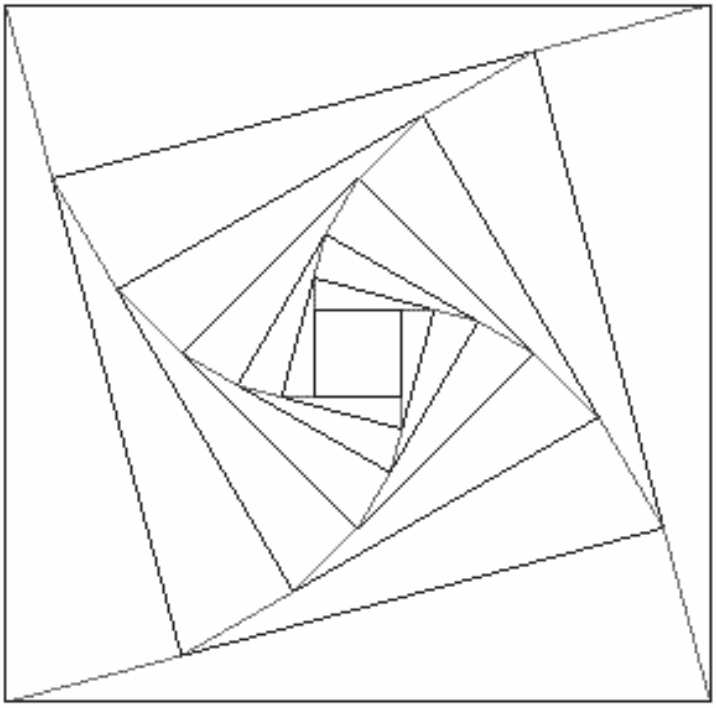
SOCIEDAD «PUIG ADAM»
DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 102
OCTUBRE DE 2016

ÍNDICE

Págs.

Junta Directiva de la Sociedad y Comité Editorial del Boletín 2
Acta de la Asamblea General Ordinaria de 2016 5
Convocatoria de Asamblea General Extraordinaria 7
XXXIV Concurso "Puig Adam" de Resolución de Problemas, por *Joaquín Hernández* y *Juan Jesús Donaire* 8
Problemas propuestos en el XXXIV Concurso 10
XX Concurso de Primavera de Matemáticas, por *Esteban Serrano Marugán* 17
Medalla de la RSME a María Gaspar 20
El retículo de subextensiones del cuerpo de descomposición del polinomio $t^p - a$, por *Arturo Rodríguez* y *María Belén Rodríguez* 21
Estudio de una contracción en el plano euclídeo, por *Sergio Falcón* 42
Unas curvas estrafalarias, por *Ricardo Moreno Castillo* 51
Recreando con GeoGebra el cálculo del volumen de la esfera ideado por Arquímedes, por *E. Roanes Macías* y *E. Roanes Lozano* 62
Los bloqueos en matemáticas a través del aprendizaje cooperativo, por *Susana Merchán Rubira* 73
Reseña de libros 91
Premio especial concedido en Londres a uno de nuestros socios 92
Noticia relativa a una publicación premiada, coordinada por uno de nuestros socios 93
Anuncio de la Olimpíada Estadística 93
Instrucciones para el envío de originales 94
Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín 95
Boletín de inscripción 96

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS

SEDE: Facultad de Educación (Dpto. de Algebra) Despacho 3215
Rector Royo Villanova, s/n 28040 - Madrid

Junta Directiva de la Sociedad "Puig Adam"

Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Vicepresidentes:
Eugenio Roanes Macías
F. Javier Peralta Coronado
Vicente Mendiola-Muñoz Morales
Vocales:
Enrique Rubiales Camino (Relaciones Institucionales)
Eugenio Roanes Lozano (Gestión de publicaciones)
Joaquín Hernández Gómez (Actividades y concursos)
Juan Jesús Donaire Moreno (Redacción de Publicaciones)
Secretario: José María Sordo Juanena
Vicesecretaria: María Gaspar Alonso-Vega
Tesorero: Pendiente de nombramiento en Asamblea General Extraordinaria
Bibliotecario: Antonio Hernando Esteban

Boletín de la Sociedad "Puig Adam"

ISSN: 1135-0261 Depósito Legal: M-7762-1995
Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Telf.: 91 611 59 94 loureiro@graficasloureiro.es

(Este Boletín se distribuye gratuitamente entre los socios de nuestra Sociedad)

En la portada aparece la figura adoptada como logotipo de la Sociedad "Puig Adam". Se trata de la figura de portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado "La Matemática y su enseñanza actual".

Las instrucciones para publicar en el Boletín aparecen en la página 94 y las propuestas de publicación de artículos, reseñas, etc, deben hacerse a través del correo electrónico: puigadam@mat.ucm.es

La coordinación de la edición de este número 102 ha estado a cargo de Eugenio Roanes Macías.

Recensiones de los artículos aparecen en "MathEduc", es decir, en lo que antes era Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM).

Comité Editorial del Boletín

Gabriel Aguilera Venegas, Universidad de Málaga
José Antonio Alonso, Universidad de Sevilla
Bärbel Barzel, University of Duisburg-Essen (Alemania)
Michel Beaudin, École de Technologie Supérieure, Montreal (Canadá)
Josef Böhm, Profesor de Instituto (Austria)
Joaquín Borrego, Universidad de Sevilla
Francisco Botana, Universidad de Vigo
Justo Cabezas, Profesor de Instituto y Univ. de Extremadura
Agustín Carrillo de Albornoz Torres, Profesor de Instituto y Univ. de Córdoba
Juan Carlos Cortés López, Universidad Politécnica de Valencia
Juan Jesús Donaire Moreno, Profesor del Instituto "Ramiro de Maeztu", Madrid
Fernando Etayo Gordejuela, Universidad de Cantabria
José Javier Etayo Gordejuela, Universidad Complutense de Madrid
Jose Luis Galán García, Universidad de Málaga
José Manuel Gamboa, Universidad Complutense de Madrid
Gregorio Hernández Peñalver, Universidad Politécnica de Madrid
Antonio Hernando Esteban, Universidad Politécnica de Madrid
David J. Jeffrey, University of Western Ontario (Canadá)
María Gaspar Alonso-Vega, Profesora de Instituto y Univ. Complutense Madrid
Joaquín Hernández Gómez, Profesor de Instituto y Univ. Complutense Madrid
Wolfram Koepf, Universität Kassel (Alemania)
Zoltán Kovács, The Private University College of Education, Linz (Austria)
Ricardo Luengo González, Universidad de Extremadura
Edgar Martínez Moro, Universidad de Valladolid
Ricardo Moreno Castillo, Profesor de Instituto y Univ. Complutense Madrid
Aleksandr Myllari, Åbo Akademi University (Finlandia)
John Olive, The University of Georgia (USA)
Pavel Pech, University of South Bohemia (República Checa)
F. Javier Peralta Coronado, Universidad Autónoma de Madrid
Pedro Quaresma, Universidade de Coimbra (Portugal)
Antonio Quesada, Akron University (USA)
Tomás Recio, Universidad de Cantabria
Luis Rico, Universidad de Granada
Eugenio Roanes Lozano, Universidad Complutense de Madrid

Eugenio Roanes Macías, Universidad Complutense de Madrid
Ana Romero, Universidad de La Rioja
Enrique Rubiales Camino, Profesor de Instituto y Univ. Complutense Madrid
Julio Rubio, Universidad de La Rioja
José Luis Ruiz Reina, Universidad de Sevilla
Eduardo Sáenz de Cabezón, Universidad de La Rioja
Fernando Sánchez Fernández, Universidad de Extremadura
Tomás Sánchez Giralda, Universidad de Valladolid
José María Sordo Juanena, Universidad Complutense de Madrid
Jon R. Star, Harvard Graduate School of Education (USA)
Stanly Steinberg, University of New Mexico (USA)
Elena Varbanova, Technical University of Sofia (Bulgaria)
Nikolay N. Vassiliev, Russian Academy of Sciences (Rusia)
Michael J. Wester, Cotopaxi and University of New Mexico (USA)

Página web de la Sociedad

`http://www.sociedadpuigadam.es`

Mantenedoras de la página web:
Beatriz Barrero Díaz y Carolina Bravo Sanz, bajo la dirección del Secretario de nuestra Sociedad.

Novedad en nuestra web: publicación abierta de Boletines con cinco años de antigüedad a la web

Al igual que se está haciendo en otras Sociedades Matemáticas que publican revistas, está previsto que próximamente sean colgados de nuestra web los contenidos íntegros de los números de nuestro Boletín con cinco años de antigüedad. Y, poco a poco, se irán incorporando números con mayor antigüedad.

Esta publicación abierta ha sido propuesta por varios de nuestros socios, teniendo en cuenta la información solicitada a la Sociedad y, particularmente a algunos de nuestros socios, por parte de profesores y entidades (españolas y especialmente de países sudamericanos) sobre artículos aparecidos hace años en nuestro Boletín.

La incomodidad de copiar reiteradamente dichos artículos por escaneo y de enviarlos nos ha llevado a adoptar la solución indicada.

Acta de la Asamblea General Ordinaria de 2016 de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas

En la Facultad de Matemáticas de la UCM, sita en la Ciudad Universitaria, a las doce horas del sábado día 9 de abril de 2016, en segunda convocatoria, reunidos los miembros de la Sociedad, bajo la presidencia de D. José Javier Etayo Gordejuela, dio comienzo la Asamblea, desarrollándose con arreglo al siguiente

ORDEN DEL DÍA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.

Se procede a la lectura del acta de la Asamblea de 11 de abril de 2015, que queda aprobada por unanimidad.

2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.

El Presidente informa que desde la Asamblea anterior se han publicado los números 100 y 101 del Boletín. También informa sobre el *Concurso de Problemas Puig Adam* y sobre la participación de la Sociedad en el *Concurso Intercentros*, en el *Concurso de Primavera de la Comunidad de Madrid* y en la fase regional de la *LII Olimpiada Matemática Española*. Resaltó que algunos de los miembros de la Junta Directiva no han podido asistir a esta Asamblea, por estar participando en la Fase Final de dicha Olimpíada.

Concurso "Puig Adam": El XXXIII Concurso se celebró el 13 de junio de 2015, con una participación algo inferior a la de otros años, 60 estudiantes. Los resultados se publicaron en el Boletín 100. Este año el XXXIV Concurso está anunciado para celebrarse el sábado 11 de junio.

Concurso Intercentros: Al igual que otros años se celebró el XV Concurso el penúltimo sábado de noviembre en la Facultad de Matemáticas de la UCM con una buena participación de centros y estudiantes de nuestra Comunidad, llegando a 76 equipos y 756 estudiantes. En el Boletín nº 101 apareció una reseña de los resultados de este Concurso.

LI Olimpíada Matemática Española: En el Boletín 100 apareció la reseña y los problemas propuestos en la 51 OME.

Concurso de Primavera de Matemáticas de la Comunidad de Madrid: El sábado 23 de abril de 2016 está previsto celebrar la Fase Final de este Concurso en el que han participado 523 Centros y 45189 alumnos en su 1ª Fase y 3546 alumnos en su 2ª Fase, destacando que algunos miembros del equipo organizador del Concurso son miembros de nuestra Sociedad.

3. Informe de Tesorería. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.

El Tesorero, D. Fernando Lisón Martín, excusó su asistencia por enfermedad, haciendo llegar al Presidente la documentación relativa a los movimientos anuales de tesorería. El Presidente repartió entre los asistentes dicha documentación, en que se detallaban los ingresos apuntados y los gastos efectuados. Se someten a aprobación las cuentas y pasando a votación quedan aprobadas por unanimidad. El Presidente propone mantener la cuota y la fecha de cobro, lo que se aprueba por unanimidad.

4. Elección de nuevos cargos directivos.

El Presidente manifiesta que procede el cese dos miembros de la Junta Directiva de la Sociedad, el Secretario, D José María Sordo Juanena, y el Bibliotecario, D Antonio Hernando Esteban. Se efectúa la elección con el siguiente resultado:

Secretario: D José María Sordo Juanena
Bibliotecario: D Antonio Hernando Esteban

5. Asuntos de trámite.

El Presidente propone incluir alguna modificación en las normas de publicación tratando de adaptar a la indexación en MathEduc DataBAse y la Asamblea aprueba la propuesta por unanimidad.

6. Ruegos y preguntas:

Se pregunta cómo acceder la Biblioteca de la UCM, dándose respuesta detallada por parte del Presidente.

Sin más asuntos que tratar, el Presidente levanta la sesión a las doce y cuarenta y ocho minutos del día de la fecha arriba indicada.

Vº Bº El Presidente El Secretario

Convocatoria de Asamblea General Extraordinaria

Se convoca Asamblea General Extraordinaria de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas para el *día 17 de octubre de 2016*, en los locales de la Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid (Ciudad Universitaria), calle Rector Royo Villanova, s/n., a las 19:15 horas en primera convocatoria y a las 19:45 en segunda, con el siguiente:

ORDEN DEL DIA

1. Informe del Presidente.

2. Elección de Tesorero de la Sociedad.

XXXIV Concurso "Puig Adam" de Resolución de Problemas de Matemáticas

El pasado 11 de junio se celebró en la Facultad de Matemáticas de la UCM el XXXIV Concurso de Resolución de Problemas Puig Adam, con la participación entusiasta, pero minoritaria, sólo 34 estudiantes, algunos de otras comunidades.

Creo que en futuro debemos plantearnos la fecha del concurso. No hay ningún problema en adelantarlo un mes ya que los únicos estudiantes que a comienzo de mayo están en época de exámenes son los de 2º de Bachillerato, que no pueden participar en nuestro concurso. Las fechas actuales, con el curso ya terminado o con exámenes en sus centros para los participantes, nos vienen demostrando que no son las más adecuadas.

De todas formas, si medimos el éxito de un concurso por el entusiasmo de sus participantes, debemos estar muy contentos, incluso orgullosos.

Por la tarde, y en un acto entrañable con la presencia de muchos participantes acompañados de sus padres, y de todos los premiados (por primera vez en muchos años no tuvimos que guardar ningún premio para entregarlo posteriormente), nuestro presidente Javier Etayo, pronunció unas palabras de reconocimiento a los participantes y de felicitación a todos, especialmente a los ganadores, que fueron estos:

Primer nivel (3º de E.S.O.)

1. SHENGHAO ZANG (Colegio Arcángel Rafael)
2. MARCOS APARICIO BLÁZQUE (Colegio Menesiano)
3. SANTIAGO ERRO ÁLVAREZ (Colegio Arcángel Rafael)

Segundo nivel (4º de E.S.O.)

1. ALEJANDRO EPELDE BLANCO (Montessori School) y FÉLIX MORENO PEÑARRUBIA (IES L'Eliana , Valencia)
3. RODRIGO MARLASCA APARICIO (Liceo Europeo)

Tercer nivel (1º de Bachillerato)

1. SAÚL RODRÍGUEZ MARTÍN (Colegio Villa de Griñón)
2. MARCOS VÁZQUEZ VERDEJO (Colegio Divina Pastora) y JIA JIE TAO (IES San Mateo)

Estos nueve estudiantes recibieron diplomas y libros de problemas con soluciones detalladas de nuestro concurso, así como de la fase nacional de todas las Olimpiadas Matemáticas Españolas (OME) celebradas desde 1963.

Nuestra felicitación a todos. A continuación tenéis la relación de los problemas planteados.

Joaquín Hernández Gómez
y Juan Jesús Donaire Moreno

Problemas propuestos en el XXXIV Concurso "Puig Adam"

NIVEL I (3º de E.S.O.)

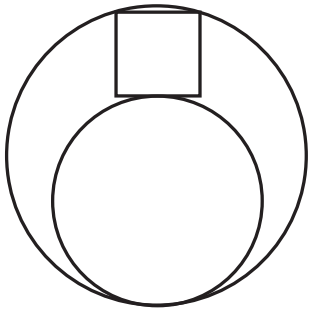
Primera parte *(1 hora 30 minutos)*

Problema 1 *(7 puntos)*

Juan efectúa las mil divisiones enteras siguientes: 2016 entre 1, 2016 entre 2, 2016 entre 3, y así hasta llegar a 2016 entre 1000. ¿Cuál es el mayor resto que ha obtenido?

Problema 2 *(7 puntos)*

En la figura siguiente se observan dos circunferencias tangentes interiores y un cuadrado, uno de cuyos lados es tangente a la circunferencia pequeña, estando los vértices opuestos a ese lado en la circunferencia mayor. Si los radios de las circunferencias son 50 cm y 35 cm, calcula la longitud del lado del cuadrado.



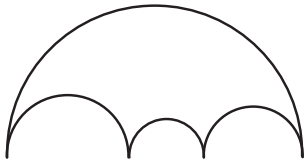
Segunda parte: problema encadenado (*1 hora 30 minutos*)

Problema 1A *(1 punto)*

En mi clase de Alemán somos 10 estudiantes y la nota media de toda la clase es 6,4. Las notas de las chicas han sido mejores que las de los chicos, pues han sacado un 7 de media mientras que la media de los chicos ha sido un 5. ¿Cuántas chicas hay en mi clase?

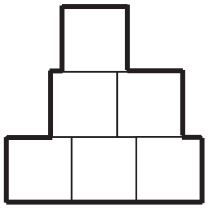
Problema 2A *(1,5 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. En la figura siguiente se observan cuatro semicircunferencias cuyos centros están alineados. Si el perímetro de la figura es P y el radio de la mayor es $\frac{T}{14}$, calcula $\frac{P}{\pi}$.



Problema 3A *(2 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. Con seis cuadrados de lado T formamos la figura siguiente. ¿Cuál es su perímetro?



Problema 1B *(1 punto)*

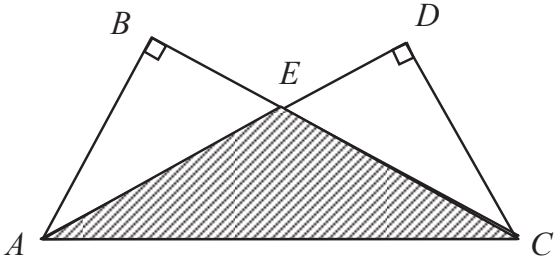
Calcula el número n para que $20^{2016} = 10^{2000} \cdot 40^{16} \cdot 2^n$

Problema 2B *(1,5 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior y k la suma de sus cifras. Una planta de k cm de altura crece a un ritmo de 3 cm cada 2 años. Una segunda planta de 58 cm de altura crece a un ritmo de 5 cm cada 6 años. Si ambas duraran mucho tiempo, ¿dentro de cuántos años tendrían la misma altura?

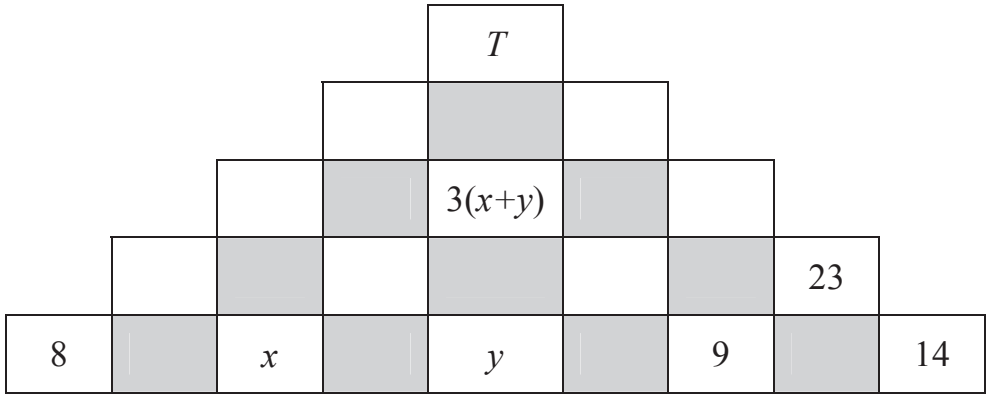
Problema 3B *(2 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. En la figura siguiente, $AB = DC = \mathrm{T}$, $BC = AD = 72$ y los ángulos en B y D son rectos. Calcula el área del triángulo AEC.



Problema 4 *(5 puntos)*

Sea a la respuesta del problema 3A, b la respuesta del problema 3B y T la suma de las cifras de $a \cdot b$. En el diagrama siguiente, el número que aparece en cada casilla en blanco es la suma de los de las casillas en blanco que tiene inmediatamente debajo. Calcula $\frac{x}{y}$.



NIVEL II (4º de E.S.O.)

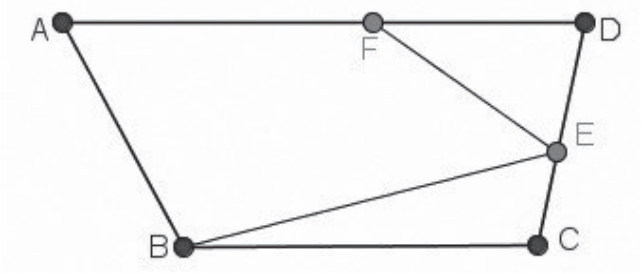
Primera parte *(1 hora 30 minutos)*

Problema 1 *(7 puntos)*

Escribe todas las parejas de enteros positivos (x, y) que verifican la ecuación $\frac{1}{x} + \frac{540}{xy} = 2$

Problema 2 *(7 puntos)*

En el trapecio $ABCD$ de la figura siguiente se verifica que el cociente entre las longitudes de las bases es $\frac{BC}{AD} = \frac{5}{7}$. Los puntos E y F están en los lados CD y DA respectivamente y verifican que $\frac{CE}{ED} = \frac{2}{3}$, $\frac{AF}{FD} = \frac{4}{3}$. Si el área del cuadrilátero $ABEF$ es 123, calcula el área del trapecio.



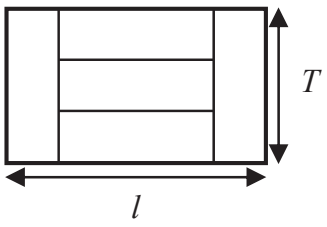
Segunda parte: problema encadenado *(1 hora 30 minutos)*

Problema 1A *(1 punto)*

El área de un hexágono regular de lado *h* es el triple del área de un cuadrado de lado *l*. Calcula $\frac{l^4}{h^4}$ y expresa dicho cociente como fracción irreducible.

Problema 2A *(1,5 puntos)*

Sea $\frac{a}{b}$ (irreducible) la respuesta del problema anterior y T = *ab*. Con cinco rectángulos idénticos formamos otro grande como muestra la figura siguiente. Si la anchura de este rectángulo grande es *T* cm, ¿cuál es su longitud, *l* ?



Problema 3A *(2 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. En una bolsa hay nueve bolas numeradas con números enteros positivos. Cuatro de ellas tienen números impares cuya suma es T + *4* y las restantes, números pares, en concreto: 4, 8, 12, 18 y 32. Luis coge cuatro bolas y al coger Ana otras cuatro se da cuenta de que las que eligió ella suman el triple de las que eligió Luis. ¿Qué bola no cogió ninguno de los dos?

Problema 1B *(1 punto)*

Sea p un número primo. Hace p años, las edades de tres niños estaban en progresión geométrica de suma p y razón 2. ¿Cuál es la suma de las edades actuales de los tres?

Problema 2B *(1,5 puntos)*

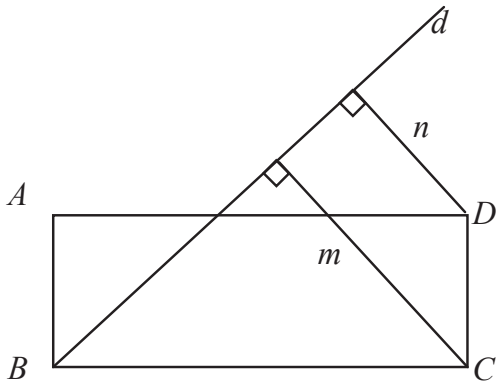
Sea T la respuesta del problema anterior. Se pretende dividir un cono de altura $\frac{T}{7}$ en dos partes de igual volumen mediante un plano paralelo a la base. ¿A qué distancia del vértice debe estar el plano?

Problema 3B *(2 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior y $k = T^3 - 2$. Cuando Ali tenía la edad de Billy, Celi tenía el doble de la edad de Billy.Cuando Celi tenía la edad de Ali, Celi tenía k años. Cuando Billy tenga la edad de Celi, Ali tendrá 88 años. Cuando Billy tenga la edad de Ali, ¿cuál será la suma de las edades de los tres?

Problema 4 *(5 puntos)*

Sea a la respuesta del problema 3A, b la respuesta del problema 3B y m y n las sumas de las cifras de a y b respectivamente. En el rectángulo $ABCD$ de la figura siguiente, triple de largo que de ancho, la recta d pasa por el vértice B y dista m y n de los vértices C y D respectivamente. ¿Cuál es el área de dicho rectángulo?



NIVEL III (1º de Bachillerato)

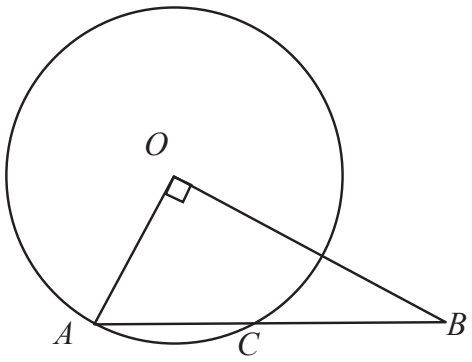
Primera parte *(1 hora 30 minutos)*

Problema 1 *(7 puntos)*

Sea f una función tal que, para todo x se verifica que $f(x)=f(x-1)+f(x+1)$. Si $f(20)=16$ y $f(16)=20$, calcula $f(2016)$.

Problema 2 *(7 puntos)*

En la figura siguiente se observa una circunferencia de centro O y un triángulo OAB, rectángulo en O siendo A un punto de la circunferencia. La hipotenusa AB vuelve a cortar a la circunferencia en el punto C siendo $AC = 8$ y $CB = 10$. Calcula $\cos \widehat{B}$.



Segunda parte: problema encadenado *(1 hora 30 minutos)*

Problema 1A *(1 punto)*

Cuando un triángulo rectángulo gira sobre un cateto, el volumen del cono obtenido es 800 π cm^3 y cuando gira sobre el otro, 1920 π cm^3. ¿Cuál es, en cm, la longitud de la hipotenusa del triángulo?

Problema 2A *(1,5 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior y k =T – 2. ¿Cuántos cuadrados perfectos, menores que 10^6 son múltiplos de k?

Problema 3A *(2 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior y *k* el producto de sus cifras. Si *N* es un número formado por las seis cifras 1, 2, 3, 3, 4 y 5 (en algún orden), calcula el menor valor de *N* divisible por 11*k*.

Problema 1B *(1 punto)*

Calcula $\frac{2}{\log_4\left(2000^6\right)}+\frac{3}{\log_5\left(2000^6\right)}$ dando el resultado como fracción irreducible.

Problema 2B *(1,5 puntos)*

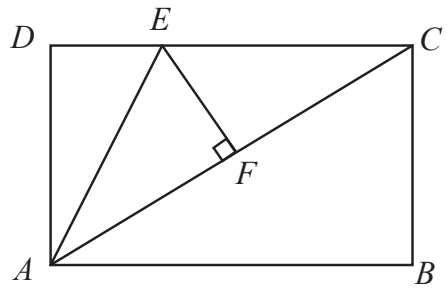
Sea $T = m+n$, siendo $\frac{m}{n}$ la respuesta del problema anterior. En el cuadrado *ABCD*, los puntos *E* y *F* están en los lados *AD* y *BC* respectivamente, de forma que $BE = EF = FD = T+3$. Calcula el área de dicho cuadrado.

Problema 3B *(2 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior y $k=\frac{T}{15}$. Si *P(x, y)* es un punto de la circunferencia $x^2+y^2-14x-6y=k$, ¿cuál es el mayor valor posible para $3x+4y$?

Problema 4 *(5 puntos)*

Sea *a* la respuesta del problema 3A, *b* la respuesta del problema 3B y *m* y *n* las sumas de las cifras de *a* y *b* respectivamente. En el rectángulo *ABCD*, el punto *E* está en *CD* de forma que $B\hat{A}C = E\hat{A}D$ y el punto *F* está en la diagonal *AC* siendo $EF \perp AC$. Si el área del triángulo *ABC* es *m* y el área del triángulo *CEF* es *n*, calcula el seno de $C\hat{A}E$.



XX Concurso de Primavera de Matemáticas

Sentir
que es un soplo la vida
que veinte años no es nada
que febril la mirada
errante en las sombras
te busca y te nombra.

Carlos Gardel (música)
Alfredo Le Pera (letra)

¡Ay! Es inevitable que la nostalgia nos visite. ¡Que son veinte velas! ¡Que son veinte años ya de concurso de Primavera!, como nos gusta subrayar, la gran fiesta de las matemáticas de la Comunidad de Madrid. ¡Que son 4000 problemas de matemáticas! ¡Cuántos chicos y chicas esforzándose por resolverlos, disfrutando con *Comenúmeros* y *Don Retorcido*! Nostálgicos sí... pero muy felices y orgullosos de acercar las matemáticas a nuestros estudiantes.

La letra del tango termina así: "*Vivir con el alma aferrada a un dulce recuerdo que lloro otra vez*". Nos quedamos con los dulces recuerdos, cuando empezó el concurso en la Facultad de Educación, eran cuatro gatos sin internet, y año a año fue creciendo y tomando entidad hasta convertirse en una cita indispensable para los amantes de las matemáticas.

¿Por qué nos hacen más ilusión los cumpleaños terminados en cero? Cuando la madre del gran Borges falleció a la edad de noventa y nueve años, tras una larga y dolorosa enfermedad, un periodista, sin nada mejor qué preguntar le dijo al escritor "*es una pena que su madre no haya llegado a cumplir los cien años*". Ante eso, Borges, amante confeso de las matemáticas, algo sorprendido contestó "*Me parece que usted exagera los encantos del sistema decimal*". Una sonrisa para comprometernos desde aquí a seguir veinte años más o treinta y siete, si es que os gustan más los números primos.

A la gran final del sábado 23 de abril de 2016 llegaron 3500 alumnos (de 10 a 17 años) elegidos entre un total de 44839 de toda la Comunidad de Madrid. Di-

chos chicos y chicas vienen de colegios públicos, concertados, privados e institutos. En total han participado 523 centros educativos.

Dejamos como muestra dos problemas de este concurso y os animamos a que visitéis nuestra página web:

`http://www.sociedadpuigadam.es/primavera/index_nuevo11.php`

donde encontraréis esos 4000 problemas que os esperan ansiosos.

Problema 1. Entre Lucía, Julián y Orlando se han comido trece churros y siete porras. Todos comieron piezas enteras y más de una de cada cosa. Orlando comió la misma cantidad de churros que de porras. Julián comió el triple de churros que de porras y Lucía comió la misma cantidad de porras que Julián. ¿Cuántos churros comió Lucía?

A) 2 *B) 3* *C) 4* *D) 5* *E) No se puede saber*

Problema 2. Don Retorcido llama *repedó*s a los números de cuatro cifras que tienen exactamente dos cifras iguales. ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor *repedós*?

A) 8885 *B) 8985* *C) 9975* *D) 8787* *E) 8997*

En señal de agradecimiento a todos los estudiantes, profesores y familiares, he aquí el cuadro de honor de esta edición:

PRIMER NIVEL (5º y 6º de Primaria)

1º. Pablo Ruiz Torralba. 6º Primaria*, Colegio San Luis Gonzaga*, Majadahonda
1º. Enrique Matorras Muñoz. 6º Primaria, *Colegio Laude Fontenebro II*, Collado Villalba
3º. Álvaro Gamboa Rodríguez. 5º Primaria, *CP Escuelas Bosque*, Madrid

SEGUNDO NIVEL (1º y 2º ESO)

1º. Nicolás Rey Rodríguez. 2º ESO, *Colegio Fray Luis de León*, Madrid
2º. Alejandro García Martínez de Guinea. 1º ESO, *Colegio Mirabal*, Villanueva de la Cañada
3º. Miguel Balo Mejías. 2º ESO, *Colegio de Jesús*, Barajas

TERCER NIVEL (3º y 4º ESO)

1º. Martín Gómez Abejón. 4º ESO, *IES Ramiro de Maeztu*, Madrid
2º. Alonso María Mayorga Nieto. 3º ESO, *Colegio CEU San Pablo Montepríncipe*, Madrid
3º. Alejandro Epelde Blanco. 4º ESO, *Montessori School*, Alpedrete
3º. Alberto Almagro Sánchez. 4º ESO, *IES Ramiro de Maeztu*, Madrid

CUARTO NIVEL (1º y 2º Bachillerato)

1º. Ismael Morales López. 2º Bach, *IES Al Satt*, Algete
2º. Jia Jie Tao. 1º Bach, *IES San Mateo*, Madrid
3º. Diego José Sánchez Martín. 2º Bach, *Colegio Virgen de Mirasierra*, Madrid

Esteban Serrano Marugán

Miembro del Comité Organizador del
Concurso de Primavera de Matemáticas

Medalla de la RSME a María Gaspar

A nuestra compañera de la Junta Directiva de la Sociedad Puig Adam María Gaspar le ha sido concedida la Medalla de la RSME en 2016.

María es Catedrática de Instituto desde 1977. Actualmente está en Comisión de Servicio en el IES San Mateo, seleccionada por la Comunidad de Madrid para dar clase en el Bachillerato de Excelencia.

Es también Profesora Asociada en el Dpto de Geometría y Topología de la UCM desde 1987.

En 1989 comenzó su labor de profesora del equipo español de la Olimpíada Internacional de Matemáticas (IMO), habiendo representado a España en el Jurado Internacional de la IMO y en el Jurado Internacional de la Olimpíada Iberoamericana de Matemáticas en numerosas ocasiones.

Es miembro del Comité Organizador del Concurso de Primavera de Matemáticas desde su fundación y es Profesora del Programa ESTALMAT (ESTimulación del TALento MATemático) desde que Miguel de Guzmán lo pusiera en marcha.

Por supuesto también es miembro del equipo de Profesores que anualmente organizan el Concurso "Puig Adam" de Resolución de Problemas de Matemáticas.

Desde 2002 ejerce la Presidencia de la Comisión de Olimpíadas de la Real Sociedad Matemática Española.

Todos estos méritos la han hecho acreedora a la mencionada Medalla, y nosotros nos sentimos orgullosos de tenerla como consocia y miembro de la Junta Directiva de nuestra Sociedad.

El retículo de subextensiones del cuerpo de descomposición del polinomio $\mathtt{t}^p - a$

Arturo Rodríguez * **y María Belén Rodríguez****

* Colegio Sagrado Corazón, Chamartín, Madrid
arturomath@hotmail.com

** IES Carlos III, Madrid
maria.rodriguez@educa.madrid.org

Resumen

Let p be a prime number and $a \in \mathbb{Q}$ such that $\mathtt{t}^p - a$ is an irreducible polynomial in $\mathbb{Q}[\mathtt{t}]$. In this work we obtain generators of each subextension of the splitting field of $\mathtt{t}^p - a$ over $\mathbb{Q}$.

Introducción

Sean $f(\mathtt{t}) := \mathtt{t}^p - a$ un polinomio irreducible en $\mathbb{Q}[\mathtt{t}]$ y $\mathbb{Q}_f$ el menor subcuerpo de $\mathbb{C}$ con la propiedad de que f factoriza en $\mathbb{Q}_f[\mathtt{t}]$ como producto de factores de grado 1. El grupo de Galois $G_{\mathbb{Q}}(f) := G(\mathbb{Q}_f : \mathbb{Q})$ de f es el grupo de $\mathbb{Q}$-automorfismos del cuerpo $\mathbb{Q}_f$, esto es, los automorfismos de $\mathbb{Q}_f$ cuya retricción a $\mathbb{Q}$ es la identidad. De hecho esta última condición la cumplen todos los automorfismos de $\mathbb{Q}_f$, pues si φ es un automorfismo de $\mathbb{Q}_f$ se tiene $\varphi(1) = 1$ luego $\varphi|_{\mathbb{Z}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ y así para cada cada número racional $q := a/b$ donde $a, b \in \mathbb{Z}$ resulta

$$a = \varphi(a) = \varphi(bq) = \varphi(b)\varphi(q) = b\varphi(q),$$

luego $\varphi(q) = a/b = q$. Así, en lo sucesivo emplearemos la expresión *automorfismos de $\mathbb{Q}_f$*.

Para cada subgrupo H de $G_{\mathbb{Q}}(f)$ se llama *subcuerpo fijo de $\mathbb{Q}_f$ asociado a H* al cuerpo

$$\mathrm{Fix}(H) := \{x \in \mathbb{Q}_f : \sigma(x) = x \text{ para cada } \sigma \in H\}.$$

El Teorema fundamental de la Teoría de Galois afirma que las aplicaciones

$$H \mapsto \mathrm{Fix}(H)|\mathbb{Q} \quad \& \quad E|\mathbb{Q} \mapsto G(\mathbb{Q}_f : E) := \{\sigma \in G_{\mathbb{Q}}(f) : \sigma|_E = \mathrm{id}_E\}$$

son mutuamente inversas y, además, $[\mathbb{Q}_f : \mathbb{Q}] = \mathrm{ord}(H) \cdot [\mathrm{Fix}(H) : \mathbb{Q}]$, donde $\mathrm{ord}(H)$ es el número de elementos de H y para cada par de cuerpos $K \subset E$ el *grado* $[E : K]$ es la dimensión de E como K-espacio vectorial.

A lo largo del trabajo obtendremos información acerca de las subextensiones de $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$ a partir de los subgrupos de $G_{\mathbb{Q}}(f)$. La parte más delicada es la determinación explícita de generadores de todas las subextensiones de $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$, y para ello es útil hacerlo antes para las subextensiones de los cuerpos ciclotómicos. Dedicamos a ello la primera sección. En la segunda resolvemos el problema planteado. En la tercera demostramos que $G_{\mathbb{Q}}(f)$ es un grupo de Frobenius, esto es, el grupo de afinidades de la recta construída sobre el cuerpo $\mathbb{F}_p$ con p elementos y en la cuarta efectuamos los cálculos para $p = 11$.

Los requisitos para seguir los argumentos empleados en el artículo son los cursos de Estructuras y Ecuaciones Algebraicas que se imparten en los Grados de Matemáticas en las universidades españolas. Remitimos al lector a la bibliografía que aparece al final del mismo para consultar los resultados auxiliares que empleamos. En algunos casos, guiados por nuestro criterio, hemos optado por incluir aquí sus demostraciones.

1. Subextensiones del cuerpo ciclotómico p-ésimo

Denotamos $\zeta := e^{2\pi i/p} \in \mathbb{C}$ y se llama *p-ésimo polinomio ciclotómico* a

$$\Phi_p(\mathtt{t}) := \mathtt{t}^{p-1} + \mathtt{t}^{p-2} + \cdots + \mathtt{t} + 1 = \prod_{j=1}^{p-1} (\mathtt{t} - \zeta^j) \in \mathbb{Z}[\mathtt{t}].$$

Nótese que $\mathtt{t}^p - 1 = (\mathtt{t} - 1) \cdot \Phi_p(\mathtt{t})$ y, como $\zeta^p = 1$ pero $\zeta \neq 1$, se deduce que $\Phi_p(\zeta) = 0$. El polinomio Φ_p es irreducible en $\mathbb{Z}[\mathtt{t}]$. Para comprobarlo basta ver que lo es $\Phi_p(\mathtt{t} + 1)$. Ahora bien,

$$\mathtt{t}\Phi_p(\mathtt{t} + 1) = (\mathtt{t} + 1)^p - 1 = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \mathtt{t}^k - 1 = \mathtt{t} \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \mathtt{t}^{k-1},$$

y simplificando el factor $\mathtt{t}$ resulta $\Phi_p(\mathtt{t}+1) = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \mathtt{t}^{k-1}$, cuya irreducibilidad en $\mathbb{Z}[\mathtt{t}]$ se deduce del Criterio de Eisenstein porque, al ser p primo, cada coeficiente binomial $\binom{p}{k}$ con $k \neq p$ es múltiplo de p y p^2 no divide a $p = \binom{p}{1}$. En consecuencia, $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \deg(\Phi_p) = p - 1$.

1.A. El grupo de Galois $G(\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q})$

La extensión $\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q}$ es de Galois, esto es, $\mathbb{Q}(\zeta)$ tiene $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$ automorfismos, puesto que $\mathbb{Q}(\zeta)$ es el cuerpo de descomposición de Φ_p sobre $\mathbb{Q}$. Su grupo de Galois $G(\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q})$ es isomorfo al grupo multiplicativo $\mathbb{F}_p^*$ formado por los elementos no nulos del cuerpo $\mathbb{F}_p$ de p elementos. De hecho cada automorfismo de $\mathbb{Q}(\zeta)$ queda determinado por la imagen de ζ que, necesariamente, ha de ser una raíz de Φ_p, es decir, una potencia de ζ. Por tanto los automorfismos de $\mathbb{Q}(\zeta)$ son los inducidos por las asignaciones $\zeta \mapsto \zeta^j$ para $1 \leq j \leq p-1$. Si denotamos γ_j a dicho automorfismo se comprueba inmediatamente que la aplicación

$$\mathbb{F}_p^* \to G(\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}),\ j + p\mathbb{Z} \mapsto \gamma_j$$

es un isomorfismo de grupos, lo que demuestra que $G(\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q})$ es un grupo cíclico ya que $\mathbb{F}_p^*$ lo es. De hecho se cumple el siguiente resultado más general cuya prueba incluimos en beneficio del lector.

Proposición 1.1 *El grupo multiplicativo K^* formado por los elementos no nulos de un cuerpo finito K es cíclico.*

Demostración. El grupo abeliano finito K^* tiene *exponente,* o sea, existe $a \in K^*$ cuyo orden $n \in \mathbb{Z}^+$ es múltiplo del orden de cada elemento de K^*. Sea $d := \mathrm{ord}(K^*)$ y veamos que $d = n$, por lo que K^* es el grupo cíclico generado por a. Desde luego $n \leq d$, y además $x^n = 1$ para cada elemento de K^*. Por tanto el polinomio $\mathtt{t}^n - 1$ tiene a todos los elementos de K^* por raíces. Como el número de raíces en K de un polinomio con coeficientes en K es menor o igual que su grado se tiene $d \leq n$, y con ello $d = n$. □

Observaciones 1.2 (1) La sencillez del enunciado anterior y de su demostración es engañosa desde el punto de vista constructivo. No se sabe asignar al primo p, mediante una fórmula recursiva, un generador de $\mathbb{F}_p^*$. Nosotros fijamos para todo lo que sigue un entero $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que la clase $m + p\mathbb{Z}$

genera $\mathbb{F}_p^*$, *y sólo emplearemos el símbolo m con este significado.*

(2) Así $G(\mathbb{Q}(\zeta):\mathbb{Q}) = \langle\sigma\rangle$ es el grupo cíclico de orden $p-1$ generado por el automorfismo $\sigma := \gamma_m$ determinado por la condición $\sigma(\zeta) = \zeta^m$.

Necesitaremos el siguiente resultado, que relaciona el orden $o(g)$ de un elemento g de un grupo finito y el orden de sus potencias.

Lema 1.3 *Sean G un grupo finito y $g \in G$ un elemento de orden n. Para todo $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ se tiene $o(g^k) = \frac{n}{\mathrm{mcd}(n,k)}$.*

Demostración. Sean $d := \mathrm{mcd}(n,k)$ y $\ell := k/d$. Denotamos 1_G el elemento neutro del grupo G y $x := g^k$, que cumple

$$x^{n/d} = g^{nk/d} = (g^n)^\ell = 1_G.$$

Por tanto n/d es múltiplo de $o(x)$, y hay que ver que $o(x) = n/d$. Para ello hay que demostrar que $n/o(x)$, que es un entero por el teorema de Lagrange, divide a d, o lo que es igual, hay que comprobar que $n/o(x)$ divide tanto a n, lo que es obvio, como a k. Ahora bien,

$$g^{ko(x)} = (g^k)^{o(x)} = x^{o(x)} = 1_G,$$

lo que implica que $ko(x)$ es múltiplo de $o(g) = n$, es decir, $n/o(x)$ divide a k, como queríamos. □

Observaciones 1.4 **(1)** Con las notaciones del apartado (2) de las Observaciones 1.2, del Lema anterior se deduce que para cada divisor e de $p-1$ el orden de $\tau := \sigma^e$ es $d := (p-1)/e$.

(2) Por el Teorema fundamental de la Teoría de Galois toda subextensión de $\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q}$ es de la forma $\mathrm{Fix}(\sigma^e)|\mathbb{Q}$ para algún divisor e de $p-1$, y

$$[\mathrm{Fix}(\sigma^e):\mathbb{Q}] = \frac{[\mathbb{Q}(\zeta):\mathbb{Q}]}{o(\sigma^e)} = \frac{p-1}{d} = e. \tag{1}$$

Nuestro objetivo en esta sección es calcular, en función de ζ, elementos primitivos de la extensión $\mathrm{Fix}(\sigma^e)|\mathbb{Q}$. Este es el contenido de la subsección 1.E.

1.B. Raíces p-ésimas de la unidad

El grupo $\mathcal{U}_p := \{z \in \mathbb{C} : z^p = 1\}$ formado por las raíces p-ésimas de la unidad es cíclico, generado por ζ, y su orden es p. En lo que sigue será de utilidad la igualdad:

$$\mathcal{U}_p \setminus \{1\} = \{\zeta^{m^j} : 0 \leq j \leq p-2\}.$$

En efecto, toda potencia de ζ es raíz p-ésima de la unidad y, además, cada $\zeta^{m^j} \neq 1$. En caso contrario m^j sería múltiplo de $o(\zeta) = p$, y esto es falso ya que $1 \leq m \leq p-1$. Esto prueba la inclusión " $\supset$ " y para la otra basta ver que los $p-1$ símbolos del miembro de la derecha representan elementos distintos. En caso contrario existirían i, j tales que

$$0 \leq i < j \leq p-2 \quad \& \quad \zeta^{m^i} = \zeta^{m^j},$$

o sea, $\zeta^{m^i(m^{j-i}-1)} = 1$. Así,

$$p | m^i(m^{j-i}-1) \text{ pero } p \not| m^i,$$

por lo que $m^{j-i} - 1 \in p\mathbb{Z}$ o, lo que es igual, $(m + p\mathbb{Z})^{j-i} = 1 + p\mathbb{Z}$. Esto implica que $j - i$, que no es nulo, es múltiplo del orden de $m + p\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}_p^*$, y en particular $p - 1 = o(m + p\mathbb{Z}) \leq j - i$, lo que es falso.

1.C. Una base de $\mathbb{Q}(\zeta)$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial

En lo sucesivo escribiremos $\zeta_k := \zeta^{m^k}$ para cada entero $k \geq 0$. Con esta notación resulta que una base de $\mathbb{Q}(\zeta)$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial es

$$\mathcal{B} := \{1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{p-1}\} = \{1, \zeta^{m^0}, \zeta^{m^1}, \ldots, \zeta^{m^{p-2}}\} = \{1, \zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{p-2}\}.$$

Probemos por inducción sobre j que para cada par de enteros no negativos k y j se cumple la igualdad

$$\zeta_{k+j(p-1)} = \zeta_k. \tag{2}$$

En efecto, es obvia para $j = 0$ y suponemos probado que $\zeta_{k+j(p-1)} = \zeta_k$. Como $m^{p-1} \equiv 1 \bmod p$, se escribe $m^{p-1} = 1 + pt$ para cierto $t \in \mathbb{Z}$, luego

$$\begin{aligned}
\zeta_{k+(j+1)(p-1)} &= \zeta^{m^{k+(j+1)(p-1)}} = \zeta^{m^{k+j(p-1)} \cdot m^{p-1}} = \left(\zeta^{m^{k+j(p-1)}}\right)^{m^{p-1}} \\
&= (\zeta_{k+j(p-1)})^{m^{p-1}} = \zeta_k^{m^{p-1}} = (\zeta^{m^k})^{m^{p-1}} = (\zeta^{m^{p-1}})^{m^k} \\
&= (\zeta^{1+pt})^{m^k} = ((\zeta^p)^t \cdot \zeta)^{m^k} = \zeta^{m^k} = \zeta_k.
\end{aligned}$$

Por otro lado, la acción de las potencias de σ sobre ζ_k viene dada por

$$\sigma^\ell(\zeta_k) = \zeta_{k+\ell}. \tag{3}$$

Basta probarlo, por inducción, para los enteros $\ell \geq 1$. Para $\ell = 1$ se tiene

$$\sigma(\zeta_k) = \sigma(\zeta^{m^k}) = (\sigma(\zeta))^{m^k} = (\zeta^m)^{m^k} = \zeta^{m^{k+1}} = \zeta_{k+1}.$$

Si suponemos probado que $\sigma^{\ell-1}(\zeta_k) = \zeta_{k+\ell-1}$, entonces

$$\sigma^\ell(\zeta_k) = \sigma(\sigma^{\ell-1}(\zeta_k)) = \sigma(\zeta_{k+\ell-1}) = \zeta_{k+\ell}.$$

1.D. Una base de $\mathrm{Fix}(\sigma^e)$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial

Cada $u \in \mathbb{Q}(\zeta)$ se escribe como combinación lineal, con coeficientes racionales, de los elementos de la base $\mathcal{B}$:

$$u := q \cdot 1 + \sum_{k=0}^{p-2} a_k \zeta_k \ \text{ donde } \ q, a_0, \ldots, a_{p-2} \in \mathbb{Q}.$$

Para nuestros propósitos podemos suponer que $q = 0$ pues $u \in \mathrm{Fix}(\sigma^e)$ si y sólo si $u - q \in \mathrm{Fix}(\sigma^e)$. Entonces, empleando la igualdad (3)

$$\sigma^e(u) = \sigma^e\Big(\sum_{k=0}^{p-2} a_k \zeta_k\Big) = \sum_{k=0}^{p-2} a_k \sigma^e(\zeta_k) = \sum_{k=0}^{p-2} a_k \zeta_{k+e},$$

y como $u \in \mathrm{Fix}(\sigma^e)$ si y sólo si $\sigma^e(u) = u$ esto equivale a

$$\sum_{k=0}^{p-2} a_k \zeta_{k+e} = \sum_{k=0}^{p-2} a_k \zeta_k.$$

Reordenamos cíclicamente la suma que aparece en el miembro de la derecha comenzando con el sumando $a_e\zeta_e$. Queda entonces,

$$\begin{aligned} a_0\zeta_e + a_1\zeta_{e+1} + \cdots + a_{p-2}\zeta_{e+p-2} &= a_e\zeta_e + a_{e+1}\zeta_{e+1} + \cdots + a_{p-2}\zeta_{p-2} \\ &\quad + a_0\zeta_0 + \cdots + a_{e-1}\zeta_{e-1}. \end{aligned}$$

Como $\zeta_{e-1} = \zeta_{e-1+p-1} = \zeta_{e+p-2}$ en virtud de (2), esta igualdad se reescribe:

$$a_0\zeta_e + a_1\zeta_{e+1} + \cdots + a_{p-2}\zeta_{e+p-2} = a_e\zeta_e + a_{e+1}\zeta_{e+1} + \cdots + a_{p-2}\zeta_{p-2} + a_0\zeta_0 + \cdots + a_{e-1}\zeta_{e+p-2}.$$

Los coeficientes a_i que aparecen en ambos miembros de la igualdad han de coincidir pues $\mathcal{B}$ es una base. Así por ejemplo, $a_0 = a_e$ pues ambos son el coeficiente que acompaña a ζ_e en ambos lados. Pero, a su vez, a_e es el coeficiente que acompaña a ζ_{2e} en el miembro de la zquierda, mientras que el que le acompaña en el miembro de la derecha es a_{2e}, luego $a_e = a_{2e}$. Recordando que $p - 1 = de$ resulta, repitiendo el proceso, que

$$a_0 = a_e = a_{2e} = \cdots = a_{(d-1)e}.$$

Si nos fijamos en las coordenadas que acompañan en ambos miembros a ζ_{e+1}, $\zeta_{2e+1}, \ldots, \zeta_{(d-1)e+1}$, se tiene

$$a_1 = a_{e+1} = a_{2e+1} = \cdots = a_{(d-1)e+1}.$$

Reiterando el argumento resulta que, para cada índice k con $0 \leq k \leq e-1$, se cumple

$$a_k = a_{k+e} = a_{k+2e} = \cdots = a_{k+(d-1)e}.$$

Esto nos permite escribir el elemento $u \in \mathrm{Fix}(\sigma^e)$ como

$$u = \sum_{k=0}^{p-2} a_k\zeta_k = a_0(\zeta_0 + \zeta_e + \cdots + \zeta_{(d-1)e}) + a_1(\zeta_1 + \zeta_{e+1} + \cdots + \zeta_{(d-1)e+1}) + \cdots + a_{e-1}(\zeta_{e-1} + \zeta_{e+e-1} + \cdots + \zeta_{(d-1)e+e-1}). \tag{4}$$

Para aligerar la escritura introducimos más notación: para $0 \leq k \leq e-1$ sea

$$\eta_k := \zeta_k + \zeta_{e+k} + \cdots + \zeta_{(d-1)e+k}. \tag{5}$$

De este modo, la igualdad (4) afirma que un elemento $u \in \mathbb{Q}(\zeta)$ pertenece al cuerpo $\mathrm{Fix}(\sigma^e)$, si y sólo si existen $a_0, \ldots, a_{e-1} \in \mathbb{Q}$, tales que

$$u = q + a_0\eta_0 + a_1\eta_1 + \cdots + a_{e-1}\eta_{e-1},$$

o lo que es igual, el conjunto $\mathcal{B}_e := \{\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{e-1}\}$ es un sistema generador de $\mathrm{Fix}(\sigma^e)$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Más aún, es una base, pues vimos en (1) que la dimensión de $\mathrm{Fix}(\sigma^e)$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial es e.

1.E. Elementos primitivos de $\mathrm{Fix}(\sigma^e)$

Fijemos $j \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq j \leq e-1$. Por el apartado anterior sabemos que $\mathbb{Q}(\eta_j) \subset \mathrm{Fix}(\sigma^e)$ y vamos a probar que esta inclusión es una igualdad. Para ello veremos que las únicas potencias de σ que dejan fijo η_j son las del subgrupo $\langle \sigma^e \rangle$, esto es, que $G(\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}(\eta_j)) = \langle \sigma^e \rangle$. Hecho esto tendremos

$$G(\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}(\eta_j)) = \langle \sigma^e \rangle = G(\mathbb{Q}(\zeta) : \mathrm{Fix}(\sigma^e)),$$

y esto implica $\mathbb{Q}(\eta_j) = \mathrm{Fix}(\sigma^e)$, ya que la extensión $\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q}$ es de Galois.

Para simplificar los cálculos posteriores definimos $\eta_{k+\ell e} := \eta_k$ para cada par de números enteros k y ℓ con $0 \leq k \leq e-1$ y $\ell \geq 1$. Veamos entonces:

$$\sigma(\eta_s) = \eta_{s+1} \text{ para todo entero } s \geq 0. \tag{6}$$

Basta comprobar que

$$\sigma(\eta_k) = \eta_{k+1} \quad \text{para} \quad 0 \leq k \leq e-2 \quad \& \quad \sigma(\eta_{e-1}) = \eta_0.$$

Para la primera parte, empleando la igualdad (3) resulta

$$\begin{aligned}\sigma(\eta_k) &= \sigma(\zeta_k + \zeta_{e+k} + \cdots + \zeta_{(d-1)e+k}) = \sigma(\zeta_k) + \sigma(\zeta_{e+k}) \\ &\quad + \cdots + \sigma(\zeta_{(d-1)e+k}) = \zeta_{k+1} + \zeta_{e+k+1} + \cdots + \zeta_{(d-1)e+k+1} = \eta_{k+1},\end{aligned}$$

mientras que para la segunda,

$$\begin{aligned}\sigma(\eta_{e-1}) &= \sigma(\zeta_{e-1} + \zeta_{e+e-1} + \cdots + \zeta_{(d-1)e+e-1}) = \sigma(\zeta_{e-1}) + \sigma(\zeta_{e+e-1}) \\ &\quad + \cdots + \sigma(\zeta_{(d-1)e+e-1}) = \zeta_e + \zeta_{2e} + \cdots + \zeta_{(d-1)e+e} \\ &\quad = \zeta_e + \zeta_{2e} + \cdots + \zeta_{(d-1)e} + \zeta_{de} = \zeta_e + \zeta_{2e} + \cdots + \zeta_{(d-1)e} + \zeta_{p-1}.\end{aligned}$$

Vimos en (2) que $\zeta_{p-1} = \zeta_0$, lo que nos proporciona la igualdad buscada:

$$\sigma(\eta_{e-1}) = \zeta_0 + \zeta_e + \zeta_{2e} + \cdots + \zeta_{(d-1)e} = \eta_0.$$

Comprobamos ahora, por inducción sobre r, que $\sigma^r(\eta_j) = \eta_{r+j}$ para todo entero $r \geq 0$. La igualdad es evidente para $r = 0$ y, si suponemos demostrado que $\sigma^r(\eta_j) = \eta_{r+j}$ entonces, por (6),

$$\sigma^{r+1}(\eta_j) = \sigma(\sigma^r(\eta_j)) = \sigma(\eta_{r+j}) = \eta_{r+j+1}.$$

Finalmente, para cada exponente r con $0 \leq r \leq p-1$ dividimos $r+j$ entre e y escribimos $r+j = e\ell+k$ con $0 \leq k \leq e-1$. Recordemos que $\eta_0, \ldots, \eta_{e-1}$ son distintos dos a dos pues constituyen una base de $\mathrm{Fix}(\sigma^e)$. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned}\eta_j = \sigma^r(\eta_j) &\iff \eta_j = \eta_{r+j} = \eta_{e\ell+k} = \eta_k \iff k = j \\ &\iff r = e\ell \in e\mathbb{Z} \iff \sigma^r \in \langle \sigma^e \rangle.\end{aligned}$$

Hemos demostrado, en consecuencia, las igualdades

$$\mathrm{Fix}(\sigma^e) = \mathbb{Q}(\eta_0) = \mathbb{Q}(\eta_1) = \cdots = \mathbb{Q}(\eta_{e-1}),$$

proporcionan e elementos primitivos distintos de la extensión $\mathrm{Fix}(\sigma^e)|\mathbb{Q}$.

2. Subextensiones de $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$

Para calcular el grado de la extensión $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$ y sus subextensiones emplearemos el siguiente resultado.

Lema 2.1 *Dada una extensión de cuerpos $E|K$ y dados $a, b \in E$ elementos algebraicos sobre K, escribimos $L := K(a,b)$ y denotamos*

$$k := [K(a) : K] \quad \& \quad \ell := [K(b) : K]$$

entonces se verifican:

(1.1) *Se cumple $[L : K(b)] = k$ si y sólo si $[L : K(a)] = \ell$*

(1.2) *Si k y ℓ son primos entre sí, entonces $[L : K] = k\ell$.*

Demostración. (1.1) El enunciado se sigue de la transitividad del grado:

$$k \cdot [L : K(a)] = \ell \cdot [L : K(b)].$$

(1.2) Como k y ℓ son primos entre sí, se deduce de la igualdad anterior y el Teorema Fundamental de la Aritmética que ℓ divide a $[L : K(a)]$ y k divide a $[L : K(b)]$. Como $L = K(a)(b)$ lo anterior significa que el grado del polinomio mínimo $P_{K(a),b}$ de b sobre $K(a)$ es múltiplo del grado del polinomio mínimo $P_{K,b}$ de b sobre K. Esto implica que $\deg(P_{K,b}) \leq \deg(P_{K(a),b})$. Por otro lado $K \subset K(a)$, luego $P_{K,b}$ es múltiplo en $K(a)[\mathtt{t}]$ de $P_{K(a),b}$, y en consecuencia $\deg(P_{K(a),b}) \leq \deg(P_{K,b})$. En conclusión, $P_{K,b} = P_{K(a),b}$ y así

$$[L : K(a)] = \deg(P_{K(a),b}) = \deg(P_{K,b}) = [K(b) : K] = \ell.$$

Por tanto, $[L : K] = [L : K(a)] \cdot [K(a) : K] = k\ell$. □

2.A. Generadores y grado de $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$

Sean $\rho := \sqrt[p]{a} \in \mathbb{R}$ la única raíz real de $f(\mathtt{t}) := \mathtt{t}^p - a$ y $\zeta := e^{2\pi i/p}$, que es una raíz p-ésima de la unidad. Si $s \in \mathbb{C}$ es una raíz de f se tiene $\rho^p = a = s^p$, luego $(s/\rho)^p = 1$. El grupo de raíces p-ésimas de la unidad es $\mathcal{U}_p := \{\zeta^j : 0 \leq j \leq p-1\}$, luego existe un entero j, con $0 \leq j \leq p-1$ tal que $s = \rho\zeta^j$. Como $\zeta = \rho\zeta/\rho \in \mathbb{Q}_f$ concluimos que

$$\mathbb{Q}_f := \mathbb{Q}(\rho\zeta^j : 0 \leq j \leq p-1) = \mathbb{Q}(\rho, \zeta).$$

Como f es irreducible en $\mathbb{Q}[\mathtt{t}]$ es el polinomio mínimo de ρ sobre $\mathbb{Q}$. Por otro lado hemos visto que el polinomio ciclotómico Φ_p es irreducible en $\mathbb{Q}[\mathtt{t}]$ y, como $\Phi_p(\zeta) = 0$, el polinomio mínimo de ζ sobre $\mathbb{Q}$ es Φ_p. En consecuencia $[\mathbb{Q}(\rho) : \mathbb{Q}] = \deg(f) = p$ mientras que $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = \deg(\Phi_p) = p-1$, y como $\mathrm{mcd}(p-1, p) = 1$ se concluye, por el Lema 2.1, que

$$[\mathbb{Q}_f : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\rho, \zeta) : \mathbb{Q}] = p(p-1).$$

2.B. Automorfismos de $\mathbb{Q}_f$

Como $\mathbb{Q}_f$ es cuerpo de descomposición del polinomio $f \in \mathbb{Q}[\mathtt{t}]$ la extensión $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$ es de Galois, luego el orden del grupo de Galois $G_{\mathbb{Q}}(f)$ coincide con el grado $[\mathbb{Q}_f : \mathbb{Q}] = p(p-1)$ de la extensión. Cada automorfismo de $\mathbb{Q}_f$ queda determinado por las imágenes de ρ y de ζ, que han de ser, respectivamente, raíces de f y de Φ_p. Esto proporciona $p(p-1)$ asignaciones

$$\psi_{ij} : L \to L,\ \rho \mapsto \rho\zeta^i \ \ \&,\ \ \zeta \mapsto \zeta^j,\ \ \text{donde}\ \ i = 0, \ldots, p-1\ \ \&\ \ j = 1, \ldots, p-1,$$

y cada una de ellas induce un automorfismo de $\mathbb{Q}_f$, que denotamos de igual modo, pues sabemos que hay, exactamente, $p(p-1)$ automorfismos. Veamos que $G_{\mathbb{Q}}(f)$ no es abeliano. Calculamos

$$(\psi_{ij} \cdot \psi_{k\ell})(\rho) = \psi_{k\ell}(\rho\zeta^i) = \psi_{k\ell}(\rho)\big(\psi_{k\ell}(\zeta)\big)^i = \rho\zeta^k \cdot \zeta^{i\ell} = \rho\zeta^{k+i\ell}$$

así que $(\psi_{k\ell} \cdot \psi_{ij})(\rho) = \rho\zeta^{i+kj}$. Para ver que $G_{\mathbb{Q}}(f)$ no es abeliano es suficiente encontrar exponentes i, j, k, ℓ tales que $\zeta^{k+i\ell} \neq \zeta^{i+kj}$, o sea, $\zeta^{i(\ell-1)} \neq \zeta^{k(j-1)}$, y basta elegir, por ejemplo, $i = k = \ell = 1$ y $j = 2$.

2.C. Órdenes de los elementos de $G_{\mathbb{Q}}(f)$

(1) Para hallar el orden de los elementos del grupo $G_{\mathbb{Q}}(f)$ emplearemos la función $\varphi : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ de Euler definida, para cada $d \in \mathbb{Z}^+$, por

$$\varphi(d) := \text{Card}\,\{k \in \mathbb{Z}^+ : 1 \leq k < d,\, \text{mcd}(k,d) = 1\}.$$

Deducimos que el número de elementos de un grupo cíclico G de orden d que lo generan es $\varphi(d)$. En efecto, sea $g \in G$ tal que $G := \langle g \rangle$. Entonces, g^k genera G si y sólo si $o(g^k) = d = o(g)$, lo que por el Lema 1.3 equivale a que $\text{mcd}(k,d) = 1$.

(2) Calculamos el orden del automorfismo ψ_{ij}. Veamos, por inducción sobre k, que $\psi_{ij}^k(\zeta) = \zeta^{j^k}$ para cada exponente positivo k. Es evidente para $k = 1$, y si $\psi_{ij}^{k-1}(\zeta) = \zeta^{j^{k-1}}$, entonces

$$\psi_{ij}^k(\zeta) = \psi_{ij}(\psi_{ij}^{k-1}(\zeta)) = \psi_{ij}(\zeta^{j^{k-1}}) = (\psi_{ij}(\zeta))^{j^{k-1}} = (\zeta^j)^{j^{k-1}} = \zeta^{j^k}.$$

Por otro lado, vamos a demostrar, también por inducción sobre k, la igualdad

$$\psi_{ij}^k(\rho) = \rho\zeta^{i(1+j+\cdots+j^{k-1})},$$

que es obvia para $k = 1$. Suponemos probado que $\psi_{ij}^{k-1}(\rho) = \rho\zeta^{i(1+j+\cdots+j^{k-2})}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\psi_{ij}^k(\rho) &= \psi_{ij}(\psi_{ij}^{k-1}(\rho)) = \psi_{ij}(\rho\zeta^{i(1+j+\cdots+j^{k-2})}) = \psi_{ij}(\rho)(\psi_{ij}(\zeta))^{i(1+j+\cdots+j^{k-2})} \\ &= \rho\zeta^i \cdot \zeta^{j\cdot i\cdot(1+j+\cdots+j^{k-2}} = \rho\zeta^{i(1+j+\cdots+j^{k-1})},\end{aligned}$$

como queríamos comprobar. Para calcular el orden de ψ_{ij} observamos que, por el Pequeño Teorema de Fermat, $j^{p-1} \equiv 1 \bmod p$ para cada $j = 1, \ldots, p-1$, y por tanto

$$(j-1)\cdot(1 + j + \cdots + j^{p-2}) \equiv 0 \bmod p.$$

Como p es primo, bien $j = 1$, bien $j \neq 1$ y $1 + j + \cdots + j^{p-2} \equiv 0 \bmod p$.

En el primer caso $\psi_{i1}^k(\rho) = \rho\zeta^{ik}$ y $\psi_{i1}^k(\zeta) = \zeta$. Así, $\psi_{i1}^k = \text{id}$ si y sólo si $\rho\zeta^{ik} = \psi_{i1}^k(\rho) = \rho$, o lo que es igual, $\zeta^{ik} = 1$.

Como el grupo $\mathcal{U}_p = \langle\zeta\rangle$ tiene orden p la condición $\zeta^{ik} = 1$ equivale a que ik sea múltiplo de p. Como p es primo y $0 \leq i \leq p-1$, deducimos que o

bien $i = 0$, en cuyo caso $\psi_{01} = \mathrm{id}$ tiene orden 1, o bien $i \neq 0$ y k es múltiplo de p. Por tanto,

$$o(\psi_{01}) = 1 \quad \& \quad o(\psi_{i1}) = p \quad \text{para} \quad 1 \leq i \leq p-1.$$

Suponemos ahora que $j \neq 1$, y vamos a demostrar que el orden de ψ_{ij} coincide con el orden de $j + p\mathbb{Z}$ en el grupo multiplicativo $\mathbb{F}_p^*$. En efecto, para cada entero positivo k se cumple que

$$\psi_{ij}^k = \mathrm{id} \iff \psi_{ij}^k(\rho) = \rho \quad \& \quad \psi_{ij}^k(\zeta) = \zeta \iff \rho\zeta^{i(1+j+\cdots+j^{k-1})} = \rho$$
$$\& \quad \zeta^{j^k} = \zeta \iff i(1 + j + \cdots + j^{k-1}) \in p\mathbb{Z} \quad \& \quad j^k - 1 \in p\mathbb{Z}.$$

Como $j \neq 1$ la condición $j^k - 1 \in p\mathbb{Z}$ implica que $i(1 + j + \cdots + j^{k-1}) \in p\mathbb{Z}$, luego $\psi_{ij}^k = \mathrm{id}$ si y sólo si $(j + p\mathbb{Z})^k = 1 + p\mathbb{Z}$, así que $o(\psi_{ij}) = o(j + p\mathbb{Z})$. En conclusion,

$$o(\psi_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0,\ j = 1 \\ p & \text{si } 1 \leq i \leq p-1,\ j = 1 \\ o(j + p\mathbb{Z}) & \text{en los demás casos} \end{cases} \tag{7}$$

Corolario 2.2 *El grupo $G_{\mathbb{Q}}(f)$ posee un elemento de orden 1, $p-1$ elementos de orden p y, para cada divisor $d \neq 1$ de $p-1$ tiene, exactamente, $p\varphi(d)$ elementos de orden d.*

Demostración. Por ser cíclico de orden $p-1$ el grupo $\mathbb{F}_p^*$ tiene $\varphi(d)$ elementos de orden d para cada divisor d de $p-1$, luego el enunciado es consecuencia directa de las fórmulas (7). □

2.D. Los subgrupos de $G_{\mathbb{Q}}(f)$

Observaciones 2.3 (1) Por el Tercer teorema de Sylow el número n_p de subgrupos de orden p de $G_{\mathbb{Q}}(f)$ divide a $p-1$ y $n_p \equiv 1 \bmod p$, así que $n_p = 1$, lo que en particular implica que el único subgrupo N de orden p de $G_{\mathbb{Q}}(f)$ coincide con sus conjugados, así que $N \lhd G_{\mathbb{Q}}(f)$. Además, acabamos de probar que el automorfismo $\tau := \varphi_{11}$ tiene orden p y, en consecuencia, $N := \langle\tau\rangle$ es el único subgrupo de orden p de $G_{\mathbb{Q}}(f)$.

(2) Otro subgrupo esencial para entender el grupo $G_{\mathbb{Q}}(f)$ es el subgrupo

cíclico $H := \langle\sigma\rangle$ de orden $p-1$ generado por el automorfismo $\sigma := \varphi_{0m}$.

(3) Para cada divisor d de $p-1$ el grupo H posee, por ser cíclico, un único subgrupo H_d de orden d.

En lo que sigue emplearemos los símbolos N, H y H_d *únicamente* con este significado

Antes de estudiar los subgrupos de $G_{\mathbb{Q}}(f)$ cuyo orden divide a $p-1$ necesitamos una sencilla consecuencia del Teorema de Lagrange.

Lema 2.4 *Sean M y T dos subgrupos del grupo finito G cuyos órdenes son primos entre sí. Entonces $M \cap T = \{1_G\}$ y el número de elementos del conjunto $MT = \{xy : x \in M, y \in T\}$ es* $\mathrm{ord}(M) \cdot \mathrm{ord}(T)$.

Demostración. La intersección $M \cap T$ es subgrupo tanto de M como de T. Esto implica, por el Teorema de Lagrange, que $\mathrm{ord}(M \cap T)$ divide a $\mathrm{ord}(M)$ y a $\mathrm{ord}(T)$. Como éstos son primos entre sí se deduce que $\mathrm{ord}(M \cap T) = 1$, así que $M \cap T$ consiste, únicamente, en el elemento neutro de G.

Para la segunda parte, es suficiente demostrar que la aplicación sobreyectiva $M \times T \to MT$, $(x, y) \mapsto xy$ es también inyectiva. Si $x_1, x_2 \in M$ e $y_1, y_2 \in T$ cumplen que $x_1 y_1 = x_2 y_2$, se tiene $x_2^{-1} x_1 = y_2 y_1^{-1} \in M \cap T$, así que $x_2^{-1} x_1 = y_2 y_1^{-1} = 1_G$, luego $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. □

Proposición 2.5 *Para cada divisor positivo d de $p-1$ todos los subgrupos de $G_{\mathbb{Q}}(f)$ de orden d son cíclicos.*

Demostración. Consideremos los subgrupos cíclicos $N = \langle\tau\rangle$ y $H = \langle\sigma\rangle$ de $G_{\mathbb{Q}}(f)$ de órdenes p y $p-1$, respectivamente, introducidos en la Observación 2.3. Se deduce del Lema 2.4 que $N \cap H = \{\mathrm{id}\}$ ya que $\mathrm{mcd}(p, p-1) = 1$. Por eso $G_{\mathbb{Q}}(f) = HN$ ya que

$$\mathrm{Card}(HN) = \mathrm{ord}(H) \cdot \mathrm{ord}(N) = p(p-1) = \mathrm{ord}(G_{\mathbb{Q}}(f)).$$

Consideremos los homomorfismos de grupos

$$\mathtt{j} : H \hookrightarrow G_{\mathbb{Q}}(f) \quad \& \quad \pi : G_{\mathbb{Q}}(f) \to G_{\mathbb{Q}}(f)/N,$$

cuya composición $\Psi := \pi \circ \mathtt{j} : H \to G_{\mathbb{Q}}(f)/N$, $h \mapsto hN$ es sobreyectiva, luego isomorfismo. En efecto, dado $u := gN \in G_{\mathbb{Q}}(f)/N$ con $g \in G_{\mathbb{Q}}(f)$ existen $h \in H$ y $n \in N$ tales que $g = hn$, y así $gN = hnN = hN = \Psi(h)$. La sobreyectividad de Ψ implica que es isomorfismo ya que

$$\mathrm{ord}(G_{\mathbb{Q}}(f)/N) = \frac{p(p-1)}{p} = p - 1 = \mathrm{ord}(H).$$

En particular, como H es cíclico también $G_{\mathbb{Q}}(f)/N$ lo es.

Pasamos ya a probar la afirmación del enunciado. Sean d un divisor de $p-1$ y K un subgrupo de $G_{\mathbb{Q}}(f)$ de orden d. Por ser $\mathrm{mcd}(p,d) = 1$ se tiene $N \cap K = \{\mathrm{id}\}$ y, por el Tercer Teorema de Isomorfía de grupos,

$$K = \frac{K}{N \cap K} \cong \frac{KN}{N}.$$

Como $\frac{KN}{N}$ es cíclico por ser subgrupo del grupo cíclico $G_{\mathbb{Q}}(f)/N$ concluimos que K es cíclico. □

Observación 2.6 Se desprende de las igualdades $G_{\mathbb{Q}}(f) = HN$, $H = \langle\sigma\rangle$ y $N = \langle\tau\rangle$ que el conjunto $\{\sigma, \tau\}$ es un sistema generador de $G_{\mathbb{Q}}(f)$, que de hecho es minimal pues $G_{\mathbb{Q}}(f)$ no es abeliano.

Proposición 2.7 *Los subgrupos de $G_{\mathbb{Q}}(f)$ conjugados de H son los miembros de la familia $\Sigma := \{g^{-1}Hg : g \in N\}$. Además:*
(1) *Para todo $g \in N \setminus \{\mathrm{id}\}$ se tiene $(g^{-1}Hg) \cap H = \{\mathrm{id}\}$.*
(2) *Dados $g_1, g_2 \in N$ con $g_1 \neq g_2$ se cumple que $g_1^{-1}Hg_1 \neq g_2^{-1}Hg_2$.*
(3) *Todo subgrupo de $G_{\mathbb{Q}}(f)$ de orden $p-1$ pertenece a Σ.*

Demostración. Lo primero es obvio ya que cada $\phi \in G_{\mathbb{Q}}(f) = HN$ se escribe como $\phi = hg$ para ciertos $h \in H$ y $g \in N$, luego

$$\phi^{-1}H\phi = (hg)^{-1}Hhg = g^{-1}(h^{-1}Hh)g = g^{-1}Hg.$$

(1) Sea $h \in H$ tal que $g^{-1}hg \in H$. Sean $\ell, k \in \mathbb{Z}$ tales que $1 \leq \ell, k \leq p-1$ y $g := \tau^\ell$ y $h := \sigma^k$. Como $g^{-1}hg \in H$ existe $s \in \mathbb{Z}$ con $1 \leq s \leq p-1$ tales que

$$\tau^{-\ell}\sigma^k\tau^\ell = g^{-1}hg = \sigma^s \quad \Longrightarrow \quad \sigma^k\tau^\ell = \tau^\ell\sigma^s. \tag{8}$$

Hacemos actuar los dos miembros de esta igualdad sobre los generadores ρ y ζ de la extensión $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$. Por un lado, como $\tau(\rho) = \rho\zeta$ y $\tau(\zeta) = \zeta$ resulta que $\tau^\ell(\rho) = \rho\zeta^\ell$, mientras que $\tau^\ell(\zeta) = \zeta$. Por otro, $\sigma(\rho) = \rho$ y $\sigma(\zeta) = \zeta^m$, así que para cada exponente entero j se tiene $\sigma^j(\rho) = \rho$ y $\sigma^j(\zeta) = \zeta^{m^j}$. En consecuencia,

$$\sigma^k\tau^\ell(\rho) = \tau^\ell(\sigma^k(\rho)) = \tau^\ell(\rho) = \rho\zeta^\ell \quad \&$$
$$\tau^\ell\sigma^s(\rho) = \sigma^s(\tau^\ell(\rho)) = \sigma^s(\rho\zeta^\ell) = \sigma^s(\rho)(\sigma^s(\zeta))^\ell = \rho\zeta^{\ell m^s}$$

y se deduce de la igualdad (8) que $\zeta^\ell = \zeta^{\ell m^s}$, o lo que es igual, $\zeta^{\ell(m^s-1)} = 1$. Esto implica que $\ell(m^s - 1) \in p\mathbb{Z}$ y p no divide a ℓ porque $1 \leq \ell \leq p - 1$. Deducimos que $(m + p\mathbb{Z})^s = 1 + p\mathbb{Z} \in \mathbb{F}_p^*$. Pero el orden de $m + p\mathbb{Z}$ en $\mathbb{F}_p^*$ es $p - 1$, luego $(p - 1)|s$, así que $g^{-1}hg = \sigma^s = \mathrm{id}$ pues $o(\sigma) = p - 1$. Hemos así probado que $g^{-1}Hg \cap H = \{\mathrm{id}\}$ para cada $g \in N \setminus \{\mathrm{id}\}$.

(2) Si $g_1^{-1}Hg_1 = g_2^{-1}Hg_2$, y como $g_3 = g_2g_1^{-1} \in N$, resulta

$$H = g_1g_2^{-1}Hg_2g_1^{-1} = (g_2g_1^{-1})^{-1}H(g_2g_1^{-1}) = g_3^{-1}Hg_3,$$

y, por lo que acabamos de demostrar, $g_3 = \mathrm{id}$, o sea, $g_1 = g_2$.

(3) Para cada $g \in N$ el grupo cíclico $g^{-1}Hg$, cuyo orden es $p - 1$, posee exactamente $\varphi(p-1)$ elementos de orden $p-1$, luego en la unión $\bigcup_{g\in N} g^{-1}Hg$ hay $p\varphi(p - 1)$ elementos de orden $p - 1$. Si $G_\mathbb{Q}(f)$ contuviese un subgrupo $K \notin \Sigma$ de orden $p - 1$, que por la Proposición 2.5 es cíclico, tomamos un generador suyo $\alpha \in K$. Como $\alpha \notin g^{-1}Hg$ sea quien sea $g \in N$ el grupo $G_\mathbb{Q}(f)$ tendría, al menos, $1 + p\varphi(p - 1)$ elementos de orden $p - 1$, contra lo demostrado en el Corolario 2.2. □

Corolario 2.8 *El grupo $G_\mathbb{Q}(f)$ posee, para cada divisor $d > 1$ de $p - 1$, exactamente p subgrupos de orden d. Estos subgrupos son conjugados dos a dos y la intersección de dos cualesquiera de ellos es la identidad.*

Demostración. Con las notaciones de la Observación 2.3, sea H_d el único subgrupo de orden d del grupo $H = \langle\sigma\rangle$. La familia $\Sigma_d := \{g^{-1}H_dg : g \in N\}$ está formada, por lo probado en la Proposición 2.7, por p subgrupos de orden d tales que dos cualesquiera de ellos sólo comparten la identidad, y sólo falta probar que estos son todos los subgrupos de orden d del grupo $G_\mathbb{Q}(f)$.

Suponemos, por reducción al absurdo, que existe un subgrupo $K \notin \Sigma_d$ de $G_{\mathbb{Q}}(f)$ de orden d. El subgrupo K es cíclico, según vimos en la Proposición 2.5, y tomamos un generador suyo $\beta \in K$. Nótese que $\beta \notin \bigcup_{g\in N} g^{-1}H_d g$ pues $K \notin \Sigma_d$ y $o(\beta) = d$. En cada grupo cíclico $g^{-1}H_d g$ hay $\varphi(d)$ elementos de orden d, y esto proporciona, al menos, $1 + p\varphi(d)$ elementos en G de orden d, y esto contradice lo probado en el Corolario 2.2. □

Corolario 2.9 *Sea r un divisor positivo de $p(p-1)$ que es múltiplo de p. El grupo $G_{\mathbb{Q}}(f)$ posee un único subgrupo de orden r.*

Demostración. El cociente $d := r/p$ divide a $p-1$, y denotemos H_d el único subgrupo de orden d de H. Como $N \lhd G_{\mathbb{Q}}(f)$ el producto $H_d N$ es un subgrupo de $G_{\mathbb{Q}}(f)$ y $\operatorname{ord}(H_d N) = \operatorname{ord}(H_d)\operatorname{ord}(N) = pd = r$, puesto que $N \cap H_d = \{\mathrm{id}\}$. Vamos a comprobar que éste es el único subgrupo de $G_{\mathbb{Q}}(f)$ de orden r. Sea M uno de ellos. Por el Teorema de Cauchy M contiene un subgrupo de orden p, que ha de ser N, pues éste es el único subgrupo de orden p de $G_{\mathbb{Q}}(f)$. Además,

$$\operatorname{ord}(M/N) = \operatorname{ord}(M)/\operatorname{ord}(N) = d,$$

y si $\Psi : H \to G_{\mathbb{Q}}(f)/N$ es el isomorfismo introducido en la Proposición 2.5, $\Psi^{-1}(M/N)$ es un subgrupo de H de orden d, esto es $\Psi^{-1}(M/N) = H_d$. Veamos que esto implica que $H_d N \subset M$, de donde se obtiene la igualdad buscada porque ambos subgrupos tienen r elementos.

Dado $f \in H_d N$ existen $h \in H_d$ y $g \in N$ tales que $f = hg$, y por tanto, $fN = hgN = hN$. Como $h \in H_d = \Psi^{-1}(M/N)$ se tiene $hN = \Psi(h) \in M/N$. Existe así $\phi \in M$ tal que $hN = \phi N$, luego $fN = hN = \phi N$. En consecuencia $\phi^{-1}f \in N \subset M$, y así $f = \phi(\phi^{-1}f) \in M$. □

2.E. Las subextensiones de $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$

(1) Por el Teorema Fundamental de la Teoría de Galois el número de subextensiones de $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$ de grado d coincide con el número de subgrupos de orden pe, donde $e := (p-1)/d$, del grupo $G_{\mathbb{Q}}(f)$, y hemos visto en el Corolario 2.9 que existe un único subgrupo de $G_{\mathbb{Q}}(f)$ de este orden que, con las notaciones introducidas en la Observación 2.3, es $H_e N$. Así, $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$ posee una única subextensión $K_d|\mathbb{Q}$ de grado d, que por tanto es de Galois. De hecho,

$K_d = \mathrm{Fix}(H_e N)$.

(2) El número de subextensiones de $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$ de grado $p(p-1)/d$ coincide con el de subgrupos de $G_{\mathbb{Q}}(f)$ de orden d, que según hemos visto en el Corolario 2.8 es p. Estos subgrupos son conjugados dos a dos, luego ninguno es subgrupo normal de $G_{\mathbb{Q}}(f)$. En consecuencia ninguna de las p subextensiones de $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$ de grado $p(p-1)/d$ es de Galois.

Identifiquemos estas subextensiones como cuerpos fijos. Para cada $g \in N$ el subgrupo $g^{-1}H_d g$ tiene orden d, y estos son todos los subgrupos de orden d del grupo $G_{\mathbb{Q}}(f)$, luego las subextensiones de grado $p(p-1)/d$ de $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$ son

$$K_g|\mathbb{Q} := \mathrm{Fix}(g^{-1}H_d g)|\mathbb{Q}, \text{ donde } g \in N.$$

Corolario 2.10 *Sea D_{p-1} el número de divisores de $p-1$ mayores que 1. La extensión $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$ tiene $(p+1)D_{p-1}$ subextensiones propias, es decir, excluídas $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}|\mathbb{Q}$.*

Demostración. El resultado es consecuencia inmediata del Teorema fundamental de la Teoría de Galois y los Corolarios 2.8 y 2.9. □

2.F. Generadores de las subextensiones de $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$

(1) En primer lugar buscamos, para cada divisor d de $p-1$, un elemento primitivo de la única subextensión $K_d|\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$ cuyo grado d divide a $p-1$. Sea $e := (p-1)/d$. Vimos en la subsección 2.E (1) que $K_d = \mathrm{Fix}(H_e N)$, donde $N = \langle\tau\rangle$ y $H_e = \langle\sigma^d\rangle$ es el único subgrupo de orden e del grupo cíclico $H := \langle\sigma\rangle$. Con las notaciones de la subsección 1.C definimos $\zeta_k := \zeta^{m^k}$ para cada entero $k \geq 0$. Vimos en la subsección 1.E que

$$\eta_{0,e} := \zeta_0 + \zeta_d + \cdots + \zeta_{(e-1)d} \in \mathbb{Q}(\zeta) \subset \mathbb{Q}_f \tag{9}$$

cumple que $[\mathbb{Q}(\eta_{0,e}) : \mathbb{Q}] = d$ y $\sigma^e(\eta_{0,e}) = \eta_{0,e}$. Además $\tau(\eta_{0,e}) = \eta_{0,e}$ porque $\tau(\zeta) = \zeta$. Así $\eta_{0,e} \in K_d$, luego $\mathbb{Q}(\eta_{0,e}) \subset K_d$, y se da la igualdad ya que

$$[K_d : \mathbb{Q}(\eta_{0,e})] = \frac{[K_d : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\eta_{0,e}) : \mathbb{Q}]} = \frac{d}{d} = 1.$$

(2) Buscamos, para cada divisor $d > 1$ de $p-1$, generadores de las p subextensiones de $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$ de grado pe, donde $e := (p-1)/d$. Para $0 \leq k \leq p-1$, sea $K_{k,d} := \mathbb{Q}(\rho\zeta^k, \eta_{0,e})$. La extensión $K_{k,d}|\mathbb{Q}$ tiene grado pe pues

$$[\mathbb{Q}(\rho\zeta^k) : \mathbb{Q}] = \deg(f) = p, \quad [\mathbb{Q}(\eta_{0,e}) : \mathbb{Q}] = d \quad \& \quad \mathrm{mcd}(p,d) = 1,$$

y para cada divisor d de $p-1$ hay p extensiones de esta forma, según los valores de $k = 0, \ldots, p-1$. Para terminar sólo falta comprobar que $K_{k,d} \neq K_{\ell,d}$ si $0 \leq k < \ell \leq p-1$. En caso contrario $\rho\zeta^k, \rho\zeta^\ell \in K_{k,d}$, así que $\zeta^{\ell-k} = \rho\zeta^\ell/\rho\zeta^k \in K_{k,d}$. Como $\ell - k$ no es múltiplo de p la potencia $\zeta^{\ell-k}$ genera el grupo $\mathcal{U}_p$, y en consecuencia $\zeta \in \langle\zeta^{\ell-k}\rangle \subset K_{k,d}$. Esto implica que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\zeta) \subset K_{k,d}$, así que

$$p(p-1)/d = [K_{k,d} : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] \cdot [K_{k,d} : \mathbb{Q}(\zeta)] = (p-1) \cdot [K_{k,d} : \mathbb{Q}(\zeta)]$$

y simplificando resulta $p = d \cdot [K_{k,d} : \mathbb{Q}(\zeta)]$. Esto es absurdo ya que d es un divisor de $p-1$ mayor que 1.

3. $G_{\mathbb{Q}}(f)$ es un grupo de Frobenius

El grupo $G_{\mathbb{Q}}(f)$ es un grupo de Frobenius, o sea, es isomorfo al subgrupo afín $\mathcal{F}_p$ del grupo de permutaciones $\mathcal{S}_p$, que es el formado por las biyecciones

$$\sigma_{a,b} : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p,\ x \mapsto ax + b$$

donde $a \in \mathbb{F}_p^*$ y $b \in \mathbb{F}_p$. La biyección $\alpha := \sigma_{11}$ tiene orden p, pues es el ciclo $(1, 2, \ldots, p)$ del grupo $\mathcal{S}_p$. Además $\mathrm{ord}(\mathcal{F}_p) = \mathrm{Card}(\mathbb{F}_p^*) \cdot \mathrm{Card}(\mathbb{F}_p) = p(p-1)$, por lo que su subgrupo $\widetilde{N} := \langle\alpha\rangle$, que tiene orden p, es normal, pues por el Tercer Teorema de Sylow es el único subgrupo de $\mathcal{F}_p$ de orden p. Sea $\beta := \sigma_{m,0} : x \mapsto mx$. El subgrupo cíclico $\widetilde{H} := \langle\beta\rangle$ tiene orden $p-1$ ya que para cada $s \in \mathbb{Z}^+$ se cumple

$$\beta^s = \mathrm{id} \iff \beta^s(x) = x \,\text{para todo}\, x \in \mathbb{F}_p \iff m^s x = x \,\text{para todo}\, x \in \mathbb{F}_p,$$

y esto equivale a que $m^s = 1$, esto es $(p-1)|s$, ya que $o(m + p\mathbb{Z}) = p-1$.

Como $\widetilde{N} \lhd \mathcal{F}_p$ el producto $\widetilde{N}\widetilde{H}$ es un subgrupo de $\mathcal{F}_p$, y de hecho se cumple la igualdad $\widetilde{N}\widetilde{H} = \mathcal{F}_p$ ya que, en virtud del Lema 2.4,

$$\mathrm{ord}(\widetilde{N}\widetilde{H}) = \mathrm{ord}(\widetilde{N})\,\mathrm{ord}(\widetilde{H}) = p(p-1) = \mathrm{ord}(\mathcal{F}_p).$$

En particular, el grupo $\mathcal{F}_p$ está generado por α y β. Por otro lado los generadores τ y σ del grupo $G_{\mathbb{Q}}(f)$ cumplen $\tau\sigma = \sigma\tau^m$. En efecto, actuando sobre los generadores ρ y ζ de la extensión $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$ se tiene

$$\tau\sigma(\rho) = \sigma(\tau(\rho)) = \sigma(\rho\zeta) = \rho\zeta^m \quad \& \quad \tau\sigma(\zeta) = \sigma(\tau(\zeta)) = \sigma(\zeta) = \zeta^m$$

mientras que

$$\sigma\tau^m(\rho) = \tau^m(\sigma(\rho)) = \tau^m(\rho) = \rho\zeta^m \ \& \ \sigma\tau^m(\zeta) = \tau^m(\sigma(\zeta)) = \tau^m(\zeta^m) = \zeta^m.$$

Por su parte, los generadores α y β de $\mathcal{F}_p$ cumplen $\alpha\beta = \beta\alpha^m$. En efecto, para cada $x \in \mathbb{F}_p$,

$$\begin{aligned} \alpha\beta(x) = \beta(\alpha(x)) = \beta(x+1) = m(x+1) \quad \& \\ \beta\alpha^m(x) = \alpha^m(\beta(x)) = \alpha^m(mx) = mx + m = m(x+1). \end{aligned}$$

La asignación $G_{\mathbb{Q}}(f) \to \mathcal{F}_p$, $\tau \mapsto \alpha$ y $\sigma \mapsto \beta$ induce un isomorfismo, pues

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{Q}}(f) := \langle \tau, \sigma : \tau^p = \sigma^{p-1} = 1,\, \tau\sigma = \sigma\tau^m \rangle \\ \& \quad \mathcal{F}_p := \langle \alpha, \beta : \alpha^p = \beta^{p-1} = 1,\, \alpha\beta = \beta\alpha^m \rangle \end{aligned}$$

4. Un ejemplo

Los resultados de este artículo sólo dependen del número primo p siempre que el polinomio $\mathtt{t}^p - a$ sea irreducible en $\mathbb{Q}[\mathtt{t}]$. Elegimos $p := 11$. En este caso los divisores mayores que 1 de $p-1 = 10$ son los elementos del conjunto $D_{11} := \{2, 5, 10\}$ de divisores de 10 mayores que 1. Para encontrar generadores de las subextensiones de $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$ necesitamos calcular un generador del grupo multiplicativo $\mathbb{F}_{11}^*$. Se tiene

$$2^2 \equiv 4 \bmod 11 \quad \& \quad 2^5 \equiv -1 \bmod 11,$$

así que $o(2 + 11\mathbb{Z}) = 10$, y por tanto $\mathbb{F}_{11}^* = \langle 2 + 11\mathbb{Z} \rangle$. En consecuencia, con las notaciones empleadas en este trabajo, $m = 2$, y con las notaciones de la subsección 1.C se tiene

$$\zeta_k := \zeta^{m^k} = \zeta^{2^k}, \quad \text{donde} \quad \zeta := e^{2\pi i/11}.$$

Empleamos las notaciones de la fórmula (9),

$$\eta_{0,e} := \zeta_0 + \zeta_d + \cdots + \zeta_{(e-1)d}, \quad \text{donde} \quad ed = p - 1 = 10.$$

Necesitamos hallar $\eta_{0,e}$ para $e = 1, 2$ y 5 y para ello calculamos previamente

$$\zeta_0 = \zeta, \quad \zeta_2 = \zeta^4, \quad \zeta_4 = \zeta^5, \quad \zeta_5 = \zeta^{-1}, \quad \zeta_6 = \zeta^{-2} \quad \& \quad \zeta_8 = \zeta^3.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} &\eta_{0,1} = \zeta_0 = \zeta, \quad \eta_{0,2} = \zeta_0 + \zeta_5 = \zeta + \zeta^{-1} \quad \& \\ &\eta_{0,5} = \zeta_0 + \zeta_2 + \zeta_4 + \zeta_6 + \zeta_8 = \zeta + \zeta^4 + \zeta^5 + \zeta^{-2} + \zeta^3, \end{aligned}$$

y los grados de las subsextensiones $\mathbb{Q}(\eta_{01})|\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\eta_{02})|\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}(\eta_{05})|\mathbb{Q}$ son

$$[\mathbb{Q}(\eta_{01}) : \mathbb{Q}] = 10, \quad [\mathbb{Q}(\eta_{02}) : \mathbb{Q}] = 5 \quad \& \quad [\mathbb{Q}(\eta_{05}) : \mathbb{Q}] = 2.$$

Estas tres, junto con las subextensiones triviales $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}|\mathbb{Q}$, son las únicas subextensiones de Galois de $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$. Denotamos $\rho := \sqrt[11]{a}$. Hemos visto en la subsección 2.F que las subextensiones de $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$ que no son de Galois son, para $0 \leq k \leq 10$, las siguientes:

$$\mathbb{Q}(\rho\zeta^k)|\mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q}(\rho\zeta^k, \eta_{02})|\mathbb{Q} \quad \& \quad \mathbb{Q}(\rho\zeta^k, \eta_{05})|\mathbb{Q},$$

cuyos grados son

$$[\mathbb{Q}(\rho\zeta^k) : \mathbb{Q}] = 11, \quad [\mathbb{Q}(\rho\zeta^k, \eta_{02}) : \mathbb{Q}] = 55 \quad \& \quad [\mathbb{Q}(\rho\zeta^k, \eta_{05}) : \mathbb{Q}] = 22.$$

Esto proporciona, de acuerdo con el Corolario 2.10, un total de 36 subextensiones de $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$, excluídas las subextensiones triviales $\mathbb{Q}_f|\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}|\mathbb{Q}$.

Agradecimientos

Agradecemos al Prof. José F. Fernando que nos propusiera este problema y nos alentara en su resolución.

Referencias

[1] José F. Fernando, J.M. Gamboa (2014), *Estructuras Algebraicas:* Teoría Elemental de Grupos. Editorial Sanz y Torres. Segunda edición.

[2] José F. Fernando, J.M. Gamboa (2014), *Estructuras Algebraicas: Divisibilidad en anillos conmutativos.* Editorial Sanz y Torres. Primera edición.

[3] José F. Fernando, J.M. Gamboa (2015), *Ecuaciones Algebraicas: Extensiones de cuerpos y teoría de Galois.* Editorial Sanz y Torres. Primera edición.

Estudio de una contracción en el plano euclídeo

Sergio Falcón
Dpto. de Matemáticas
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
sergio.falcon@ulpgc.es

Abstract

It is well known that a contraction is simply a map from a metric space to itself, with the property that for any two points in the space, the distance between them is greater than or equal to the distance between their images under the contraction. According to this definition, we have created a special contraction that transforms the Euclidean plane onto the unit circle. The images under that contraction of a circle centred at the origin, the square of vertices the points (± 1, ± 1) and any straight line are calculated.

Introducción

Recordemos algunos conceptos elementales que necesitaremos en el desarrollo de este tema. Dados dos puntos, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, del plano R^2, se define la distancia euclídea entre los mismos como la aplicación

$$d : R^2 \to R \,/\, d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

El plano R^2 dotado de esta distancia d, recibe el nombre de plano euclídeo, y se representa por π. Todo punto $P \in \pi$ está determinado por dos *coordenadas cartesianas (x, y)* y también por sus *coordenadas polares (r, α)* tales que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan\alpha = \frac{y}{x}$ (ver Figura 1).

A continuación indicamos una definición simplificada de una aplicación contractiva [1,2,3]. Se dice que una aplicación, f, de un espacio métrico (*M*, d) en sí mismo es contractiva (o que f es una contracción) si la distancia entre dos elementos de *M* se mantiene mayor o igual a la distancia entre sus imágenes:

$$\forall A, B \in M : d(f(A), f(B)) \leq d(A, B) \qquad (1)$$

Según el teorema del punto fijo de Banach [2 (ejercicio 2), 3], toda aplicación contractiva en un espacio métrico completo, *M*, tiene a lo sumo un único punto fijo. En caso de existir, entonces para todo punto, *x,* del espacio *M*, la sucesión $\{x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), ...\}$ converge a dicho punto fijo.

Llamamos *circunferencia unidad* a la circunferencia de radio 1 y centro el origen de coordenadas y la representaremos como C(O, 1).

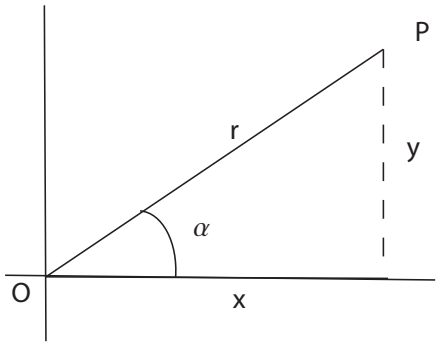


Figura 1

1. Estudio de una contracción especial en el plano euclídeo π

Sea π el plano euclídeo $\left(R^2, d\right)$ y consideremos la aplicación f de π en π tal que la imagen de un punto P es un punto f(P) que se encuentra en la misma semirrecta que une P con el origen O y tal que la distancia de O al punto imagen es menor o igual que la distancia desde O al punto original: d(O, f(P)) ≤ d(O, P). Evidentemente, esta aplicación es contractiva. Un caso particular de esta aplicación contractiva es la que estudiamos a continuación.

Si r y α son las coordenadas polares de un punto X∈π, definimos la aplicación Φ de π en π tal que

$$\Phi(P(r,\alpha)) = P'\left(\frac{r}{1+r}, \alpha\right)$$

La aplicación Φ es una contracción del tipo indicado anteriormente, puesto que la permanencia del argumento α asegura que la imagen del punto *P* está en la semirrecta de origen *O* que pasa por *P*, y el valor, r / (1+r), del radio vector, indica que la distancia entre el punto imagen Φ(P) y O es menor que la que existe entre éste y el punto original P, por lo cual se verifica la condición (1).

1.1 Propiedades de la aplicación Φ

- El plano π se contrae al círculo unidad puesto que el origen de coordenadas es el único punto fijo de la contracción y el radio del círculo imagen es $\lim_{r\to\infty} \frac{r}{1+r} = 1$.
- Toda semirrecta que pasa por el origen de coordenadas se contrae en un radio del círculo unidad contenido en dicha semirrecta.
- Esta contracción es biyectiva, puesto que todo punto de un radio de C(O,1) es imagen de un único punto de la semirrecta que contiene a este radio.
- Sea C'(O, ½) la circunferencia de centro el origen y radio ½. La imagen de un punto P verifica:
  i) es interior a C', si P es interior a C(O,1)
  ii) pertenece a C', si P pertenece a C
  iii) es exterior a C' e interior a C si P es exterior a C (Figura 2).

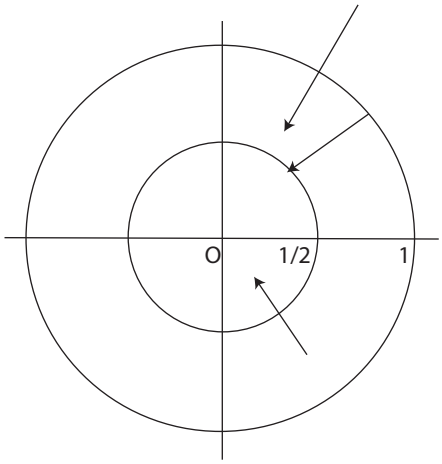


Figura 2

1.2 Contracción de círculos de centro O

Todo círculo de centro el origen y radio r se contrae en otro círculo del mismo centro y radio $\frac{r}{1+r}$.

Esta propiedad es evidente puesto que todo punto del círculo se contrae en otro punto que se encuentra en el mismo radio pero a menor distancia del origen.

1.3 Contracción de rectas paralelas a los ejes de coordenadas

Sea y = k una recta del plano π, paralela al eje de abscisas. Si P(x, k) es un punto de esta recta, sus coordenadas polares son: $r=\sqrt{x^2+k^2}$, $\alpha=\arctan\left(\frac{k}{x}\right)$.

Mediante la contracción Φ, la imagen de este punto P es el punto P' de coordenadas polares $\left(\frac{r}{1+r},\alpha\right)$, siendo sus coordenadas cartesianas (u, v) tales que $\frac{r}{1+r}=\sqrt{u^2+v^2}$, $\alpha=\arctan\left(\frac{k}{x}\right)=\arctan\left(\frac{v}{u}\right)$ por lo que $\frac{v}{u}=\frac{k}{x}$ y finalmente $v=\frac{uk}{x}$. Sustituyendo esta última relación en la primera resulta

$$\frac{\sqrt{x^2+k^2}}{1+\sqrt{x^2+k^2}}=\sqrt{u^2+v^2}=\sqrt{u^2+\frac{u^2k^2}{x^2}}=\frac{u}{x}\sqrt{x^2+k^2}$$

de donde se obtiene

$$u=\frac{x}{1+\sqrt{x^2+k^2}}\,,\ v=\frac{k}{1+\sqrt{x^2+k^2}}$$

Seguidamente estudiamos la relación existente entre las coordenadas u y v. Puesto que

$$1-u^2=1-\frac{x^2}{\left(1+\sqrt{x^2+k^2}\right)^2}=\frac{1+x^2+k^2+2\sqrt{x^2+k^2}-x^2}{\left(1+\sqrt{x^2+k^2}\right)^2}$$

$$=\frac{2\left(1+\sqrt{x^2+k^2}\right)}{\left(1+\sqrt{x^2+k^2}\right)^2}+\frac{k^2-1}{\left(1+\sqrt{x^2+k^2}\right)^2}=2\frac{v}{k}+(k^2-1)\left(\frac{v}{k}\right)^2$$

multiplicando por k^2 resulta la ecuación $k^2(1-u^2)=2kv+(k^2-1)v^2$

Por lo tanto: *toda recta paralela al eje horizontal se transforma en un arco de la cónica de ecuación*

$$k^2u^2 + (k^2 - 1)v^2 + 2kv - k^2 = 0.$$

Estudiemos la naturaleza de esta cónica según los valores de k. La ecuación matricial de esta cónica es

$$\begin{pmatrix} u & v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ 0 & k^2-1 & k \\ 0 & k & -k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Denotando

$$M = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ 0 & k^2-1 & k \\ 0 & k & -k^2 \end{pmatrix}$$

entonces $\det(M) = -k^6 \neq 0$, por lo que se trata de una cónica no degenerada para cualquier valor de $k \neq 0$. Por otra parte, recordemos que un modo de clasificar la cónica no degenerada

$$AX^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (2)$$

consiste en considerar el valor del discriminante $d = B^2 - 4AC$, que en nuestro caso es $d = -4k^2(k^2-1)$, resultando:

1. Si $|k| > 1 \rightarrow d < 0$ por lo que la contracción es un arco de elipse que nunca será de una circunferencia puesto que siempre es $k^2 \neq k^2 - 1$.
2. Si $k = 1 \rightarrow d = 0$ por lo que la contracción es un arco de parábola cóncava hacia abajo (cóncava) si k = 1 y cóncava hacia arriba (convexa) si k = – 1.
3. Si $|k| < 1 \rightarrow d < 0$ y la contracción es un arco de hipérbola.

1.4 Contracción del cuadrado de vértices (±1, ±1)

En esta subsección estudiaremos la contracción del cuadrado de vértices (±1, ±1) cuyo centro de simetría es el origen de coordenadas. Las ecuaciones de los segmentos de recta que conforman los lados superior e inferior son $y = \pm 1,\ -1 \leq x \leq 1$, respectivamente, mientras que los lados verticales derecho e izquierdo tienen como ecuaciones respectivas $x = \pm 1,\ -1 \leq y \leq 1$.

Estudiemos la contracción del lado superior: $y=+1,\ -1\le x\le 1$. Éste es un caso particular del párrafo anterior en el que k = 1, por lo que, conservando la notación tradicional de coordenadas x e y, la contracción en estudio transforma el segmento de recta y = 1 en el arco de la parábola cóncava $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$. Por otra parte, el vértice P(1, 1), de coordenadas polares $P\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$ se transforma en el punto P' de coordenadas polares $P'\left(\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}},\frac{\pi}{4}\right)\rightarrow P'\left(2-\sqrt{2},\pi/4\right)$. En cuanto a las coordenadas cartesianas de P'(x, y), se tiene

$$\alpha=\frac{\pi}{4}\rightarrow y=x\rightarrow x^2+y^2=2x^2=\left(2-\sqrt{2}\right)^2$$

por lo que $x=y=\sqrt{2}-1$. En consecuencia, el lado superior del cuadrado se transforma en el arco de parábola cóncava hacia abajo (cóncava) $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ contenido en el intervalo $I=\left[1-\sqrt{2},\sqrt{2}-1\right]$

Análogamente, el lado inferior del cuadrado se transforma en el arco de parábola cóncava hacia arriba (convexa) $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$ contenido en el mismo intervalo I. De modo similar se contraen sus lados verticales, por lo que el cuadrado $\left(\pm1,\pm1\right)$ contrae al "cuadrado de lados parabólicos" de la Figura 3.

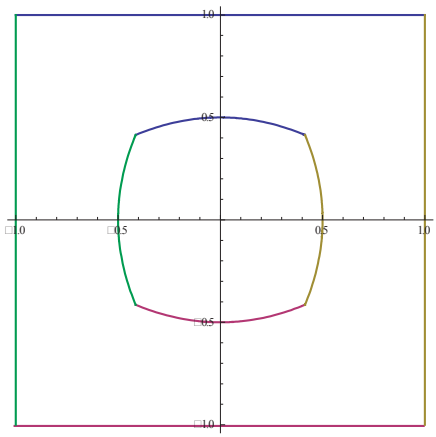


Figura 3

1.5 Caso general: contracción de la recta y = mx + n

Sea la recta de ecuación $y=mx+n$. Si $m=0$, resulta una recta horizontal cuya contracción estudiamos en una sección anterior. Si $n=0$, se trata de una recta que pasa por el origen de coordenadas cuya contracción es un segmento contenido en ella misma, de centro el origen y longitud 2. En consecuencia, consideraremos el caso de que las constantes *m* y *n* sean ambas no nulas.

Si P es un punto de esta recta, sus coordenadas cartesianas son (x, $y=mx+n$) y sus coordenadas polares: $r=\sqrt{x^2+(mx+n)^2}$, $\theta=\arctan\dfrac{mx+n}{x}$

El punto P se transforma por la contracción Φ en el punto P' de coordenadas polares

$$\left(\frac{r}{1+r}=\frac{\sqrt{x^2+(mx+n)^2}}{1+\sqrt{x^2+(mx+n)^2}},\theta\right)$$

Para averiguar la naturaleza de la figura obtenida de la línea recta mediante la contracción anterior, hallemos las coordenadas cartesianas del punto P'.

Sean (u, v) las coordenadas cartesianas de P'. Entonces sus coordenadas polares son

$$r'=\sqrt{u^2+v^2}=\frac{\sqrt{x^2+(mx+n)^2}}{1+\sqrt{x^2+(mx+n)^2}} \qquad (3)$$

$$\theta=\arctan\frac{v}{u}=\arctan\frac{mx+n}{x}\rightarrow\frac{v}{u}=\frac{mx+n}{x}\rightarrow v=\frac{u}{x}(mx+n) \qquad (4)$$

Elevando al cuadrado (3) y sustituyendo (4) resulta:

$$u^2+\frac{u^2}{x^2}(mx+n)^2=\frac{x^2+(mx+n)^2}{\left(1+\sqrt{x^2+(mx+n)^2}\right)^2}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{u^2}{x^2}(x^2+(mx+n)^2)=\frac{x^2+(mx+n)^2}{\left(1+\sqrt{x^2+(mx+n)^2}\right)^2}$$

de donde se obtienen finalmente las ecuaciones paramétricas de la curva transformada:

$$u = \frac{x}{1+\sqrt{x^2+(mx+n)^2}}\,,\; v = \frac{mx+n}{1+\sqrt{x^2+(mx+n)^2}} \qquad (5)$$

A continuación hallaremos la relación que existe entre u y v, para lo cual eliminaremos el parámetro x en las ecuaciones (5). Sustituyendo estas dos expresiones en (4), resulta

$$v = mu + \frac{n}{1+\sqrt{x^2+(mx+n)^2}}$$

y de aquí se obtiene

$$\frac{1}{1+\sqrt{x^2+(mx+n)^2}} = \frac{v-mu}{n} \qquad (6)$$

Por otra parte,

$$1-u^2 = 1-\frac{x^2}{\left(1+\sqrt{x^2+(mx+n)^2}\right)^2} = \frac{1+x^2+(mx+n)^2+2\sqrt{x^2+(mx+n)^2}-x^2}{\left(1+\sqrt{x^2+(mx+n)^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{2(1+\sqrt{x^2+(mx+n)^2})}{\left(1+\sqrt{x^2+(mx+n)^2}\right)^2} + \left(\frac{mx+n}{1+\sqrt{x^2+(mx+n)^2}}\right)^2 - \frac{1}{\left(1+\sqrt{x^2+(mx+n)^2}\right)^2}$$

y sustituyendo (5) y (6) en esta expresión resulta

$$1-u^2 = 2\frac{v-mu}{n} + v^2 - \left(\frac{v-mu}{n}\right)^2$$

Finalmente, eliminando denominadores y agrupando términos se obtiene la curva de ecuación

$$(n^2-m^2)u^2+(n^2-1)v^2+2muv-2mnu+2nv-n^2=0$$

Observando esta expresión, se concluye fácilmente que:

Toda recta se transforma en una curva simétrica con respecto a la recta que pasa por el origen y es perpendicular a la recta considerada en R^2.

En forma matricial la última ecuación se puede expresar en la forma

$$\begin{pmatrix} u & v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n^2-m^2 & m & -mn \\ m & n^2-1 & n \\ -mn & n & -n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

y su matriz asociada

$$M = \begin{pmatrix} n^2-m^2 & m & -mn \\ m & n^2-1 & n \\ -mn & n & -n^2 \end{pmatrix}$$

tiene por determinante $\det(M) = -n^6 < 0$, por lo que se trata de una cónica no degenerada.

Comparando ahora con la ecuación general (2) de una cónica, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} A = n^2 - m^2 \\ B = 2m \\ C = n^2 - 1 \end{array}\right\} \rightarrow d = B^2 - 4AC = 4m^2 - 4(n^2-m^2)(n^2-1) = -4n^2(n^2-m^2-1)$$

lo que permite concluir que: *la imagen de la recta y=mx+n en la contracción considerada resulta ser un arco de cónica no degenerada, tal que*

a) si $n^2 > m^2 + 1 \rightarrow d < 0$, *por lo que se trata de un arco de elipse, que nunca será de circunferencia, ya que* $B = 2m \neq 0$
b) si $n^2 = m^2 + 1 \rightarrow d = 0$, *por lo que se trata de un arco de parábola*
c) finalmente, si $n^2 < m^2 \rightarrow d > 0$, *luego se trata de un arco de hipérbola*.

Bibliografía

[1] https://es.wikipedia.org/wiki/Contracci%C3%B3n_(espacio_m%C3%A9trico)

[2] https://vargasmat.files.wordpress.com/2011/05/teorema-del-punto-fijo.pdf

[3] http://www.pagines.ma1.upc.edu/~edos/tercera_clase.pdf

Unas curvas estrafalarias

Ricardo Moreno Castillo
Catedrático de Instituto jubilado
moreno_castillo@hotmail.es

Abstract

The loci of points in Euclidean plane whose sum of distances to three fix points is a constant are considered. Those geometric loci lead us to study some properties of certain eight degree algebraic curves.

1. Generación de las curvas

Este artículo trata del lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a tres puntos es constante. Los distintos valores de la constante dan lugar a unas curvas algebraicas de grado ocho que, hasta donde a mí se me alcanza, no han sido estudiadas.

Los tres puntos serán los vértices del triángulo equilátero concéntrico con los ejes de coordenadas y simétrico respecto del de las ordenadas: $A=(\sqrt{3}/2,-1/2)$, $B=(-\sqrt{3}/2,-1/2)$ y $C=(0,1)$. Las letras a, b y c significarán los cuadrados de las distancias del punto (x,y) a los puntos A, B y C, y $u=x^2+y^2$. De este modo:

$$a=u-x\sqrt{3}+y+1 \qquad b=u+x\sqrt{3}+y+1 \qquad c=u-2y+1$$

Facilitará los posteriores cálculos dejar las siguientes cuentas hechas:

$$a+b=2u+2y+2 \qquad ab=u^2+2uy+4y^2-u+2y+1$$
$$abc=u^3+6uy-8y^3+1 \qquad ab-c=u+4y+1$$

Si λ es la constante, ha de suceder que $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\lambda$. Aislamos $\sqrt{c}$ y elevamos al cuadrado en ambos miembros:

$$a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b}=\lambda^2+c-2\lambda\sqrt{c}$$

Se pasan las raíces al segundo miembro y de nuevo se eleva al cuadrado:

$$u + 4y + 1 - \lambda^2 = -2\lambda\sqrt{c} - 2\sqrt{a}\sqrt{b}$$
$$3u^2 - 6u + 6u\lambda^2 + 3 + 6\lambda^2 - \lambda^4 = -8\lambda\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}$$

Introducimos la notación: $P = 6\lambda^2 - 6$ y $Q = 3 + 6\lambda^2 - \lambda^4$, y por tercera vez se eleva al cuadrado:

$$3u^2 + Pu + Q = -8\lambda\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}$$
$$9u^4 + (6P - 64\lambda^2)u^3 + (P^2 + 6Q)u^2 - 384\lambda^2 uy + 512\lambda^2 y^3 + 2PQu + Q^2 - 64\lambda^2 = 0$$

Establecemos ahora las notaciones:

$$R = 6P - 64\lambda^2 = -28\lambda^2 - 36$$
$$S = P^2 + 6Q = 30\lambda^4 - 36\lambda^2 + 54$$
$$T = 2PQ = -36 - 36\lambda^2 + 84\lambda^4 - 12\lambda^6 = -12(\lambda^2 - 1)(\lambda^4 - 6\lambda^2 - 3)$$
$$U = Q^2 - 64\lambda^2 = \lambda^8 - 12\lambda^6 + 30\lambda^4 - 28\lambda^2 + 9 = (\lambda^2 - 9)(\lambda^2 - 1)^3$$

Con arreglo a ellas, la ecuación de la curva queda del siguiente modo:

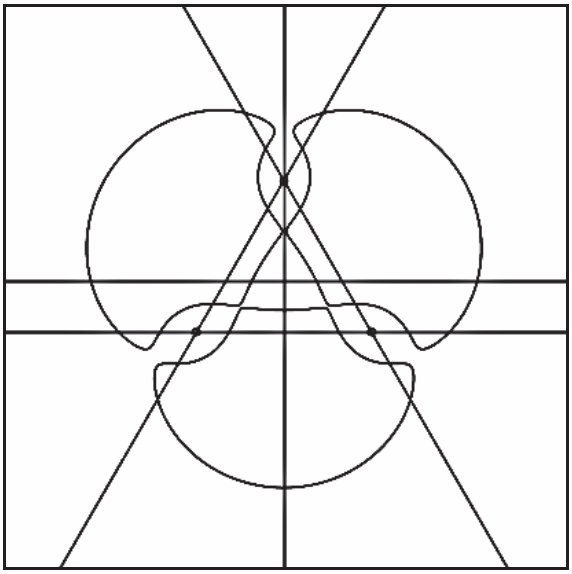
$$9u^4 + Ru^3 + Su^2 - 384\lambda^2 uy + 512\lambda^2 y^3 + Tu + U = 0$$

Ahora bien, las sucesivas elevaciones al cuadrado elimina los dobles signos de las raíces, de modo que también pertenecen a la curva los puntos cuya suma de distancias a dos de los vértices menos la distancia al otro es igual a λ.

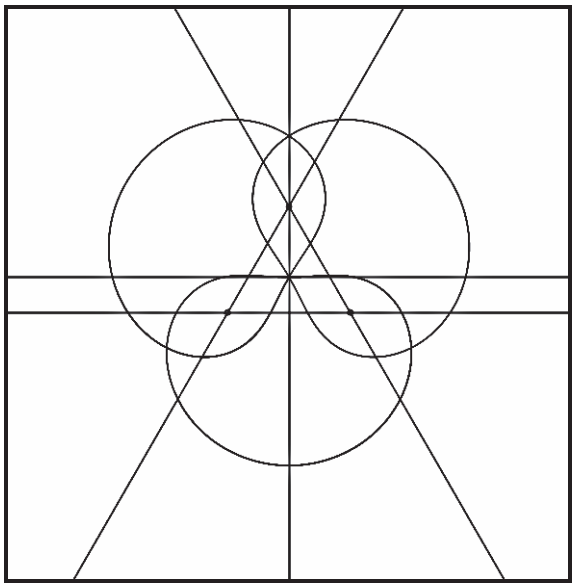
Los coeficientes de la ecuación para algunos valores de la constante están indicados en la tabla que aparece a continuación:

λ	P	Q	R	S	T	U
½	-9/2	71/16	-43	375/8	-639/16	945/256
1	0	8	-64	48	0	0
2	18	11	-148	390	396	-135
3	48	-24	-288	2160	-2304	0
4	90	-157	-484	7158	-28260	23625

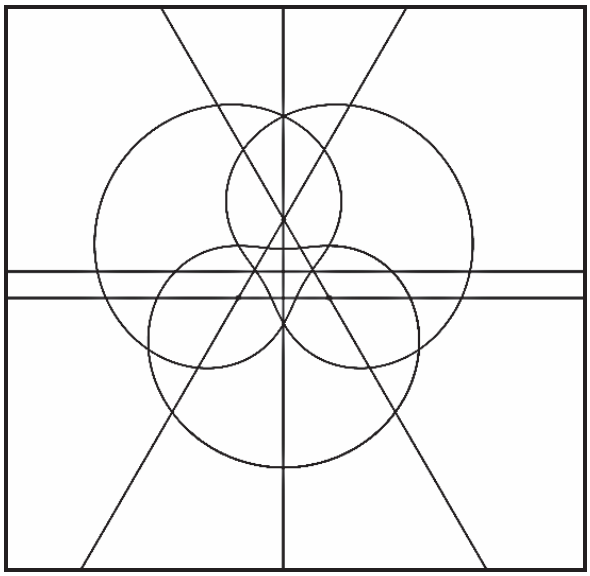
Y las gráficas de las curvas correspondientes se muestran en las figuras siguientes.



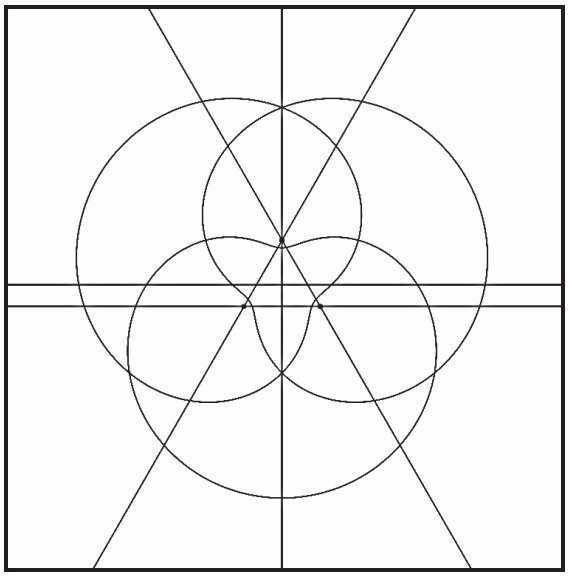
$$9u^4 - 43u^3 + (375/8)u^2 - 96uy + 128y^3 - (639/16)u + (945/256) = 0 \quad (\lambda = 1/2)$$



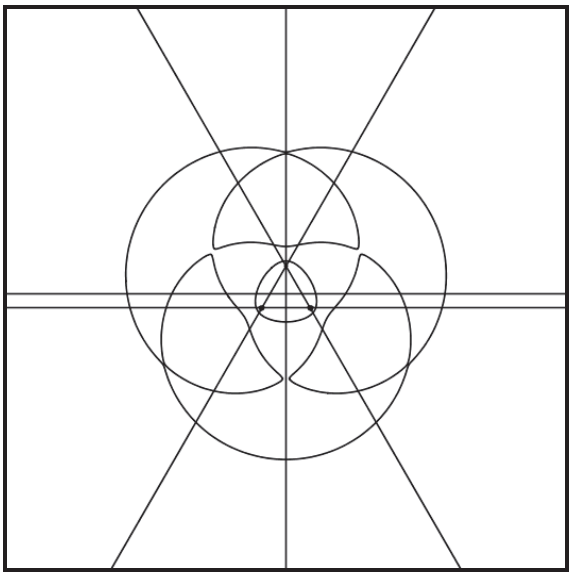
$$9u^4 - 64u^3 + 48u^2 - 384uy + 512y^3 = 0 \quad (\lambda = 1)$$



$$9u^4 - 148u^3 + 390u^2 - 1536uy + 2048y^3 + 396u - 135 = 0 \; (\lambda = 2)$$



$$u^4 - 32u^3 + 240u^2 - 384uy + 512y^3 - 256u = 0 \; (\lambda = 3)$$



$$9u^4 - 484u^3 + 7158u^2 - 6144uy + 8192y^3 - 28260u + 23265 = 0 \ (\lambda = 4)$$

2. Puntos de corte con los ejes de coordenadas

Sea $f(x, y) = 0$ la ecuación de la curva en forma abreviada. Para ver en qué puntos corta al eje de ordenadas hacemos $x = 0$:

$$f(0, y) = 9y^8 + Ry^6 + Sy^4 + 128\lambda^2 y^3 + Ty^2 + U$$

Este polinomio se descompone del siguiente modo:

$$((y-1)^2 - \lambda^2)^2 (3y^2 + (6+2\lambda)y - \lambda^2 - 2\lambda + 3)(3y^2 + (6-2\lambda)y - \lambda^2 + 2\lambda + 3)$$

Entonces, los puntos de encuentro de la curva con el eje de las *y*-es son:

$$y = 1 + \lambda \qquad y = 1 - \lambda$$

$$y = \frac{-3 - \lambda \pm 2\sqrt{\lambda^2 + 3\lambda}}{3} \qquad y = \frac{-3 + \lambda \pm 2\sqrt{\lambda^2 - 3\lambda}}{3}$$

Los dos primeros corresponden a soluciones dobles de la ecuación $f(0, y) = 0$, porque la curva (se verá después) pasa dos veces por ellos. Para los otros cuatro hay tres posibilidades. Si $\lambda < 3$, los dos primeros son reales y los dos últimos imaginarios. Si $\lambda = 3$, los cuatro son reales, pero los dos últimos coinciden. Si $\lambda > 3$, los cuatro son reales y distintos.

Para estudiar los puntos de corte con el eje de abscisas hacemos $y=0$:

$$f(x,0)=9x^8+Rx^6+Sx^4+Tx^2+U=0$$

No existe una descomposición general del polinomio, y se ha de hacer un estudio para cada valor de λ. Pero salvo que $\lambda=1$ (en cuyo caso $x=0$ y $x=\pm(1/3)\sqrt{32\pm4\sqrt{37}}$), no se encuentran las soluciones elementalmente.

3. Puntos singulares

En principio, el origen no es un punto singular, salvo que $U=0$, lo cual solo sucede cuando $\lambda=1$ o $\lambda=3$. En el primer caso, es un punto triple ordinario, en el cual las tangentes a la curva son las rectas $y=0$, $y=x\sqrt{3}$ e $y=-x\sqrt{3}$. En el segundo, un punto doble en el cual las tangentes son las rectas isótropas.

Planteamos a continuación el sistema:

$$\begin{aligned}
&f=0\\
&\frac{\partial f}{\partial x}=72xu^3+6xRu^2+4xSu-768x\lambda^2y+2xT=0\\
&\frac{\partial f}{\partial y}=72yu^3+6yRu^2+4ySu+768\lambda^2y^2-384u\lambda^2+2yT=0
\end{aligned}$$

Supongamos $x=0$. El segundo polinomio es nulo. En cuanto al tercero:

$$\frac{\partial f(0,y)}{\partial y}=72y^7+6Ry^5+4Sy^3+384\lambda^2y^2+2yT=$$

$$8y(9y^6-(21\lambda^2+27)y^4+(15\lambda^4-18\lambda^2+27)y^2+48\lambda^2y-9-9\lambda^2+21\lambda^4-3\lambda^6)=$$

$$8y(y^2-2y+1-\lambda^2)(9y^4+18y^3-12\lambda^2y^2-(6\lambda^2+18)y-9-18\lambda^2+3\lambda^4)$$

Los números $1+\lambda$ y $1-\lambda$ son raíces del último polinomio, así como del polinomio $f(0,y)$. Entonces los puntos $(0,1+\lambda)$ e $(0,1-\lambda)$ cumplen las tres ecuaciones y corresponden a puntos múltiples. Es fácil ver que son dobles ordinarios y que no hay más puntos múltiples sobre el eje de ordenadas. Ahora bien, por la triple simetría de la curva, también son dobles ordinarios los puntos

$((1+\lambda)\sqrt{3}/2,-(1+\lambda)/2)$, $(-(1+\lambda)\sqrt{3}/2,-(1+\lambda)/2)$,
$((1-\lambda)\sqrt{3}/2,-(1-\lambda)/2)$ y $(-(1-\lambda)\sqrt{3}/2,-(1-\lambda)/2)$.

Si $x \neq 0$, la ecuación $y(\partial f/\partial x) - x(\partial f/\partial y) = 0$ equivale a $4y^2 = u$, de la cual se deduce que $x = \pm y\sqrt{3}$. Pero esto da lugar a los puntos dobles ya conocidos. Entonces, si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 3$, existen seis puntos dobles en el plano afín. Si $\lambda = 1$, tres de ellos confluyen en un punto triple ordinario. Y si $\lambda = 3$, hay siete puntos dobles (los seis y el origen).

A continuación se van a estudiar los puntos singulares en el infinito. Para ellos construimos la curva proyectiva asociada:

$$F(x,y,z) = 9u^4 + Ru^3z^2 + Su^2z^4 - 384\lambda^2 uyz^5 + 512\lambda^2 y^3z^5 + Tuz^6 + Uz^8$$

A partir de ella fabricamos el sistema de ecuaciones:

$$F = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 72xu^3 + 6xRu^2z^2 + 4xSuz^4 - 768x\lambda^2 yz^5 + 2xTz^6 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 72yu^3 + 6yRu^2z^2 + 4ySuz^4 + 768\lambda^2 y^2z^5 - 384u\lambda^2 z^5 + 2yTz^6 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2Ru^3z + 4Su^2z^3 - 1720\lambda^2 uyz^4 + 2560\lambda^2 y^3z^4 + 6Tuz^5 + 8Uz^7$$

Hacemos $z = 0$ y llegamos a que $u = 0$, lo que quiere decir que los puntos cíclicos del plano $I = (1, i, 0)$ y $J = (1, -i, 0)$ son puntos múltiples de la curva. Para ver qué tipo de multiplicidad tiene en el infinito, fabricamos la curva $G(y,z) = F(1, y+i, z)$ (que tiene en el origen una multiplicidad del mismo orden que la que tiene *F* en *I*): $G(y,z) = 9(y^2 + 2yi)^4 + monomios\, de\, grado \geq 5$. Entonces la curva tiene en *I* (y también en *J*) una cúspide cuádruple.

4. Circunferencias concéntricas con los ejes y tangentes a las curvas

Pasamos ahora las curvas a ecuaciones polares. Si $x = \varphi\cos\theta$ e $y = \varphi\, sen\,\theta$, la ecuación de la familia de curvas es:

$$9\varphi^8 + R\varphi^6 + S\varphi^4 - 384\lambda^2\varphi^3 sen\theta + 512\lambda^2\varphi^3 sen^3\theta + T\varphi^2 + U = 0$$

Cualquier circunferencia concéntrica con el origen corta a la curva en los puntos cíclicos y en otros seis. Si alguno de ellos es doble o de tangencia, por la triple simetría, salen tres puntos distintos, y además sobre los ejes de simetría.

Buscamos los que están en el eje de ordenadas, para los cuales $sen\theta = 1$ o $sen\theta = -1$. En el primer caso

$$9\varphi^8 + R\varphi^6 + S\varphi^4 + 128\lambda^2\varphi^3 + T\varphi^2 + U = 0,$$

ecuación cuyo primer miembro se descompone de esta manera:

$$(9\varphi^4 + 36\varphi^3 + (54 - 10\lambda^2)\varphi^2 + (36 - 4\lambda^2)\varphi + \lambda^4 - 10\lambda^2 + 9)((\varphi - 1)^2 - \lambda^2)^2 = 0$$

Las raíces del primer polinomio son:

$$\varphi = \frac{-3 - \lambda \pm 2\sqrt{\lambda^2 + 3\lambda}}{3}$$

$$\varphi = \frac{-3 + \lambda \pm 2\sqrt{\lambda^2 - 3\lambda}}{3}$$

Las del segundo corresponden a los puntos singulares. En el segundo caso,

$$9\varphi^8 + R\varphi^6 + S\varphi^4 - 128\lambda^2\varphi^3 + T\varphi^2 + U = 0$$

y la descomposición es la siguiente:

$$(9\varphi^4 - 36\varphi^3 + (54 - 10\lambda^2)\varphi^2 - (36 - 4\lambda^2)\varphi + \lambda^4 - 10\lambda^2 + 9)((\varphi + 1)^2 - \lambda^2)^2 = 0$$

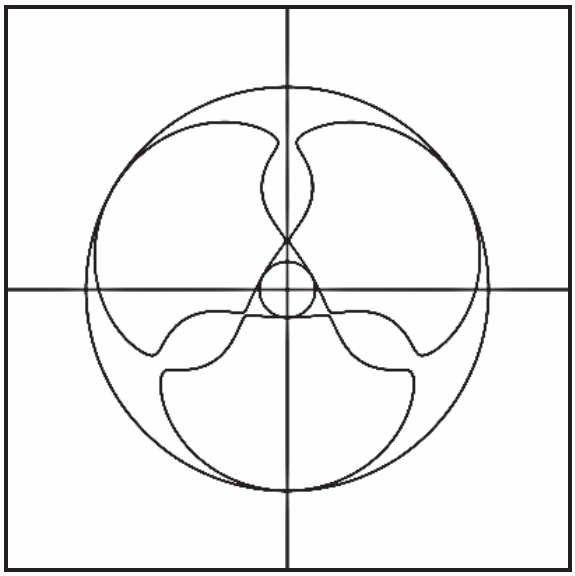
Las raíces en total (excluidas las del segundo factor) son:

$$\varphi = \frac{+3 + \lambda \pm 2\sqrt{\lambda^2 + 3\lambda}}{3}$$

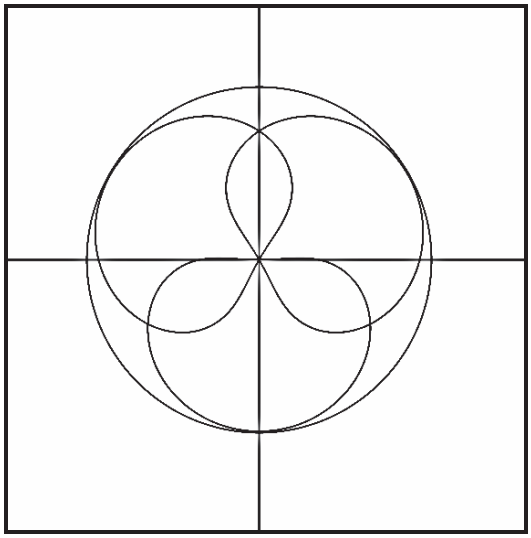
$$\varphi = \frac{+3 - \lambda \pm 2\sqrt{\lambda^2 - 3\lambda}}{3}$$

Estudiaremos por separado las curvas que se han considerado.

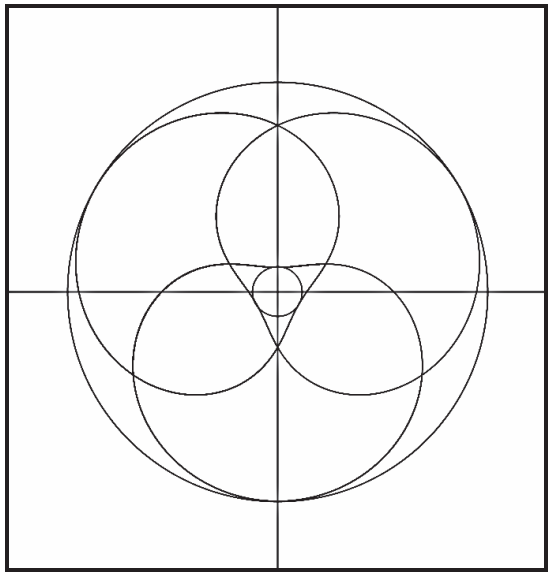
I. $\lambda = 1/2$. Las soluciones positivas para φ son $\varphi = (7 + 2\sqrt{7})/6 \approx 2.05$ y $\varphi = (7 + 2\sqrt{7})/6 \approx 0.3$. Hay dos circunferencias concéntricas con el origen y tangentes a la curva, como se ve en la figura siguiente:



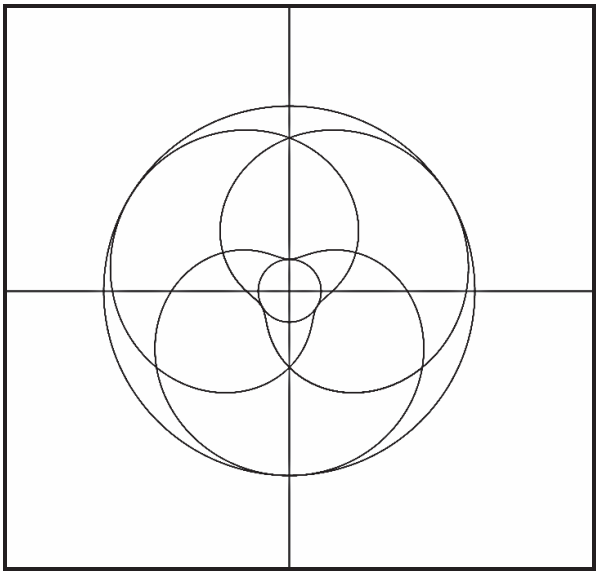
II. $\lambda = 1$. La única solución positiva es $\varphi = 8/3$. Solo hay una circunferencia tangente:



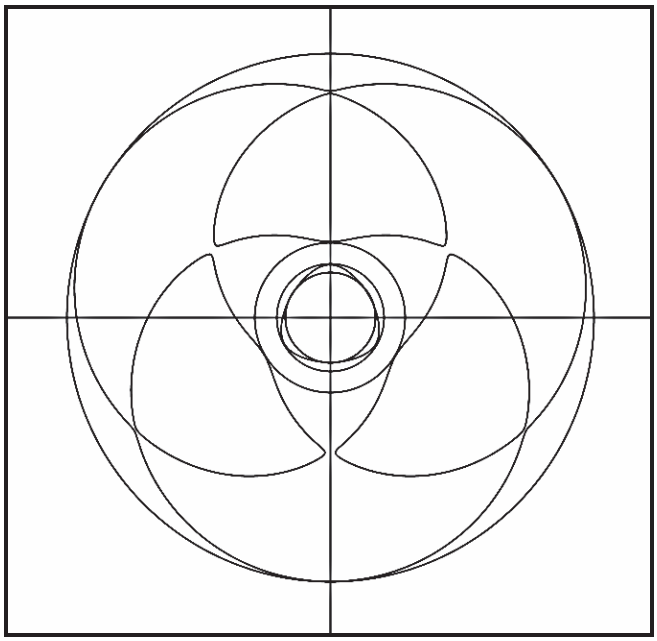
III. $\lambda = 2$. Las soluciones positivas para φ son $\varphi = (-5 + 2\sqrt{10})/3 \approx 0.44$ y $\varphi = (5 + 2\sqrt{10})/3 \approx 3.77$. Las circunferencias son dos:



IV. $\lambda = 3$. Las soluciones positivas para φ son $\varphi = -2 + 2\sqrt{2} \cong 0.83$ y $\varphi = +2 + 2\sqrt{2} \cong 4.83$. Las circunferencias tangentes son dos:



V. $\lambda = 4$. Hay cuatro soluciones positivas: $\varphi = (-7 + 4\sqrt{7})/3 \cong 1.194$, $\varphi = 5/3$, $\varphi = (7 + 4\sqrt{7})/3 \cong 5.86$ y $\varphi = 1$. Hay pues cuatro circunferencias tangentes a la curva y concéntricas con el origen:



5. Algunos problemas pendientes

He sido absolutamente incapaz de encontrar las inflexiones y calcular la clase y el género de las curvas. Dejo el reto al avispado lector.

También podría tener interés estudiar las curvas estrafalarias en otros casos, por ejemplo, que los tres puntos no formen un triángulo equilátero o que estén alineados.

Bibliografía

Fulton, W. (1971), *Curvas algebraicas*, Editorial Reverté, Barcelona.

Gomes Teixeira, F. (1907), *Traité des courbes spéciales remarquables*, Coimbra.

Moreno Castillo, R. (2005), *Plücker y Poncelet. Dos modos de entender la geometría*, Editorial Nivola, Madrid.

De la Puente Muñoz, Mª. J. (2007), *Curvas algebraicas planas*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

Recreando con GeoGebra el cálculo del volumen de la esfera ideado por Arquímedes

E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano
Departamento de Algebra, Facultad de Educación
Universidad Complutense de Madrid
{roanes,eroanes}@mat.ucm.es

Resumen

We recreate with the dynamic geometry system (DGS) GeoGebra, that now incorporates powerful 3D capabilities, the famous construction-deduction of the calculation of the volume of a sphere due to Arquimedes. This classic construction-deduction uses two 3D auxiliary figures: a cone and a cylinder, whose volumes are much easier to obtain. Using this approach, the end-user of the DGS can easily visualize how the problem is reduced to something as simple as Pytagoras theorem. We believe that this recreation, based on the use of a 3D DGS system, is both eye-catching and of educational interest.

Introducción

Pensamos que esta recreación con GeoGebra tiene un interés múltiple:
i) mostrar un problema propio de la geometría 3D, ingeniosamente resuelto por reducción a un resultado sencillo de 2D, el teorema de Pitágoras;
ii) visualizar paso a paso el proceso constructivo de la configuración que conduce a solucionar de ese modo el problema del volumen de la esfera;
iii) descubrir vía experimental la chispa ("hint") en que está basada la referida demostración ideada por Arquímedes, antes de plantearla formalmente.

En el Boletín 98 ya publicamos un artículo sobre uso de GeoGebra en enseñanza de Matemática Elemental [4], pero aquí hemos de utilizar comandos de uso menos frecuente, por lo que describiremos en detalle cada uno de los pasos a efectuar, de modo que pueda ser recreada sin dificultades.

1. Visualizar la configuración y analizar experimentalmente

Una vez arrancado GeoGebra, comenzamos activando la *Vista Gráfica 3D* (que ofrece el desplegable del icono *Vista*), apareciendo entonces los tres ejes de coordenadas (x en rojo, y en verde, z en azul), el plano xy (en gris) y el origen de coordenadas, O. Describamos las sucesivas etapas del proceso.

1.1. Definir la esfera cuyo volumen se trata de calcular

Comenzamos definiendo sobre el eje z un punto, A, que va a ser el centro de la esfera, de modo que luego podamos alterar su posición arrastrándolo sobre el eje z. Luego definimos el segmento de extremos O y A, que denotaremos por r. A continuación definimos una esfera de centro A y radio r, denotándola *F1*. Todo esto se realiza ejecutando sobre GeoGebra los tres pasos siguientes:

Paso 1: Hacer clic sobre el icono *Punto* de la *Vista Gráfica 3D* y en el desplegable que aparece elegir *Punto en objeto* y hacer clic sobre el eje z

Paso 2: Introducir por línea de escritorio *r:=Segmento(O,A)* y pulsar *Intro*

Paso 3: Introducir por línea de escritorio *F1:=Esfera(A, r)* y pulsar *Intro*

Entonces, en la *Vista Gráfica 3D* aparece *F1* (Figura 1) y estos tres pasos son anotados en la ventana de *Vista Algebraica* y también en el *Protocolo de Construcción*, si está activado (se activa haciendo clic sobre esta opción, al desplegar el icono *Vista*). Del punto A aparecen sus coordenadas y de la esfera *F1* aparece como *Valor* la ecuación de su superficie borde (Figura 2).

Nota: La esfera *F1* también puede ser introducida con el icono *Esfera*, haciendo clic sobre el punto A y el segmento r, y después "renombrando" *F1* al nombre asignado inicialmente por GeoGebra a dicha esfera. (Para esto último, basta colocar el cursor sobre el nombre asignado por GeoGebra a la esfera, pulsar el botón derecho del ratón, elegir Renombrar en el desplegable que aparece, escribir *F1* y hacer clic).

1.2. Definir el cono usado para calcular el volumen de la esfera

Se trata de un cono circular recto de base el círculo de centro O, de vértice A y de radio básico r, denotándolo *F2*. Podemos definirlo, como en los dos pasos precedentes, introduciendo por la línea de escritorio:

Paso 4: *F2:=Cono(O, A ,r)*

Entonces, en la *Vista Gráfica 3D* aparece *F2* (Figura 1) y el paso 4 queda anotado en la *Vista Algebraica* y también en el *Protocolo de Construcción*. En este último aparece asignado como *Valor* el volumen de *F2*, en la siguiente línea (numerada también como 4) aparece el área de la superficie lateral de *F2* y en la siguiente (numerada también como 4) aparece la ecuación parametrizada de la circunferencia borde de la base del cono (Figura 2).

Nota: El cono *F2* también puede ser introducido con el icono *Cono* (alojado en el desplegable del icono *Pirámide*), renombrándolo después como *F2*.

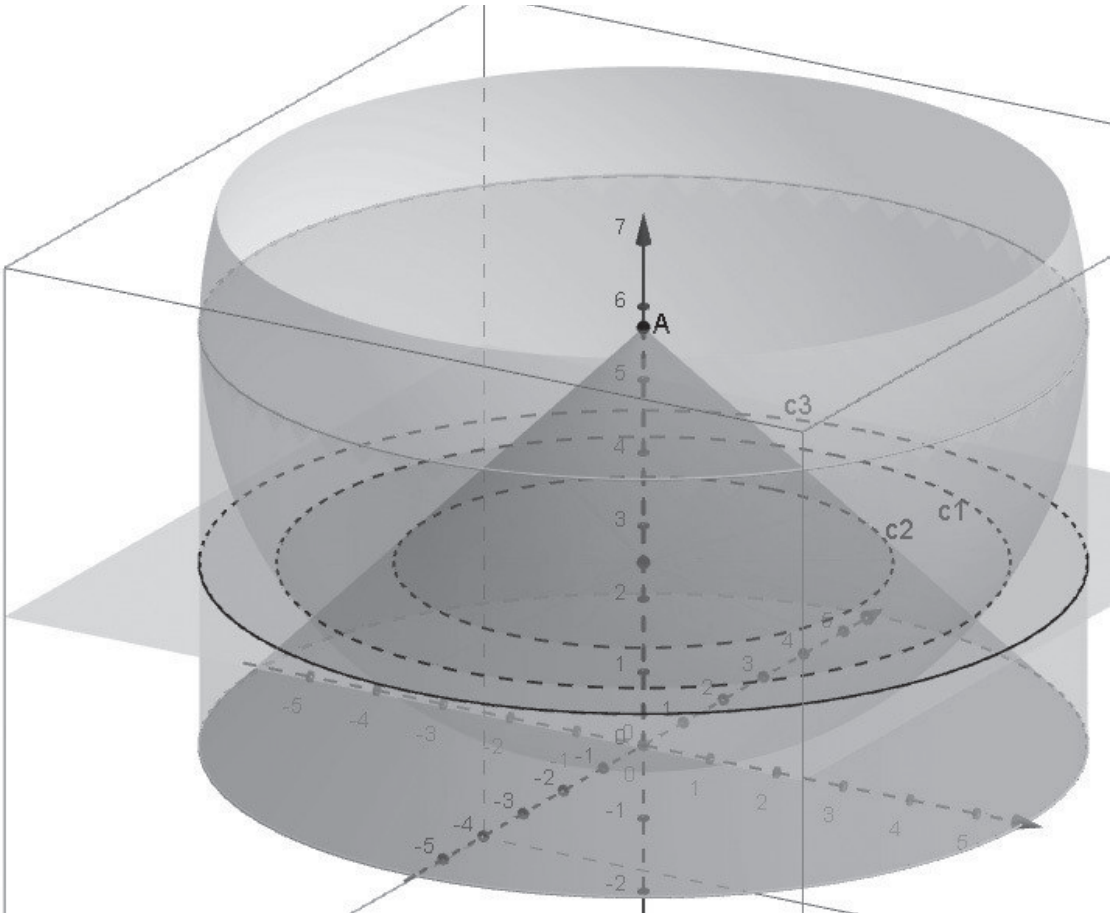


Figura 1: *Esfera, cono, cilindro y plano que los interseca.*

Protocolo de Construcción

n°	Nombre	Definición	Valor
1	Punto A	Punto sobre EjeZ	A = (0, 0, 6)
2	Segmento r	Segmento [(0, 0), A]	r = 6
3	Esfera F1	Esfera con centro en A y radio r	F1: $x^2 + y^2 + (z - 6)^2 = 36$
4	Cono F2	Cono[(0, 0), A, r]	F2: 226.19
4	Superficie a	Lateral[F2]	a: 159.94
4	Circunferencia c	Extremos[F2]	c: X = (0, 0, 0) + (6 cos(t), -6 sin(t), 0)
5	Cilindro F3	Cilindro[(0, 0), A, r]	F3: 678.58
5	Superficie b	Lateral[F3]	b: 226.19
5	Circunferencia d	Extremos[F3]	d: X = (0, 0, 0) + (6 cos(t), -6 sin(t), 0)
5	Circunferencia e	Extremos[F3]	e: X = (0, 0, 6) + (6 cos(t), 6 sin(t), 0)
6	Número m		m = 2.5
7	Punto M	(0, 0, m)	M = (0, 0, 2.5)
8	Plano F	Plano paralelo a z = 0 que pasa por M	F: z = 2.5
9	Circunferencia c1	Curvas de intersección de F, F1	c1: X = (0, 0, 2.5) + (4.87 sin(t), 4.87 cos(t), 0)
10	Circunferencia c2	Curvas de intersección de F, F2	c2: X = (0, 0, 2.5) + (3.5 sin(t), 3.5 cos(t), 0)
11	Circunferencia c3	Curvas de intersección de F, F3	c3: X = (0, 0, 2.5) + (6 sin(t), 6 cos(t), 0)
12	Número ar1	Área[c1]	ar1 = 74.61
13	Número ar2	Área[c2]	ar2 = 38.48
14	Número ar3	Área[c3]	ar3 = 113.1
15	Número area	ar1 + ar2 - ar3	area = 0
16	Número f	Volumen[F1] / 2 + Volumen[F2] - Volumen[F3]	f = 0

Figura 2: *Pasos del análisis experimental descrito en la sección 1.*

1.3. Definir el cilindro usado para calcular el volumen de la esfera

Se trata de un cilindro circular recto cuyos centros de círculos básicos son los puntos O y A y de radio básico r que denotaremos *F3*. Podemos definirlo introduciendo por la línea de escritorio:

Paso 5: *F3:= Cilindro(O, A, r)*

Entonces, en la *Vista Gráfica 3D* aparece *F3* (Figura 1) y el paso 5 queda anotado en la *Vista Algebraica* y también en el *Protocolo de Construcción*. En este último aparece asignado como *Valor* el volumen de *F3* y en las tres líneas siguientes (numeradas también como 5) aparecen el área de la superficie lateral de *F3* y las ecuaciones parametrizadas de las circunferencias borde de las dos bases del cilindro (Figura 2).

Nota: *F3* también puede ser introducido con el icono *Cilindro* (alojado en el desplegable del icono *Pirámide*), renombrándolo luego como *F3*.

1.4. Definir un plano genérico del haz de planos paralelos al z=0

Se trata del haz de planos que pasan por $M = (0, 0, m)$ y son paralelos al plano $z = 0$, donde m es un parámetro, que podemos introducir ejecutando los tres pasos siguientes:

Paso 6: Escribir m en la línea de escritorio, pulsar Intro y hacer clic sobre *Crear deslizadores*, que entonces aparece.

Paso 7: $M := (0, 0, m)$

Paso 8: $F = Plano(M, z = 0)$

Entonces, en la *Vista Gráfica 3D* aparece el plano F (Figura 1) y en la *Vista Algebraica* y también en el *Protocolo de Construcción* aparecen anotados el valor actual de m (su valor inicial es 1), el punto M y el plano F; y en la *Vista 3D* aparecen el punto M y el plano F.

En la ventana *Vista Gráfica* (supuesto que está activada) aparece la imagen gráfica del deslizador m, con valor inicial 1. Haciendo clic sobre el icono *Flecha de selección*, se puede arrastrar del cursor del deslizador m) y observar cómo, consecuentemente, se desplazan en la *Vista 3D* el punto M y el plano F, y se actualizan los valores de m, M y F en la *Vista Algebraica* y en el *Protocolo de Construcción*.

Nota: De otro modo, los pasos 6 y 7 pueden ser sustituidos por los dos pasos siguientes:

Paso 6': $OA := Segmento(O, A)$

Paso 7': Definir M como punto en el objeto OA.

De este modo, el punto M puede moverse sobre el segmento OA arrastrando con el cursor (en vez de moverlo sobre el eje z, desplazando el deslizador m).

1.5. Definir las curvas de intersección de F con $F1$, $F2$ y $F3$

Se trata de obtener la curva intersección del plano F con la superficie esférica borde de $F1$, denotándola $c1$ y, asimismo, la curva intersección de F con cada una de las superficies laterales de $F2$ y de $F3$, denotándolas respectivamente $c2$ y $c3$. Podemos obtenerlas ejecutando los tres pasos siguientes:

Paso 9: *c1:=Interseca(F,F1)*

Paso 10: *c2:=Interseca(F,F2)*

Paso 11: *c3:=Interseca(F,F3)*

En la *Vista 3D* aparecen las tres curvas (circunferencias) y en la *Vista Algebraica* y en el *Protocolo de Construcción* aparecen sus ecuaciones parametrizadas. Arrastrando el deslizador m se alteran consecuentemente dichas curvas y sus ecuaciones.

1.6. Calcular las áreas de los círculos de bordes $c1$, $c2$ y $c3$

Se trata de obtener las áreas de estos tres círculos, denotándolas respectivamente $ar1$, $ar2$ y $ar3$, ejecutando los tres pasos siguientes:

Paso 12: *ar1:=Área(c1)*

Paso 13: *ar2:=Área(c2)*

Paso 14: *ar3:=Área(c3)*

En la *Vista Algebraica* y también en el *Protocolo de Construcción* aparecen anotadas estas tres áreas, que naturalmente varían si se desplaza el cursor del deslizador m, para valores tales que $0 < m < r$ (para valores fuera de ese intervalo no están definidas las figuras consideradas, como bien informa GeoGebra si se desplaza fuera de él).

1.7. Relacionar las áreas de los círculos de bordes $c1$, $c2$ y $c3$

Desplazando el deslizador m, se pueden observar los siguientes hechos:

- $ar3$ se mantiene constante
- $ar1$ y $ar2$ varían al cambiar m, pero *ar1 + ar2*, se mantiene constante
- la suma de $ar1$ y $ar2$ siempre se mantiene igual a $ar3$

Estas observaciones nos llevan a realizar el siguiente paso:

Paso 15: $area = ar1 + ar2 - ar3$

Entonces, deslizando el cursor del deslizador m para $0 < m < r$, se observa que el valor del área siempre se mantiene nulo, es decir, $area = 0$.

Nota: Si se ha definido M como punto en el segmento OA (en el modo indicado en la nota de 1.4), es posible animar con movimiento el plano F, para observar que el *Valor* de la variable *área* del Paso 15 se mantiene constantemente nulo (para ejecutar dicha animación basta pulsar sobre M con el botón derecho del ratón y elegir *Animación*).

1.8. Relacionar los volúmenes de $F1$, $F2$ y $F3$

Sea $SF1$ la semiesfera de la esfera $F1$, que queda contenida en el cilindro $F3$, es decir, sea $SF1 = F1 \cap F3$. Denotemos por vol(SF1), vol(F1), vol(F2) y vol(F3) a los respectivos volúmenes de la semiesfera SF1, de la esfera F1, del cono F2 y del cilindro F3. De las observaciones anteriores, según el principio (o teorema) de Cavalieri, parece natural concluir que: vol(SF1) + vol(F2) = vol(F1)/2 + vol(F2) = vol(F3). Para comprobarlo experimentalmente, ejecutamos el siguiente paso 16, introduciendo por la línea de escritorio:

Paso 16: $Volumen(F1)/2 + Volumen(F2) - Volumen(F3)$

Entonces, desplazando el cursor del deslizador m para $0 < m < r$, se observa que este valor se mantiene nulo, como aparece en la última línea del *Protocolo de Construcción* mostrado en la Figura 2. Todo ello conduce "vía experimental" a lo siguiente:

$$vol(SF1) = vol(F3) - vol(F2) = \pi r^2 r - \frac{1}{3}\pi r^2 r$$

de donde resulta: $vol(F1) = 2vol(SF1) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

2. Visualización de la demostración de Arquímedes

Como Arquímedes no disponía de GeoGebra, hubo de llegar de otro modo al resultado anterior, que, como se ha indicado sigue de la igualdad $ar1 + ar2 = ar3$. Describimos a continuación el modo en que Arquímedes llegó a ella.

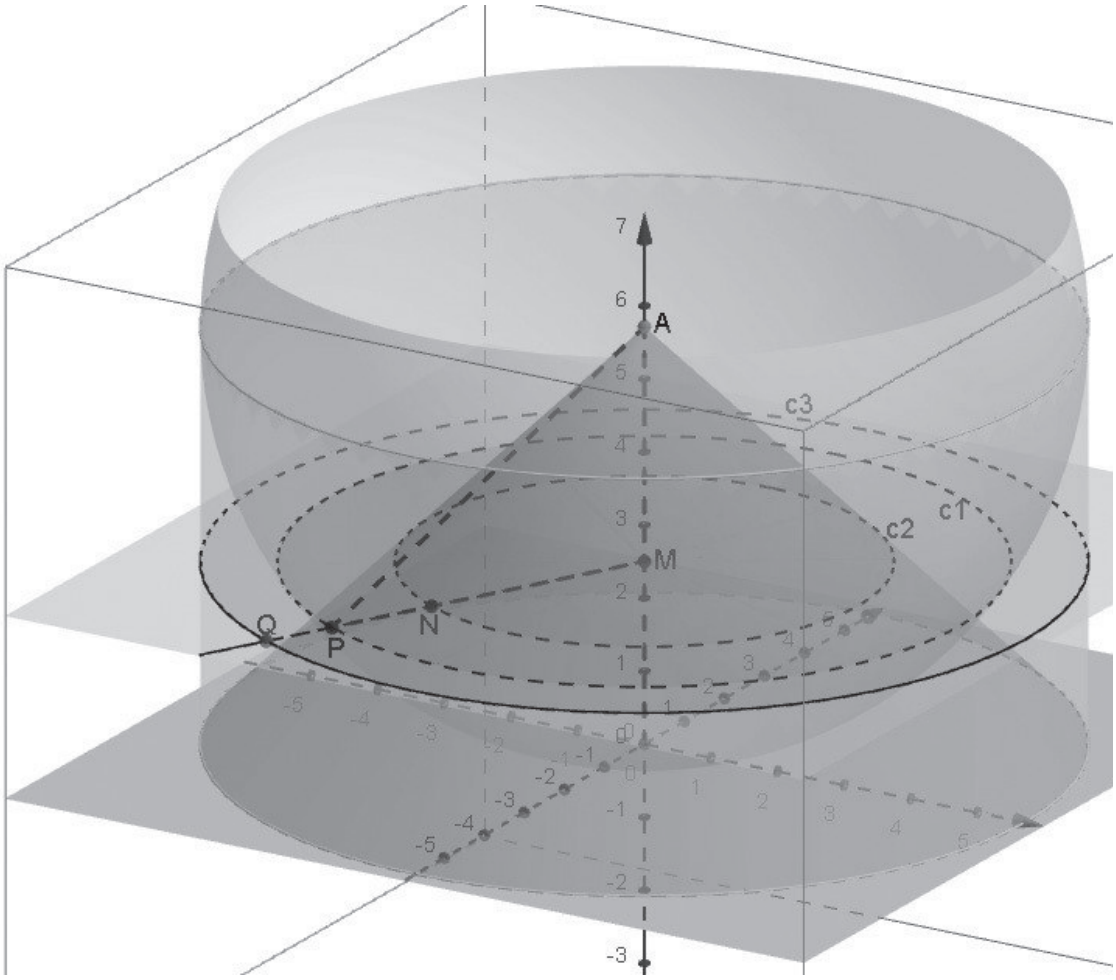


Figura 3: *Triángulo rectángulo AMP, con AM=MN y AP=MQ .*

De acuerdo con la notación de la sección **1**, sea $M = OA \cap F$. Denotando por P a un punto cualquiera de la circunferencia $c1 = F \cap F1$ (Figura 3), por N al punto al punto de intersección de la circunferencia $c2$ con el segmento MP y por Q al punto de intersección de la circunferencia $c3$ con la semirrecta

M_P, de origen M y que pasa por P, las áreas consideradas resultan ser $ar1 = \pi MP^2$; $ar2 = \pi MN^2$; $ar3 = \pi MQ^2$ con lo cual, la igualdad $ar1 + ar2 = ar3$, que se trata de probar, resulta ser equivalente a la igualdad

$$MP^2 + MN^2 = MQ^2 \tag{1}$$

Ahora bien, por ser $F2$ un cono equilátero (de altura igual al radio básico) es $MN = MA$ y por ser el radio de $F3$ igual al de $F1$, es $MQ = AP$. En consecuencia, la igualdad (1) es equivalente a la igualdad

$$MP^2 + MA^2 = AP^2 \tag{2}$$

lo cual es cierto, por ser AMP triángulo rectángulo, ya que AM es ortogonal al plano F. De este modo, el problema fue reducido por Arquímedes al teorema de Pitágoras.

2.1. Comprobación experimental de las igualdades anteriores

Estas igualdades en que está basada la demostración de Arquímedes también pueden ser comprobadas experimentalmente con con GeoGebra, ejecutando los pasos siguientes:

Paso 17: Definir P como punto sobre el objeto $c1$

Paso 18: $MP := Segmento(M, P)$

Paso 19: $N := Interseca(MP, c2)$

Paso 20: $MN := Segmento(M, N)$

Paso 21: $M_P := Semirrecta(M, P)$

Paso 22: $Q := Interseca(MP, c2)$

Paso 23: $MQ := Segmento(M, Q)$

Paso 24: $MA := Segmento(M, A)$

Paso 25: $AP := Segmento(A, P)$

Paso 26: $k1 := MN–MA$

Paso 27: $k2 := MQ–AP$

Paso 28: $k3 := MP^2 + MA^2–AP^2$

Entonces, arrastrando el cursor del deslizador m para $0 < m < r$, se observa que $k1$, $k2$ y $k3$ son nulos, tal como aparece reflejado en la continuación del *Protocolo de Construcción*, que muestra la Figura 4.

17	Punto P	Punto sobre c1	P = (-2.24, -4.33, 2.5)
18	Segmento MP	Segmento [M, P]	MP = 4.87
19	Punto N	Punto de intersección de c2, MP	N = (-1.61, -3.11, 2.5)
20	Segmento MN	Segmento [M, N]	MN = 3.5
21	Semirrecta M_P	Semirrecta que pasa por M, P	M_P: X = (0, 0, 2.5) + λ (-2.24, -4.33, 0)
22	Punto Q	Punto de intersección de c3, M_P	Q = (-2.75, -5.33, 2.5)
23	Segmento MQ	Segmento [M, Q]	MQ = 6
24	Segmento MA	Segmento [M, A]	MA = 3.5
25	Segmento AP	Segmento [A, P]	AP = 6
26	Número k1	MN - MA	k1 = 0
27	Número k2	MQ - AP	k2 = 0
28	Número k3	$MP^2 + MA^2 - AP^2$	k3 = 0

Figura 4: *Pasos de la comprobación experimental final.*

3. Consideraciones finales

La lápida de la tumba de Arquímedes representa esquemáticamente lo que aparece en la Figura 1. De entre todos los inventos y descubrimientos que se le atribuyen (ver [2]), fue este el elegido para su tumba. ¿Era quizás aquel del que se sentía mas orgulloso?

El interés didáctico del problema ya fue comentado en el nº 50 de nuestro Boletín [3] por uno de los autores del presente artículo. Y continua comentándose en otras publicaciones actuales orientadas al interés de la Historia de las Matemática en la Educación Matemática, como es [5].

En principio, para una "mente matemática" la belleza de la demostración de Arquímedes es suficiente y hace innecesaria la comprobación experimental aquí expuesta. Pero, recordemos una célebre frase de D. Pedro Puig Adam contenida en [1]: *"Para los matemáticos orientales, demostrar era reducir a evidencia directa, lo cual perciben muchos alumnos mejor que un encadenamiento lógico, del cual no suelen ver el alcance, ni la necesidad"*.

Tenemos la experiencia de que una manipulación experimental como la que se ha descrito, consistente en la recreación constructiva con un sistema de geometría dinámica como GeoGebra, puede inducir a muchos alumnos a interesarse por el problema y, a algunos, incluso por su demostración.

En todo caso, este modo de combinación de geometría y tecnología, puede ser formativa para muchos futuros profesionales, que no van a ser matemáticos, pero les va a tocar vivir en una sociedad altamente tecnificada.

Referencias

[1] P. Puig Adam (1960), *La matemática y su enseñanza actual*. Ministerio de Educación.

[2] C. B. Boyer (1968), *A history of Mathematics*. Wiley Int. Ed.

[3] E. Roanes M. (1998), Evolución en la enseñanza de la Geometría Elemental, *Bol. de la Soc Puig Adam*, **50**, págs. 49-60.

[4] E. Roanes M., E. Roanes L. (2014), Otro modo de presentar la matemática elemental, visualizando y explorando con GeoGebra, *Bol. de la Soc Puig Adam*, **98**, págs. 23-64.

[5] F. Álvarez, O. Martín, C. Pareja (2015), *La lengua de las matemáticas y otros relatos exactos*. Ed. Catarata.

Los bloqueos en matemáticas a través del aprendizaje cooperativo

Susana Merchán Rubira
Doctora en Matemáticas por la Universidad Autónoma de Madrid**.**
Departamento de Matemáticas, Universidad Pontificia de Comillas.
susana.merchan.rubira@gmail.com

Abstract

Cooperative Learning is a methodology centered in the students, in their capability of learning and of teaching. It is not only aimed to increase the academic marks; in fact, it is focused on improving the social and communication skills of the students. This work is about the response of some students whose learning is based in this methodology. In particular, the results of these students in comparison to the answers of the non-cooperative learning students have been analyzed. Some mental blocks that the students may have while they are solving a math problem: cognoscitive, perceptive, emotional and cultural blocks have been taken into account. This paper summarizes the Master Thesis of the author (Máster Universitario en Formación del Profesorado de ESO y Bachillerato, FP y Enseñanzas de Idiomas, especialidad: Matemáticas).

La actividad mental es capaz de proporcionar
placeres inmensamente profundos

Miguel de Guzmán

Introducción

La diferencia más relevante del aprendizaje cooperativo frente la metodología usual, aparte de la organización en clase, es que su objetivo no es únicamente académico, sino que esta metodología pretende proveer al alumno de unas cualidades o capacidades sociales necesarias para la convivencia. Estas habilidades no sólo serán una ventaja para los alumnos cuando tengan que trabajar en grupo en

cualquier otra situación, sino que les proporcionarán herramientas suficientes para ser independientes y responsables al finalizar su etapa escolar obligatoria.

Algunos conceptos o principios que los alumnos aprenden de manera práctica en el aula (mientras están en clase y sin necesidad de libro) son: solidaridad, independencia, creatividad, responsabilidad y cooperación. Además, la mayoría muestra una motivación mayor ante el aprendizaje (aprender juntos resulta más entretenido) y, debido a los roles asignados y el sentimiento de ser necesario para sus compañeros y pertenecer a un grupo, la autoestima del alumno puede verse elevada. Con la autoestima más alta, algunos miedos pueden disiparse o modificarse, y esta es precisamente la motivación para estudiar lo que conforma la segunda mitad de este artículo; el miedo y los *bloqueos en matemáticas*.

Desafortunadamente, el miedo es una respuesta muy habitual frente a las matemáticas; el miedo al fracaso, el miedo a no entender, el miedo a no saber *qué hacer con los números*, el miedo al análisis, al cálculo que se sale del papel y que está presente en el día a día de todos los alumnos.

Ese miedo paraliza y convierte en imposible lo difícil y en difícil lo sencillo y, sobre todo, ese miedo predispone negativamente a las matemáticas, las afea y las deforma para convertirlas en monstruo, en monstruo inútil.

El miedo y su consecuencia (el bloqueo) no sólo están presentes en los niños o en los estudiantes sino que los adultos parecen convivir con ellos también. De hecho, como todos los hábitos, parece más complicado deshacerse de ellos o vencerlos una vez que se ha llegado a la etapa adulta.

El potencial y el talento se ven claramente truncados por los bloqueos. Una persona es, dentro de sus capacidades reales, lo que su mente le permite ser y la motivación es el gran motor para el aprendizaje. Por lo tanto, si los miedos minan la motivación y la percepción de uno mismo se ve deformada por los bloqueos, el talento y la capacidad de enfrentarse a los problemas disminuye. Además, los bloqueos son enemigos de la creatividad y la imaginación, requisitos imprescindibles para crear y amar las matemáticas.

El objetivo de este trabajo ha sido trazar un camino a través de la metodología del aprendizaje cooperativo de la mano de los bloqueos en matemáticas.

Más en particular, se ha pretendido, mediante dos pruebas, hacer una comparativa entre la manera de enfrentar las matemáticas en alumnos de 4º de ESO y 1º de Bachillerato pertenecientes a centros públicos en los que el aprendizaje cooperativo no es la base de su enseñanza y alumnos de 4º de ESO que basan su aprendizaje en dicha metodología cooperativa.

Sin embargo, el objetivo no ha sido (únicamente) analizar los resultados de las pruebas y sus diferencias entre los alumnos de aprendizaje cooperativo y los que han seguido un aprendizaje usual, sino entender mejor esta metodología y su potencial, así como la manera de ponerla en práctica dentro del aula.

Se ha considerado más importante la manera de enfrentarse a los ejercicios propuestos, la manera de trabajar en grupo o individualmente, la motivación y predisposición ante el trabajo y, en concreto, ante las matemáticas.

1. Fundamentación teórica

1. 1 Antecedentes: aprendizaje cooperativo

El aprendizaje cooperativo es el empleo didáctico de grupos reducidos en los que los alumnos trabajan juntos para maximizar su propio aprendizaje y el de los demás, Johnson, D.W., Johnson, R. y Holubec, E.J. (1999).

El aprendizaje cooperativo nace como respuesta a la necesidad de enseñar algo más que la materia, de ir más allá de lo académico. Esta necesidad surge en el aula en respuesta a lo que está fuera de ella, a lo que los alumnos tendrán que enfrentarse, por eso es necesaria una enseñanza que les forme también socialmente. En esta metodología el profesor deja de ser el único que enseña en el aula y se inicia un proceso de enseñanza-aprendizaje y cooperación entre los propios alumnos en el que el profesor se convierte en un guía en la materia.

El aprendizaje cooperativo se basa en las necesidades académicas del alumno y también en las sociales, asumiendo éste el papel de aprendiz y también de enseñante dentro de su grupo. Basa parte de su estrategia metodológica en profundizar en la capacidad de comunicación y expresión del alumno. El aprendizaje cooperativo no es únicamente una metodología de trabajo sino de unos principios que se basan en la *igualdad, creatividad, autoestima* y *cooperación*.

Los resultados más destacables sobre esta metodología pueden consultarse en Johnson, D.W., Johnson, R., y Holubec, E.J. (1999), Pujolás (2008) y Kagan (1999). Para la puesta en práctica se recomienda el *laboratorio de innovación educativa* del Colegio Ártica:

`http://www.jrotero.org/files/file/LAB-IACEP-PP.pdf`

1. 2 Antecedentes: bloqueos

Miguel de Guzmán (1995) clasifica los bloqueos en matemáticas en tres grupos bien diferenciados:

Bloqueos de origen afectivo o emocional

La apatía o la pereza en matemáticas es una de las respuestas más recurrentes de los estudiantes y de los que se ven obligados a utilizar matemáticas en su día a día (en cualquier razonamiento matemático o discurso lógico que se les presente). Cuanto más haya que pensar, más miedo o rechazo se produce.

El miedo al ridículo y al fracaso pueden considerarse bloqueos emocionales y están relacionado con el miedo a ser diferente y salirse de los patrones establecidos, el temor a ser original en la manera de ver y de enfrentarse a las matemáticas.

Bloqueos de tipo cognoscitivo

Carencia de herramientas (limitaciones cognoscitivas)

Estos bloqueos son los menos problemáticos de identificar y clasificar. Se caracterizan por el desconocimiento o poca habilidad en el uso de las herramientas necesarias en la resolución de problemas. Generalmente esta carencia es debida a la falta de práctica.

Problemas en la percepción del problema (bloqueos perceptivos)

Este bloqueo aparece ante la incapacidad de entender el problema o parte del problema y la incapacidad para desglosar el problema. En ocasiones esta incapacidad es resultado de una falta de perspectiva que hace que se vea sólo lo que se quiere ver y no se consideren otros puntos de vista.

Problemas en el "ataque" al problema

Dentro de los bloqueos perceptivos se pueden diferenciar las limitaciones inventadas, llamadas también *suposiciones ocultas o visiones estereotipadas*. Otro tipo de bloqueo perceptivo es el *efecto túnel*, efecto que ocurre cuando nos encontramos tan inmersos en el problema que no somos capaces de considerar otras alternativas distintas en la resolución del mismo. Tanto el *efecto túnel* como las *suposiciones ocultas* pueden relacionarse con la creatividad e imaginación con la que nos enfrentamos a los problemas. Seguir el patrón establecido y no salirnos del camino marcado es, aparte de la opción más sencilla, la decisión que, en general, *parece* más correcta.

Bloqueos ambientales o culturales

La manera de entender las matemáticas y el gusto por la materia también puede verse influido por agentes externos a nosotros y a nuestra cabeza. Lo que nos han

transmitido nuestros padres y, sobre todo, nuestros profesores resulta esencial en nuestro concepto de las matemáticas, su utilidad y su belleza.

2. Estudio

2. 1 Participantes

Para el estudio se han considerado tres grupos de alumnos de 4º de ESO y uno de 1º de Bachillerato, realizándose los ejercicios en tres centros distintos de Madrid; dos institutos públicos; uno de ellos con Bachillerato de Excelencia (grupo II) y otro con Bachillerato usual (grupo I) y un colegio concertado (grupo III).

En primer lugar, los ejercicios los han realizado alumnos de 4º de ESO y de la asignatura de *Ampliación de Matemáticas* (también de 4º de ESO) del grupo I. La asignatura de *Ampliación de Matemáticas* es una asignatura optativa en el centro en la que se amplía un poco el temario de 4º ESO y en la que, generalmente, los alumnos que la escogen tienen una predisposición positiva hacia las matemáticas.

El grupo I es un instituto situado al sur de Madrid, en Móstoles. Dada la ubicación del centro, la situación socio-económica de las familias del alumnado es media- baja y la procedencia es muy variada, habiendo una gran representación inmigrante en el instituto. Debido a esto, el centro ha desarrollado un plan de atención a la diversidad muy completo y cuenta con 7 profesores pertenecientes al Departamento de Orientación. Es un centro en el que el trabajo en grupo (al menos en la asignatura de matemáticas) no es una práctica habitual, y no se ha potenciado de manera específica la colaboración entre alumnos en ningún estadio de su recorrido educativo.

El grupo de 1º de Bachillerato en el que también se ha realizado la prueba pertenece al grupo II. Este centro está incluido desde el curso 2012-2013 en el Plan de Excelencia en Bachillerato de la Comunidad de Madrid y sólo admiten a alumnos que finalicen la ESO con un buen expediente y que acrediten haber concurrido a las pruebas de los Premios Extraordinarios de la ESO de la Comunidad de Madrid. El grupo II sólo tiene 1º y 2º de Bachillerato.

El nivel académico de este centro está muy por encima de la media de institutos públicos y, a través de ejercicios por relevos y en grupos, se ha potenciado en parte el trabajo colaborativo (aunque de una manera alejada de la metodología propia del aprendizaje cooperativo).

Por último, el tercer centro con el que se ha contado para este estudio es un colegio concertado (grupo III), ubicado en el PAU de Carabanchel. Se trata de un centro concertado y es uno de los centros de referencia nacional del aprendizaje cooperativo y lleva aplicando esta metodología de manera continuada desde hace

8 años. La mayoría de los alumnos de 4º de ESO (más del 90% de ellos) han estudiado bajo esta metodología desde la escuela primaria.

El alumnado del grupo III está habituado al trabajo en grupo y mantiene su grupo de trabajo durante aproximadamente un trimestre.

2. 2 Estructura y contenido del proyecto

Estructura

Las pruebas se han dividido en dos partes: prueba individual y prueba grupal.

La razón principal por la que se ha decidido realizar una prueba grupal y otra individual es para analizar los resultados de los alumnos en ámbitos diferentes a los que están acostumbrados a trabajar. En el caso de los alumnos que aprenden con la metodología del aprendizaje cooperativo, como están habituados a trabajar en grupo, resultaba interesante realizar (además de la prueba grupal) una prueba individual. De igual manera, en las agrupaciones del grupo I y del grupo II la prueba grupal y la individual ofrece una buena comparativa para analizar.

Las pruebas en cada centro se han realizado en dos sesiones distintas. Se ha dedicado media clase de 50 min a cada parte (unos 25 minutos para cada prueba) y cada ejercicio se ha realizado en días distintos.

Se ha decidido realizar primero la prueba individual en todos los centros y después la grupal debido a que el tipo de ejercicios de la prueba individual y grupal son similares y parecía razonable que se enfrentaran a ellos en solitario primero y después de manera grupal o "en equipo".

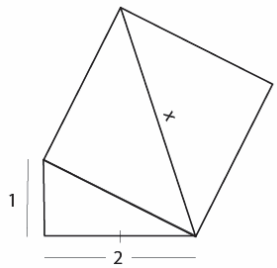
Contenido

Prueba individual

Ejercicio 1. Realiz*a las siguientes operaciones:*

A) 723 – 18 = *B) 110 × 13 =*

Ejercicio 2. *¿Cuánto mide x, siendo x la diagonal del cuadrado?*



A) 5 *B)* 10 *C) 4* *D) 3*

Ejercicio 3**.** *Marina tiene 15 primos, 9 de ellos viven fuera de Madrid. La mitad más uno de los primos de Marina tienen al menos dos años más que ella. ¿Cuántos tendrán la misma edad que Marina?*

A) 6 *B) la mitad menos uno* *C) 9* *D) ninguna de las anteriores*

Ejercicio 4. *Desde el año 2010, un tren realiza su trayecto entre dos pueblos de la sierra de Campoimán: Permilán y Salavia, que se encuentran a 23 km de distancia entre sí. Desde marzo de 2012 el tren para en un pueblo llamado Ruán que se encuentra entre Permilán y Salavia, en concreto, a 9 km de Permilán. Teniendo en cuenta que el tramo recorrido entre Salavia y Ruán se hace a una velocidad de 200 km/h y que la velocidad media del trayecto completo Permilán – Salavia es de 150 km/h. ¿A cuántos kilómetros se encuentra Ruán de Salavia?*

El Ejercicio 1 y Ejercicio 4 de esta prueba representan los *bloqueos emocionales o afectivos*. Tratan de estudiar cómo se pueden sentir los alumnos frente a un ejercicio en el que queda claro lo que hay que hacer y además saben hacerlo (Ejercicio 1) y frente a un problema en el que hay que hacer una simple resta pero todo un conjunto de datos innecesarios hacen que parezca mucho más difícil (bloqueo de ejercicio versus problema):

El Ejercicio 2 pretende mostrar un *bloqueo cultural* ya que la tendencia es siempre escoger el resultado más "bonito" o redondo y en este caso la respuesta correcta es raíz de 10. Además, este ejercicio también puede ilustrar un *bloqueo congnoscitivo* ya que es posible que no todos los alumnos tengan (o identifiquen) las herramientas necesarias para resolverlo (en este caso: el *Teorema de Pitágoras*).

El Ejercicio 3 hace referencia a un *bloqueo perceptivo* en el que se tiende a pensar que el problema tiene que tener sentido y tiene que poder resolverse con los datos dados, pero en este caso no es así porque el enunciado no tiene sentido ya que no es posible dividir a 15 personas entre dos y restar uno.

Prueba grupal

Ejercicio 1. *Realizar las siguientes operaciones*

A) 95x3,12 = *B) x – 1200 + 71 + 95 = 0 (despejar la x)*

Ejercicio 2. *¿Cuál es el menor número de palillos iguales necesarios para formar cuatro triángulos equiláteros cuyos lados tienen la longitud de los palillos?*

A) 4 *B) 6* *C) 9* *D) 12*

Ejercicio 3**.** *En una clase de 4º de Primaria hay 30 alumnos de los cuales el 60% son niñas. Se reparten 33 pistolas de juguete y 28 muñecas. ¿Cuántos juguetes le corresponden a cada uno?*
A) 2 pistolas a cada niño, 1 muñeca a cada niña y sobran 9 pistolas y 10 muñecas
B) 1 juguete a cada uno y sobran 5 pistolas y 2 muñecas
C) 2 muñecas a cada niña, una pistola a cada niño y sobran 19 juguetes
D) 2 juguetes a cada uno y sobra 1 juguete

Ejercicio 4. *Eres el gestor de bolsa de un magnate oriental. Tu cliente cuenta con las siguientes participaciones: 123 de ChinaMobile, 71 de PetroQueem y 95 de una empresa irlandesa emergente en el mercado. La variación en el precio de las acciones en la última semana ha sido de un +2,16% en PetroQueem, -1,03% en ChinaMobile y un +3,12% en la restante. El valor actual total de las acciones de ChinaMobile supera en 1200 dólares la suma de las otras dos. Teniendo en cuenta que el valor de cada acción de PetroQueem es de 200 dólares y que tu cliente te ha pedido que para mañana te deshagas de todas las acciones en ChinaMobile. ¿Cuántas participaciones tendrá mañana tu cliente? ¿Cuántas de ellas serán de la empresa irlandesa?*

De nuevo, al igual que en la prueba individual, el Ejercicio 1 y el Ejercicio 4 pretenden mostrar un posible *bloqueo emocional* frente a un problema largo y que requiere tiempo para leerlo con detenimiento a pesar de que las operaciones a hacer sean más sencillas que las del Ejercicio 1 (que seguramente todos son capaces de hacer sin problema):

El Ejercicio 2 representa las llamadas *suposiciones ocultas*, un tipo de *bloqueo perceptivo* en el cual los alumnos pueden considerar únicamente la solución en el plano, sin considerar una figura en 3 dimensiones como respuesta: el tetraedro.

El Ejercicio 3 muestra un posible *bloqueo cultural*, ya que es posible que debido a las creencias y tendencias culturales, no se considere que también las niñas pueden jugar con pistolas de juguete y los niños con muñecas (opción D). La opción A también concuerda con los datos pero, además de ser sexista, no es la opción mejor porque sobran 19 juguetes, mientras que en la opción D sobra sólo uno y el reparto es totalmente equitativo.

2. 3 Resultados

Porcentaje respuestas correctas: Prueba individual

4º ESO grupo I (27 alumnos):
Ejercicio 1: 88,8%, ejercicio 2: 7,4%, ejercicio 3: 29,6%, ejercicio 4: 37%

Ampliación grupo I (16 alumnos):
Ejercicio 1: 87,5%, ejercicio 2: 75%, ejercicio 3: 62,5%, ejercicio 4: 93,7%

Grupo III (24 alumnos):
Ejercicio 1: 91,6%, ejercicio 2: 87,5%, ejercicio 3: 45,8%, ejercicio 4: 83,3%

Grupo II (27 alumnos):
Ejercicio 1: 100%, ejercicio 2: 100%, ejercicio 3: 85,1%, ejercicio 4: 96,2%

Porcentaje respuestas correctas: Prueba grupal

4º ESO grupo I (7 grupos):
Ejercicio 1: 71,4%, ejercicio 2: 0%, ejercicio 3: 42,8%, ejercicio 4: 14,2%

Ampliación grupo I (4 grupos):
Ejercicio 1: 100%, ejercicio 2: 0%, ejercicio 3: 25%, ejercicio 4: 75%

Grupo III (6 grupos):
Ejercicio 1: 100%, ejercicio 2: 0%, ejercicio 3: 50%, ejercicio 4: 83,3%

Grupo II (4 grupos):
Ejercicio 1: 100%, ejercicio 2: 50%, ejercicio 3: 25%, ejercicio 4: 100%

3. Discusión

Prueba individual

Ejercicio 1
Este ejercicio era únicamente para mostrar un posible bloqueo al enfrentar los resultados con los del Ejercicio 4. Aún así, en el primer equipo del grupo I, ha habido tres de 27 que no han sido capaces de hacer las operaciones correctamente, *bloqueo cognoscitivo***.** En concreto, un alumno ha escrito en el apartado b): *"No sé si es una 'equis' o el signo de multiplicar",* lo que muestra un *bloqueo perceptivo.*

En el segundo equipo del grupo I (*Ampliación de Matemáticas*, 16 alumnos) lo han resuelto bien todos los alumnos excepto dos personas.

En el grupo III, de 24 alumnos, 22 han contestado bien al Ejercicio 1.

Con respecto al grupo de 1º de Bachillerato del grupo II, los 27 alumnos han contestado correctamente a ese ejercicio.

Ejercicio 2

En el grupo de 4º de ESO del grupo I sólo 4 de los 27 alumnos han contestado correctamente al Ejercicio 2, de los cuales uno de ellos lo justifica con operaciones (correctas), otro lo justifica con palabras (correctas pero sin operaciones), otro lo justifica diciendo que ha escogido esa respuesta de manera aleatoria (*bloqueo cognoscitivo*) y el último justifica: *"Yo creo que es la B porque la línea de la 'x' es más parecida a esa medida,* $\sqrt{10} = 5$ *"*.

Quince han elegido la respuesta C (4), tres de ellos han justificado su respuesta diciendo que como uno de los catetos del triángulo es 2, la diagonal será $2 \times 2 = 4$. El resto (12 alumnos) han justificado la respuesta como *"es la que más me encaja"*.

5 de los 27 han elegido la respuesta D (3), justificando que *"parece correcta"*.

Dos alumnos han escogido la respuesta A (5), justificando que lo habían hecho aleatoriamente. Un alumno no ha escogido ninguna de las respuestas, argumentando que la respuesta es 10 pero *"no es ninguna de las que están"*.

Ninguno de los alumnos de este grupo que han contestado por intuición o porque es la respuesta que *consideran más razonable* han escogido la respuesta correcta, probablemente por un *bloqueo cultural*.

En *Ampliación de Matemáticas* del grupo I, 15 de 16 alumnos han contestado correctamente a este ejercicio. Dos alumnos de los que han contestado correctamente este ejercicio han justificado que ha sido aleatoriamente, otro *"porque la mitad de x es 5"* y del resto, 5 de ellos han justificado con palabras, ya que el resto lo ha hecho sólo con operaciones.

Un alumno de este grupo ha elegido la respuesta D (3) justificando que lo había elegido dicha respuesta por intuición.

En el grupo de 4º de ESO del grupo III, 22 de los 24 alumnos han contestado correctamente al Ejercicio 2. De estos 22, 14 han utilizado palabras (además de operaciones) para justificar. Ninguno lo ha justificado erróneamente, 13 de ellos han indicado que estaban utilizando el *Teorema de Pitágoras* y sólo uno ha argumentado que: *"Porque me parece la más correcta"*.

En el grupo de 1º de Bachillerato del grupo II los 27 alumnos han contestado correctamente al Ejercicio 2. De todos los alumnos, únicamente tres de ellos han justificado con palabras (además de operaciones) la respuesta, los otros 24 han puesto las operaciones (correctamente) y sólo uno de ellos ha indicado que estaba utilizando el *Teorema de Pitágoras*.

Ejercicio 3

En el grupo I 13 de los 27 han contestado la respuesta correcta. De estos 13, 5 la han justificado correctamente con argumentos del tipo: *"Porque si 15:2=7,5 +1=8,5, no puede existir una persona partida por la mitad"*. Los otros 8 alumnos que respondieron correctamente han argumentado obviando que no es posible hallar la mitad más uno de una persona.

En este caso, parece que se ha podido producir el *bloqueo perceptivo* en aquellos alumnos que no escogieron la respuesta correcta y también en los que escogieron la *D*), pero sin plantearse que no tiene sentido el ejercicio.

Del resto de alumnos, cinco de ellos han elegido la *A)* como respuesta correcta, siete de ellos han elegido la *B)* y dos de ellos la *C)*.

Los que escogieron la respuesta *B)* han argumentado con justificaciones del tipo: *"Porque si la mitad menos uno son mayores, lo que queda es la mitad menos uno"*. Es decir, que sin reflexionar acerca de si el enunciado está bien (suponiendo que tiene que tener una solución), han concluido lo más "razonable".

Muchos de los que han escogido la respuesta A y la C confiesan que ha sido de manera aleatoria.

Del grupo de *Ampliación de Matemáticas* del grupo I, trece de los dieciséis alumnos han contestado correctamente a este ejercicio, los otros tres han elegido la respuesta *B)*, argumentando como en el otro grupo.

De los que contestaron correctamente (trece alumnos), sólo seis de ellos han argumentado que no es posible dividir a una persona por la mitad; de los otros siete alumnos, cuatro han justificado su respuesta indicando que no se puede saber si los primos restantes son menores o iguales que ella, y los otros tres han escrito que habían escogido al azar la respuesta.

En el grupo III, diecisiete de los veinticuatro alumnos han marcado la opción correcta, *D)*. De estos diecisiete, tres han justificado que no tiene sentido que el número de primos que tienen al menos dos años más que ella sea 8,5.

De los catorce restantes que marcaron la respuesta correcta, ocho argumentan que no hay suficientes datos en el enunciado, los otros seis confiesan que ha sido aleatorio o dan una respuesta diferente de A), B) ó C).

De los siete alumnos que no eligieron la respuesta correcta, seis han elegido la opción *B)*.

En el grupo de 1º de Bachillerato, del grupo II sólo un alumno no marcó la opción correcta, escogiendo la opción *B)*.

De los veintiséis que contestaron correctamente a este ejercicio, tres no han escrito justificación (o sólo han escrito operaciones sin explicación) y tres han argumentado que no se puede dividir el número de primos entre dos.

Ejercicio 4

En el grupo de 4º ESO del grupo I, doce de los veintisiete alumnos acertaron la respuesta correcta (14 km); de estos doce, diez han justificado la respuesta y la mitad, cinco, se han valido de operaciones para justificarlo. Seis de los veintisiete alumnos contestaron erróneamente el ejercicio; en estos seis alumnos puede verse un *bloqueo perceptivo*, ya que no han sido capaces de comprender el enunciado (o parte de él), pero no *cognoscitivo*, ya que todos tenían las herramientas necesarias para resolverlo (se llegaba a la solución haciendo una resta) y lo han demostrado en el Ejercicio 1 de esta prueba.

Los nueve alumnos restantes han mostrado un *bloqueo emocional o afectivo,* ya que se han bloqueado ante un ejercicio con un enunciado extenso, que sabían resolver pero la apatía o el miedo han hecho que no fueran capaces de afrontarlo: *"No consigo hallar el resultado"*, *"No lo sé"*, *"No lo entiendo"*, *"No lo sé, este problema es un poco raro", "No lo sé porque esto no lo hemos dado (problemas de móviles)", "No me apetece hacerlo"*, etc.

En el grupo de *Ampliación* del grupo I, quince de dieciséis alumnos han contestado correctamente a este problema. Nueve de estos lo justifican con una operación, sin incluir una frase o una argumentación con palabras.

El alumno que no contestó correctamente este problema dio la siguiente respuesta: *"Se encuentra a 30,6 km/h"*, lo cual prueba un *bloqueo perceptivo,* ya que no comprendió el problema (o parte de él).

En el grupo III, veinte de los veinticuatro alumnos han dado la respuesta correcta al Ejercicio 4 (14 km); diez de estos la han justificado con palabras o frases y los otros diez la han justificado con una operación, pero sin frases justificativas.

De los cuatro que han respondido incorrectamente, sólo uno ha justificado la respuesta (y había llegado a la resta que había que resolver, pero la ha resuelto mal); los otros tres han dado una respuesta incorrecta (posible *bloqueo perceptivo,* al no comprender el enunciado). En este grupo no ha habido respuestas que muestren apatía o pereza frente al ejercicio.

En el grupo de Bachillerato del grupo II, veintiséis de veintisiete alumnos han escrito la respuesta correcta, sin embargo, pero sólo dos la han justificado con palabras.

Prueba grupal

Ejercicio 1

Dos de los siete equipos del grupo I (4º de ESO) fallaron en este primer ejercicio, lo que es bastante sorprendente, ya que eran cuatro miembros por grupo y podían

buscar el resultado entre todos. Es posible que se deba a que no han dedicado mucho tiempo a comprobar el ejercicio (apatía, posible *bloqueo emocional*) o porque no están acostumbrados a hacer demasiadas operaciones sin calculadora (*bloqueo cognoscitivo*).

En el grupo *Ampliación de Matemáticas* del grupo I, grupo III y en 1º de Bachillerato del grupo II todos los grupos supieron hacer bien las operaciones de este ejercicio.

Ejercicio 2

De los dos equipos del grupo I y del grupo III, ninguno ha contestado correctamente a este ejercicio. En ningún caso se han planteado que la solución podía no ser en dos dimensiones sino en tres (posible *bloqueo perceptivo*, posible *efecto túnel* o *suposición inventada*).

En el caso del primer grupo del grupo I, dos de los equipos han escogido la respuesta peor, dentro de las posibles, es decir, la *D)*, justificandola con un dibujo. Los otros cinco grupos han marcado la opción *C)*, y sólo dos de estos grupos han justificado con suficientes palabras la respuesta. Los tres que no lo han justificado con suficientes palabras, han hecho únicamente un dibujo o han escrito cosas como *"Porque sí se puede"*. En este centro hubo muchas preguntas acerca del enunciado de este ejercicio (posible *bloqueo perceptivo,* al no comprender el enunciado o parte del enunciado del problema).

En el grupo de *Ampliación de Matemáticas* del grupo I los cuatro grupos han contestado la opción más cercana a la correcta, es decir, la *C)*, por *bloqueo perceptivo*. Tres de los grupos no han escrito absolutamente ninguna justificación más allá del dibujo, y el cuarto grupo, además del dibujo, ha escrito lo siguiente: *"Porque uno se puede formar con los lados del otro"*.

Cinco de los seis grupos del grupo III han escogido la respuesta *C)* y uno la opción *D)*. Dos de los seis grupos no escribieron absolutamente nada, aparte del dibujo en la justificación de la respuesta. También en este centro hubo preguntas sobre el enunciado, por posible *bloqueo perceptivo*.

De los cuatro equipos del grupo de 1º de Bachillerato del grupo II, la mitad ha escogido la respuesta correcta, es decir, la *B)*; éstos han dibujado el tetraedro como justificación. La otra mitad ha escogido la opción *C)* y uno de ellos ha argumentado con palabras la elección; el otro únicamente ha hecho el dibujo.

Ejercicio 3

En el grupo de 4º de ESO del grupo I, cuatro equipos de los siete han contestado correctamente a este ejercicio. De estos, tres lo han justificado debidamente y el otro grupo sólo ha escrito operaciones.

Dos de los grupos restantes han escogido la opción *A)*. Estos dos grupos se han dejado llevar probablemente por el hecho de que es más "lógico" repartir pistolas a los niños y muñecas a las niñas (*bloqueo cultural*).

El grupo restante ha escogido como válidas la opción *A)* y la *D)*. En este grupo se había escogido en un principio la opción *D)* y una de las componentes dijo *"No le puedes dar a una niña una pistola"*, y tras esa aportación decidió elegir también la *A)*.

En *Ampliación de Matemáticas* del grupo I, uno de los cuatro grupos ha escogido la opción correcta y lo ha justificado. Los otros tres grupos han escogido la opción *A)* y la *D)* como válidas, por posible *bloqueo cultural*.

La mitad de los equipos del grupo III escogieron la opción correcta en este ejercicio y la justificaron debidamente. La otra mitad eligió la opción *A)*, por *bloqueo cultural*. En uno de los grupos en los que se escogió dicha respuesta *A)*, tras haber entregado la prueba, uno de los componentes dijo *"Pero espera, ¿por qué tiene que ser las pistolas para los niños y las muñecas para las niñas? Eso es machista, ¿no?"*.

Dos de los cuatro grupos del grupo II han contestado correctamente a este ejercicio; sin embargo, uno de ellos sólo lo ha justificado con operaciones. De los otros dos grupos de este centro, uno ha escogido la opción *A)*, por *bloqueo cultural*, y el otro ha elegido las opciones A) y D), argumentando: *"Ambas, A) y D), son válidas. Hay 18 niñas y 12 niños. Sin hacer distinción entre niños y niñas, la D) es una mejor opción, pues solo sobra un juguete. En cambio, si a través de los enunciados de otras respuestas deducimos que las pistolas deberían entregarse a los niños y las muñecas a las niñas, la respuesta A) sería mejor opción"*.

En uno de los grupos, en la realización de la prueba, una alumna ha elegido la opción *D)* en el Ejercicio 3 y un compañero de equipo le ha dicho *"¿Le vas a dar pistolas a las niñas?",* a lo que ha contestado *"Sí, ¿por qué no?"*.

<u>Ejercicio 4</u>

En el grupo de 4º de ESO del grupo I, un grupo de siete ha contestado correctamente a este problema. Sin embargo, la justificación es una operación.

Dos grupos de los siete que se han formado en este curso han escrito respuestas incorrectas, uno de ellos sin justificar nada y el otro justificando con operaciones en las que utilizaban datos innecesarios del enunciado (*bloqueo perceptivo* al no comprender el enunciado o parte de él).

Los otros cuatro grupos han mostrado un *bloqueo emocional* ante este ejercicio, se ha dejado ver su apatía: *"Es largo, lioso y tiene muchos datos"* o sus

miedos: *"No sé hacerlo"*, *"No lo sé"* y *"Es muy difícil, no sabemos cómo hacerlo"*.

En *Ampliación de Matemáticas* del grupo I, tres de los cuatro equipos han contestado correctamente, justificando la respuesta con poco más que operaciones.

El grupo restante ha mostrado un posible *bloqueo perceptivo o emocional,* ya que su respuesta ha sido: *"No nos ha dado tiempo a terminarlo. 313"*, siendo posible que no hayan comprendido el enunciado o les haya resultado difícil.

En el grupo III, cinco de los seis grupos han contestado bien a este ejercicio, habiendo todos ellos han justificado su respuesta.

El grupo restante muestra un posible *bloqueo perceptivo o emocional* frente a este ejercicio: *"No me da tiempo para razonar toda la información"*.

Todos los grupos formados en 1º de Bachillerato del grupo II han contestado correctamente y justificando la respuesta en este ejercicio.

Posibles bloqueos observados en la prueba individual

Grupo I: Bloqueo emocional (ejercicio 4), bloqueo cognoscitivo (ejercicio 1, 2, 3 y 4), bloqueo cultural (ejercicio 2).

Grupo III: Bloqueo cognoscitivo (ejercicio 3 y 4).

Grupo II: Bloqueo emocional (ejercicio 4).

Posibles bloqueos observados en la prueba grupal

Grupo I: Bloqueo emocional (ejercicio 1 y 4), bloqueo cognoscitivo (ejercicio 1, 2 y 4), bloqueo cultural (ejercicio 3).

Grupo III: Bloqueo emocional (ejercicio 4), bloqueo cognoscitivo (ejercicio 2 y 4) y bloqueo cultural (ejercicio 3).

Grupo II: Bloqueo cognoscitivo (ejercicio 2) y bloqueo cultural (ejercicio 3).

4. Conclusiones

Los resultados no son lo (único) importante en este estudio. La predisposición a trabajar (en grupo e individualmente) y la manera de enfrentarse a los problemas y a los bloqueos intrínsecos a ellos resulta mucho más relevante.

En cuanto a la *manera de trabajar en grupo*, es importante decir que varios de los grupos formados en los centros en los que no acostumbran a trabajar de forma conjunta (grupo I) se repartían los ejercicios o sólo uno de los alumnos trabajaba individualmente, mientras el resto no hacía nada. En cambio, en el grupo II, tal

vez por la madurez que da un año más y el rendimiento académico excelente y la motivación hacia las matemáticas, su actitud ante trabajar en grupo ha sido completamente distinta.

Otro punto relevante es la *capacidad de comunicación* de los alumnos, no solo a la hora de ponerse de acuerdo en la prueba grupal (en la que, evidentemente, los grupos del grupo III podían tener ventaja al trabajar día a día con esta estructuración en clase), sino también en la prueba individual. Se ha pretendido ver la capacidad de comunicación de los alumnos a través de la justificación de las técnicas utilizadas para resolver los ejercicios de las pruebas. En el caso del Ejercicio 4 de dicha prueba, en el que había que justificar la respuesta a un problema sencillo aunque de enunciado extenso, el porcentaje de alumnos del grupo I que ha justificado su respuesta utilizando algo más que números ha sido de 32%, mientras que en el grupo II hay un 7,6% de alumnos que han utilizado frases o palabras para argumentar su respuesta y, en cambio, en el centro que aplica aprendizaje cooperativo (grupo III) la mitad (50%) de los alumnos ha justificado, además de con operaciones, con palabras coherentes y orden su respuesta.

La *motivación* es un arma poderosa, y no sólo ayuda a enfrentarse a los posibles bloqueos emocionales o afectivos, sino también los perceptivos. En el caso del grupo II, además de ser de un curso posterior al resto de alumnos del estudio, el nivel de este centro es de excelencia (son alumnos que tienen que tener unos requisitos de excelencia académica para entrar en el instituto) y algunos han participado en el *Concurso de Primavera*, están muy motivados y tienen una alta autoestima (ninguno se consideró como "número uno" dentro de su clase). Además, han trabajado en grupo y con ejercicios de relevos.

En el caso de la asignatura de *Ampliación de Matemáticas* del grupo I, los alumnos han escogido dicha asignatura (ya que es optativa), bien porque se les dan bien las matemáticas o porque les gustan, así que había una motivación clara por la materia.

Es por eso que los resultados que pueden considerarse más representativos son los que se desprenden del grupo de 4º de ESO del grupo I y los de 4º de ESO del grupo III, ya que ambos representan dos grupos usuales.

En estos dos grupos se ha observado, además de la capacidad de comunicación y expresión en la justificación de las respuestas que se ha comentado anteriormente, el porcentaje de *respuestas aleatorias* o *por intuición* que se han dado (el porcentaje se ha calculado sobre el número de ejercicios en los que se podía contestar algo aleatorio: Ejercicios 2 y 3 de la prueba individual): 24% en el grupo I y 7,4% en el grupo III.

Además, es importante destacar la *apatía* y los *miedos* observados en ambos grupos (bloqueos emocionales o afectivos): en el grupo de aprendizaje cooperativo sólo se ha observado un posible caso de bloqueo afectivo, sin embargo, en el otro grupo, se ha visto en, al menos, 9 alumnos.

Las habilidades sociales y la capacidad de comunicarse que he visto en los alumnos de aprendizaje cooperativo me ha sorprendido, sin embargo me ha sorprendido aún más su predisposición y motivación en el aula. Independientemente de la metodología que se lleve a cabo en la clase, creo que los miedos y la apatía hacia las matemáticas pueden (y deben) enfrentarse dentro del aula. Y la mejor arma para ello es potenciar la *creatividad* y la *motivación* en los alumnos, hacer las matemáticas más de todos y menos de los profesores. Los primeros cursos en Primaria son cruciales, y es por eso que durante esos cursos no debería *pisarse* la *curiosidad* de los niños, ya que es este el motor del aprendizaje (sin curiosidad el aprendizaje no *sabe* igual) y hay que aprovecharla y jugar con ella porque en la mayoría de los casos se desvanece pronto. Por eso creo que los profesores (en concreto los de los primeros cursos) no deben mostrar miedo a las matemáticas, que no deben transmitir a los alumnos la idea de que las matemáticas son difíciles o *sólo para los listos*. Es posible que la manera de hacer esto sea motivando a los propios maestros (que en muchos casos sufren bloqueos emotivos, perceptivos y culturales ante las matemáticas) o llevando matemáticos a las aulas de Primaria.

Bibliografía

Chevallard, Y. (1992). *Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées pau une aproche anthropologique.* Recherches en Didactique des Mathématiques, 12(1), 73-112.

Gascón, J. (1998). *Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica.* Recherches en Didactique des Mathématiques, 18/1, 52, 7-33.

Gómez-Chacón, I.M. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid , Narcea.

Gómez-Chacón, I.M. (2002). *Afecto y aprendizaje matemático: causas y consecuencias de la interacción emocional.* En Carrillo J. (editor), Reflexiones sobre el pasado, presente y futuro de las matemáticas (pp. 197-227). Huelva, Universidad de Huelva.

Kagan, S. (1999). *Cooperative Learning: Seventeen Pros and Seventeen Cons Plus Ten Tips for Success.* San Clemente, CA: Kagan Publishing. *Kagan Online Magazine*.

Johnson, D.W., Johnson, R. y Holubec, E.J. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula.* Buenos Aires, Editorial Paidós.

de Guzmán, M. (1995). *Para pensar mejor: Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos.* Madrid, Pirámide.

Pujolàs, P. (2008). *9 ideas clave. El aprendizaje cooperativo*. Barcelona, Graó.

Reseña de libros

La lengua de las matemáticas y otros relatos exactos. *Fernando Álvarez, Óscar Martín y Cristóbal Pareja.* Ed. Los libros de la Catarata, Madrid, 2015, 127 págs. ISBN en Catarata: 978-84-9097-001-0 e ISBN en UCM: 978-84-669-3498-5.

Se trata de una colección de relatos, anécdotas, jirones de historia de la matemática, elegidos sin orden ni método (según afirman los propios autores), cuya finalidad es esencialmente divulgadora, pero presentadas de modo absolutamente original y divertido.

Consta de doce capítulos no ordenados cronológicamente, cuyo contenido describimos brevemente. En el primero, titulado *La lengua de las matemáticas*, se narran interesantes anécdotas sobre antiguas notaciones matemáticas. En el segundo, titulado, *Pi antes de Pi*, se describen las aproximaciones hacia el número π descubiertas por las antiguas civilizaciones. En el tercero, titulado *La verdadera historia de Tales y la medición de la gran pirámide*, se recrea cómo posiblemente se realizó dicha medición. El cuarto se dedica a cómo *Eratóstenes mide el tamaño de la Tierra*. El quinto, titulado *El ritmo y el número*, narra la fundamentación aritmética de las notas musicales. En el sexto, titulado *Arquímedes y el volumen de la esfera*, se explica esta célebre demostración de Arquímedes, grabada en su tumba y vicisitudes relativas a su redescubrimiento. En el séptimo, titulado *Al-Juarismi*, se trata la transición desde la geometría griega hasta el nacimiento del álgebra. En el octavo, titulado *Aristarco quiere tocar la luna*, se compara la distancia de la Tierra al Sol y a la Luna, aprovechando los eclipses. En el noveno, titulado *El pequeño Gauss suma,* se cuentan interesantes precocidades matemáticas de su época juvenil. En el décimo, titulado *Galileo y la caída libre,* se trata la experimentación. En el undécimo, titulado *Cálculo de π por Arquímedes y Liu Hui,* se comparan las aproximaciones conseguidas por uno y otro. Y, finalmente, en el duodécimo, titulado *De Pitágoras a Bach*, se detalla la expresión fraccionaria de las notas musicales.

El libro va salpicado de numerosas y muy cuidadas figuras, muchas de ellas divertidas y que resultan útiles para una mejor comprensión. La exposición es esencialmente clara y atractiva, no sólo para mentes matemáticas, también para «gente de letras» interesados por la ciencia.

Eugenio Roanes Macías

Premio especial concedido a uno de nuestros socios

Nuestro consocio Francisco A. González Redondo, que fue Secretario de nuestra Sociedad durante los años 1995 a 2004, ha sido premiado en Londres. Se trata del premio "Maybourn Prize" otorgado a la conferencia presentada en el Congreso sobre Historia de la Navegación. El premio representa un reconocimiento por las tareas de difusión en torno al "Año Torres Quevedo 2016".

En la foto aparece "Paco" en la *Awards Ceremony* de 2016 del *Royal Institute of Navigation* del Reino Unido, recibiendo el Premio de manos de S.A.R. el Príncipe Felipe, duque de Edimburgo. Nuestra más calurosa enhorabuena a Paco, uno de esos españoles que contribuye a no olvidar a nuestros más grandes hombres.

Noticia sobre una publicación premiada, coordinada por uno de nuestros socios

Nuestro consocio Miguel Angel Queiruga Díos, ha sido el coordinador de la obra de difusión científica titulada "*2016 Space, conquistando el espacio"*, editada por Editorial Q, Depósito legal C-1039-2016, con ISBN en versión impresa 978-84-15575-06-1 y en versión digital 978-84-15575-07-8.

Se trata de una publicación en la que han colaborado prestigiosos científicos y en cuya redacción han participado numerosos alumnos de los dos últimos años de ESO y de Bachillerato.

La obra ha recibido varios premios y se distribuye de forma gratuita, invitando a los peticionarios de la versión impresa a donar los gastos de impresión. Puede verse información detallada en:

`www.fundacionjuntosmejor.com`

Olímpíada Estadística

Nuestros colegas estadísticos también organizan una olimpiada

El Instituto Nacional de Estadística (INE), la Facultad de Estudios Estadísticos (FEE) de la Universidad Complutense de Madrid y la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa (SEIO) convocan anualmente una *Olimpiada Estadística* para estudiantes de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Ciclos Formativos de grado medio.

La próxima edición se convocará en otoño de este año, siendo el periodo de inscripción en los meses de octubre de 2016 a enero de 2017 y la celebración de las pruebas en febrero y marzo de 2017.

Los interesados pueden encontrar abundante información sobre las Bases de la Convocatoria, Ejemplos de Pruebas de la Olimpiada Estadística, etc, en la página del portal divulgativo *Explica* del INE:

`http://www.ine.es/explica/explica.htm`

Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el Boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, congresos, etc., deben enviarse *en formato electrónico*, del modo especificado a continuación.

Formato: Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex.

En caso de usar Word

El formato de texto debe ser 17cm(alto) x 12.8cm(ancho), exactamente como este archivo. Configuración de página con márgenes: superior 3cm; inferior 9,7cm; izquierdo 4,1cm; derecho 4,1cm; encuadernación 0cm. Todo en el estilo de letra Times New Roman con "Interlineado sencillo" (en vez de múltiple).

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos en el estilo de letra usual; debajo el nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en estilo de letra negrita; debajo la referencia de su departamento o institución de trabajo en 11 puntos en el estilo de letra usual; y debajo la dirección de correo electrónico en estilo de letra Courier New en 11 puntos.

A continuación la palabra Abstract, en minúsculas de 12 puntos en estilo de letra negrita y debajo su contenido en inglés el tamaño de letra de texto 11 puntos en estilo itálica o cursiva, estrechado a ambos lados aproximadamente 1 cm.

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto. La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como en estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

En caso de usar Latex

Usar estilo "article" en 11 puntos y, por lo demás, tener en cuenta lo indicado para usuarios de Word. Para la dirección de correo electrónico usar el tipo de letra \tt.

Si se usan paquetes específicos de Latex distintos de los usuales, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Respecto de las Figuras

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser impresas. Las figuras deben llevar debajo numeración (Figura 1, Figura 2, …), para referirse a ellas en el texto. No debe escribirse texto a ninguno de los lados de la figura, ni a la izquierda ni a la derecha (es decir, las figuras no deben intercalarse en el texto)

Reseñas de libros

Las reseñas de libros, se enviarán como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Envío de originales

Se enviará en formato electrónico a nuestra cuenta `puigadam@mat.ucm.es` o bien en un CD o disquete formateado para PC compatible.

De otro modo, también puede enviarse impreso en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, cuya dirección que figura en la página 2 del Boletín. Pero, una vez aceptado para su publicación, se ha de enviar el correspondiente archivo en formato electrónico en la forma anteriormente indicada.

Selección de originales

Serán evaluados por revisores, expertos del mundo académico sobre el tema, que decidirán sobre la originalidad, calidad y ajuste a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de diez euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son del 39 en adelante.

El importe puede ser abonado mediante transferencia a la cuenta de la Sociedad, ES58 3025 0006 2114 3326 8241, domiciliada en la entidad bancaria *Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28003* (o bien mediante un cheque a nombre de *la Sociedad)*.

La carta de petición se enviará a la Sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella la *dirección* a donde se han de enviar y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia*.