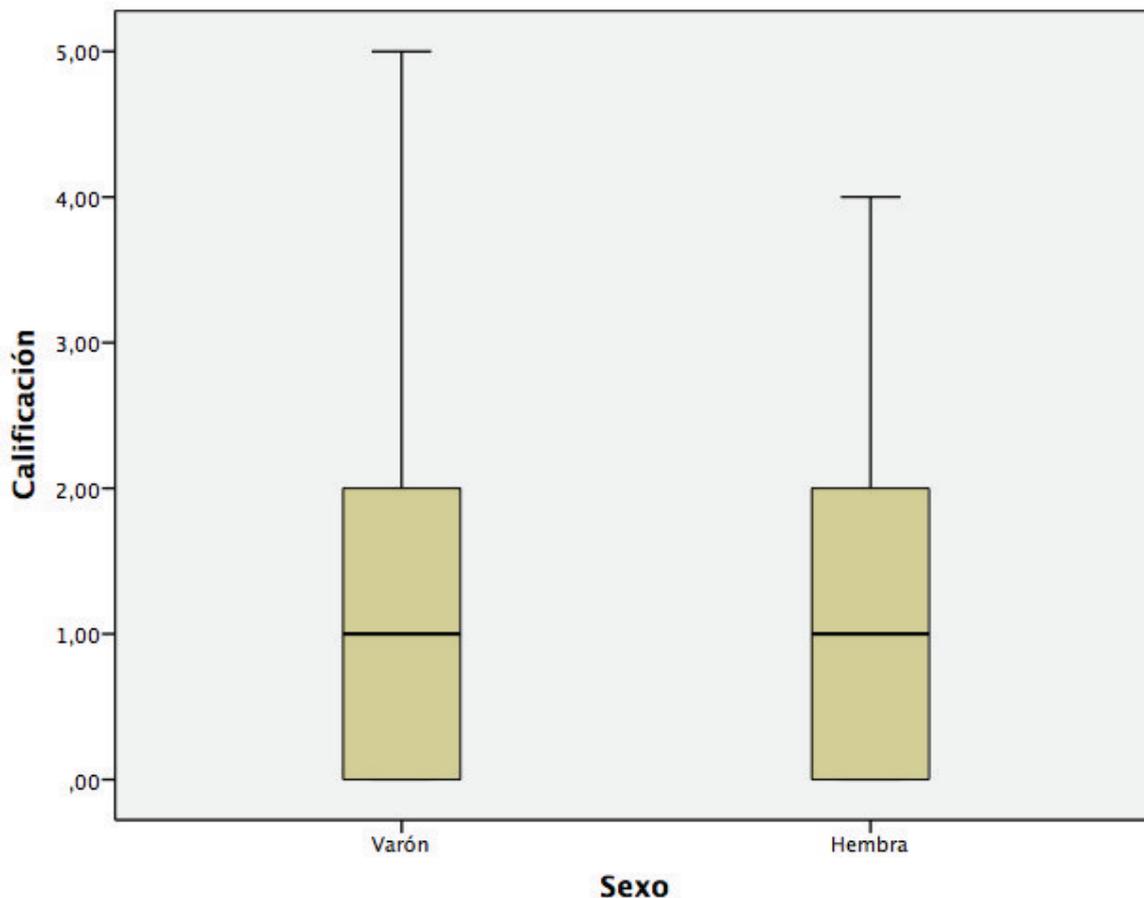


Figura 1. Calificación diferenciada por género

La calificación media en el caso de los varones ha sido de 1,38 ( $\pm 1,34$ ), mientras que entre las chicas ha sido de 1,40 ( $\pm 1,4$ ). En ambos casos la mediana ha sido igual a 1. En la anterior Figura 1 podemos observar la distribución de los datos teniendo en cuenta el género de los alumnos.

Hemos realizado la prueba de U de Mann-Whitney [27] para muestras independientes y no hemos encontrado una relación estadísticamente significativa (p-valor igual a 0,981) entre la calificación obtenida y el sexo del alumnado. Concluimos así que la calificación obtenida es independiente del género. El tiempo medio que tardaron los alumnos en realizar la prueba fue de 17,4 minutos ( $\pm 6,3$ ), con un mínimo de 7 minutos y un máximo de 44. El intervalo de confianza para la media con un nivel del 95% fue de (15'91,18'86). En el caso de los varones el

tiempo medio fue de 18,27 minutos ( $\pm 8$ ) y en el caso de las hembras de 16,46 ( $\pm 3,58$ ). El tiempo empleado en realizar la prueba no correlaciona positivamente con la calificación obtenida ( $r = 0,136$ ).

### 3.2 Resultados con el cuestionario C2

Este cuestionario ha sido realizado por 67 alumnos de los que se contabilizan 32 alumnos, equivalentes al 47,8% del total y 35 alumnas, el 52,2%.

La siguiente tabla muestra las calificaciones de los alumnos con sus frecuencias y porcentajes:

Calificación	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
0	6	9	9
1	18	26,9	35,8
2	28	41,8	77,6
3	13	19,4	97
4	2	3	100
5	0	0	100

Como se puede comprobar sólo 15 alumnos (22,4% del total) han obtenido una calificación igual o superior a tres puntos, valor de referencia para considerarse apto. En la tabla siguiente podemos observar los porcentajes de acierto de cada ejercicio:

Ejercicio número	1	2	3	4	5
Porcentaje de acierto	26,9	25,4	61,2	53,7	13,4

La calificación media en el caso de los varones ha sido de 2,06 ( $\pm 0,95$ ) mientras que las alumnas han obtenido una media de 1,57 ( $\pm 0,92$ ). En ambos casos la mediana es igual a 2. Los resultados los podemos observar en la siguiente Figura 2:

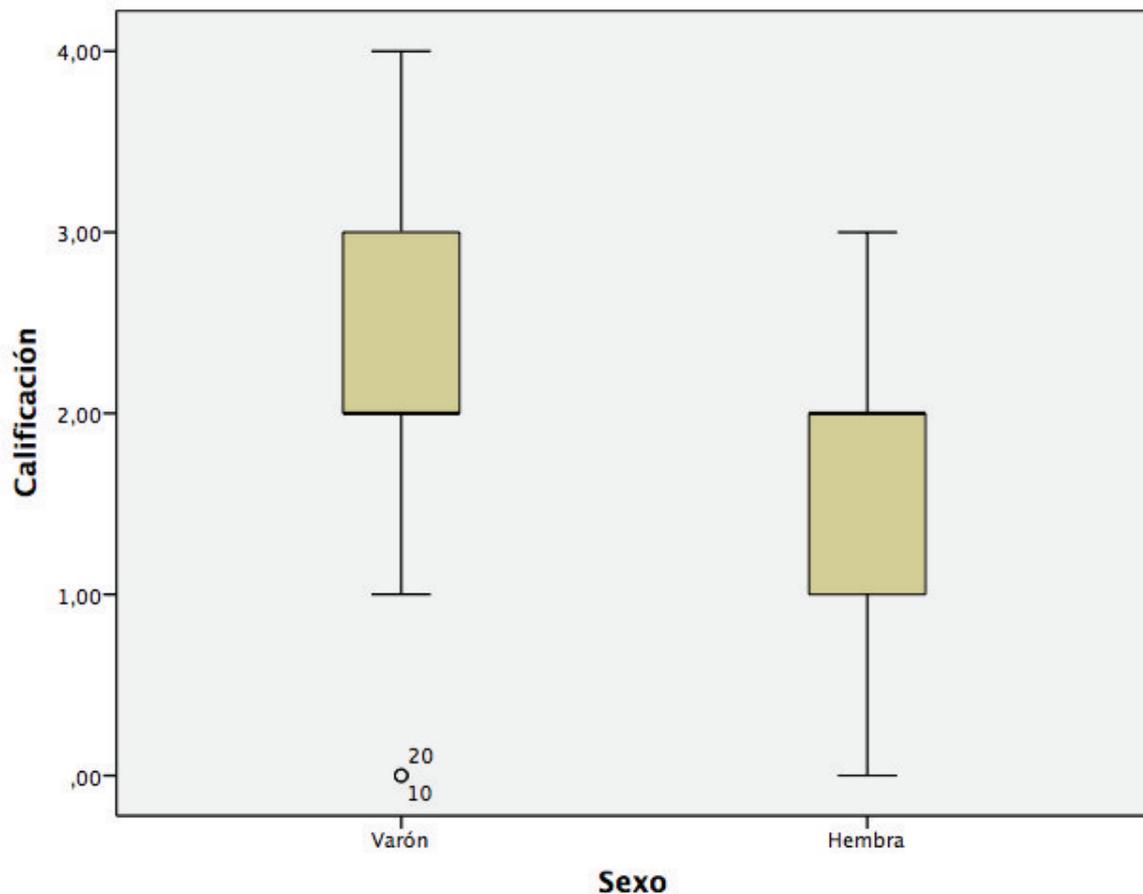


Figura 2. Calificación diferenciada por género

También hemos realizado la prueba de U de Mann-Whitney para muestras independientes y, en este caso sí que hemos encontrado una relación estadísticamente significativa ( $p = 0,036$ ) entre la calificación obtenida y el sexo de los alumnos. El tiempo medio que han tardado en realizar la prueba ha sido de 14,04 minutos ( $\pm 4,46$ ), con un mínimo de 6 minutos y un máximo de 31. El intervalo de confianza para la media con un nivel de confianza del 95% es de (12'96, 15'13).

Los resultados obtenidos del estudio han sido estadísticamente no significativos ( $r = 0,173$ ) respecto a la relación entre el tiempo en realizar la prueba y la calificación en la misma. El tiempo empleado en realizar la prueba no se ha visto afectado por el sexo de los alumnos, prueba de U de Mann-Whitney para muestras independientes ( $p = 0,766$ ).

### 3.3 Comparación de los dos cuestionarios

Respecto a las calificaciones obtenidas comparando ambos cuestionarios destacamos que, aunque la calificación valorada como apto (calificación igual o superior a 3 puntos) prácticamente se ha mantenido, la calificación de cero puntos ha bajado un 24,3% y ha aumentado un 25,1% la calificación de dos puntos.

En la tabla siguiente podemos ver los porcentajes de acierto de cada ejercicio en los dos cuestionarios:

Ejercicio nº	1	2	3	4	5
C1	17,8	26,4	41,7	30,6	12,4
C2	26,9	25,4	61,2	53,7	13,4

Como se puede observar, los resultados de los ejercicios 2 y 5 han sido prácticamente iguales en ambos cuestionarios y significativamente mayores en el C2 en el resto.

Respecto al tiempo empleado en realizar los cuestionarios, en C2 se ha reducido a (12'96, 15'13) frente a (15'91, 18'86) en C1. En el segundo cuestionario el tiempo medio en realizarlo ha sido inferior en aproximadamente 3 minutos, lo que interpretamos como una mayor confianza por parte de los alumnos al tener más claro lo que debían responder.

De la corrección del C1 hemos detectado que los alumnos tienen serias dificultades para expresar sus ideas y creemos que esta dificultad se puede traducir en algunas respuestas que hemos dado por incorrectas.

Respecto a la correlación entre la calificación en el cuestionario C1 y la calificación académica ha sido de  $r = 0,493$  y en el caso de C2 ha bajado hasta  $r = 0,266$ .

La prueba de Wilcoxon de los rangos con signo para muestras relacionadas muestra que existe una diferencia estadísticamente significativa ( $p\text{-valor}=0,029$ ) a un nivel de significación de 0,05 entre las calificaciones totales obtenidas entre ambos cuestionarios.

#### 4. Conclusiones

Los resultados obtenidos en la calificación total en ambos cuestionarios han sido inferiores a los esperados. Nosotros creíamos que el bajo rendimiento de los alumnos en la resolución de problemas escolares se concentraba principalmente en los aspectos matemáticos, pero los resultados de este trabajo reflejan que hay otros aspectos que quizás afecten más. La conclusión es que el nivel de comprensión de los enunciados de los problemas por parte de los alumnos de tercero de educación secundaria es inferior al que necesitan para poder realizar los problemas que se proponen en la mayoría de los libros de texto. Y por lo tanto, hay que trabajar en clase estrategias concretas que faciliten una mejoría en la comprensión de los enunciados.

Los alumnos con un mayor rendimiento académico no obtienen los resultados que esperan en los procesos de resolución de problemas, pues también tienen dificultades en la fase de comprensión, siendo este aspecto una fuente de ansiedad que tiene que ser objeto de atención.

Con respecto a la relación entre la calificación total obtenida y el sexo de los alumnos hemos encontrado que esta relación es significativa en el segundo cuestionario y es ésta una cuestión que analizaremos en un futuro próximo intentando comprobar esta relación.

También estábamos interesados en analizar el tiempo que los alumnos dedican a la fase de comprensión del problema y el análisis de los resultados nos indica que los alumnos no dedican el tiempo necesario a leer y comprender los enunciados de los problemas y que abandonan con bastante facilidad. En ambos cuestionarios no hemos encontrado una relación significativa entre la calificación obtenida y el tiempo empleado en realizar el cuestionario. Creemos que simplemente decirles a los alumnos que deben dedicar más tiempo a este aspecto no es la solución, nos orientamos más a la utilización de elementos que introduzcan una mayor reflexión por parte del alumno, en la línea de las sugerencias heurísticas, la utilización de representaciones gráficas, tablas de recogida de datos, etc.

Como hemos podido comprobar hemos encontrado una diferencia significativa entre los resultados entre ambos cuestionarios, podemos concluir que el hecho de seleccionar las preguntas ha facilitado la comprensión. Aunque creemos que hay una serie de cuestiones que hay que tener en cuenta, la primera es que los alumnos habían realizado previamente el cuestionario, y esto puede haber originado mejores resultados. La segunda es que tienen dificultades a la hora de comunicar lo

que han comprendido, y el hecho de tener las respuestas les ha facilitado la tarea. Y por último, creemos, tal y como también han manifestado los alumnos, que la presencia de las respuestas ha sido un elemento de reflexión para facilitar la comprensión de los problemas. Sobre este aspecto queremos seguir trabajando, ya que creemos que en las etapas iniciales de la enseñanza de la resolución de problemas, o con aquellos alumnos que tienen dificultades, se puede utilizar como estrategia la presencia de las respuestas para la comprensión de los enunciados.

## Agradecimiento

Los autores de este trabajo queremos agradecer profundamente las impagables aportaciones y sugerencias que los revisores de este artículo nos hicieron llegar para la mejora del mismo.

## Referencias

- [1] Real Decreto 1105 por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado (BOE). Madrid, 26 de diciembre de 2014.
- [2] A. Marín y J.L. Lupiáñez, *Principios y estándares para la educación matemática: una visión de las matemáticas escolares*, SUMA, VOL. 48, pp. 105-110, 2005.
- [3] E. Castro, *Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España.*, Actas de las Jornadas Investigación en el Aula De Matemáticas. Resolución De Problemas, 2008, pp. 219-226.
- [4] J. Sánchez y J. Fernández, *La enseñanza de la matemática: fundamentos teóricos y bases psicopedagógicas*, Madrid: CCS, 2003.
- [5] G. Polya, *Cómo plantear y resolver problemas*, México: Trillas, 1989.
- [6] A. Schoenfeld, *Mathematical problem solving*, Orlando, VA: Academic Press., 1985.
- [7] J. D. Bransford y B.S. Stein, *Solución ideal de problemas: guía para mejor pensar, aprender y crear*, Barcelona: Labor, 1986.
- [8] L. Puig y F. Cerdán, *Problemas aritméticos escolares*, Madrid: Síntesis, 1988.
- [9] M. de Guzmán, *Para pensar mejor*, Barcelona: Labor, 1991.

- [10] J. Hernández y M. Socas, *Modelos de competencia para la resolución de problemas basados en los sistemas de representación en Matemáticas*, SUMA, vol. 16, pp. 82-90, 1994.
- [11] M.L. Callejo, *Evaluación de procesos del alumnado en la resolución de problemas*, UNO. Revista de Didáctica de la Matemática, vol. 8, pp. 53-63, 1996.
- [12] L. Rico, *La competencia matemática en PISA*, PNA, 1(2), 47-66, 2006.
- [13] A. Vila y M.L. Callejo, *Matemáticas para aprender a pensar*, Madrid: Narcea, 2004.
- [14] F. Luque, *Experiencias sobre la resolución de problemas en el aula de Secundaria*, Actas de las Jornadas Investigación en el Aula De Matemáticas. Resolución De Problemas, 2002, pp. 219-226.
- [15] J. Davis, *Student understandings of numeracy problems: Semantic alignment and analogical reasoning*, The Australian Mathematics Teacher , vol. 69, 2013, pp. 19.
- [16] P. C. Lozano y M.A.M. Hernández, *¿Pueden nuestros estudiantes construir conocimientos matemáticos?*, Números, vol. 85, 2014, pp. 49-73.
- [17] M.R. Sánchez and S. Vicente, *Modelos y procesos de resolución de problemas aritméticos verbales propuestos por los libros de texto de matemáticas españoles*, Cultura y Educación: Revista de teoría, investigación y práctica, vol. 27, no. 4, 2015, pp. 710-725.
- [18] J. Fetrow, *Word Problems*, 2009. [Online]. Disponible en: <https://eric.ed.gov/?id=ED506237>
- [19] E. Monroe and R. Panchyshyn, *Helping children with words in word problems*, Australian Primary Mathematics Classroom, vol. 10, no. 4, 2005, pp. 27.
- [20] V. Urquhart, *Using Writing in Mathematics to Deepen Student Learning*. Mid-continent Research for Education and Learning (McREL), 2009.
- [21] J.L. González Fernández, *Elaboración y evaluación de tareas matemático-literarias para mejorar la comprensión en 3º de la ESO*, Tesis Doctoral, Universidad de Extremadura, 2015.
- [22] J. Toboso, *Evaluación de habilidades cognitivas en la resolución de problemas matemáticos*, Tesis Doctoral, Universidad de Valencia, 2004.

- [23] S. Vicente, J. Orrantia and L. Verschaffel, *Influencia del conocimiento matemático y situacional en la resolución de problemas aritméticos verbales: ayudas textuales y gráficas*, *Infancia y Aprendizaje*, vol. 31, no. 4, 2008, pp. 463-483.
- [24] M.d.C. Chamorro, *Las dificultades de lectura y comprensión de los problemas matemáticos escolares*, *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, no. 33, 2003, pp. 99-119.
- [25] B. Blanco and L. Blanco, *Contextos y estrategias en la resolución de problemas de primaria*, *Números*, no. 71, 2009, pp. 7.
- [26] J.A. Fernández, *La resolución de problemas matemáticos. Creatividad y razonamiento en la mente de los niños*, Madrid: Grupo mayeútica-educación, 2010.
- [27] R. Pérez Juste, A. Galán González y J. Quintanal Díaz, *Métodos y diseños de investigación en educación*, España: UNED - Universidad Nacional de Educación a Distancia, 2012.

## Reseña de libros

**Problemas de Oposiciones. Matemáticas. Tomo 8.** *Francisco Baena, José M. Gamboa, Braulio de Diego, Agustín Llerena, M<sup>a</sup> Belén Rodríguez, José M<sup>a</sup> Lorenzo y Bruno Salgueiro.* Editorial Deimos. Madrid, 375 págs, (2016). ISBN: 978-84-86379-93-3.

Un año más la Editorial Deimos ha publicado, con el título de “Problemas de Oposiciones. Matemáticas. Tomo 8”, un volumen que recoge soluciones a todos los problemas propuestos en las oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria celebradas en el año 2016. De este modo completan el camino iniciado por los profesores Braulio de Diego y Elías Gordillo en el año 1969. El libro, del que pueden disfrutar todos aquellos que se divierten resolviendo problemas de matemáticas, está especialmente recomendado para quienes pretenden superar con éxito las oposiciones a las que acabamos de hacer referencia.

No son pocos los casos en los que se resuelven enunciados más generales que el problema propuesto. Algunos de estos problemas ya fueron propuestos en convocatorias anteriores y, en casi todos los casos, los autores se han esforzado en encontrar una solución distinta de la publicada en los volúmenes anteriores de esta colección.

De muchos de los problemas se presentan varias soluciones, que suelen ir acompañadas de la fundamentación teórica en la que se apoyan. Esto explica que el libro, que ha sido escrito con la intención de ayudar al que se presenta a las oposiciones a encontrar las “líneas maestras” en la resolución de problemas de esta naturaleza, tenga 375 páginas.

La exposición es clara, y en la misma se emplean numerosas y muy cuidadas figuras que resultan útiles para una mejor comprensión.

**José Javier Etayo**

**La historia del triángulo.** *Ricardo Moreno Castillo*. Editorial Nivola. Colección: Una historia de las Matemáticas para jóvenes, 120 páginas (2016). ISBN: 978-84-15913-24-5.

Aunque el título de la colección “Una historia de las matemáticas para jóvenes” y la primera frase de la contraportada “Este libro está dedicado a los jóvenes” pudiera dar a entender que es un libro limitado a estudiantes de ESO o Bachillerato, no es menos cierto que en la misma contraportada se puede leer “y también a quienes no lo son, pero quieren conocer el mundo de las Matemáticas a través de su historia”.

En efecto: Ricardo Moreno quiere añadir a su colección en Nivola de “Una historia de las matemáticas para jóvenes”, de la que hemos podido disfrutar de cuatro ejemplares –el último, *Historia de la teoría elemental de números*- un libro sobre Geometría y ha elegido –puede parecer natural- la historia del triángulo. Pero no se dedica a contar historietas, resultados o simplemente anécdotas sobre el triángulo. Ricardo Moreno lo demuestra todo. Y con la suficiente calidad y claridad de ideas como para hacer un libro absolutamente agradable, nada pesado.

Un libro que empieza definiendo qué es un triángulo y demuestra –por no hablar del último capítulo sobre coordenadas baricéntricas -todos los teoremas conocidos como la circunferencia de los nueve puntos, la recta de Simson – Wallace o el punto de Fermat.

La exposición se aleja de todo tecnicismo, aunque no elude ningún resultado difícil.

Para todos aquellos que quieran ver en 120 páginas casi todo lo relacionado con el triángulo, en este libro tienen la gran ocasión.

**Joaquín Hernández Gómez**

**La SuperMATEsobrina y el enigma del gran astrolabio**, Manuel García Piqueras. Editorial Nivola, Madrid, 176 págs (2016). ISBN: 978-84-15913-26-9.

Manuel García Piqueras es licenciado en Matemáticas y profesor de instituto. Aunque *La SuperMATEsobrina* es su primer relato, no es un autor primerizo. En la misma Editorial Nivola ha publicado *Una historia de la proporción. Desde la Prehistoria al número de oro*, y actualmente está escribiendo sobre Leibniz.

Una parte de la trama se desarrolla en los siglos XV y XVI, en la época de esplendor del imperio subsahariano de los Songay, cuyos centros neurálgicos eran Tombuctú, Gao y Jenne. Es precisamente en Jenne donde comienza la historia: Isaac, un joven instruido es acusado de un crimen que no había cometido y condenado a trabajos forzados de por vida en las minas de sal de Tegaza.

La otra parte discurre en nuestros días y arranca en un centro de secundaria, con Julio y Martina como protagonistas. Él es un joven profesor de universidad especialista en paleografía y ella es su sobrina, una quinceañera aficionada a las matemáticas. Ambas historias se irán entretrejiendo a medida que avanza el libro.

El lector encontrará persecuciones, amores imposibles, depravación y espíritus indomables. La ambientación está construida sobre una sólida investigación histórica y etnológica: por un lado el embrujo ejercido por África y por otro, el de la relación de los antiguos reinos hispanos con el continente africano y su impronta en forma de pequeños tesoros arquitectónicos que, al no ser muy conocidos, espolearán el deseo de leer sobre ellos.

Otro de los temas del relato es la separación del saber en ciencias y letras, encarnada en los personajes de Julio y Martina, en cuyos diálogos hay referencias a la música, la astronomía, la poesía, el latín y las matemáticas, y no solo como elementos de fondo, sino como parte activa de la trama. Así, muchos pasajes recuerdan a Jorge Manrique, Copérnico y Newton, la utópica búsqueda de la máquina lógica que distinga las verdades de las falsedades, y elementos relacionados con la escritura de los Chokwe: unos ideogramas con unas propiedades matemáticas que juegan un papel clave dentro del argumento. Con todo, el autor se ha esforzado para que resulte asequible a todo tipo de públicos, desde los 11 años, pero también hará disfrutar a lectores veteranos.

**Ricardo Moreno Castillo**

**Alcuino de York: Problemas para la instrucción de los jóvenes.** Introducción, traducción y notas de Ricardo Moreno Castillo. Ed. Nivola, Madrid, 110 págs (2016). ISBN: 978-84-15913-27-6.

Se trata de una nueva edición de la famosa colección de problemas altomedieval titulada *Propositiones ad acuendos iuvenes*, generalmente atribuida al escolar Alcuino de York, maestro en la escuela palatina de Aquisgrán en tiempos de Carlomagno. La edición consta de la reproducción facsimilar, en las páginas pares, de uno de los manuscritos medievales que recogen esta obra y de la traducción al español por Ricardo Moreno en las páginas impares, con el complemento de una introducción presentando el contexto histórico-cultural y el carácter de la obra, y de un cuerpo final de notas en las que el Prof. Moreno aborda la explicación detallada y resolución de los problemas con terminología y notación matemática actuales.

En términos modernos, según criterio de su traductor, la colección estudiada consta de 13 problemas de aritmética (alguno de progresiones), 10 de álgebra elemental (se resuelven con ecuaciones de primer grado), 9 de teoría de números (problemas indeterminados de soluciones enteras), 12 de geometría (cálculo de áreas, principalmente) y otros 9 que en ocasiones ni tan siquiera son problemas matemáticos, sino más bien de ingenio (“acertijos y adivinanzas”).

Algunos de los problemas, con variantes en los datos y circunstancias de ambientación, tienen paralelos en diversas colecciones greco-bizantinas y orientales anteriores: así, por ejemplo, los del tipo llamado “de los cien halcones”, nº 5 y otros, donde se trata de resolver sistemas de ecuaciones del tipo

$$x + y + z = 100, \quad ax + by + cz = 100$$

Otros de ellos aparecen por primera vez en la colección estudiada, como el famoso problema del hombre que debe transportar de una orilla a otra de un río, en una barca que no puede llevarlos a todos a la vez, a tres seres que no pueden dejarse de dos en dos, sin vigilancia (aquí, un lobo, una cabra y una col, nº 18).

Al interés y placer que algunos hallarán en la posibilidad de seguir el texto latino de la obra por medio de la reproducción facsimilar, se aúna en esta ocasión el meritorio esfuerzo realizado por el Prof. Moreno para hacer inteligible esta colección de problemas a los lectores actuales. El libro resultante tiene un indudable interés, tanto erudito como divulgativo, así como por la posibilidad de aprovecharlo con sentido didáctico y recreativo en el aula.

**Pablo Martín Prieto**

## Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el Boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, congresos, etc., deben enviarse *en formato electrónico*, del modo especificado a continuación.

**Formato:** Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTeX.

### En caso de usar Word

El formato de texto debe ser 17cm(alto) x 12.8cm(ancho), exactamente como este archivo. Configuración de página con márgenes: superior 3cm; inferior 9,7cm; izquierdo 4,1cm; derecho 4,1cm; encuadernación 0cm. Todo en el estilo de letra Times New Roman con “Interlineado sencillo” (en vez de múltiple).

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos en el estilo de letra usual; debajo el nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en estilo de letra negrita; debajo la referencia de su departamento o institución de trabajo en 11 puntos en el estilo de letra usual; y debajo la dirección de correo electrónico en estilo de letra Courier New en 11 puntos.

A continuación la palabra Abstract, en minúsculas de 12 puntos en estilo de letra negrita y debajo su contenido en inglés el tamaño de letra de texto 11 puntos en estilo itálica o cursiva, estrechado a ambos lados aproximadamente 1 cm.

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto. La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como en estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

### En caso de usar Latex

Usar estilo “article” en 11 puntos, eligiendo:  $textheight=17cm$ ,  $textwidth=12.8cm$ . y  $hoffset=0.3cm$ . Por lo demás, tener en cuenta lo indicado para usuarios de Word. Para la dirección de correo electrónico usar el tipo de letra `\tt`.

Si se usan paquetes específicos de Latex distintos de los usuales, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

### Respecto de las Figuras

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser impresas. Las figuras deben llevar debajo numeración (Figura 1, Figura 2, ...), para referirse a ellas en el texto. No debe escribirse texto a ninguno de los lados de la figura, ni a la izquierda ni a la derecha (es decir, las figuras no deben intercalarse en el texto)

### Reseñas de libros

Las reseñas de libros, se enviarán como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

### **Envío de originales**

Se enviarán en formato electrónico, en Word o Latex, a nuestra cuenta de la Sociedad: `puigadam@mat.ucm.es`

### **Selección de originales**

Serán evaluados por miembros del Comité Editorial (ver págs 4 de este número del Boletín), que decidirán sobre la originalidad, calidad y ajuste a la línea general del Boletín (y, en casos especiales, por revisores externos). Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que hagan modificaciones en su contenido.

## Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de diez euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son del 39 en adelante.

El importe puede ser abonado mediante transferencia a la cuenta de la Sociedad, ES58 3025 0006 2114 3326 8241, domiciliada en la entidad bancaria *Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28003* (o bien mediante un cheque a nombre de *la Sociedad*).

La carta de petición se enviará a la Sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella la *dirección* a donde se han de enviar y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia*.