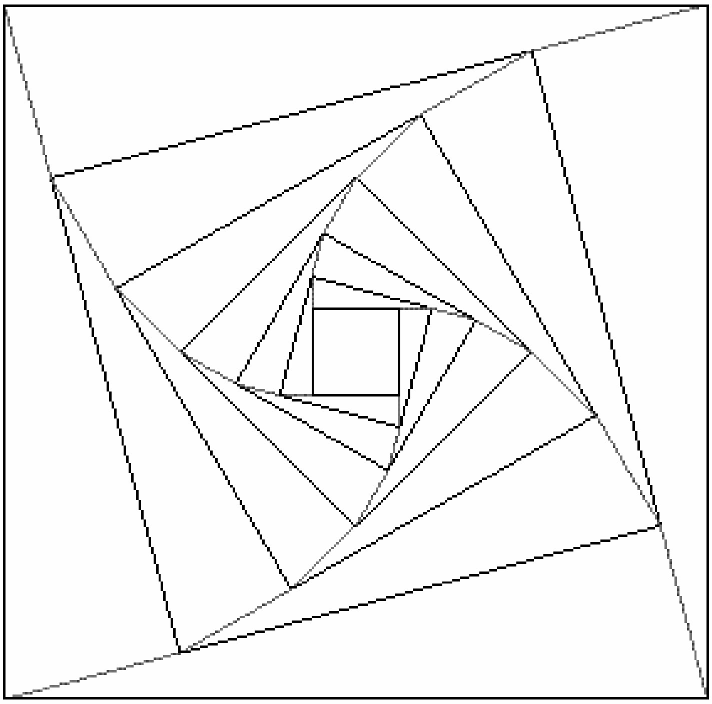
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 100
JUNIO DE 2015

Número especial dedicado a D. Pedro Puig Adam

ÍNDICE

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE
ENTRE LOS SOCIOS DE LA
SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen ahora en “MathEduc”, es decir, en lo que antes era Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), que ha cambiado su nombre.

La confección de este número ha estado a cargo de Antonio Hernando, Eugenio Roanes Lozano y Eugenio Roanes Macías.

ISSN: 1135-0261
Depósito Legal: M-7762-1995
Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Telf.: 91 611 59 94 – e-mail:loureiro@graficasloureiro.es

En la portada de este número aparece la figura adoptada como logotipo de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado “La Matemática y su enseñanza actual”, publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad

SOCIEDAD “PUIG ADAM” DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Algebra) Despacho 3215
Rector Royo Villanova, s/n - 28040 - Madrid
Teléf.: 91 394 62 48

Página web de la Sociedad “Puig Adam”:
`http://www.sociedadpuigadam.es`

Todo lo relativo a publicación en el Boletín (de artículos, etc), debe hacerse
a través del correo electrónico: `puigadam@mat.ucm.es`

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:
JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:
EUGENIO ROANES MACÍAS
F. JAVIER PERALTA CORONADO
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

ENRIQUE RUBIALES CAMINO	(Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO	(Gestión de publicaciones)
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ	(Actividades y concursos)
JUAN JESÚS DONAIRE MORENO	(Redacción de Publicaciones)

Secretario:
JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

Vicesecretaria:
MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:
FERNANDO LISÓN MARTÍN

Bibliotecario:
ANTONIO HERNANDO ESTEBAN

Mantenedoras página web:
BEATRIZ BARRERO DÍAZ
CAROLINA BRAVO SANZ

Acta de la Asamblea General Ordinaria de 2015 de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas

En la Facultad de Matemáticas de la UCM, sita en la Ciudad Universitaria, a las doce horas del día 11 de abril de 2015, en segunda convocatoria, reunidos los miembros de la Sociedad, bajo la presidencia de D. José Javier Etayo Gordejuela, dio comienzo la Asamblea General Ordinaria del año dos mil quince.

Se desarrolló con arreglo al siguiente

ORDEN DEL DÍA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.

Se procede a la lectura del acta de la Asamblea de 26 de abril de 2014, que queda aprobada por unanimidad.

2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.

El Presidente informa que desde la Asamblea anterior se han publicado los números 97, 98 y 99 del boletín. Los números 97 y 98 se han dedicado de forma especial a la memoria de los profesores Julio Fernández Biarge y Alberto Aizpún López.

También informa de los concursos Puig Adam, Intercentros y de la participación de la Sociedad en la fase regional de la *LI Olimpiada Matemática Española*.

Puig Adam. El XXXIII Concurso de Resolución de Problemas Puig Adam se celebrará el 13 de junio de 2015, se espera una buena participación como otros años. En el Boletín número 98 se da cuenta del desarrollo del XXXII Concurso.

Intercentros: Al igual que otros años se celebró el XIV Concurso en el penúltimo sábado de noviembre en la Facultad de Matemáticas de la UCM. Con una buena participación de centros y estudiantes de nuestra Comunidad. En el Boletín nº 99 aparece una reseña de los resultados del *XIV Concurso Intercentros*.

Concurso de Primavera: También se informa que el sábado 18 de abril se celebrará el *XIX Concurso de Primavera de Matemáticas de la Comunidad de Madrid*.

Este año participaron 43.248 alumnos en la primera fase del Concurso, que se realiza en los 527 Centros Escolares inscritos, y el día 18 de abril están invitados a participar 3.469 alumnos en la 2ª fase del Concurso en la Facultad de Matemáticas de la UCM. Hay que destacar que algunos miembros del equipo organizador del Concurso son miembros de la Sociedad.

3. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.

El Tesorero, D. Fernando Lisón Martín, reparte entre los asistentes la documentación relativa a los movimientos de tesorería, explicando detalladamente los ingresos apuntados y los gastos efectuados. Se someten a aprobación las cuentas desde el 5 de abril de 2014 al 10 de abril de 2015. Pasando a la votación quedan aprobadas por unanimidad.

Se propone la eliminación de un Boletín al año, dejando la publicación en dos boletines, el de abril y el de octubre, por problemas de financiación. Con este cambio se evita el que un socio se dé de baja y reciba el boletín de febrero. Se somete a votación y se aprueba por unanimidad.

4. Elección de nuevos cargos directivos.

El Presidente manifiesta que procede el cese de un miembro de la Junta Directiva de la Sociedad, el Vocal D. Eugenio Roanes Lozano. Se pasa a la nueva elección, quedando reelegido D. Eugenio Roanes Lozano.

5. Asuntos de trámite:

Se recuerda que el 13 de junio se celebrará el *XXXIII Concurso de Resolución de Problemas Puig Adam* y se agradece la colaboración de todos los patrocinadores del Concurso.

6. Ruegos y preguntas:

No hay.

Sin más asuntos que tratar, el Presidente levanta la sesión a las doce y treinta y nueve minutos del día de la fecha arriba indicada.

Vº Bº El Presidente El Secretario

Aviso muy importante

Como se recoge en la correspondiente acta, la Asamblea General de Socios aprobó que a partir del presente año 2015 se publicarán dos números anuales de nuestro Boletín. Para adoptar dicha decisión, la Asamblea consideró dos razones fundamentales. La primera es la disponibilidad de originales de la suficiente calidad, que aconseja moderar el ritmo de aceptación, como ya ha ocurrido en otras publicaciones similares. Por otra parte, razones económicas han aconsejado también tomar esta decisión. La edición del Boletín constituye el gasto fundamental de nuestra Sociedad, cuyos ingresos se reducen, lógicamente, a las cuotas de los propios socios. El análisis de las cuentas de los últimos años ha dejado claro que ésta era, en las circunstancias actuales, una decisión necesaria para equilibrar las cuentas.

En consecuencia, el presente número será el último que aparecerá en el año 2015. A partir del próximo año 2016, los dos números se publicarán en los meses de abril y de octubre. Con esta cadencia se consigue que para la edición del primer número del año se haya cobrado ya el recibo correspondiente, con lo que se habrá depurado la lista de socios, y además se tendrán los ingresos necesarios para afrontar los gastos de la Sociedad, en especial la propia publicación. De este modo, recordamos, el próximo Boletín aparecerá en abril de 2016.

XIX Concurso de Primavera de Matemáticas

Manthano: yo aprendo *Mathema:* conocimiento *Mathematikos:* estudioso

¡Hemos cumplido diecinueve ediciones! El concurso de Primavera es, sin duda, la gran fiesta de las matemáticas de la Comunidad de Madrid. Y todos los que de alguna manera participamos en ella, nos sentimos orgullosos: ¡buen trabajo!

En la primera fase de esta edición participaron *43250* estudiantes de *527* centros educativos de la Comunidad de Madrid. La segunda fase, celebrada en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid el sábado 18 de Abril, congregó a *3104* alumnos.

La etimología de las palabras esconde algunas sorpresas bastante curiosas. Si alguna vez estáis aburridos os recomiendo que echéis una ojeada al Breve Diccionario Etimológico de la Lengua Castellana de Joan Corominas. Podéis jugar a abrirlo al azar y leer las etimologías de las páginas afortunadas. Hay una probabilidad de 1/313 de que os topéis con el término *matemático* y ahí se explica que proviene del griego *manthano* (yo aprendo). Aquí me paro.

Nosotros, los organizadores de este concurso, tenemos una idea clarísima: *la resolución de problemas es el alma de las matemáticas.* Yo aprendo enfrentándome a los problemas. Tú aprendes...

Problema 1. Una machacona canción dice: *Un pasito pa'lante María,* ***un*** *pasito pa'trás. Un pasito pa'lante María,* **dos** *pasitos pa'trás. Un pasito pa'lante María,* ***tres*** *pasitos pa'trás…* Si María cayó exhausta al terminar la estrofa: *Un pasito pa'lante María,* **veinte** *pasitos pa'trás*, ¿cuántos pasos le separaban del punto en el que comenzó a bailar?

A) 0 ; B) 1 ; C) 19 ; D) 20 ; E) 190

Problema 2. Por allá viene Don Retorcido hablando solo y parece emocionado, *shhh*, a ver si podemos escucharle: "¡*biennn*!, acabo de inventarme otro problema para el Concurso de Primavera, *je je*, creo que van a picar como sardinillas...: sumando ***uno*** y después ***dos***, voy formando esta serie: 3 4 6 7 9 10 12..., ¿cuál de los siguientes números no aparecerá en ella? *Je je je*."

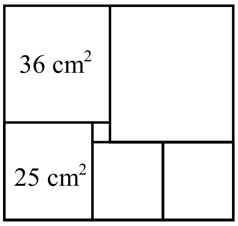
A) 2013 ; B) 2014 ; C) 2015 ; D) 2016 ; E) 2017

Problema 3. Cada uno de los siete días de la semana, Isa hace exactamente un deporte. Corre tres días, pero nunca dos días consecutivos. Los lunes juega a baloncesto y los miércoles a voley. También hace natación y juega al tenis pero nunca juega al tenis el día siguiente de correr o nadar. ¿Qué día de la semana hace natación?

A) DOMINGO ;

Problema 4. Dividimos un rectángulo en seis cuadrados como se muestra en la figura siguiente. En ella se muestran las áreas de dos de ellos. ¿Cuál es, en cm, el perímetro de dicho rectángulo?

A) 50 B) 44 C) 46 D) 52 E) 48



En señal de agradecimiento a todos los estudiantes, profesores y familiares, he aquí el cuadro de honor de esta edición:

PRIMER NIVEL (5º y 6º de Primaria)

1ª. Jimena Lozano Simón. 6º Primaria*, Colegio Alemán*, Madrid
2º. Sergio Pérez Plaza. 5º Primaria, *Colegio Agustiniano*, Madrid
3ª. Miguel Soto Martín. 6º Primaria, *Colegio Miguel de Cervantes*, Tres Cantos
3º. Raúl Sanz Belmar. 6º Primaria, *Colegio Pedro Bazán*, Leganés

SEGUNDO NIVEL (1º y 2º ESO)

1º. Pablo Soto Martín. 2º ESO, *IES José Luis Sampedro*, Tres Cantos
2º. David Sánchez González. 1º ESO, *IES Francisco Umbral*, Ciempozuelos
3º. Lucas Cuesta Araújo. 2º ESO, *IES Blas de Otero*, Madrid

TERCER NIVEL (3º y 4º ESO)

1º. Alejandro Epelde Blanco. 3º ESO, *Montessori School*, Los Fresnos
2º. Saúl Rodríguez Martín. 4º ESO, *Colegio Villa de Griñón*, Griñón
2º. Pablo del Olmo de Casas. 4º ESO, *IES Las Canteras*, Collado Villalba

CUARTO NIVEL (1º y 2º Bachillerato)

1º. Ismael Sierra del Río. 2º Bach, *IES San Mateo*, Madrid
1º. Daniel Puignau Chacón. 1º Bach, *IES Alameda de Osuna*, Madrid
3º. Marc Isern Hacker. 2º Bach, *Colegio Alemán*, Madrid
3º. Gonzalo Gómez Abejón. 2º Bach, *IES Ramiro de Maeztu*, Madrid

Esteban Serrano Marugán
Miembro del Comité Organizador del
Concurso de Primavera de Matemáticas

XXXIII Concurso "Puig Adam" de Resolución de Problemas de Matemáticas

Una vez más, año tras año desde 1983, en los primeros días de junio tuvo lugar el Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas patrocinado y organizado por esta Sociedad.

Como viene siendo habitual, las pruebas se desarrollaron, durante la mañana del sábado 13, en los locales de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid siguiendo las bases del concurso convocado en nuestro Boletín nº 99.

En esta ocasión y a pesar de que tuvimos una espléndida mañana de primavera, el número de participantes fue algo menor que en años anteriores, apenas llegaron a 60. No obstante, nuestros asiduos participantes de la Comunidad Valenciana, acompañados por el profesor Antonio Ledesma, no faltaron a la cita.

Nos preguntamos: ¿Es buena esta fecha para la celebración del concurso?

Por una parte parece adecuada porque los participantes ya han finalizado los programas de las materias propias de los niveles del concurso, pero por otra, en estos días de junio se encuentran inmersos en exámenes finales.

¡Difícil disyuntiva para resolver!

En cuanto a la dificultad de la prueba solamente decir que el 2º nivel (4º de E.S.O.) resultó ser más difícil de lo habitual con puntuaciones más bajas, debido principalmente al problema nº 1. Sin embargo en el tercer nivel (1º Bach.) dos de los concursantes alcanzaron la puntuación máxima.

La entrega de premios y diplomas tuvo lugar el mismo día del concurso a las 19 horas. En ese acto, nuestro Presidente dirigió unas palabras de felicitación a los participantes, especialmente a los premiados, y agradeció su labor a todos los que han contribuido al éxito del Concurso. Les dio ánimos para seguir participando y se despidió hasta el año próximo.

La foto a continuación fue tomada durante la entrega de Premios a los ganadores del Concurso.

La relación de ganadores de esta edición del XXXIII Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas es la siguiente.

Primer nivel (3º de E.S.O.)

1. **Andrés Gutiérrez Jaime** (Colegio Alemán de Valencia)
2. **Noryne Ridouane** (IES Manuel Fraga)
3. **Diego Sierra Corredera** (Colegio San José del Parque)

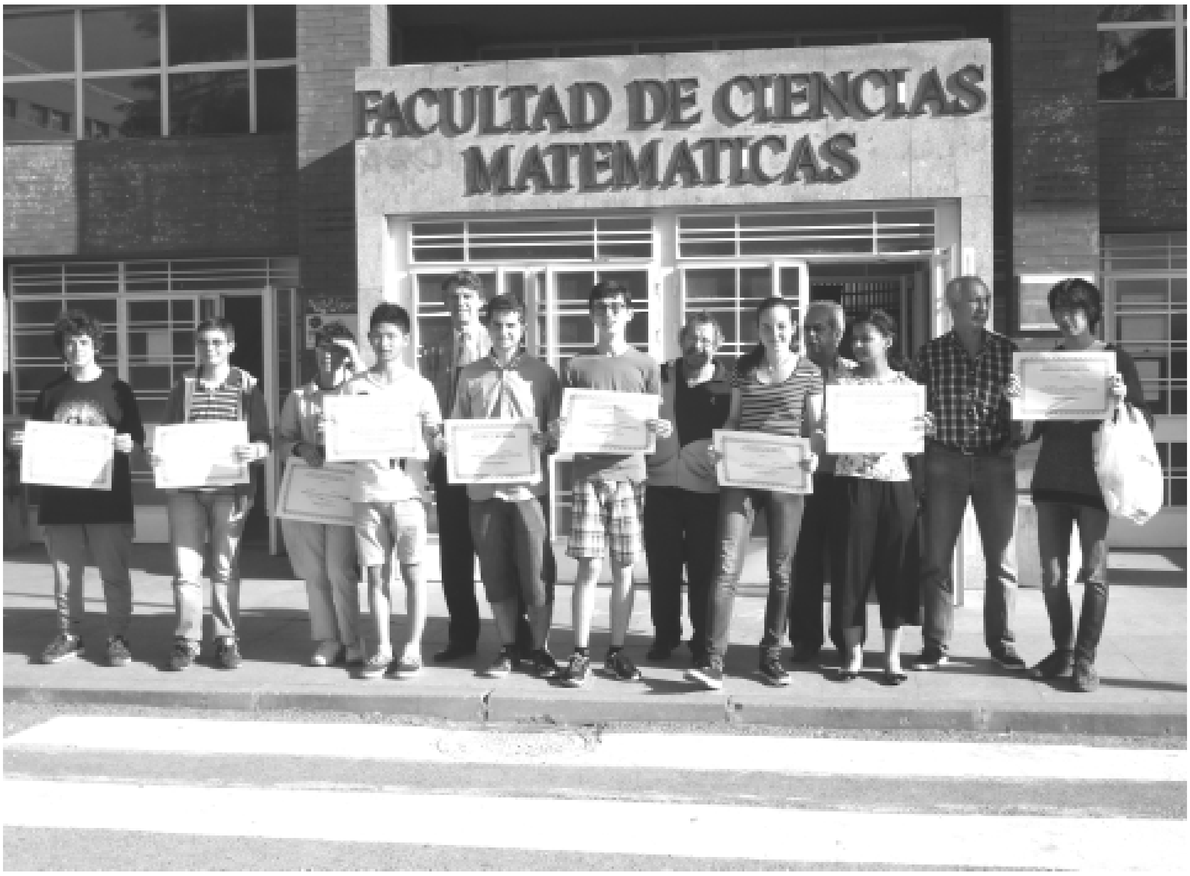
Segundo nivel (4º de E.S.O.)

1. **Saúl Rodríguez Martín** (Colegio Villa de Griñón)
2. **Francisco Tomás-Valiente Jordá** (IES Ramiro de Maeztu)
3. **Diego Carbonié del Burgo** (Colegio Villa de Griñón)
3. **Junyú Zhou** (IES Narcís Monturiol)

Tercer nivel (1º de Bachillerato)

1. **Javier González Domínguez** (IES San Juan Bautista)
1. **Daniel Puignau Chacón** (IES Alameda de Osuna)
3. **Berta García González** (IES San Juan Bautista)
3. **Ismael Morales López** (IES Al-Satt)

En la foto a continuación aparecen los ganadores mostrando sus diplomas, junto a los profesores, miembros del equipo directivo de la Sociedad "Puig Adam", que calificaron los ejercicios resueltos por los participantes.



Nuestro agradecimiento también a Almudena, la Sra. de nuestro Presidente, que como en años anteriores, tomó las fotos aparecidas anteriormente.

Joaquín Hernández Gómez
y Juan Jesús Donaire Moreno

Problemas propuestos en el XXXIII Concurso

NIVEL I (3º de E.S.O.)

Primera parte *(1 hora 30 minutos)*

Problema 1 *(7 puntos)*

En la siguiente posible suma cada letra representa un dígito (0, 1, 2,…, 9), letras diferentes representan dígitos diferentes y ninguno de las tres números empiezan por cero. Encuéntrala o demuestra que no existe tal suma.

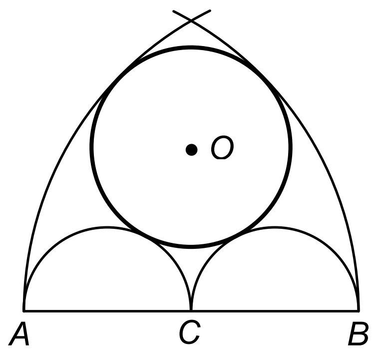
$$\begin{array}{r} \mathrm{S\ E\ V\ E\ N} \\ +\quad \mathrm{O\ N\ E} \\ \hline \mathrm{E\ I\ G\ H\ T} \end{array}$$

Problema 2 *(7 puntos)*

En la figura siguiente puedes observar:

- Dos semicircunferencias iguales de diámetros $AC = CB = 10$ cm.
- Una circunferencia de centro O tangente a las dos semicircunferencias anteriores y también tangente a los arcos de centros A y B y radio AB.

Calcula el radio de esta circunferencia de centro O.



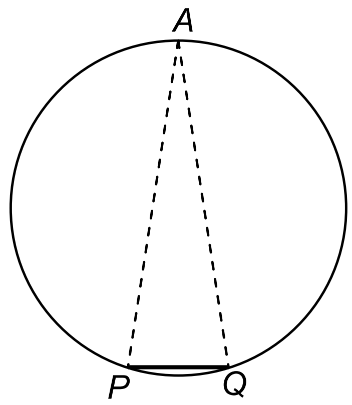
Segunda parte: problema encadenado (1 hora 30 minutos)

Problema 1A *(1 punto)*

Si P, U, I, G son enteros positivos tales que $P^2 + U^2 = 20$ y $I^2 + G^2 = 10$, obtén el producto $P \cdot U \cdot I \cdot G$.

Problema 2A *(1,5 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. Inscribimos en una circunferencia un polígono regular de n lados. En la figura siguiente observamos que P y Q son vértices consecutivos del polígono y A es otro vértice de dicho polígono tal que $A\hat{P}Q = A\hat{Q}P = T \cdot P\hat{A}Q$. Calcula el valor de n.



Problema 3A *(2 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior.
Para sumar fracciones no siempre es la mejor forma escribirlos con el mismo denominador. Si descompones hábilmente cada una de las fracciones podrás obtener de una manera fácil la suma siguiente.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{T(T+1)}$$

Problema 1B *(1 punto)*

Calcula el mayor divisor primo de 15! – 13! (Nota. 6! es el producto $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$)

Problema 2B *(1,5 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. Si el lado del octógono regular *ABC-DEFGH* es $\frac{T}{19}$, obtén el valor de $AC^2 - AD$.

Problema 3B *(2 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior y $m = 300\cdot T$. Calcula el número de dos cifras (AB) tal que $3\cdot(BA) + (AB) = m$.

Problema 4 *(5 puntos)*

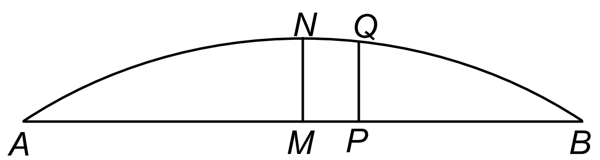
Sea $\frac{a}{c}$, irreducible, la respuesta del problema **3A,** b la respuesta del problema **3B** y m la media aritmética de los enteros positivos a, b y c.
Sea S una lista de enteros positivos, no necesariamente distintos, entre los que está el número m. La media aritmética de los números de S es 39. Sin embargo, si quitamos de la lista el número m, la media aritmética de los restantes números de la lista es 37. ¿Cuál es el mayor número que puede aparecer en S?

NIVEL II (4º de E.S.O.)

Primera parte *(1 hora 30 minutos)*

Problema 1 *(7 puntos)*

En la figura siguiente se observa un segmento circular en el que M es el punto medio de la cuerda AB. Los segmentos MN y PQ son perpendiculares a la cuerda. Si $MN = 10$, $PQ = 9$ y $PB = 27$ determina la longitud de la cuerda AB.



Problema 2 *(7 puntos)*

En cierta competición matemática por equipos, de tres componentes cada equipo, se exige que los equipos sean mixtos. Con los alumnos de 4º de ESO del "Club de Matemáticas" de mi instituto se pueden formar 25 equipos diferentes con esas características. ¿Cuántos estudiantes de 4º de ESO hay en el "Club de Matemáticas"?

Segunda parte: problema encadenado *(1 hora 30 minutos)*

Problema 1A *(1 punto)*

Lanzamos al aire una moneda equilibrada *n* veces. Calcula el menor valor de *n* para el que la probabilidad de que la moneda muestre todas las veces lo mismo, es decir, siempre cara o siempre cruz, sea menor del 10 %.

Problema 2A *(1,5 puntos)*

Sea *T* la respuesta del problema anterior. Calcula el menor entero positivo *n* para que en el dominio de la función $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + n}$ haya al menos *T* enteros positivos.

Problema 3A *(2 puntos)*

Sea *T* la respuesta del problema anterior. Calcula el menor número real positivo *x* tal que $\frac{[x]}{x-[x]} = T$. (Recuerda: [*x*] representa la parte entera de *x*)

Problema 1B *(1 punto)*

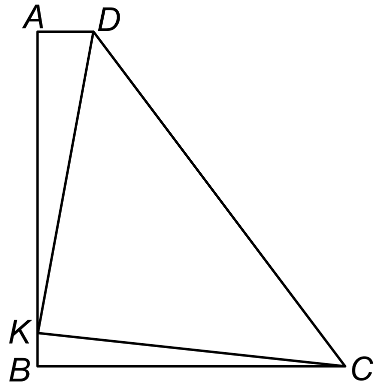
Los vértices del pentágono *ABCDE* son los puntos *A*(0, 0), *B*(2, 0), *C*(6, 6), *D*(2, 6) y *E*(0, 2). Calcula su área.

Problema 2B *(1,5 puntos)*

Sea *T* la respuesta del problema anterior. La longitud de la diagonal de un rectángulo cuyas dimensiones son las soluciones de la ecuación $x^2 - 3Tx + T^2 = 0$ se puede expresar como $a\sqrt{b}$ en donde a y b son enteros positivos. Calcula el mayor valor posible de a.

Problema 3B *(2 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. En el trapecio rectángulo $ABCD$ de la figura siguiente, el lado DC mide T cm y las bases $AD = 3$ cm y $BC = 15$ cm. Si $DK = CK$, ¿cuál es la longitud, en cm, del segmento AK?



Problema 4 *(5 puntos)*

Sean $\frac{a_1}{a_2}$ y $\frac{b_1}{b_2}$ (fracciones irreducibles) las respuestas correspondientes a los problemas **3A** y **3B**, respectivamente. En una fiesta todos se saludan entre sí una vez, excepto Pedro que se tuvo que ir antes de que llegaran algunos y no pudo saludar a todos. Si hubo en total $(a_1 + a_2 + b_1 + b_2)$ saludos, calcula el número de personas que saludaron a Pedro.

NIVEL III (1º de Bachillerato)

Primera parte *(1 hora 30 minutos)*

Problema 1

Se consideran los vectores $\vec{u} = [\overrightarrow{AB}]$, $\vec{v} = [\overrightarrow{AH}]$ y $\vec{w} = [\overrightarrow{AD}]$ determinados por cuatro de los vértices del octógono regular $ABCDEFGH$. Si escribimos el vector $\vec{w}$ como $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ para un único par (a, b) de números reales, ¿cuál es ese par?

Problema 2

Para cada entero positivo k se considera la progresión aritmética infinita S_k cuyo primer término es k y su diferencia k^2. Por ejemplo $S_3 = \{3, 12, 21, 30,\ldots\}$. Calcula la suma de todos los k tales que 306 es un elemento de S_k.

Segunda parte: problema encadenado *(1 hora 30 minutos)*

Problema 1A *(1 punto)*

Si φ es un ángulo tal que $0^o < \varphi < 180^o$ y $sen 16^o \cdot cos 286^o - cos 16^o \cdot sen(-106^o) = sen\ \varphi$, ¿cuál es el módulo del número complejo $cos\ \varphi + \mathrm{i}\, sen\ \varphi$?

Problema 2A *(1,5 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. Sean x e y números reales tales que $|x+y-T|+|x-y+1|=0$. Calcula el valor de y.

Problema 3A *(2 puntos)*

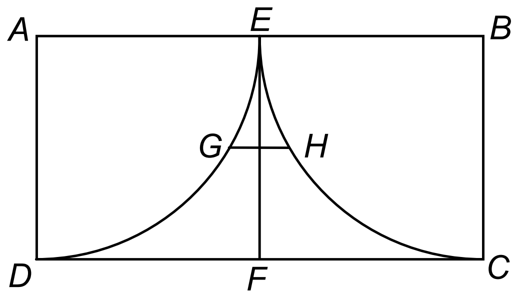
Sea T la respuesta del problema anterior. La gráfica de la función $y = f(x)$ es simétrica tanto respecto de la recta $x = 4$ como respecto del punto $(8, T)$. Si $(3, 7)$ y $(11, k)$ son puntos de la gráfica, calcula el valor de k.

Problema 1B *(1 punto)*

Dos círculos concéntricos verifican que el área del pequeño es igual al área de la corona circular que determinan. Si el radio del círculo pequeño es 1 cm, calcula la longitud de un segmento tangente al círculo pequeño cuyos extremos son puntos de la circunferencia que delimita al círculo mayor.

Problema 2B *(1,5 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. En el rectángulo $ABCD$ de la figura siguiente, $AD = T$, E y F son los puntos medios de los lados AB y DC respectivamente, los arcos $\overset{\frown}{DGE}$ y $\overset{\frown}{CHE}$ tienen por centro los vértices A y B respectivamente y G y H son puntos de la mediatriz del segmento EF. Si la longitud del segmento GH la escribimos como $p - q\sqrt{3}$, calcula el par de enteros positivos (p, q).



Problema 3B *(2 puntos)*

Sea $T = (p, q)$ la respuesta del problema anterior y $r = \dfrac{p}{2q}$. Calcula la distancia más corta entre un punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ y un punto de la recta $3x + 4y = 12$.

Problema 4 *(5 puntos)*

Sea a la respuesta del problema **3A** y b la respuesta del problema **3B** y $T = a{\cdot}b$. Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una progresión aritmética y $b_1, b_2, b_3, \ldots$ una progresión geométrica. Consideramos la sucesión $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \ldots$ donde cada $c_n = a_n + b_n$. Si $c_1 = T - 6$, $c_2 = T - 3$, $c_3 = 2T + 1$ y $c_4 = T - 5$. Calcula c_5.

La 51 Olimpíada Matemática Española

Fase Local en la Comunidad de Madrid

En el curso 2014-2015, pasado ya el cincuentenario, se ha desarrollado la edición número 51 de la Olimpiada Matemática Española. En la Comunidad de Madrid el proceso de selección de los nueve estudiantes que viajarían a Badajoz para participar en el Concurso Final comenzó, como es habitual desde hace ya una década, con una *Fase Cero*, en la que participaron casi cuatrocientos estudiantes. Entre ellos son siempre mayoría los alumnos de 2º de Bachillerato, pero son también muchos los participantes de 1º, que junto con alumnos de 4º y 3º de ESO se enfrentaron, durante tres horas y con gran entusiasmo, en la tarde del jueves 20 de noviembre de 2014, a treinta cuestiones de opción múltiple. Los chicos aseguran que esta fase cero les resulta más asequible que el Concurso de Primavera, ya que disponen del doble de tiempo con únicamente cinco cuestiones adicionales.

En esta ocasión han sido los 77 estudiantes con mejor puntuación los que pasaron a la siguiente fase, que ellos, los alumnos, ya denominan *fase intermedia*. En esta segunda prueba, celebrada el día 18 de diciembre repitió el formato con el que se desarrolló por primera vez el año pasado: diez problema de respuesta corta, a resolver en tres horas y media. Y no solamente el tiempo está limitado, sino que también lo está el papel. Cada estudiante recibe un pequeño cuadernillo con los enunciados en el que deben recogerse forzosamente todas las soluciones.

Al final de esta pequeña crónica se recogen los enunciados de los diez problemas propuestos en esta ocasión.

Con el inicio de las vacaciones de Navidad, se publicó en la web de la Sociedad la relación de los dieciocho “supervivientes”, que pasaban a la siguiente fase. Esta coincidiría ya con la Fase Local que se celebró en cada capital de provincia española el fin de semana del viernes 16 – sábado 17 de enero de 2015, con seis problemas propuestos como de costumbre por la Comisión de Olimpiadas de la RSME, a resolver en dos sesiones de tres horas y media cada una. Entre las tres opciones posibles – viernes mañana y tarde; viernes tarde y sábado mañana o sábado mañana y tarde – en Madrid se eligió la segunda.

Los enunciados y soluciones de las diversas opciones pueden encontrarse en la página web de la Olimpiada Matemática Española. En este Boletín se recogen no obstante los que correspondieron a los estudiantes madrileños.

Concluida la fase local de la Olimpiada en la Comunidad de Madrid, resultaron premiados los dieciocho estudiantes que se relacionan a continuación.

Relación de los 18 Ganadores de la Fase Local en la Comunidad de Madrid

Primer Premio

1.- Ismael SIERRA DEL RÍO (2º de Bto., IES San Mateo)

2.- Mark ISERN HACKER (2º Bto., Colegio Alemán de Madrid)

3.- Daniel PUIGNAU CHACÓN (4º de ESO, IES Alameda de Osuna)

4.- Berta GARCÍA GONZÁLEZ (2º de Bto., IES San Juan Bautista)

5.- Joaquín DOMÍNGUEZ DE TENA (2º de Bto., IES Gran Capitán)

6.- Ismael MORALES LÓPEZ (1º Bto., IES Al-Satt, Algete)

Segundo Premio

7.- Ruizhe YU XIA (2º Bto., IES Don Pelayo, Villalbilla)

8- Javier RAMOS GUTIÉRREZ (2º Bto., IES San Juan Bautista)

9.- Pablo HIDALGO PALENCIA (2º Bto., IES Ramiro de Maeztu)

10.- Álvaro ARENAS GONZÁLEZ (1º Bto., Liceo Francés de Madrid)

11.- Gonzalo GÓMEZ ABEJÓN (2º Bto., IES Ramiro de Maeztu)

12.- Elba ALONSO MONSALVE (2º Bto., IES Prado de Sto. Domingo)

Tercer Premio

13.- Álvaro ROBLEDO VEGA (2º Bto., Colegio Peñalar)

14.- Víctor OLMOS PRIETO (2º de Bto., IES La Estrella)

15.- José CÉSPEDES MARTÍNEZ (1º Bto., Colegio Villa de Griñón)

16.- Javier GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ (1º Bto. , IES San Juan Bautista)

17.- Alejandro APARICIO RODRÍGUEZ (2º Bto., King's College, Tres Cantos)

18.- Luis BERGUA (2º Bto., IES La Estrella)

Concurso Final - Badajoz

La sede del Concurso Final de esta edición de la Olimpiada ha sido Badajoz. El equipo del Departamento de Matemáticas de la UEX encargado de su organización, capitaneado por Maribel Parra Arévalo, Delegada de la OME en Extremadura, hizo una excelente labor, consiguiendo el soporte no solo de la Universidad sino también de la Consejería de Educación del Gobierno de Extremadura y del Ayuntamiento de Badajoz.

Año tras año, toca en la entrega de premios de la OME, que habitualmente es el último sábado de marzo, recordar a todos los participantes el inminente cambio horario. Este año no han sido necesarios estos anuncios, ya que las fechas se han adelantado una semana. Pero a cambio, las pruebas del primer día, viernes 20 de marzo, comenzaron al mismo tiempo que el eclipse, que los estudiantes no pudieron observar, pero que los profesores acompañantes pudieron disfrutar desde el patio del edificio en el que se llevaron a cabo los exámenes. Sin duda, un buen augurio para esta segunda mitad del primer siglo de la Olimpiada….

De los dieciocho estudiantes premiados en Madrid, únicamente los nueve primeros podían participar en el Concurso Final. Iban tutelados por Jaime Mendizábal, antiguo olímpico madrileño, por dos veces miembro del equipo español en la Internacional y que estudia en la actualidad en la UCM tercero del doble grado de Matemáticas e Informática. A lo largo de todo el curso, Jaime se ha ocupado de trabajar con los chicos y chicas interesados en la Olimpiada. Lo hecho con enorme generosidad y entrega, y desde luego también con inteligencia y acierto; como se verá los resultados de los estudiantes madrileños han sido realmente impresionantes.

Estos resultados se hicieron públicos al final de la tarde del sábado 21 de marzo, en el acto de entrega de premios que tuvo lugar en el Salón de Actos de la Residencia Universitaria que sirvió de alojamiento a los participantes durante su estancia en Badajoz. Durante el mismo, la Olimpiada quiso rendir un pequeño homenaje al Profesor Carlos Benítez, impulsor durante muchos años de la Olimpiada en Extremadura. La Insignia de Plata, que la Comisión de Olimpiadas de la RSME le había concedido cuando aún vivía fue recogida por su hijo.

Como es habitual, los premiados fueron treinta y seis: seis medallas de oro, doce medallas de plata y dieciocho medallas de bronce. Los ganadores de medalla de oro han sido en esta ocasión los siguientes:

Medallas de Oro en el Concurso Final

1.- Luis CRESPO RUIZ (2º de Bto, de Cantabria)

2.- Gonzalo CAO LABORA (2º de Bto, de Galicia)

3.- Ismael SIERRA DEL RÍO (2º de Bto, de Madrid)

4.- Jesús DUEÑAS PAMPLONA (2º de Bto, de Castilla y León)

5.- Cesc FOLCH ALDEHUELO (2º de Bto, de Cataluña)

6.- Berta GARCÍA GONZÁLEZ (1º de Bto, de Madrid)

Los seis constituyen el equipo español que participará en la próxima Olimpiada Internacional de Matemáticas, que se celebrará en Chiang Mai, Tailandia, el próximo mes de julio.

En los primeros cincuenta años de la OME, solamente en una ocasión un estudiante obtuvo medalla de oro tres años consecutivos: ese fue el caso del madrileño Luis Hernández Corbato, cuya primera participación fue en el curso 2001-2002. Pues bien, ese pequeño milagro ha vuelto a repetirse este año. Ismael Sierra obtuvo su primer oro hace dos años, cuando cursaba 4º de ESO, en Bilbao; repitió el año pasado en Requena, y ahora en Badajoz. Por ello, recibió la insignia de Plata de la Olimpiada. Ismael es el cuarto estudiante en recibir esta distinción: además de Luis Hernández la tienen también el también madrileño Moisés Herradón y el gallego Óscar Rivero, estos dos últimos por haber sido en tres ocasiones miembros del equipo español en la Olimpiada Internacional, en el que se integraron, al estar clasificados en séptimo lugar, para cubrir la baja de alguno de los medallistas de oro.

Como se indicaba anteriormente, los resultados de los estudiantes de Madrid han sido excelentes. Además de los dos oros, (Ismael y Berta, ¡hacía tiempo que no teníamos una mujer en el equipo!), Joaquín Domínguez, Ismael Morales y Marc Isern ocuparon los lugares 7, 8 y 9: las tres primeras medallas de plata. Por último, tuvieron medalla de bronce, clasificándose en los lugares 19, 20 y 24, Pablo Hidalgo, Daniel Puignau y Javier Ramos respectivamente. Vaya para estos estudiantes, no solamente para los dieciocho premiados, sino todos aquellos que trabajan con ilusión preparándose para participar en olimpiadas y concursos, y también para sus profesores, nuestra felicitación y agradecimiento.

La próxima edición del Concurso Final de la Olimpíada Matemática Española se celebrará en Barcelona, organizada por la delegación de la RSME y la SCM. Esta será la tercera vez en que la fase final es en Cataluña. Y es que desde que la Olimpiada se hizo itinerante, ha viajado ya por casi todo el territorio nacional, islas incluidas. ¡Solamente falta Asturias!

María Gaspar Alonso-Vega

Problemas propuestos en la 51 Olimpíada Matemática Española

Enunciados de los 10 problemas propuestos en la segunda prueba de la Fase Local de Madrid

Problema 1

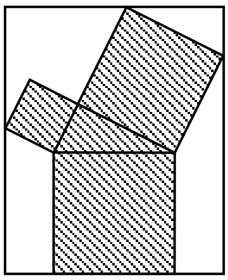
Al quitar un número de una lista de diez enteros consecutivos resulta que la suma de los nueve restantes es 2014. ¿Qué número hemos quitado?

Problema 2

En una reunión hay varias personas. Se incorpora Alicia y la media de la edad aumenta en 4 años. Posteriormente se incorpora Beatriz, que es gemela de Alicia, y la media de edad vuelve a aumentar, pero en este caso solo en 3 años. ¿Cuántas personas había en la reunión antes de entrar Alicia?

Problema 3

Sobre los lados de un triángulo rectángulo, de catetos uno doble que el otro, dibujamos cuadrados hacia fuera, como se muestra en la figura siguiente. El polígono obtenido lo inscribimos en un rectángulo como puede observarse en la citada figura. ¿Cuál es el cociente entre el área del polígono rayado y el área del rectángulo en el que está inscrito?

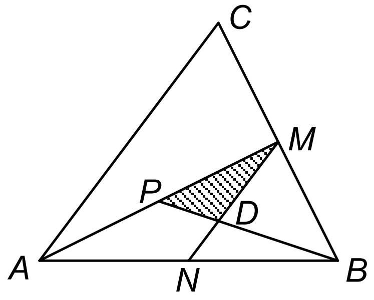


Problema 4

La gráfica de $y^2 + 2xy + 40|x| = 400$ divide al plano en varias regiones una de las cuales está acotada. Calcula el área de esa región

Problema 5

En la figura siguiente, el triángulo ABC, de área 48, P es el punto medio de la mediana AM y N el punto medio del lado AB. ¿Cuál es el área del triángulo MDP?

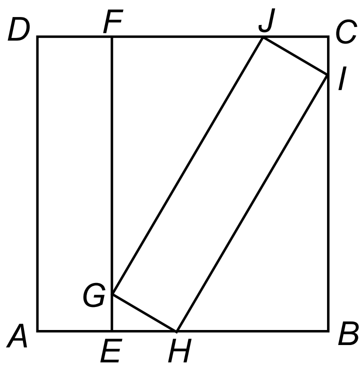


Problema 6

Una caja contiene varias bolas, todas iguales. El cociente entre el volumen ocupado por las bolas y el volumen de la caja no ocupado por las bolas es $1/k$, con k entero mayor que 1. Sacamos de la caja un número primo de bolas y ahora el cociente entre el volumen ocupado por las restantes y el volumen de la caja no ocupado por las bolas es $1/k^2$. ¿Cuántas bolas había en la caja al principio?

Problema 7

En el interior del cuadrado $ABCD$ (figura siguiente), de lado 1, dibujamos dos rectángulos iguales, $AEFD$ y $GHIJ$. ¿Cuánto mide el segmento AE?

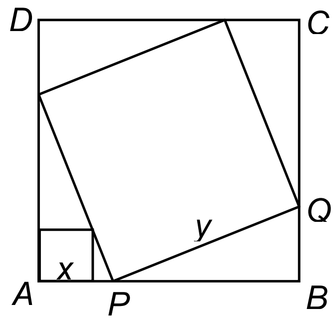


Problema 8

Uno de los lados de un triángulo mide 10 cm y la mediana que llega a ese lado, que mide 9 cm, es perpendicular a una segunda mediana del triángulo. Calcula la longitud de la tercera mediana del triángulo.

Problema 9

En el cuadrado *ABCD* de lado 1 se inscribe un cuadrado de lado $PQ = y$, como muestra la figura siguiente, y en uno de los triángulos rectángulos determinado por los dos cuadrados se inscribe otro cuadrado de lado x. Al moverse el punto P sobre el lado *AB* cambian los valores de x e y. Determina x e y para que $x^2 + y^2$ sea mínimo. ¿Cuánto vale ese mínimo?



Problema 10

En el triángulo *ABC* cuyos ángulos verifican $\hat{A} < \hat{C} < 90° < \hat{B}$ se trazan las bisectrices exteriores de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$. Los segmentos de estas bisectrices, cada uno hasta la prolongación del lado opuesto, miden lo mismo que el lado *AB*. Calcula la medida del ángulo $\hat{A}$.

Enunciados de los 6 problemas propuestos en la última prueba de la Fase Local de Madrid

Problema 1

Los enteros positivos X, Y, Z cumplen $x + 2y = z$; $x^2 - 4y^2 + z^2 = 310$. Halla todos los posibles valores del producto xyz.

Problema 2

En una recta tenemos cuatro puntos *A, B, C* y *D*, en ese orden, de forma que $AB = CD$. El punto *E* es un punto fuera de la recta tal que $CE = DE$. Demuestra que

$$C\hat{E}D = 2A\hat{E}B$$

si y solo si $AC = EC$.

Problema 3

Halla todas las ternas de reales positivos (x, y, z) que cumplan el sistema

$$\begin{cases} 2x\sqrt{x+1} - y(y+1) = 1 \\ 2y\sqrt{y+1} - z(z+1) = 1 \\ 2z\sqrt{z+1} - x(x+1) = 1 \end{cases}$$

Problema 4

Alrededor de una mesa circular están sentadas seis personas. Cada una lleva un sombrero. Entre cada dos personas hay una mampara de modo que cada una puede ver los sombreros de los tres que están enfrente, pero no puede ver el de la persona de su izquierda, ni el de su derecha ni el suyo propio. Todas saben que tres de los sombreros son blancos y tres son negros. También saben que cada una de ellas es capaz de obtener cualquier deducción lógica que sea factible. Empezamos por una de las seis personas y le preguntamos: "¿puedes deducir el color de algún sombrero de los que no ves?". Una vez que ha respondido (todas oyen la respuesta), pasamos a la persona de su izquierda y le hacemos la misma pregunta, y así sucesivamente. Demuestra que una de las tres primeras responderá "si".

Problema 5

El triángulo ΔABC es isósceles en *C*, y sea Γ su circunferencia circuns-crita. Sea *M* el punto medio del arco *BC* de Γ que no contiene a *A*, y sea *N* el punto donde la paralela a *AB* por *M* vuelve a cortar a Γ. Se sabe que *AN* es paralela a *BC*. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos de ΔABC?

Problema 6

Sean x, y, z reales positivos tales que $x+y+z=3$. Hallar el valor máximo alcanzado por $\sqrt{x}+\sqrt{2y+2}+\sqrt{3z+6}$. ¿Para qué valores de x, y, z se alcanza dicho máximo?

Enunciados de los 6 problemas propuestos en el Concurso Final

Problema 1

Sobre la gráfica de una función polinómica con coeficientes enteros, se eligen dos puntos con coordenadas enteras. Probar que si la distancia entre ellos es un número entero, entonces el segmento que los une es paralelo al eje de abscisas.

Problema 2

En el triángulo *ABC*, sea *A'* el simétrico de *A* respecto del circuncentro *O* de *ABC*.

a) Probar que la suma de los cuadrados de los segmentos de tangentes trazadas desde *A* y *A'* a la circunferencia inscrita en *ABC* es igual a $4R^2 - 4Rr - 2r^2$, siendo R y r los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita de *ABC,* respectivamente.

b) Sea *I* el incentro del triángulo *ABC*. Probar que la circunferencia de centro *A'* y radio *A'I* corta a la circunferencia circunscrita de *ABC* en el punto *L* tal que $AL = \sqrt{AB \cdot AC}$.

Problema 3

En la pizarra está escrito un entero $N \geq 2$. Dos jugadores A y B juegan alternadamente, empezando por A. Cada jugador, en su turno, reemplaza el número existente por el que resulte de realizar una de estas dos operaciones: restar 1 o dividir entre 2, siempre que se obtenga un entero positivo. El jugador que llegue al número 1 gana. Determinar razonadamente el menor número par *N* que le exige a A jugar al menos 2015 veces para ganar (No se contabilizan los turnos de B)

Problema 4

Todas las caras de un poliedro son triángulos. A cada uno de los vértices de este poliedro se le asigna de forma independiente uno de entre tres colores: verde, blanco o negro. Decimos que un cara es *extremeña* si sus tres vértices son de distintos colores, uno verde, uno blanco y uno negro. ¿Es cierto que, independientemente de cómo coloreemos los vértices, el número de caras extremeñas de este poliedro es siempre par?

Problema 5

Sean p y q enteros positivos, tales que p es primo, $n \geq p$ y $1+np$ es un cuadrado perfecto. Probar que $n+1$ es suma de p cuadrados perfectos no nulos.

Problema 6

Sean M y N puntos del lado BC del triángulo ABC tales que $BM = CN$, estando M en el interior del segmento BN. Sean P, Q puntos que están respectivamente en los segmentos AN, AM, tales que $P\hat{M}C = M\hat{A}B$ y $Q\hat{N}B = N\hat{A}C$. ¿Es cierto que $Q\hat{B}C = P\hat{C}B$?

Homenaje a Puig Adam
en el Centenario de su nacimiento

El 7 de junio del año 2000, año mundial de las Matemáticas, con motivo del centenario del nacimiento de D. Pedro Puig Adam, tuvo lugar en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales una Sesión conmemorativa del hecho, como homenaje a la figura de Don Pedro.

La Sesión fue organizada conjuntamente por dicha Real Academia de Ciencias, de la que fue miembro, por la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matematicas y por la E.T.S. de Ingenieros Industriales de la Universidad Politécnica de Madrid, de la que fue Profesor.

En la Sesión intervinieron por orden de actuación:

El Excmo. Sr. D. Angel Martín-Municio, Presidente de la Academia, que inició la Sesion con el discurso titulado *Pedro Puig Adam*;

El Profesor D. Sixto Ríos García, Académico y antiguo alumno de D. Pedro en el Instituto San Isidro, que disertó *Sobre la obra matemática de D. Pedro Puig Adam*;

El Profesor D. Julio Fernández Biarge, catedrático de la E.T.S. de Ingenieros Navales de Madrid y cofundador de nuestra Sociedad y Presidente de la misma en sus primeros años, que disertó sobre *Don Pedro Puig Adam en el Instituto San Isidro*;

El Profesor D. Joaquín Hernández Gómez, miembro de la Junta Directiva de nuestra Sociedad y nieto político de D. Pedro, pronunciando un discurso en el que intentaba glosar algunos aspectos menos conocidos de la personalidad de Puig Adam, titulado *La labor pedagógica de Puig Adam*;

El Profesor D. Miguel Jerez Juan, catedrático de la E.T.S. de Ingenieros Industriales de Madrid, que disertó sobre *El Paso de Don Pedro Puig Adam por la Escuela de Ingenieros Industriales de Madrid; y*

D. Gregorio Millán Barbany, Presidente de la Sección de Ciencias Exactas de la Real Academia de Ciencias de Madrid, que disertó sobre *Pedro Puig Adam y la Real Academia de Ciencias*.

Toda la Sesión con sus seis discursos y un Apéndice con una Relación de Publicaciones de D. Pedro Puig Adam fue publicada en un librito por la Academia de Ciencias en el año 2000.

Entendemos que en este número 100 de nuestro Boletín, dedicado a Puig Adam por acuerdo tomado en la última Asamblea de nuestra Sociedad, tienen cabida dos de estos discursos, por la relación de sus autores con nuestra Sociedad, los de los Profesores Joaquín Hernández Gómez y Julio Fernández Biarge.

Agradecemos muy sinceramente a la Real Academia de Ciencias el permiso que nos ha concedido para reproducir ambos discursos en este número especial.

Los reproducimos a continuación, precedidos de una autocaricatura de Puig Adam de 1930, cuando D. Sixto Ríos García era uno de sus alumnos.

La Labor Pedagógica de Puig Adam

por Joaquín Hernández Gómez
Catedrático del IES San Juan Bautista de Madrid
jhernan@mat.ucm.es

Señores Académicos, señoras y señores:

Aunque el sentimiento que predomina en mí en estos momentos es el de cierto aturdimiento, el qué pinta un profesor de Instituto hablándole desde una tribuna a renombrados científicos, no debo dejar de mostrar mi agradecimiento, en primer lugar a la Academia de Ciencias que presta este marco incomparable para este acto y, en segundo lugar a los conferenciantes que esta tarde han pasado y van a pasar por esta tribuna que han permitido dejarme a mí el punto de la labor pedagógica de Puig Adam, conscientes todos, ellos y yo, que cualquiera de ellos iba a aportar más, y sobre todo mucho mejor que yo en este aspecto. Sea como fuere, en cualquier caso, intentaré que la figura de mi abuelo político sea mejor conocida a partir de este año 2000, centenario de su nacimiento.

Hace poco más de quince años, en esta casa y posiblemente en este mismo lugar, un eminente científico, hoy desgraciadamente desaparecido, el profesor Mariano Yela, catedrático de Psicología y miembro de la Academia de Ciencias Morales y Políticas pronunciaba un discurso del que, por su belleza y emoción, me gustaría extraer el siguiente párrafo:

"Estamos en 1940. En un aula fría y destartalada del Instituto San Isidro, unos cien muchachos de sexto curso esperamos nuestra primera clase de Matemáticas. Entra Don Pedro [...] y se ve, tras sus gafas, la mirada chispeante, ingeniosa, acogedora, ingenua, casi infantil.

Se inicia la clase. Primera sorpresa: Don Pedro no explica, no escribe ninguna fórmula en la pizarra. Habla con nosotros como un amigo mayor. Pregunta a varios qué es la Matemática. Pide a algunos que recojan y resuman las contestaciones. Los demás las revisan y discuten. Poco a poco, la clase se anima; todos intervenimos. Nos olvidamos de que estamos en clase, nos ponemos gozosamente a pensar. De pronto, Don Pedro lanza una pregunta sorprendente: ¿Creéis que hay dos españoles con el mismo número de pelos en la cabeza? Todos queremos hablar. Nos parece que no; algunos creen que podría darse el caso, pero que sería mucha casualidad. Entonces, Don Pedro nos va ayudando a reinventar la matemática, a percatarnos de lo que es y para qué sirve. Despacio al principio, *vertiginosamente después, se van proponiendo ideas... Se acaba la clase. ¿Serán todas así? Con mil variantes, sí lo fueron".*

La mirada chispeante, ingeniosa... Con toda probabilidad, esa mirada ingeniosa tenía que, de vez en cuando, quedar reflejada muy directamente: un día, en clase en el San Isidro, contaba hace poco Joaquín Crespo, ingeniero industrial ya jubilado y alumno de Don Pedro desde el San Isidro a la Escuela de Ingenieros Industriales, va Don Pedro y dibuja, en la pizarra, una circunferencia perfecta. El "oh" de admiración que se le escapa a algún estudiante así lo refleja.

- *¿Cómo se llama este hueso?*, le pregunta Don Pedro señalándose el antebrazo.
- *Radio*, contesta un tanto aturdido el chico.
- *Bueno, hombre, pues no te debería extrañar que con una herramienta como esa, salga una circunferencia como ésta.*

El ingenio del que hablaba el profesor Yela, se reflejaba, a veces, de otra manera: en una conferencia a profesores se entusiasmaría con su método heurístico, y uno de los asistentes, en el turno de preguntas, probablemente poco amigo de dicho método, comentaba Santiago Gutiérrez antiguo alumno suyo, le espeta:

- *O sea, que sus estudiantes, en clase, hacen lo que quieren*, a lo que Don Pedro le responde:
- *No, quieren lo que hacen.*

Pero Puig Adam, además del ingenio, debió haber tenido un carácter tremendamente jovial -mirada casi infantil, decía el profesor Yela- lo que ayudaba, sin duda, a que sus estudiantes, en clase, "quisieran lo que hacían".

Escuchemos una de sus clases, a niños de 10 a 11 años. Está hablando de la descomposición en factores primos, m.c.d y m.c.m. Después de proponer diversos ejercicios de descomposición les dice:

> *"Disponemos, como veis, de una clave nueva para describir de otro modo los números. Esta clave la ignora el enemigo. Desde mi puesto de mando, el encerado, yo os transmitiré órdenes y datos numéricos en la nueva clave y vosotros, desde vuestros aviones, las mesas, me contestareis asimismo en clave.*
> *Tripulantes A: Multiplicad todos $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ por $2^3 \cdot 3$ y dad el resultado en clave al tripulante B de vuestro avión.*
> *Tripulantes B: Transmitid en clave el resultado obtenido.*
> *Uno de ellos quiso darme el resultado numérico del producto pero le interrumpí, siguiendo el juego, advirtiéndole: "En clave, en clave, que se entera el enemigo".*

Pero todo este ingenio, todo este carácter jovial, se quedarían en simple anécdota si no fueran unidos a una impresionante capacidad de transmitir ideas; y esa capacidad la desarrolla utilizando estrategias de lo más diversas: *"Deseaba con-*

servar intacta esta operación en la pizarra -les dice un día a sus estudiantes, mostrándoles los restos de una operación de multiplicación de polinomios- *pero ha venido el bedel y la ha borrado casi toda; solo he llegado a tiempo de que no borre el multiplicando y el producto. A ver, si entre todos, reconstruimos esta operación".* Los chicos, casi sin darse cuenta, están aprendiendo, por sí solos, el algoritmo de la división de polinomios.

Otra vez inventa un puzzle para hablar de la irracionalidad de $\sqrt{2}$.

Pero no solo tenía extraordinaria capacidad para transmitir ideas matemáticas: Un día, cuenta Fernando Arce, antiguo alumno suyo, en su clase del San Isidro, se retrasó algo en la entrada a clase, con lo que los chicos de quince-dieciséis años estaban campando a sus anchas sin profesor -hoy, a veces, campan a sus anchas con profesor pero bueno, eso no viene a cuento- con la mala suerte, o buena, como veremos luego, que coincidió la entrada de Don Pedro con alguna palabrota, ya claramente fuera de tono, que habría pronunciado alguno. Apareció Don Pedro y la clase quedó, como era de esperar, en el más absoluto de los silencios. Don Pedro no hizo ninguna alusión a lo que acababa de oír y, unos minutos antes de acabar la clase, les dice:

- *Esperad un momento que vuelvo en seguida.*

Sale del aula, hace una rápida gestión por teléfono, vuelve al instante y les dice:

- *Mañana, a la hora de clase, en lugar de esperarme aquí, nos vemos en la boca de Metro de Alonso Martínez.*

Los chicos quedan perplejos, llegó el día siguiente, fueron a la boca de Metro y Don Pedro, sin decirles adonde les llevaba, se dirigió con ellos al Colegio de Sordomudos, calle San Mateo. Una vez en el Colegio les lleva por las diversas dependencias, reinando en todas ellas el más escalofriante de los silencios. Al final, en el hall, les comenta:

Espero que hayáis entendido el verdadero valor del lenguaje y, de aquí en adelante, sepáis utilizarlo cuando sea conveniente.

El ya citado Fernando Arce recuerda esta lección sesenta años más tarde.

Pero toda esta capacidad para enseñar va unida a una percepción muy clara de la dificultad del aprendizaje. En lugar de pensar como tantos profesores pensamos a veces: Pero, ¿cómo no pueden entender los chicos esto con lo fácil que es?, cuenta el ya citado Santiago Gutiérrez, que cuando él ya era profesor, le pregunta un día:

- *Y usted, además de dar clase ¿qué hace?*
- *Pues preparo mis clases, salgo con mis amigos, voy al cine de vez en cuando...*
- *No, si me refiero a ¿qué estudia?, ¿qué está aprendiendo ahora?*

- Pues...
- Un profesor tiene que estar siempre aprendiendo, le dice, y no tanto por no quedarse atrás en conocimientos como porque sienta, día a día, lo difícil que es esto de aprender, y así valorará más su trabajo pero, sobre todo, comprenderá mucho mejor las dificultades de sus alumnos.

Don Pedro no era un sabio distraído. Y eso, aunque, a veces, cuenta su hija Emilia, estuviera en casa comiendo y, observando su familia que estaba con la cabeza en otro sitio, le preguntan al final: a ver, papá, ¿qué has comido de primer plato? Y él no sabía responder.

Pero en su clase, cuenta Consuelo de Costa, antigua alumna suya, con ¡100 alumnos! tenía la clase dibujada en un cuadrante, con la posición y el nombre de cada uno, y controlaba absolutamente el trabajo de cada uno de sus estudiantes.

Puig Adam fue un adelantado de su época. Una persona que, en 1921, en su tesis doctoral, trata problemas de Mecánica Relativa Restringida, cuando las teorías de Einstein, aun no bien comprendidas en muchos medios científicos, eran conocidas por muy pocos en España. Una persona que en su discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias, en 1952, cita a Norbert Wiener y da las primeras aplicaciones de las máquinas que después llamaremos ordenadores.

Pero donde de verdad se ve que era un hombre de otra época es en su concepción de la enseñanza. Toda su teoría didáctica chocaba con la pomposidad y el conservadurismo de la práctica docente de sus compañeros.

En 1951, en un artículo en "Atenas. Revista de información y orientación pedagógica" decía:

> *- "Tengamos también siempre presente que el niño no es un saco vacío que hay que llenar de ciencia, sino un potencial deseoso de convertirse en acción. Hagamos que sienta la alegría de descubrir, de crear, de inventar; que una verdad hallada por su propio esfuerzo, tendrá más valor para su cultura y para su moral que cien verdades recopiladas".*

Esta falta de sincronía y alguna otra razón, como veremos, le hacía no sentirse muy feliz entre algunos compañeros. Escuchémosle en 1953, en la Conferencia Inaugural de la sección de Matemáticas del Congreso luso-español para el progreso de las Ciencias, celebrado en Oviedo.

> *Tras la lectura de las recomendaciones que la UNESCO acordó llevar a los Ministerios de Instrucción Publica en julio de 1950, lectura que hace en dicha conferencia, comprobé* -dice- *con alegría, que la enseñanza oficial española no está atrasada en lo que a didáctica matemática se refiere. El espíritu que las informa es el mismo que nos guió hace más de 25*

años al escribir en colaboración con mi querido maestro Don Julio Rey Pastor los libritos destinados a tal didáctica, de cuya posterior influencia en cuestionarios y textos de aquí y de Hispano América no he de ser yo el fiel contraste, ni mucho menos el pregonero. Pero sí quisiera decir que a la hora de rendir cuentas del empleo de mi vida, estimaré como el más señalado servicio que haya podido rendir a mi Patria, el haber colaborado en aquella tarea de renovación que, acogida en un principio con indiferencia y escepticismo por la rutina ofendida, después... después ha sido envuelta en silencios mucho más elocuentes todavía. En réplica a ellos digo lo que digo, cometiendo grave pecado de inmodestia. Pero no me refiero tanto al silencio despectivo como al silencio delictivo, al que acentúa un desprecio como al que disimula un plagio; que si el primero duele, el segundo irrita, que es peor.

Dejemos estos momentos de enfado y escuchémosle, en 1957, lo que parece que son palabras de los pedagogos más avanzados del siglo XXI. Y eran pronunciadas hace más de 40 años.

"Se ha tardado no poco en tener conciencia clara de que el acto de aprender es mucho más complicado de lo que supone la recepción pasiva de conocimientos transmitidos; que no hay aprendizaje donde no hay acción, y, que, en definitiva, enseñar bien ya no es transmitir bien, sino saber guiar al alumno en su acción de aprendizaje. Esta acción del alumno ha terminado así primando sobre la acción del maestro, condicionándolo totalmente y subvirtiendo así la primacía inicial de su papel. El centro de la enseñanza ya no es el maestro, sino el alumno. Rotunda verdad que, de puro sencilla, muchos maestros no han asimilado todavía".

No quiero extenderme más, tanto por consideración a ustedes, que ya me han oído demasiado como por deferencia a mis compañeros que ya les he arrebatado tiempo suficiente y por eso, aunque ni voy a citar casi su Decálogo de la Didáctica Matemática Media, publicado en 1955 por ser ya muy conocido, sí me gustaría terminar diciendo que todo el polifacetismo de Puig Adam -componía música, pintaba, escribía versos- obedecía, según su hija Emilia, a una forma de encarar la vida. En una charla a sus alumnos de 7º curso del Instituto San Isidro, cuando ya abandonaban la enseñanza media, les decía:

"Tended a ser un poco aprendices de todo, para vuestro bien, y maestros en algo, para bien de los demás".

Muchas gracias, nuevamente, por haberme dado la oportunidad de colaborar en un mejor conocimiento de la figura de Puig Adam en nuestro país. Muchas gracias.

Don Pedro Puig Adam en el Instituto San Isidro

por Julio Fernández Biarge
Catedrático de la E.T.S. de Ingenieros Navales de Madrid

Cuando, siendo un joven inexperto, entré de catedrático en el Instituto San Isidro de Madrid, tuve la inmensa suerte de encontrar allí, junto a otros compañeros que me acogieron cordialmente, al insigne maestro Puig Adam. El me trató siempre como compañero y amigo, pero en realidad fui su discípulo durante los nueve años en los que compartimos la enseñanza de las Matemáticas en el Instituto.

Él me descubrió el apasionante panorama de la Didáctica Matemática, contribuyó a darme una visión más profunda y más bella de las Matemáticas y sobre todo, fue para mí un ejemplo de sensibilidad, de honestidad profesional, de vida entregada al servicio de los demás y de entusiasmo en la labor cotidiana que he procurado seguir desde entonces. De él aprendí que: *«Cuando se concibe la vida como servicio, el tiempo ya no es caudal propio sino ajeno».* No sólo escribía frases tan hermosas como esa, sino que, desconociendo la hipocresía, hacía de su vida el ejercicio de lo que decía.

Don Pedro entró en el Instituto San Isidro, como catedrático por oposición, en 1926. Era joven, de 26 años, aunque antes ya había tenido experiencia docente en la Universidad y en el I. C. A. I., pero muy pronto contribuyó a crear el sólido prestigio de que gozó durante largo tiempo ese Instituto. Tuvo entre sus alumnos del Instituto al Infante don Juan de Borbón, a nuestro actual Rey, entonces príncipe don Juan Carlos, y a su hermano el Infante don Alfonso, que falleció en Estoril.

No obstante, el ámbito del Instituto quedó muy pronto estrecho para su iniciativa. Rey Pastor, preocupado por la deplorable calidad de los libros de matemáticas que se utilizaban en el bachillerato y con una gran fe en la capacidad de Puig Adam para hacer una obra renovadora, le invitó a emprender la enorme labor de preparar una colección completa de nuevos textos, desarrollando las brillantes ideas que tenía sobre la enseñanza de las matemáticas. Le costó trabajo vencer la timidez de don Pedro, pero insistió, ofreciéndole colaborar y firmar la obra conjuntamente, así como resolverle los problemas de edición y distribución.

Puig Adam se puso a la labor y el resultado fue una colección de textos que supusieron una verdadera revolución en la didáctica de las matemáticas. Eran algo totalmente distinto de lo que se había utilizado en los años anteriores y produjeron un saludable efecto en la enseñanza, no sólo directamente, sino a través de las innumerables copias que surgieron inmediatamente. Estos efectos alcanzaron a toda la población de habla española.

Un par de generaciones debemos gran parte de nuestra formación matemática a las ideas de don Pedro, plasmadas en los textos mencionados y muchísimos profesores han visto aliviada su labor docente con la ayuda de sus hallazgos didácticos. Esos textos fueron adaptados más tarde a los distintos planes de estudios que se sucedieron en la Enseñanza Media.

Años después, el Instituto San Isidro, a pesar de su reconocido prestigio, pasó por tiempos difíciles, con el declive de la enseñanza oficial, lo que ocasionó grandes amarguras a don Pedro. Las condiciones en que se desarrollaba la enseñanza llegaron a ser muy poco favorables para poner en práctica sus brillantes ideas innovadoras en la didáctica de las matemáticas.

Recuerdo que yo mismo tuve allí clases del curso preuniversitario con 110 alumnos en el aula. La falta de medios, la excesiva reglamentación de las enseñanzas y la necesidad de «preparar» a los alumnos para las sucesivas «reválidas», hacían muy difícil una labor docente que quisiera ser innovadora y ejemplar.

La labor de don Pedro tampoco fue reconocida como merecía, ni por la Administración ni por el profesorado español de matemáticas en general, con algunas excepciones. Llegaron, no obstante noticias de sus hallazgos a las grandes figuras de la Didáctica Matemática en el mundo y pronto comenzó a intercambiar sus experiencias con el profesor belga W. Servais, con la italiana Emma Castelnuovo, con la francesa Lucienne Félix, el alemán F. Drenkhan y con tantos otros.

Especialmente surgió una gran amistad entre don Pedro y el profesor Caleb Gateño, que visitó España en 1955 para dar a conocer sus famosas *«regletas de color.* (o *material de Cuisenaire).* Venía de la Universidad de Londres, pero hablaba un perfecto español, aprendido en su infancia, como judío sefardita, con lejanos antepasados procedentes de Zaragoza. Era entonces secretario de la *«Comisión Internacional para el Estudio y la Mejora de la Enseñaza Matemática»* , creada cinco años antes por iniciativa suya, y pronto reconoció el gran valor de los trabajos de Puig Adam, por lo que apoyó calurosamente su propuesta de que la *11ª Reunión de esa Comisión* se celebrase en Madrid.

En 1957 tuvo lugar efectivamente esa Reunión bajo el título de *«El Material de la Enseñanza Matemática»,* coincidiendo con una brillante *«exposición de modelos y material didáctico matemático».* Ambos acontecimientos, de gran repercusión internacional, tuvieron su sede en el Instituto San Isidro, que confirmó así el prestigio que mantuvo en el pasado y que comenzaba a ser olvidado. A ellos asistieron, no sólo las grandes figuras citadas antes, sino otros muchos investigadores de gran renombre.

A falta de otros que lo hicieran, tuvo don Pedro que redactar él mismo las crónicas de la Reunión, con gran temor de aparecer como inmodesto, cuando objetivamente había que reconocer su casi exclusivo mérito tanto en la organización como en muchas de las aportaciones a la Reunión.

La descripción del originalísimo material expuesto en San Isidro, en gran parte creado por él, la recogió don Pedro en un libro que, con el título de *"El Material Didáctico Matemático Actual»*, fue publicado, con algún retraso, por la Revista *«Enseñanza Media»* del Ministerio de Educación Nacional.

En España, los dos acontecimientos de rango internacional que tuvieron lugar en San Isidro fueron acogidos, salvo escasas pero valiosas excepciones, con lamentable indiferencia, de la que don Pedro se quejaba amargamente. No por protagonismo, que siempre rehuyó, sino por lo que suponía de menosprecio para la Didáctica Matemática, para su Instituto y para la Enseñanza Media en general.

En contraste con esa situación, a partir de lo que se hizo en San Isidro, Puig Adam fue considerado en toda Europa como una de las principales figuras mundiales de la Didáctica Matemática,

Poco después don Pedro reunió sus principales aportaciones a la citada Reunión y Exposición aneja, con algunas de sus conferencias y trabajos anteriores, dando lugar a un maravilloso libro que con el título de *«La Matemática y su Enseñanza Actual»* se publicó en 1960, es decir, en el año de su fallecimiento, por lo que tan sólo llegó a ver sus pruebas de imprenta. Tampoco pudo ver publicado su innovador libro de *«Matemáticas para el Curso Preuniversitario»* que apareció ese año.

En *«La Matemática y su Enseñanza Actual»* podemos encontrar piezas tan valiosas como su conferencia sobre *«Lo Matemático y lo Belleza»*, la titulada *«Sobre la enseñanza eurística de la Matemática»* o la genial *«Lo concreto en la Enseñanza Matemática»* y también, sirviendo casi de testamento, su *«Decálogo* *de la Didáctica Matemática Media»* , que deberíamos tener presente siempre en nuestras clases,

La labor docente e innovadora de don Pedro se extendió a otros ámbitos, muy especialmente a la Escuela de Ingenieros Industriales, pero aquí he querido recordar sobre todo la desarrollada en el Instituto San Isidro, a la que se consagró con especial cariño, En toda la historia de este Instituto, Puig Adam constituye probablemente su capítulo más brillante.

Descubriendo un tesoro: Las circulares de Puig Adam

Covadonga Rodríguez-Moldes Rey
Departamento de Matemáticas, I.E.S. Mugardos.
Mugardos (A Coruña)
covadongares@gmail.com

Abstract

The reports sent by Puig Adam to the teachers while he acted as a mathematics advisor in Community Colleges, from 1956 until his death in 1960, are a teaching treasure that comes to light thanks to the legacy of teacher Asunción Rodriguez-Moldes.

Resumen

Las circulares enviadas por Puig Adam a los profesores durante la época en que fue asesor de Matemáticas en los Institutos Laborales, desde 1956 hasta su muerte en 1960, constituyen un tesoro didáctico que sale a la luz gracias al legado de la profesora Asunción Rodríguez-Moldes.

A la memoria de Asunción Rodríguez-Moldes,
que supo aplicar en su tarea docente
las enseñanzas de Puig Adam y
conservar y transmitir su legado.

Introducción

A finales del año 1955, Pedro Puig Adam es nombrado Asesor de Matemáticas para los Institutos Laborales. Y aunque dicho cargo no parezca estar a su nivel -no olvidemos que Puig Adam (Figura 1) era catedrático en el Instituto San Isidro de Madrid, catedrático de Cálculo en la Escuela de Ingenieros de Madrid, académico de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Además gozaba de un enorme prestigio como matemático, científico y docente- su compromiso con la mejora de la enseñanza de las matemáticas a todos los niveles y sus ideas sobre la formación del profesorado lo llevan a aceptar con ilusión el encargo del Director General de Enseñanza Laboral y a vivir los cuatro años más apasionantes de su vida, desde enero de 1956 hasta su repentino e inesperado fallecimiento en enero de 1960.

Figura 1

También en el año 1955, Asunción Rodríguez-Moldes (Figura 2), farmacéutica, química y maestra, ve cumplida la ilusión de su vida: ser profesora de Matemáticas. Tenía alrededor de cuarenta años y un prometedor futuro laboral como responsable de una farmacia, sin embargo, la posibilidad de ser profesora titular de Matemáticas en el Instituto Laboral de Ribadeo -villa costera situada en el norte de la provincia de Lugo, muy próxima a su asturiano pueblo natal, Castropol-era la ilusión de su vida y le llevaría a dejar el mundo de la farmacia y a aceptar con enorme ilusión el puesto que se le ofrece.

Aunque deberá prepararse intensamente pues no posee licenciatura en Matemáticas, antes llamada Ciencias Exactas, debido a que estos estudios no estaban implantados en la Universidad de Santiago de Compostela, lugar en el que vivía Asunción en su época de estudiante universitaria.

Figura 2

Y así sucede que Asunción se convierte en profesora de Matemáticas en Ribadeo, en donde a comienzos del año 1956 es feliz con sus clases, mientras Pedro Puig Adam diseña entusiasmado su plan para la mejora de la enseñanza de las Matemáticas a través de la formación del profesorado.

Para esta misión, Puig Adam decide ponerse en contacto con el profesorado de todos los Institutos Laborales y establecer una vía de comunicación directa con ellos. Esa vía no podía ser otra, en la época a la que nos estamos refiriendo, que el correo postal, en forma de circulares y cartas personales al profesorado.

Asunción será una de las destinatarias de esas circulares y las guardaría, junto con las cartas y otros documentos de esa época, con enorme cariño toda su larga vida como un valioso tesoro.

Se tratará en este artículo de mostrar lo que tan celosamente conservó Asunción, para compartir algunos de los tesoros didácticos que contiene este legado, limitándonos únicamente a las circulares y cartas correspondientes al curso 1955-1956 por no hacerlo demasiado extenso.

1. La primera circular

En enero de 1956 llega al Instituto Laboral de Ribadeo una carta dirigida a Asunción fechada el día 19 de ese mismo mes. Dentro, una circular de dos páginas escrita a máquina, reproducida con multicopista en color azul oscuro y repasada a mano con bolígrafo de color negro para corregir errores y hacer alguna anotación. La circular viene firmada por P Puig Adam y comienza así:

"Estimado compañero:

Encargado por el Director General de Enseñanza Laboral de una labor de Asesoramiento en lo que a enseñanza de las Matemáticas se refiere, mi primera providencia es la de tomar contacto con el profesorado todo de esta disciplina en los Institutos Laborales, a cuya disposición me pongo para las consultas que tengan a bien dirigirme en todo lo relativo a la mayor eficacia de su enseñanza"

A continuación ofrece la publicación en el Boletín Pedagógico de trabajos o ideas que *"tiendan a mejorar nuestra didáctica matemática y a hacer más agradable y comprensible nuestra disciplina a los alumnos que concurran a nuestros centros"*.

No oculta que todos sus esfuerzos irán encaminados a que la enseñanza adquiera carácter *"eminentemente activo y eurístico"*. Además, pide que se lea y critique el ***Decálogo de la didáctica matemática media*** que aparecerá en el número 3 del Boletín Pedagógico y que se oigan las conferencias que emitirá Radio Nacional de España, 3º programa (onda 292,5m. 1025 kilociclos), sobre Tendencias actuales de la Enseñanza de las Matemáticas, a saber:

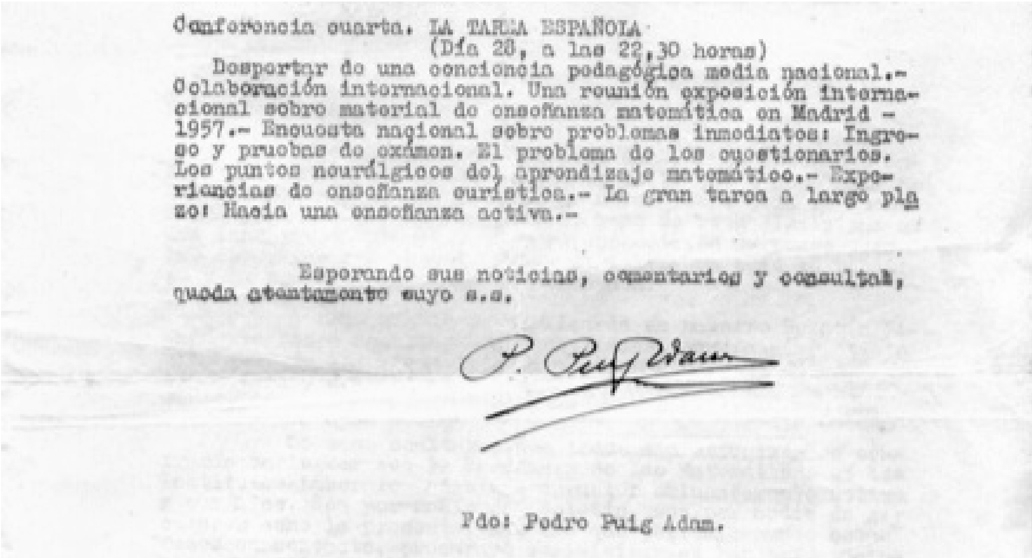
1ª conferencia: La evolución de las Matemáticas (Día 25, a las 22.30h)
2ª conferencia: La evolución de la didáctica (Día 26, a las 22.30h)
3ª conferencia: El momento didáctico matemático actual (Día 27, a las 22.30h)
4ª conferencia: La tarea española (Día 28, a las 22.30h).

De cada una de estas conferencias ofrece un pequeño resumen para que se conozca el contenido–ver en la imagen (Figura 3) el resumen de la cuarta-. En una nota añadida a mano en la circular indica que las conferencias son "breves".[1]

A esta circular responde Asunción con fecha 2 de febrero agradeciendo a Pedro Puig Adam su disponibilidad y lamentando no poder hacer crítica del Decálogo ni de los programas de radio porque el Boletín no le llegó y *"no se oye absolutamente nada Radio Nacional por esa onda"*, al mismo tiempo que se mantiene a la espera de recibir el Boletín y advierte a Puig Adam que es licenciada en

[1] Cuando analicé esta documentación por primera vez, investigué en el archivo sonoro de RNE y comprobé que allí disponían de alguna grabación de Puig Adam. Sería interesante intentar recuperarla y poder escuchar su voz hablando de matemáticas.

Ciencias Químicas y Farmacia por lo cual no posee la “*rigurosa especialización de los licenciados en Ciencias Exactas*”.



Conferencia cuarta. LA TAREA ESPAÑOLA
(Día 28, a las 22,30 horas)

Despertar de una conciencia pedagógica media nacional.- Colaboración internacional. Una reunión exposición internacional sobre material de enseñanza matemática en Madrid - 1957.- Encuesta nacional sobre problemas inmediatos: Ingreso y pruebas de examen. El problema de los cuestionarios. Los puntos neurálgicos del aprendizaje matemático.- Experiencias de enseñanza eurística.- La gran tarea a largo plazo: Hacia una enseñanza activa.-

Esperando sus noticias, comentarios y consultas, queda atentamente suyo s.s.

P. Puig Adam

Fdo: Pedro Puig Adam.

Figura 3

2. La segunda circular

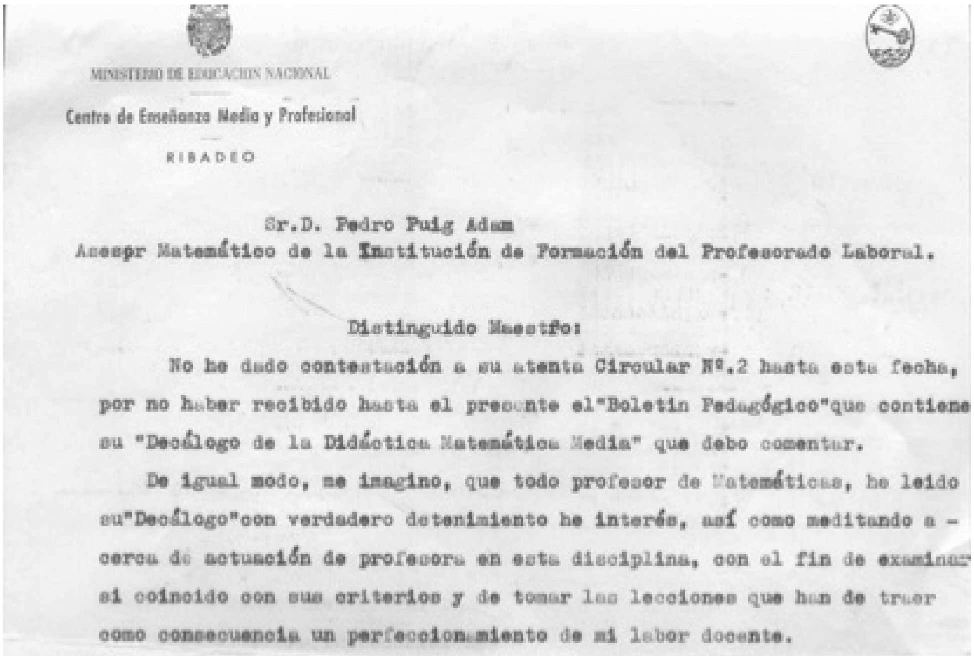
No aparece la fecha en la misma, aunque debe corresponder al mes de febrero de 1956. Comienza la misiva agradeciendo la acogida a los profesores que contestaron a la circular nº 1 y diciendo que las conferencias se publicarán en forma de artículos en la Revista de Educación Nacional pues parece que la mayoría del profesorado no pudo oírlas.

Dice que entrega, para que sean publicadas en el Boletín nº 5, unas clases experimentales realizadas en el Instituto San Isidro con los dos primeros cursos del bachillerato ensayando los métodos eurísticos con solo 12 alumnos pero cree que pueden extenderse a 25 o 30 “*adaptando convenientemente las modalidades individual, grupo pequeño y diálogo general, modalidades que conviene alternar para dar amenidad y variedad a las clases*”; y continúa *“A tales descripciones seguirán otras, si merecen la atención de Vds.”*

Para animar a que le envíen experiencias similares dice que están escritas de forma sencilla “*respetando la redacción tal como resultó a vuela pluma al consignar las experiencias en mi diario de clase. De este modo no les resto esponta-*

neidad y acaso se animen Vds. a enviarnos resúmenes de experiencias análogas extraídas de sus respectivos diarios"

Y termina esta segunda circular con un extraño párrafo que creo tiene como objetivo animar al profesorado a experimentar y a contar lo experimentado sin temor a hacer el ridículo en lo que constituye uno de los tesoros que encierran las circulares : *"**En la práctica efectiva de la enseñanza los pequeños detalles suelen tener a veces tanto interés como puedan poseerlo las ideas didácticas generales**. No les cohíba pues una preocupación de insignificancia."*



MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL

Centro de Enseñanza Media y Profesional

RIBADEO

Sr.D. Pedro Puig Adam
Asespr Matemático de la Institución de Formación del Profesorado Laboral.

Distinguido Maestfo:

No he dado contestación a su atenta Circular Nº.2 hasta esta fecha, por no haber recibido hasta el presente el"Boletin Pedagógico"que contiene su "Decálogo de la Didáctica Matemática Media" que debo comentar.

De igual modo, me imagino, que todo profesor de Matemáticas, he leido su"Decálogo"con verdadero detenimiento he interés, así como meditando a - cerca de actuación de profesora en esta disciplina, con el fin de examinar si coincido con sus criterios y de tomar las lecciones que han de traer como consecuencia un perfeccionamiento de mi labor docente.

Figura 4

Esta circular muestra el enorme interés de Puig Adam por acercarse al profesorado desde la sencillez y la humildad. Un esfuerzo que recibiría pronto recompensa pues Asunción, entre otros muchos, contesta a la circular (Figura 4) con una larga carta en la que le expone sus reflexiones después de haber leído en el Boletín el Decálogo: *"He leído su Decálogo con verdadero detenimiento e interés así como meditado acerca de mi actuación como profesora en esta disciplina, con el fin de examinar si coincido con sus criterios y de tomar lecciones que han de traer como consecuencia un perfeccionamiento de mi labor docente"* y continúa: *"....tales normas no deben permanecer en el olvido de ningún profesor de Matemáticas, que ha de saber graduarlas y aplicarlas parcial y completamente según las circunstancias lo requieran"*.

En uno de los comentario sobre las normas del Decálogo, Asunción escribe: *"... suele despertar gran interés entre estudiantes el enfrentar a unos con otros, pidiéndoles la opinión acerca de lo escrito o expuesto por el compañero....."*

Quedémonos con este fragmento.

Después de comentar el Decálogo, lo resume de la forma siguiente: *"Se me ocurre que el Decálogo puede encerrarse en dos normas generales que deben ser siempre el ideal de todo profesor:*

Enfocar las clases de tal modo que el niño vaya a ellas y estudie por placer y que en sus actividades supere en gran parte a la memoria, el raciocinio y sus aplicaciones a los problemas de la vida real".

En este punto quiero destacar la valentía de Asunción asumiendo retos complicados –dar clase de Matemáticas sin poseer la licenciatura– en una época y en una actividad en la que predominaba el sexo masculino (Figura 5) y el rol habitual de la mujer no era el que ella había elegido ella.

Figura 5

Asunción termina la carta pidiendo consejo a Puig Adam: *"Dudo si abuso de su amabilidad consultándole acerca de las conferencias que como profesora de Laborales debemos dar. Me veo en la necesidad de hacerlo así ya que como se trata de un Instituto que comienza a funcionar, carecemos de libros de consulta. Encontraba interesante el tema relacionado con la aplicación de las máquinas electrónicas al cálculo matemático siempre que pudiese ponerme al alcance del nivel cultural medio de un pueblo; de igual modo acerca de Einstein y su teoría; dudo también si resultaría pesada la que tratase de los distintos tipos de medidas y fenómenos, la cual podría titular* ***El hombre mide el Universo*** *como la exposición organizada con este objeto por la UNESCO en Madrid y que comenta el Boletín Pedagógico nº 2"*

La carta recibe la contestación de Puig Adam en otra fechada el 26 de marzo que comienza así: *"Muy agradecido a su atenta carta y comentario recojo los puntos: me parece muy bien que enfrente Vd. en forma de diálogo a unos alumnos con otros. Esta norma le dará aún mejores resultados en los cursos superiores en los que empiezan a desarrollarse las facultades lógicas"* y a continuación, Puig Adam nos regala otro tesoro didáctico:

"La vía natural para la consecución del rigor en la expresión es, precisamente el diálogo y la comunicación. ***Nos esforzamos por ser precisos cuando notamos que la inexactitud de nuestro leguaje provoca interpretaciones ambiguas*** *y en este sentido el reflejo de estas interpretaciones entre los alumnos es el mejor aliciente para su auto corrección."*

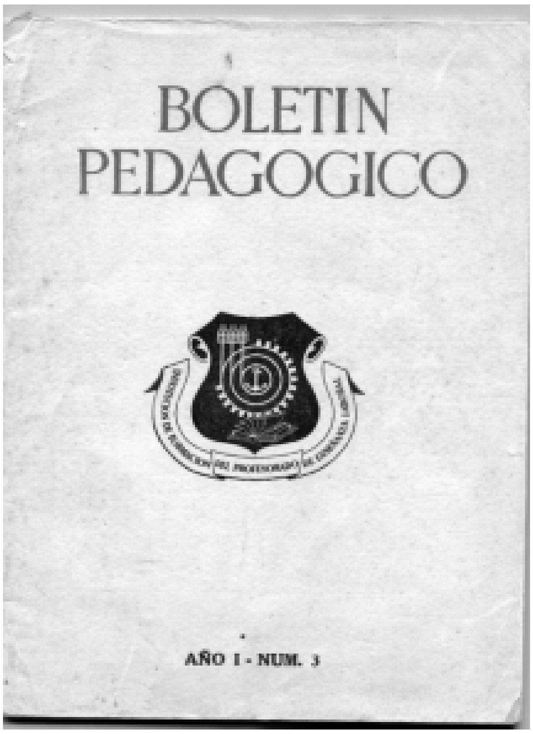
Continúa: *"En conexión con lo anterior, me parece muy bien que aproveche toda oportunidad para enlazar la matemática con el idioma.* ***Ninguna disciplina exige del lenguaje como la nuestra la concisión y exactitud****"*.

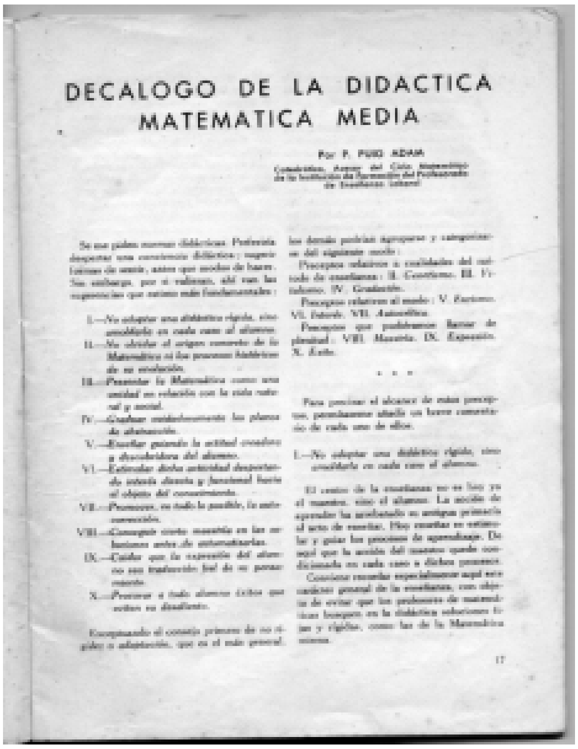
Y remata su escrito con el consejo pedido: *"Me parece bien el tema* ***El hombre mide el Universo*** *que había Vd. pensado como motivo de conferencia. La UNESCO publicó un librito simultáneo a la exposición con datos suficientes para revestirlo en forma de agradable conferencia. También hallará Vd. numerosos temas de conferencias amenas en el libro de Lancelot Hogben* ***La matemática en la vida del hombre*** *de la editorial Iberia- Joaquín Gil – Barcelona"*.

En este epígrafe podemos comprobar que la relación profesor-alumna ya está establecida y esto permitirá a Asunción mejorar su técnica docente y adquirir la seguridad necesaria apoyada en los sabios consejos de Puig Adam.

3. El Decálogo de la Didáctica Matemática Media

Se distribuye entre el profesorado el mes de febrero de 1956, en el número 3 del año 1 del *Boletín Pedagógico de la Institución de Formación del Profesorado Laboral* (Figura 6).





DECALOGO DE LA DIDACTICA MATEMATICA MEDIA

Por P. PUIG ADAM

Figura 6

En la página 17 aparece un artículo titulado "Decálogo de la Didáctica Matemática Media" escrito por P. Puig Adam que comienza :*"Se me piden normas didácticas. Preferiría despertar una conciencia didáctica: sugerir formas de sentir, antes que modos de hacer. Sin embargo, por si valieran, ahí van las sugerencias que estimo más fundamentales:*

I.- No adoptar una didáctica rígida, sino amoldarla en cada caso al alumno.

II.- No olvidar el origen concreto de la Matemática ni los procesos históricos de su evolución.

III.- Presentar la Matemática como una unidad en relación con la vida natural y social.

IV.- Guardar cuidadosamente los planos de abstracción.

V.- Enseñar guiando la actividad creadora y descubridora del alumno.

VI.- Estimular dicha actividad despertando interés directo y funcional hacia el objeto del conocimiento.

VII.- Promover en todo lo posible la autocorrección.

VIII.- Conseguir cierta maestría en las soluciones antes de automatizarlas.

IX.- Cuidar que la expresión del alumno sea traducción fiel de su pensamiento.

X.- Procurar a todo alumno éxitos que eviten su desaliento.

A pesar de que cada norma merecería un estudio detallado y que el propio Puig Adam le añade un comentario a cada una, no nos detendremos en ellos pues no es el objeto de este artículo.

Únicamente destacaremos la siguiente precisión que escribe Puig Adam *"Exceptuando el primer consejo de no rigidez o adaptación que es el más general, los demás podrían agruparse o categorizarse del siguiente modo:*

- *Preceptos relativos a cualidades del método de enseñanza:*

  II: Genetismo, III: Vitalismo, IV: Gradación

- *Preceptos relativos al modo:*

  V: Eurismo, VI: Interés, VII: Autocrítica

- *Preceptos que podríamos llamar de plenitud:*

  VIII: Maestría, IX: Expresión, X: Éxito"

Es posible que quienes conozcan el *Decálogo* se hayan dado cuenta de que el que aquí se cita no es exactamente el mismo que circula en libros y artículos sobre el tema. Hay una diferencia que descubriremos pronto, pero este es el primer Decálogo publicaría Puig Adam y que marcaría la senda a seguir a todos aquellos profesores y profesoras de Matemáticas preocupados por su mejora como docentes.

4. La tercera circular

De nuevo llega una circular al Instituto laboral de Ribadeo dirigida a Asunción Rodríguez-Moldes. No se aprecia en ella la fecha de envío pero corresponde al tercer trimestre del curso, es decir, los meses de abril, mayo o junio de 1956 y es por tanto la última del curso.

Comienza Puig Adam diciendo que la circular tiene por objeto agradecer la atención prestada al Decálogo y escribe: *"Los comentarios recibidos, algunos de gran calidad, denotan una preocupación latente en todos por el problema didáctico y el deseo vehemente de mejora, prometedor de una gran labor de conjunto"*

A continuación, en cinco apartados, transcribe párrafos de respuestas a preguntas que le han realizado para que las conozcan otros compañeros que "*no se hayan atrevido a realizarlas"*

El primer párrafo se refiere al tiempo que se tarda en aplicar los métodos eurísticos, una preocupación muy común cuando se presenta algún cambio de metodología. Puig Adam contesta: *". ..Los métodos eurísticos requieren algo más de tiempo que los métodos explicativos tradicionales, pero no en la proporción que en un principio pueda parecer. Aunque sean lentos en las iniciaciones, el tiempo que al principio parece perdido, es recuperado luego por la seguridad que el alumno adquiere en lo que ha asimilado más sólidamente.* ***De nada sirve acelerar los procesos si luego resulta nula o casi nula la cosecha****".* Sabio consejo.

El segundo apartado contiene otro pequeño tesoro: ***"...Cuando los niños no nos escuchan es porque no hemos tenido la habilidad de interesarles.*** *La moderna enseñanza activa se propone ante todo conquistar el interés y la afectividad del niño".*

El tercer apartado reproduce la respuesta a la pregunta de Asunción sobre la utilización del diálogo entre los alumnos que ya hemos reproducido.

En el cuarto apartado escribe: *"Algún compañero propone cada mes un tema de clase experimental. Me parece excelente idea"* y propone para lo que queda de curso el siguiente: *¿Cómo iniciar en forma atractiva y a ser posible eurística el concepto de proporcionalidad en los alumnos de 2º curso?.*

Y para terminar esta circular, el 5º apartado que reproducimos en su totalidad respetando las mayúsculas que aparecen en el texto: "*Finalmente voy a criticarme yo mismo el Decálogo: creo que olvidé en él un carácter fundamental que ha de marcar la postura del profesor moderno, **la observación constante de sus alumnos**. Aunque tal observación va implícitamente contenida en varios puntos, especialmente el primero; habría sido mejor enunciarla explícitamente completando así el primer punto: **no adoptar una didáctica rígida sino amoldarla en cada caso al alumno observándole constantemente.***

*En relación con esto aconsejaba a uno de nuestros compañeros y aconsejo también a los demás estampar en la portada del diario de clase este aforismo de compromiso: **este no es solo mi diario de clase sino también mi diario de experiencias. No he de olvidarme de observar constantemente a mis alumnos para penetrar en sus pensamientos y en sus consecuencias**"*

Ahora sí, el decálogo está completo y tal como luego aparece en otros escritos de Puig Adam, con las dos palabras que añade a la primera norma: ***observándole constantemente.*** Por lo que esta primera regla pasa a ser:

I.- No adoptar una didáctica rígida, sino amoldarla en cada caso al alumno observándole constantemente.

5. Para terminar

Hemos repasado las circulares que Puig Adam dirigió al profesorado de matemáticas en los institutos laborales durante el curso 1955-56, en las que se ve a un maestro de maestros en plena acción, entregado a la tarea de formar desde el convencimiento con humildad y sencillez.

También hemos podido percibir la ilusión con la que Asunción recibía las enseñanzas y trataba de ponerlas en práctica consultando sus dudas didácticas y recibiendo las respuestas del profesor.

Pero aquí no acaba esta historia sino que la relación Pedro Puig Adam-Asunción Rodríguez-Moldes se mantendrá hasta el fallecimiento de este. Habrá, entre otras, más circulares conteniendo frases y enseñanzas magistrales de Puig Adam y aportaciones muy interesantes de Asunción, habrá nuevas experiencias conjuntas (como los cursillos en Madrid descritos con detalle por Asunción), exposiciones de material, etc. Hasta ese funesto mes de enero de 1960 en el que el maestro nos dejó, pero, como se había indicado con anterioridad, en este artículo nos limitamos únicamente a lo acontecido en curso 1955-56.

Una lección modélica de D. Pedro Puig Adam: algoritmo manipulativo para la raíz cuadrada

E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano
Departamento de Algebra, Facultad de Educación
Universidad Complutense de Madrid
{roanes,eroanes}@mat.ucm.es

Resumen

We have considered appropriate to include in this issue number 100 devoted to Prof. Puig Adam one of the most representative lessons of the heuristic method that he advocated. The chosen lesson treats the manipulations leading to the discovery of the operative structure of the square root, with the help of some appropriate didactic material. For the sake of brevity, we have described it in an algorithmic way. In this article we pay special attention to comment the didactical materials used in the successive courses where we have taught this lesson, including a computer simulation that we developed ad hoc.

Introducción

En este número 100 de nuestro Boletín dedicado a D. Pedro Puig Adam, nos ha parecido oportuno incluir alguna de las lecciones sobre método heurístico y material didáctico contenidas en sus célebres libros [3] y [5].

Entre ellas, hemos elegido la relativa a la estructura operatoria de la raíz cuadrada entera, publicada inicialmente en 1932, en la Revista de *Matemática Elemental* de la Junta de Ampliación de Estudios, y reproducida en [5], páginas 322-327.

Suponemos que él debía estar especialmente satisfecho de esta lección, ya que la eligió para su célebre ponencia en la reunión para el mejoramiento de la enseñanza de la matemática, promovida por la UNESCO y celebrada en Ginebra en julio de 1956. A nosotros nos cautivó esta lección de Puig Adam, como una de las mas representativas del método heurístico propugnado por Puig Adam.

En este artículo recordamos el método heurístico utilizado por Puig Adam sobre manipulaciones conducentes al descubrimiento de la estructura operatoria de la raíz cuadrada entera, describiéndolo brevemente en términos algorítmicos. Hemos prestado especial atención a comentar los materiales didácticos que hemos utilizado en sucesivos cursos para experimentar aquellas manipulaciones con nuestros alumnos, incluida una simulación informática que desarrollamos al efecto. Finalmente, terminamos recordando algunas actividades menos conocidas, de entre las muchas desarrolladas por el genial Puig Adam.

1. Algoritmo manipulativo para la raíz cuadrada

El fundamento de la estructura operatoria de la raíz cuadrada entera era ya conocido en las culturas clásicas griega y china. El algoritmo es fácil de aplicar, pero la demostración de su validez es laboriosa y tediosa de exponer, lo que posiblemente motivó a Puig Adam a idear un algoritmo manipulativo que, utilizando un sencillo material didáctico, conduce a los jóvenes alumnos a descubrir jugando un algoritmo de cálculo de la raíz.

Se dispone para ello de un material didáctico consistente en una caja que contiene tres tipos de piezas: 1) cuadraditos, representando *unidades*; 2) tiras de diez de estos cuadraditos, representando *decenas*; 3) placas cuadradas consistentes en diez de esas tiras, representando *centenas*.

Por brevedad, lo desarrollaremos sobre un ejemplo concreto, el mismo descrito en [5], la raíz cuadrada entera de 674. Por tanto, inicialmente se han de sacar de la caja: 6 placas-centenas, 7 tiras-decenas y 4 cuadraditos-unidades. Nuestro objetivo es construir con esas piezas un cuadrado de lado lo mayor posible, estando permitido realizar dos tipos de cambios con la caja: una placa-centena por 10 tiras-decenas; una tira-decena por 10 cuadraditos-unidades.

Protocolo de manipulaciones conducentes a calcular la raíz del nº 674

1. Sacar de la caja 6 placas-centenas, 7 tiras-decenas y 4 cuadraditos-unidades, representando el número 674.

2. Utilizando sólo esas placas-centenas, formar un cuadrado de lado lo mayor posible; se forma así un *cuadrado inicial* de lado 2 decenas, denotado **C**, sobrando: 2 centenas, 7 decenas y 4 unidades (Figura 1).

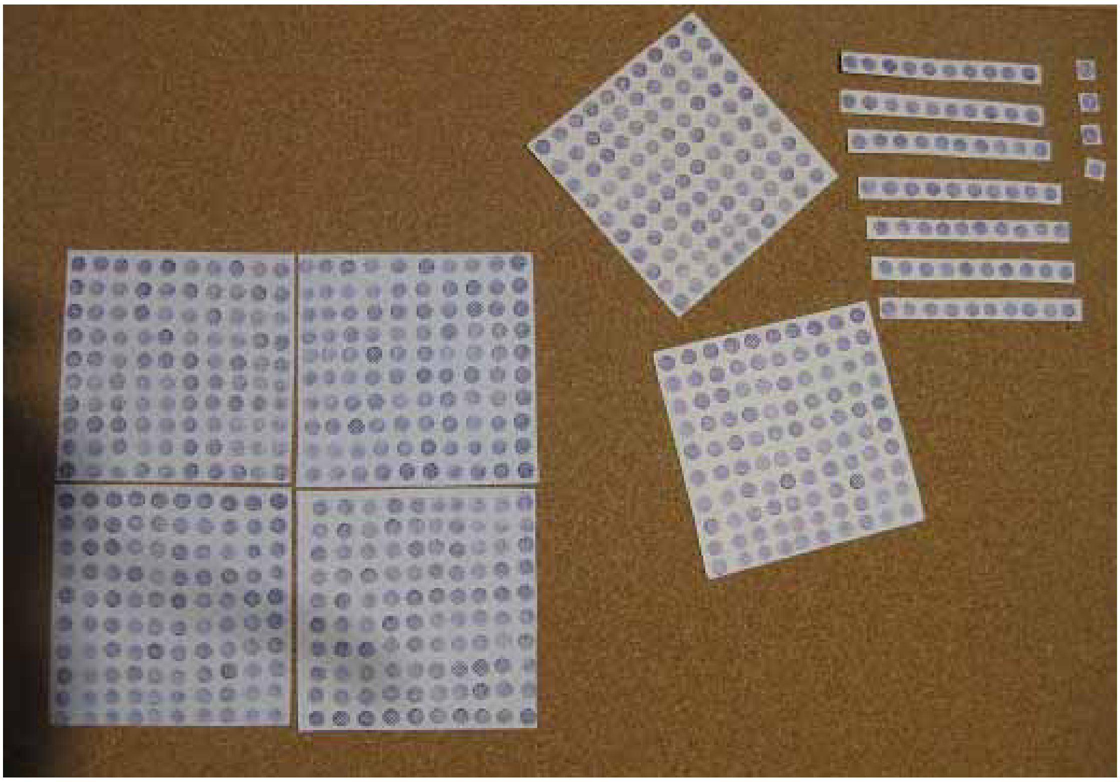


Figura 1: *Cuadrado mayor posible formado con placas-centenas.*

3. Cambiar en la caja las 2 placas-centenas sobrantes por tiras-decenas; de ese modo, se conserva **C** y sobran 27 tiras-decenas y 4 cuadraditos-unidades.

4. Elegir dos lados consecutivos del cuadrado **C** (el derecho y el superior, por ejemplo), para realizar sobre ambos lados la acción de *orlar* esos dos lados, consistente en colocar a su lado una línea de tiras-decenas; esa acción de orlar dichos lados se ha de repetir, mientras haya suficientes tiras-decenas; se llega así a formar un *casi-cuadrado* de lado 26 (Figura 2), que hemos llamado así por tener un hueco cuadrado, **H**, de lado 6 en su vértice superior derecho, sobrando 3 tiras-decenas y cuatro unidades.

5. Como las 3 decenas y 4 unidades sobrantes no son suficientes para tapar el hueco **H**, deshacemos la última acción de *orlar* ejecutada; se llega así a tener un casi-cuadrado de lado 25, con un hueco cuadrado, **H'**, de lado 5 en su vértice superior derecho, sobrando 3+4 tiras-decenas y 4 unidades.

Figura 2: *Casi-cuadrado formado con placas-centenas y tiras-decenas.*

6. Cambiar en la caja 3 de las tiras-decenas sobrantes por 30 unidades; se conserva así el casi-cuadrado de lado 25, sobrando 4 tiras-decenas y 30+4 unidades.

7. Tapar el hueco **H'** con 25 de las unidades sobrantes, para llegar así a completar el cuadrado de lado 25 (Figura 3), sobrando 4 tiras-decenas y 34-25=9 unidades.

8. Se llega de este modo a concluir, de modo empírico, que la raiz cuadrada entera de 674 es 25 y su resto 49.

Unos cuantos de ejercicios similares por este método empírico de completación de cuadrado hacen pronto llegar a los alumnos a poder prescindir del material manipulable y descubrir por sí mismos la regla operatoria de la raiz cuadrada entera.

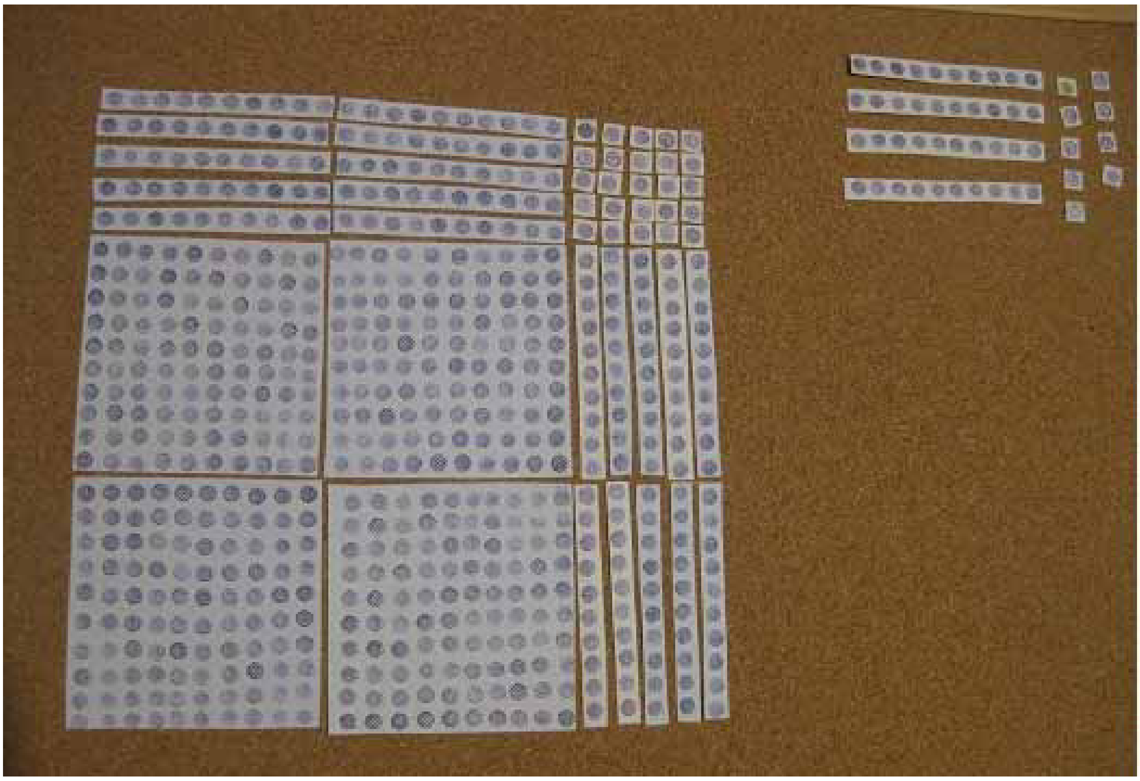


Figura 3: *Cuadrado de lado máximo formado a partir de 674.*

En nuestro tiempo, en que disponemos de calculadoras y computadoras, tiene muy poco interés utilitario llegar a calcular con rapidez raices cuadradas laboriosas, pero si tiene interés formativo llegar a descubrir por sí mismo su regla operatoria.

Como repetidamente decía Puig Adam, una vez mas adelantándose a su tiempo, es mucho mas interesante motivar a los alumnos induciéndoles a conseguir que redescubran por sí mismos un pequeño paso adelante, antes que conseguir hacerles memorizar muchos métodos matemáticos (véase su famoso “Decálogo”, contenido en [5]).

2. Sobre el material didáctico utilizado

Este tipo de manipulaciones lo mostraba Puig Adam con placas-centenas y tiras-decenas de broches automáticos (adquiribles antiguamente en mercerías).

Nuestros alumnos comenzaron realizando estas experiencias con un material similar al de los broches, que elaboraban con cartulinas cortadas en placas cuadradas y tiras sobre las que se grababan las unidades con un sello de caucho conteniendo una pelotita de tenis, como aparece en las figuras de la Sección anterior. Por ser aburrida su preparación, esta se abreviaba elaborando una única colección, para después fotocopiarla.

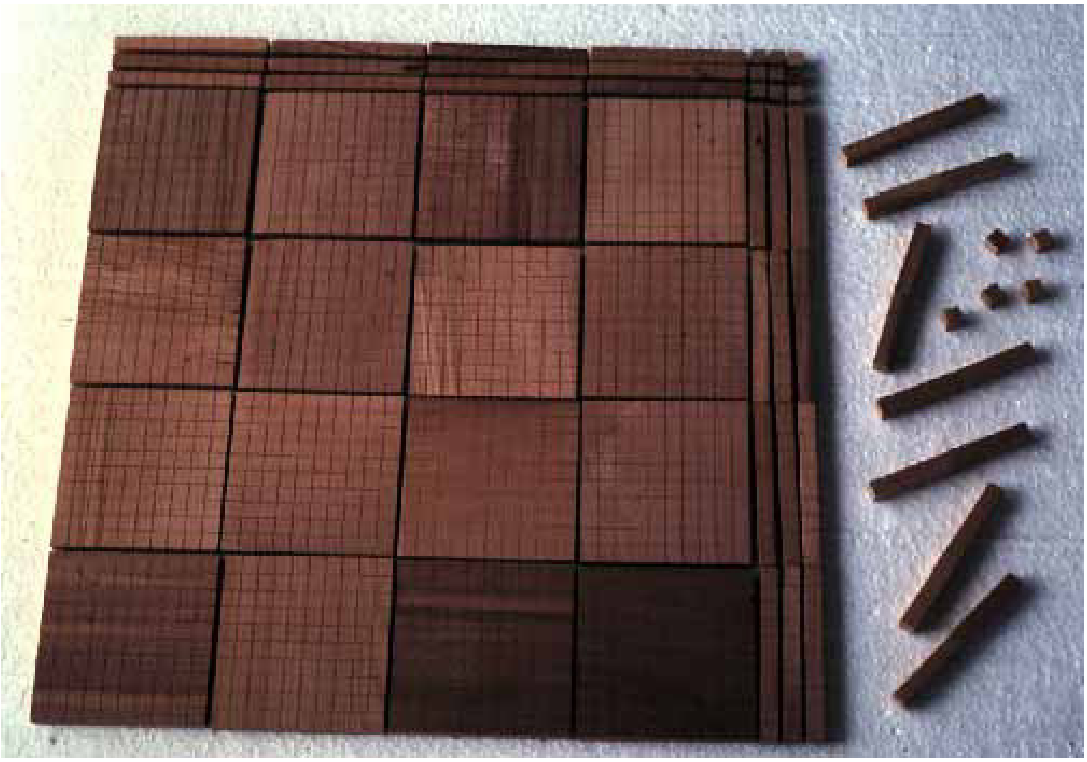


Figura 4: *Generación del cuadrado de lado máximo, para la raíz de 1924.*

Mucho mas cómodo es realizar estas experiencias aprovechando los bloques multibase de Dienes, que además incluyen cubos de arista 10 unidades para representar unidades de millar, que se han de descomponer en 10 placas-centenas, antes de comenzar el proceso de completación de cuadrado, como aparece en la Figura 4, para el caso de la raíz del n^o 1924. Notemos que este material se popularizó con posterioridad al fallecimiento de Puig Adam.

Los bloques multibase de Dienes permiten además calcular raíces cuadradas en sistemas de numeración en otras bases distintas de la decimal y pueden ser además utilizados para descubrir la regla operatoria de la raíz cúbica, vía completación de cubo (en vez de completación de cuadrado).

Con LEGO Digital.png

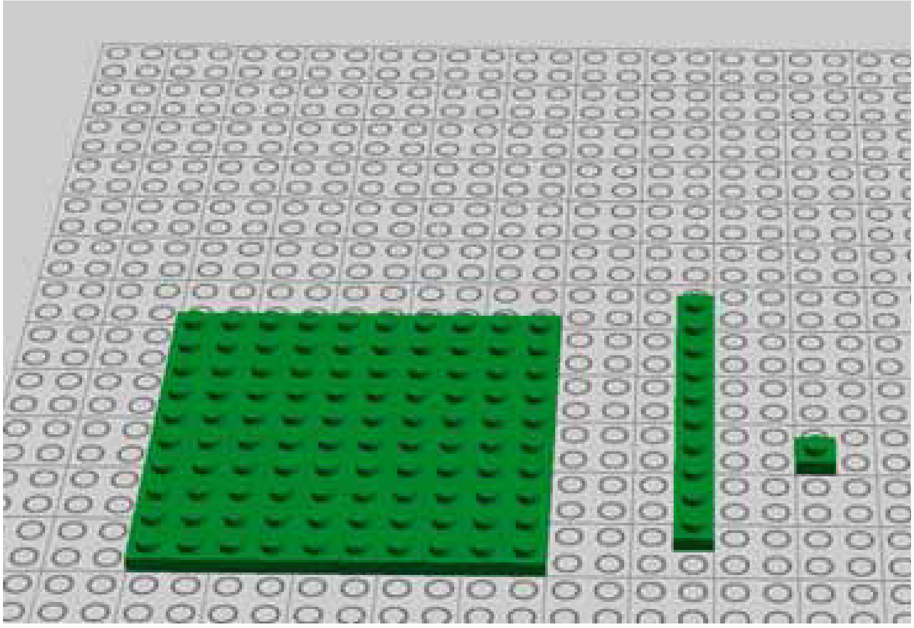


Figura 5: *Piezas centenas, decenas y unidades con LEGO Digital Designer.*

Para alumnos que usen ordenador, otro posible material apropiado para ejecutar estas experiencias es el que ofrecen algunas de entre las múltiples piezas que ofrece el *LEGO Digital Designer, v 4.3* (Figura 5).

Pero, aun disponiendo de cualquiera de los materiales didácticos mencionados, el proceso manipulativo de completación de cuadrado para descubrir la raíz cuadrada entera, descrito en la seción anterior, es bastante lento de ejecutar, por lo que en su día optamos finalmente por elaborar un programa informático que permitiera visualizar y manipular cómodamente el proceso descrito de completación de cuadrado conducente a descubrir la regla operatoria de la raíz.

3. Simulación informática de la raíz cuadrada

La dificultad de disponer de un material didáctico apropiado para que todos los alumnos de la clase pudieran realizar simultáneamente las manipulaciones conducentes al descubrimiento de la regla operatoria de la raiz cuadrada entera nos indujeron a desarrollar una simulación informática de este proceso.

La simulación inicial que elaboramos en Turbo-Pascal ya fue dada a conocer en el nº 30 de nuestro Boletín en 1992 [8] (agotado) y posteriormente (1995) incluida en el soporte magnético adjunto a nuestro libro [9]. Nos limitaremos aquí a hacer una breve descripción de su funcionamiento.

Figura 6: *Simulación de la raíz entera del número 5869.*

El programa comienza a ejecutarse invitando al ususario a escribir un número natural de menos de cinco cifras, por ejemplo 5869. El ususario decide si desea, o no, simulación gráfica del proceso paso a paso, o sólo obtener la raíz entera y el resto. En caso afirmativo representa (Figura 6) las 9 unidades del número elegido mediante puntos, las 6 decenas mediante tiras delgadas, las 8 centenas mediante mediante cuadrados y los 5 millares mediante tiras gruesas (descomponibles en diez cuadrados).

El programa permite elegir el tiempo de *Retardo en segundos* que debe emplear en realizar cada paso de la ejecución.

Todas los objetos representativos del número elegido, 5859, esto es, los puntos-unidades, tiras-decenas, cuadrados-centenas y tiras gruesas-centenas aparecen en color azul en la parte superior de la pantalla gráfica.

El proceso de simulación comienza descomponiendo cada unidad de millar en sus diez centenas, como muestra la Figura 7.

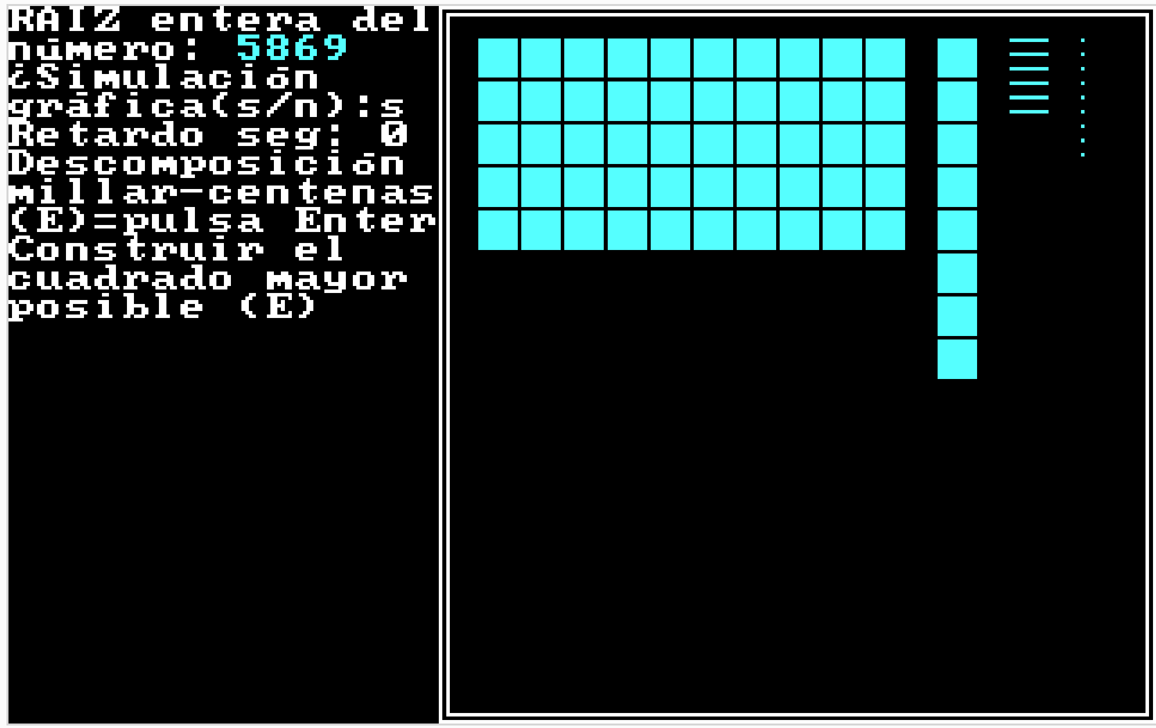


Figura 7: *Descomposición de cada millar en diez centenas.*

Se trata a continuación de formar un cuadrado lo mayor posible utilizando todas las placas-centenas existentes (las 5×10 procedentes de descomponer las tiras gruesas-centenas, junto con las 8 existentes inicialmente).

Este proceso se realiza instantáneamente, en caso de haber elegido tiempo de *Retardo* nulo, pero si dicho tiempo se elige positivo, entonces el proceso se realiza paso a paso, desapareciendo cada cuadrado-centena azul de la parte superior de la pantalla gráfica a la vez que aparece en color rosa en el cuadrado que se va generando en parte inferior izquierda de la pantalla gráfica.

Al concluir este proceso (Figura 8) se ha conseguido llegar a generar un cuadrado rosa de lado 7 decenas y han sobrado 9 placas-centenas azules (insuficientes para continuar el proceso de orlar el cuadrado rosa).

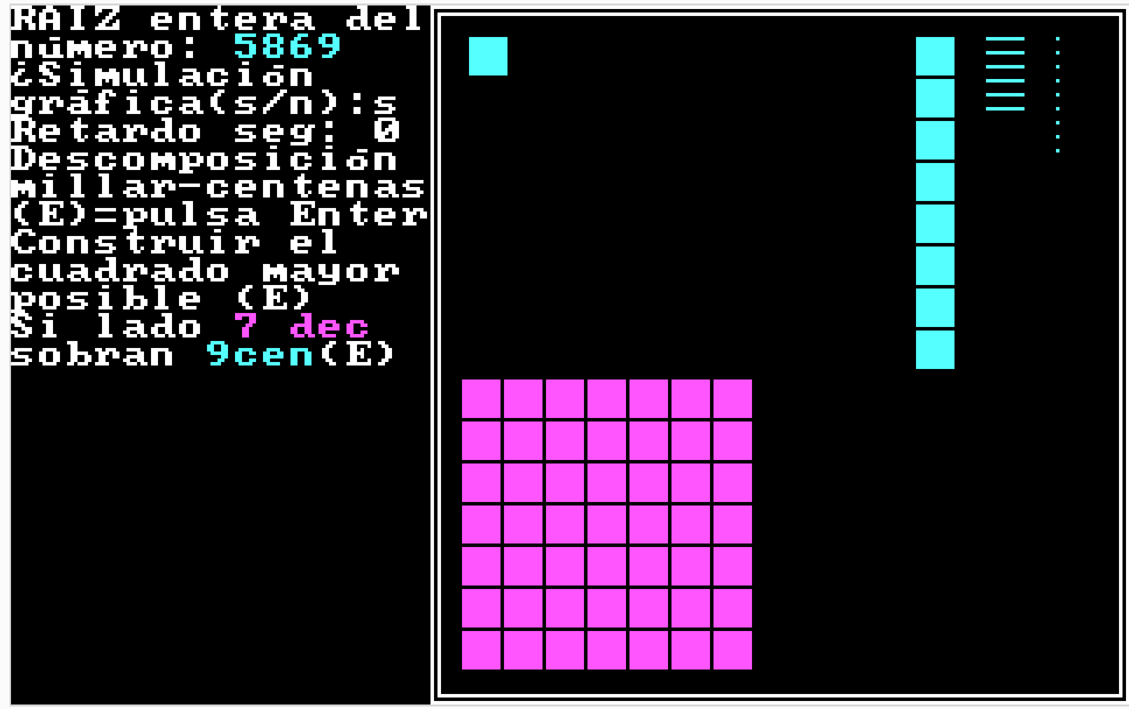


Figura 8: *Mayor cuadrado mayor que puede ser generado con cuadrados-centenas.*

A continuación se trata de aumentar el lado del cuadrado rosa, utilizando tiras-decenas azules. Para ello, se han de descomponer las placas-centenas azules sobrantes en tiras-decenas, en número suficiente para poder orlar el cuadrado rosa, de modo que este llegue a ser lo mayor posible. Entonces las tiras-decenas azules se van colocan orlando los lados derecho y superior del cuadrado rosa, en un proceso ya descrito en la sección anterior.

Este proceso se realiza instantáneamente, en caso de haber elegido tiempo de *Retardo* nulo, pero si dicho tiempo se elige positivo, entonces el proceso se realiza paso a paso, desapareciendo cada tira-decena azul de la parte superior de la pantalla gráfica a la vez que aparece en color rosa orlando el cuadrado que se va generando en parte inferior izquierda de la pantalla gráfica.

Al concluir este proceso (Figura 9) se ha conseguido llegar a generar un cuadrado rosa de lado 76 y han sobrado 9 tiras-decenas y 3 unidades azules.

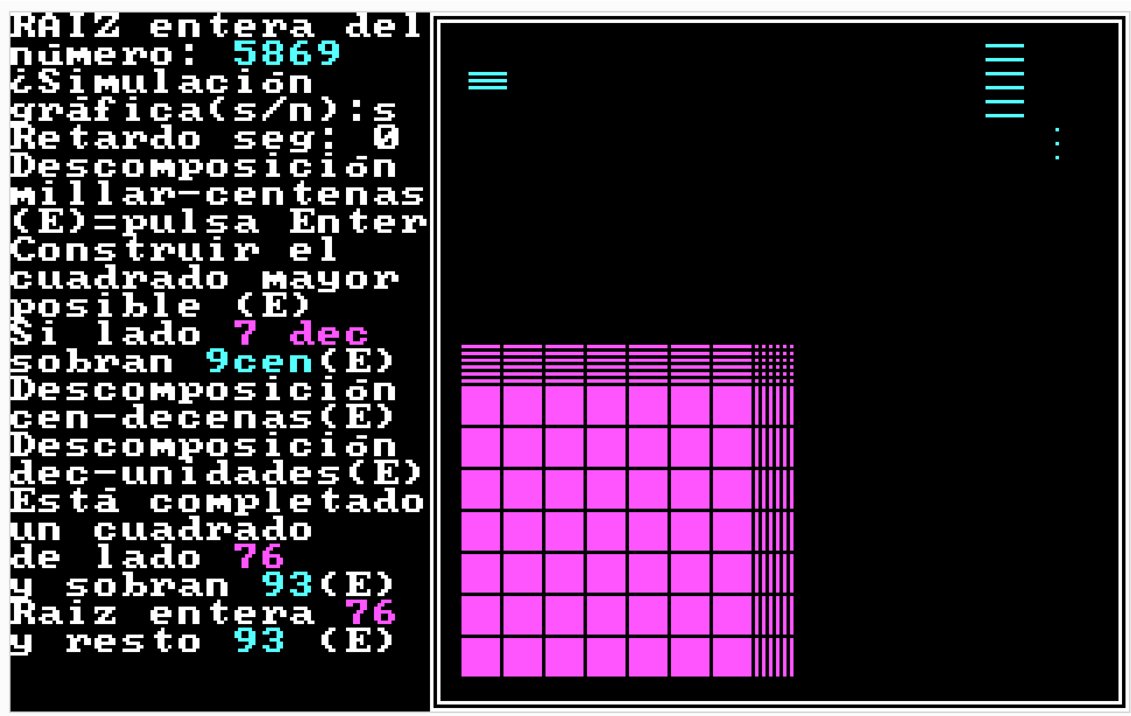


Figura 9: *La raíz entera ha resultado ser 76 y el resto 93.*

4. Consideraciones finales

Pensando en los lectores mas jóvenes, no queremos concluir este artículo sin recordar que D. Pedro Puig Adam no sólo destacó en Didáctica de la Matemática, entendida como una parte de la matemática, esto es, en lo que durante bastante tiempo se denominó *Metodología de la Matemática*, de la que era Profesor en la Sección de Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Madrid. Desarrolló otras múltiples actividades.

Ante todo, recordemos que era Ingeniero Superior y Matemático, por lo que muchos de sus numerosos artículos oscilaron entre la Matemática Pura y la Aplicada. Su tesis doctoral versó sobre ciertos problemas de Relatividad Restringida, algo completamente novedoso en los años 20.

Citemos algunas de las publicaciones mas conocidas. En colaboración con Julio Rey Pastor escribió las colecciones completas de los textos de Bachillerato de los Planes de Estudios de los años 1934, 1938, 1954 y 1957. Sus textos de Geometría Métrica incluían una axiomática original, basada en la de Hilbert, pero incorporando unos axiomas de movimientos que la hacían mucho mas práctica. Sus textos de Cálculo Integral y Ecuaciones Diferenciales fueron utilizados por muchas generaciones de estudiantes de Facultades de Ciencias y de Ingenierías.

Y sobre todo, entre los docentes, es famoso su "Decálogo" publicado en [2], reproducido en [5] y comentado ampliamente en [7].

Se interesó por muchos problemas matemáticos aparecidos en la técnica, siendo célebre al titulado *Sobre la estabilidad del movimiento de las palas del autogiro*, en que resolvío este problema matemático que se presentó a D. Juan de la Cierva, el inventor del autogiro. (Aparece resumido en la página 120 del texto de Ecuaciones Direnciales de Puig Adam, en la edición de 1955).

Fue miembro de número de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales desde el año 1950 hasta su prematuro fallecimiento en 1960 y en su corta vida tuvo tiempo de componer música, existiendo un LP publicado en España por Fidias en 1966, conteniendo un Recital de piano de Pedro de Lerma con cuatro partituras, cuyos autores son Schumann, Debussy, Beigbeder y Puig Adam (Los que eran estudiantes en los años 50 en la Escuela de Ingenieros Industriales de Madrid recuerdan los acordes de piano que se escuchaban en los pasillos de la Escuela cuando D. Pedro terminaba sus clases).

Cuando falleció en enero de 1960 una colección de eminentes profesores de matemática (interesados en su enseñanza) le dedicaron una colección de artículos recogidos en el libro [6] publicado por el Ministerio de Educación.

En el año 2000, con motivo del centenario del nacimiento de Puig Adam, se celebró en la Real Academia de Ciencias un acto conmemorativo organizado por la Academia, por nuestra Soc. Puig Adam y por la ETSI Industriales de la UPM y publicado por la Academia [10], donde puede encontrarse una detallada relación de su producción científica.

En nuestra opinión, si Puig Adam hubiera nacido en un país como Francia, más orgulloso de sus grandes hombres, habría sido mas recordado.

Referencias

[1] P. Puig Adam (1932), Sobre la estructura operatoria de la raíz cuadrada entera. *Revista de Matemática Elemental de la J.A.E.*, *n^o* 2.

[2] P. Puig Adam (1955), Decálogo de la Didáctica Matemática Media, *Gaceta Matemática*, 1^a Serie, tomo VII, nums. 5 y 6.

[3] P. Puig Adam (1956), *Didáctica matemática eurística.* Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral, Madrid.

[4] P. Puig Adam (1957), *El Material Didáctico Matemático actual.* Publicaciones de la Revista Enseñanza Media, Madrid.

[5] P. Puig Adam (1960), *La matemática y su enseñanza actual.* Ministerio de Educación.

[6] E. Castelnuovo, F. Drenckhahn, L. Felix, J. F. Biarge, B. y T. Fletcher, E. G. Rodeja, C. Gateño, J.R. Pascual Ibarra, R. San Juan Llosa, W. Servais, G. Walusinski (1964), *Ideas actuales de la Matemática y su Didáctica (Homenaje a D. Pedro Puig Adam).* Ministerio de Educación Nacional, Publicaciones de la Dirección Nacional de Enseñanza Media.

[7] M.P. Bujanda Jáuregui (1981), *Tendencias actuales en la enseñanza de la Matemática.* Ediciones SM, Madrid.

[8] E. Roanes M., E. Roanes L. (1992), Simulación informática para el aprendizaje de la estructura operatoria de la raíz cuadrada entera (Método heurístico del Prof. Puig Adam). *Bol. de la Soc Puig Adam*, *n^o* 30, 31-39.

[9] E. Roanes M., E. Roanes L. (1995), *Nuevas Tecnologías en Geometría.* Editorial Complutense, Madrid.

[10] V.V.A.A. (2000), *Centenario del Nacimiento del Excmo. Sr. D. Pedro Puig Adam.* Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.

¿Es posible una enseñanza "inocente" de las Matemáticas?

José M. Pacheco [1]
Departamento de Matemáticas
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
josemiguel.pacheco@ulpgc.es

Resumen

This little contribution to the 100^{th} *number of our* Boletín *is an attempt to draw some attention towards reflecting on how some usual practices in Mathematics teaching, too close to everyday experience, might lead to potential misconceptions. The author proposes a unified teaching of Physics and Mathematics at the elementary level.*

Esta pequeña contribución para el número 100 del *Boletín* intenta ser una llamada a reflexionar sobre algunas prácticas que pueden ser potencialmente erróneas en la enseñanza de las Matemáticas, en especial el abuso de motivaciones en exceso coyunturales. El autor propone unificar las enseñanzas de la Física y las Matemáticas elementales.

1. Motivación

Es motivo de satisfacción ver que nuestro Boletín alcanza su centésimo número con excelente salud. Quien esto firma tuvo el honor y también el placer –hace ya tantos años– de colaborar en la confección de los dos primeros números en una curiosa mezcla de trabajo artesanal e ilusión. Tengo aún en mente las primeras reuniones, donde D. José Ramón Pascual Ibarra (1911-1996) propuso de inmediato la necesidad de disponer de un vínculo de comunicación

[1] Miembro casi fundador de la Sociedad.

entre los colegas, también con el propósito de representar a nuestra Sociedad ante una audiencia más numerosa por la vía de intercambios, y recuerdo haber visitado a Ibarra, como era generalmente conocido, en su casa cerca de Argüelles para recoger los primeros originales junto con el encargo de dar vida al primer número. Aquella encomienda acabó bien y en ella participamos Javier López de Elorriaga, Fernando Palancar, Enrique Velázquez y yo mismo. El primer número apareció en Mayo de 1983 y fue el único impreso en formato A5, pues desde el número 2 el Boletín se publica con las dimensiones $23,7 \times 16,4$ cm; también se diseñó la presentación de la página de índices con un recuadro a dos columnas, conservado hasta el número 38 de la publicación. Para la sección de anécdotas, Ibarra siempre vestía como un lord inglés, y sus clases de iniciación a la didáctica de la enseñanza Secundaria solían comenzar diciendo que para los ingleses, la educación Secundaria es... la que sigue a la Primaria.

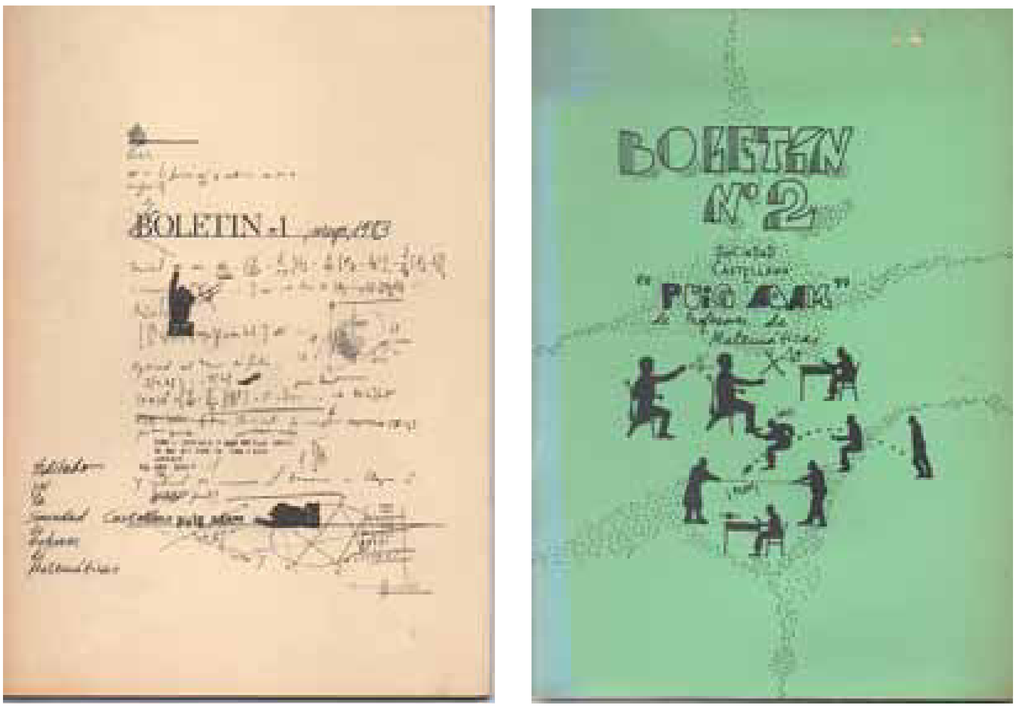


Figura 1: *Números 1 y 2 del Boletín de nuestra Sociedad*

Aunque poco después dejé Madrid, nunca he abandonado la Sociedad, leo cada nuevo número del Boletín siempre con atención y agrado, y bien que siento lo escaso de mis contribuciones. He asistido a su consolidación, a sus cambios tipográficos, y a su apertura a nuevas líneas mostrando a sus lectores una particular evolución de cómo entender las Matemáticas y su enseñanza.

Hablando de Matemáticas, con toda seguridad D. Pedro Puig Adam (1900-1960) hubiera dicho más bien "la Matemática", siguiendo la tradición krausista impuesta por D. Julio Rey Pastor (1888-1962), pero me resulta mucho más sugerente ese plural tan popular, que los alumnos suelen abreviar en "Mates" o –los más aviesos– en "Tracas", así, sin más.

Si nos vamos a la enseñanza, soy de la opinión de que "enseñanza de las Matemáticas" es poco menos que un pleonasmo: Encontramos la raíz griega "mathe" también en la palabra "mathetes", que viene a significar discípulo o alumno, así que no es posible separar con nitidez las Matemáticas de la forma de transmitirlas, pero sí que es razonable pensar sobre hasta qué punto dependemos para ello de las modas y las condiciones ambientales. He aquí la razón de esta reflexión o apunte histórico-educativo que ofrezco a mis estimados colegas.

2. ¿Es posible una enseñanza inocente de las Matemáticas?

Durante los años que se han dado en denominar "edad de plata" de la ciencia española (por cierto, ¿cuál fue la de oro, o es que está aún por llegar?), más o menos entre 1918 y 1935, hubo un buen número de profesores de diversas materias que viajaron al extranjero para ver, investigar, y en su caso introducir en nuestro país las novedades o adelantos didácticos que habían observado o experimentado (ver p.ej. Pacheco 2014). El resultado fue desigual, sobre todo por el impacto de la guerra civil y de su larguísima posguerra, que desbarataron en tantos sentidos muchos proyectos educativos y culturales forjados a lo largo de bastantes años y cortados de raíz en 1936. La recuperación fue complicada, cuando no imposible en muchos casos, tardía, y con frecuencia en la dirección equivocada.

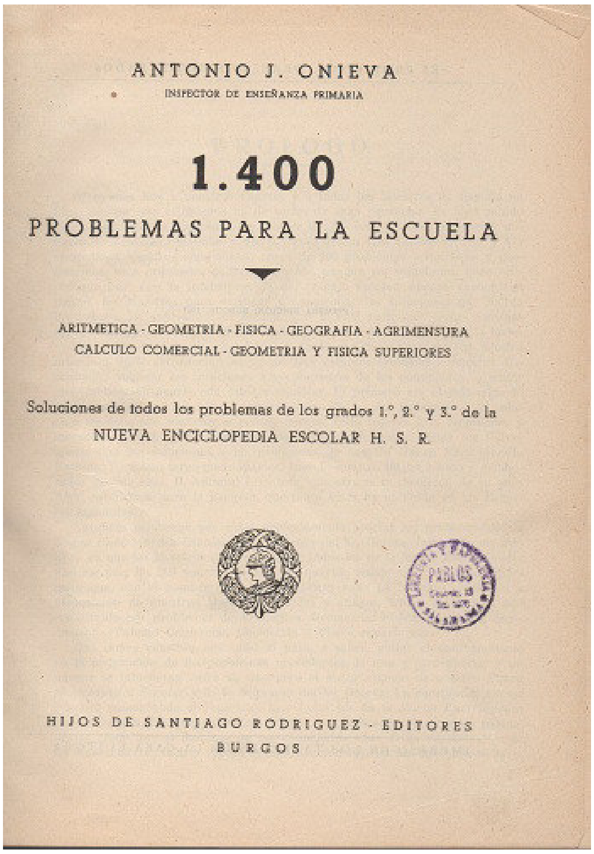
Insistiré, pues, en la pregunta acerca de la posibilidad de una enseñanza inocente de nuestra ciencia. Aquí, por "inocente" entenderé estar en posesión de la capacidad de mantener la independencia de los entornos sociales, económicos, culturales y políticos, al menos hasta un cierto punto.

No es fácil discutir sobre ello, y menos en tiempos cuando la curiosidad científica se halla arrinconada en ámbitos muy alejados de las Matemáticas –tal como comprobamos a diario en la gran difusión de documentales sobre animales exóticos o la exploración del océano (como si no hubiera Matemáticas en ello)– y con demasiada frecuencia también a mucha distancia de motivaciones próximas a la vida cotidiana. Solemos ver anunciados cursos, simposios, conferencias, charlas donde se pretende estudiar la relación entre Matemáticas y vida diaria, pero si no se preparan con esmero y acompañadas de ejemplos razonables, los resultados no irán más allá de un conjunto de anécdotas más o menos afortunadas. En mi opinión, vivimos tiempos de duda, llenos de bifurcaciones conducentes a caminos insospechados en las aplicaciones –que suelen ser la parte menos inocente de las Matemáticas– y que promueven a su vez cambios en el énfasis dedicado a las diferentes disciplinas matemáticas clásicas cuando se llega a la cuestión de cómo transmitirlas a las generaciones jóvenes sin perder los hilos conductores fundamentales.

2.1. Breve digresión sobre "lo cotidiano"

Hace algún tiempo, los libros de texto y de problemas ofrecían una variedad de ejemplos donde aparecían ovejas, barricas de vino, plantíos de coles, aldeanos en las ferias de ganado, lecheros que aguaban su producto, e incluso... letras de cambio descontadas. Un ejemplo casi enternecedor es (Onieva 1951), véase la Figura 2. Todo ello queda hoy muy lejos de lo cotidiano y a más de uno le resulta difícil reconocer que las Matemáticas de esos asuntos fueran relevantes y se explicasen en los primeros cursos del Bachillerato cuando éste comenzaba a los 10 años de edad, en una fase que denominaríamos de adquisición de cultura general. En otras palabras, las Matemáticas de esa cotidianeidad eran accesibles con poco más de las cuatro reglas, mientras que las relativas a adelantos técnicos quedaban relegadas a cursos universitarios especializados o a las ingenierías. Eso sí, había una consciencia de que tras todos esos avances había Matemáticas, aunque no fuesen comprensibles para el común de las personas.

Sin embargo, hoy nadie piensa que los jóvenes adictos a los teléfonos móviles y a sus casi infinitas capacidades tengan la menor idea de que existan Matemáticas tras algo tan corriente, y si por un extraño azar les sobreviniese la curiosidad, se encontrarían con frases, casi exabruptos, como "... es que las conexiones vía satélite llevan implícita una corrección relativista...”


ANTONIO J. ONIEVA
INSPECTOR DE ENSEÑANZA PRIMARIA

1.400

PROBLEMAS PARA LA ESCUELA

ARITMETICA - GEOMETRIA - FISICA - GEOGRAFIA - AGRIMENSURA
CALCULO COMERCIAL - GEOMETRIA Y FISICA SUPERIORES

Soluciones de todos los problemas de los grados 1.°, 2.° y 3.° de la
NUEVA ENCICLOPEDIA ESCOLAR H. S. R.

HIJOS DE SANTIAGO RODRIGUEZ - EDITORES
BURGOS

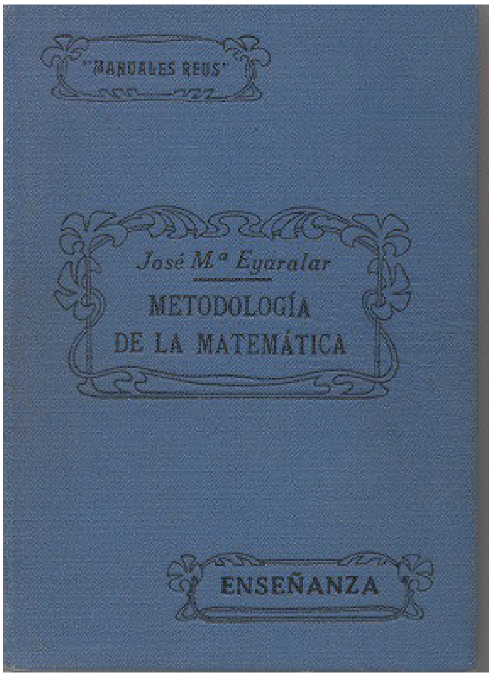
Figura 2: *Página inicial del libro de problemas de Antonio Onieva de 1951.*

Las transacciones comerciales de un ciudadano común ya no necesitan conocer bien las medidas, pues todo viene empaquetado y etiquetado porque es más importante la distribución que los productos en sí, y así sucesivamente – ¿por qué no se explican las Matemáticas subyacentes a la distribución de bienes y servicios?– No parece fácil explicar las Matemáticas de la cotidianeidad del primer cuarto del sigo XXI a gente de 12 ó 13 años, si además las de épocas pasadas se nos antojan obsoletas y carentes de sentido en la práctica. El resultado se constata con la casi total desaparición de las Matemáticas en el panorama educativo preuniversitario.

No sé si habrá alguna forma de remediar lo anterior, pero los intentos de absoluta abstracción que plagaron las aulas en mis años de estudiante no parecen haber tenido gran éxito. Además, quienes pensamos que una sesión de Matemáticas ha de comenzar con un ejemplo motivador, seguir con un desarrollo teórico, y terminar con otro ejemplo corroborativo de abstracción superior a la del inicial, nos encontramos ante graves dificultades derivadas de la diferente concepción del papel del sistema educativo en la formación de los futuros pobladores del planeta.

2.2. El ingrato destino de Don José Mª Eyaralar

El protagonista de esta historia con final poco feliz es el profesor de Matemáticas D. José María Eyaralar Almazán (1890-1944), primer becado por la Junta de Ampliación de Estudios para cuestiones de enseñanza de las Matemáticas en 1922.



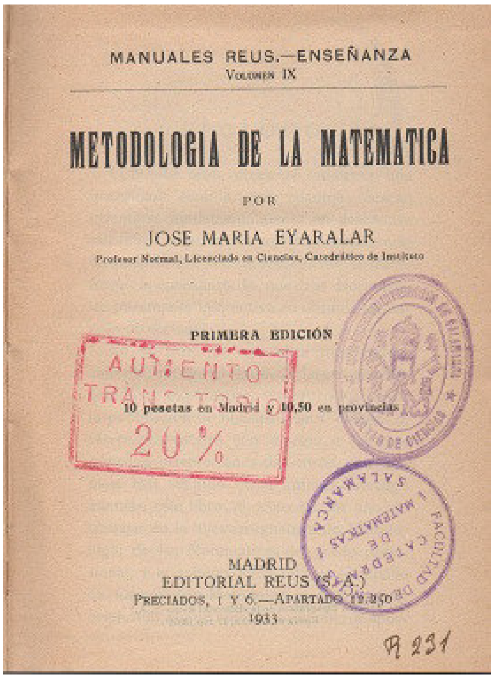
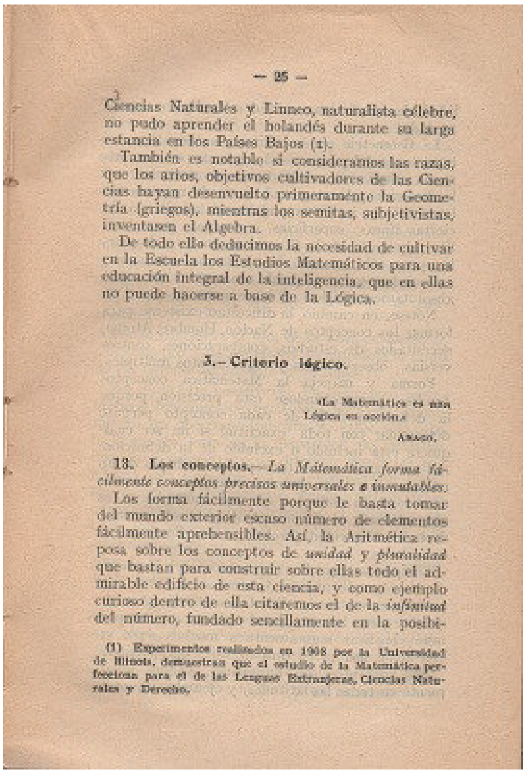


Figura 3: *Portadas exterior e interior de "Metodología de la Matemática", 1933.*

Pasó algo más de medio año en Francia dedicado a observar y comparar diferentes métodos de aprendizaje, sus conclusiones fueron presentadas en 1923 con la preceptiva memoria justificativa presentada a la Junta tras su regreso a España (Archivo 1999), y posteriormente utilizó su experiencia para la confección de textos de muy buena calidad. En 1933 dio a la imprenta una "Metodología de la Matemática" (Figura 3) ¡nótese el singular! muy conocida y celebrada en su momento, donde encontramos lo cotidiano como fundamento de la experiencia didáctica y también como base programática, incluyendo algunos apuntes sobre opiniones y creencias entonces consideradas cotidianas, ingenuamente incluidos por el autor para acomodarse a su tiempo, pero en nuestros días inaceptables en cualquier texto. Un estudio bien documentado sobre Eyaralar es (Comas 2005).



— 25 —

Ciencias Naturales y Linneo, naturalista célebre, no pudo aprender el holandés durante su larga estancia en los Países Bajos (1).

También es notable si consideramos las razas, que los arios, objetivos cultivadores de las Ciencias hayan desenvuelto primeramente la Geometría (griegos), mientras los semitas, subjetivistas, inventasen el Algebra.

De todo ello deducimos la necesidad de cultivar en la Escuela los Estudios Matemáticos para una educación integral de la inteligencia, que en ellas no puede hacerse a base de la Lógica.

3.—Criterio lógico.

«La Matemática es una Lógica en acción.»

ARAGO.

13. Los conceptos.—*La Matemática forma fácilmente conceptos precisos universales e inmutables.* Los forma fácilmente porque le basta tomar del mundo exterior escaso número de elementos fácilmente aprehensibles. Así, la Aritmética reposa sobre los conceptos de *unidad* y *pluralidad* que bastan para construir sobre ellas todo el admirable edificio de esta ciencia, y como ejemplo curioso dentro de ella citaremos el de la *infinitud* del número, fundado sencillamente en la posibi-

(1) Experimentos realizados en 1908 por la Universidad de Illinois, demuestran que el estudio de la Matemática perfecciona para el de las Lenguas Extranjeras, Ciencias Naturales y Derecho.

Figura 4: *Página 25 de "Metodología de la Matemática", del año 1933.*[2]

[2]Nótese el comentario –completamente al día en su momento– sobre la posible influencia de las razas en la producción matemática. El texto correspondiente dice (sic): "También es notable si consideramos las razas, que los arios, objetivos cultivadores de las Ciencias, hayan desenvuelto primeramente las Geometrías (griegos), mientras los semitas, subjetivistas, inventasen el Algebra".

Más de un catedrático habrá utilizado este libro como inspiración en la confección de la memoria sobre objetivos, fuentes, métodos, etc. necesaria para las oposiciones, pasando por encima de los párrafos más controvertidos. Les ruego ahora que observen la Figura 4, fijándose en el párrafo que comienza con "También...", para mayor claridad reproducido debajo. Asistimos a un intento de *actualizar* al máximo, y *acomodarse a lo cotidiano* por parte de nuestro autor. También, en las páginas 173-174 del mismo texto, extracta unas observaciones sobre las capacidades matemáticas de la raza negra, tomadas de la revista francesa L'Éducation Enfantine, fundada en 1903, y que no pasarían ahora filtro cultural y/o político alguno. Es cierto que la opinión mayoritaria desde hace muchos años es que el inicio de las Matemáticas se puede rastrear en las transacciones comerciales a pequeña escala y en la agrimensura, actividades bastante independientes de cualquier ubicación geográfica, y por tanto racial. Por eso, la visión de las Matemáticas conocida como *Ethnomathematics*, propuesta en los 1980 por el conocido matemático, didacta e historiador brasileño Ubiratan D'Ambrosio (ver, p. ej. D'Ambrosio 1999) hubiera eximido directamente a nuestro autor de cualquier veleidad de racismo –nótese la sutil distinción política entre *étnico* y *racial*–... pero desgraciadamente D. José Mª fue depurado y apartado de su cátedra por los inminentes ganadores de la guerra civil incluso antes de acabar ésta, ya en 1938, y retirado a un amargo exilio interior, compartido por bastantes más profesionales de nuestra disciplina (Pacheco 2015), hasta su fallecimiento en 1944.

Y no fue apartado de su puesto por racista –algo que en la Europa y los Estados Unidos de aquellos años no estaba demasiado mal visto (Siegmund-Schultze 2009), y además con seguridad él no lo era–, sino entre otras cosas por creer que lo cotidiano está en el origen no sólo de las Matemáticas y de cualquier otra ciencia. Lo que no debía de saber D. José Mª es que tales opiniones, en principio inocuas, traducidas en una mínima y bien intencionada adscripción política, pudieran llevar a tan amargas consecuencias personales.

3. A modo de final

Una observación –que no conclusión– es si no deberíamos aceptar lo que muchas veces dicen los filósofos: la Filosofía no se enseña, se hace, se practica.

Preguntémonos ahora, pues, qué será "hacer", matemáticamente hablando.

Si partimos del mercado en la plaza del pueblo y consideramos las actividades que confluyen en él, las Matemáticas surgen como un destilado de prácticas habituales como contar, medir, pesar, pagar, cobrar, prestar, generando, tras mucho esfuerzo mental y siglos de trabajo de gran cantidad de individuos, reglas y métodos abstractos desconectados de aquellas actividades cotidianas: algo tan ordinario como la suma de números enteros positivos lleva una enorme carga de abstracción tras de sí. La limpidez de los resultados condujo a cálculos cada vez más refinados, y mentes tan lúcidas como Leibniz (1646-1716) se sintieron tentadas a extenderlos a las actividades interpersonales y sociales: *calculemus!*

La concepción a la Leibniz lleva de nuevo, esta vez desde arriba, a considerar matemáticamente lo cotidiano. De ahí derivan la Lógica Formal y la Informática, queramos o no. De camino encontraremos la Estadística en sus diferentes versiones y finalmente, la sinergia entre Informática y Estadística, hoy día paradigma de cotidianeidad: si algo nos invade a diario son torrentes de datos que nos abruman y aburren en los telediarios, en las retransmisiones deportivas, en la publicidad de cualquier cosa... pero ¿se justifica una enseñanza matemática sobre tal base? Quiero creer que no, pues es muy posible pensar, y seguramente con razón, que la interpretación de series financieras se considere dentro de unos años tan perniciosa para la sociedad como el racismo, o tan obsoleta como las tablas de logaritmos impresas en papel, relegando el fundamentar la enseñanza sobre tales cosas al rango de curiosidad histórica o tal vez, directamente al olvido.

Para terminar con una propuesta personal: si la enseñanza de las Matemáticas se ha de basar en lo cotidiano para preservar una cierta "inocencia", que sea sobre algo más duradero, menos mutable que las costumbres y usos de la Humanidad, al menos a ciertas escalas. Me atrevo a proponer una mayor cercanía entre la enseñanza de la Física y la de las Matemáticas, incluso sugiriendo su unificación hasta un cierto nivel. Ahora mismo, la comprensión de la Física escolar se oscurece tras un aparato matemático desmedido, necesitado de una poda urgente, y las aplicaciones de las Matemáticas se justificarían con ejemplos menos variables que los mercados, ya sean antiguos y rurales o contemporáneos y electrónicos. En pocas palabras, una visión ligeramente más unida de dos ciencias clásicas debería conducirnos a una enseñanza "más inocente". Apuntemos alto: hay un libro cuyo título basta para el optimismo, ¡nada menos que "Encuentros celestiales"! (Diacu y Holmes 1996).

Referencias

[1] Archivo (1999) *Residencia de Estudiantes*, Archivo de la JAE: puede encontrarse en la dirección web http://archivojae.edaddeplata.org/jae_app.

[2] Comas F (2005) José Mª Eyaralar, la influència francesa en la renovació de la didáctica de les matemàtiques, *Educació i Cultura* 18, 87-100.

[3] D'Ambrosio U (1999) Literacy, Matheracy, and Technocracy: A Trivium for Today, *Mathematical Thinking and Learning* 1(2), 131-153.

[4] Diacu F, Holmes P (1996) *Celestial Encounters*, Princeton University Press.

[5] Eyaralar J (1933) *Didáctica de la Matemática*, Editorial Reus, Madrid.

[6] Onieva A (1951) 1400 *problemas para la escuela*, Editorial Hijos de Santiago Rodríguez, Burgos.

[7] Pacheco J (2014) Mobility and Migration of Spanish Mathematicians during the years around the Spanish Civil War and WWII, *Science in Context* 27(1), 109-141.

[8] Pacheco J (2015) The "Portuguese connection"of José Gallego-Díaz, *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática,* en prensa.

[9] Siegmund-Schulze R (2009) *Mathematicians Fleeing from Nazi Germany: Individual Fates and Global Impact*, Princeton University Press.

Sobre una familia de cuárticas

Ricardo Moreno Castillo
Catedrático de iInstituto jubilado
moreno_castillo@hotmail.es

Abstract

This article studies certain fourth degree curves associated with a triangle.

Dedicado a D. Pedro Puig Adam

1. Generación de la familia

Sea un triángulo *ABC*. Se va a estudiar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a *A* es igual a la suma de las distancias a *B* y *C*. Nada impide suponer (mediante un movimiento y el correspondiente cambio de escala) que $B=(-1,0)$ y $C=(1,0)$. Sobre el punto $A=(a,b)$ ya no cabe hacer consideración alguna. Sea $P=(x,y)$ un punto cualquiera de la curva. Entonces $PB+PC=PA$:

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

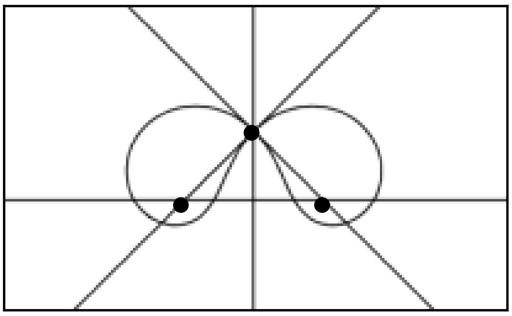
La eliminación de las raíces cuadradas nos lleva a lo siguiente:

$$3(x^2+y^2)^2-4ax(x^2+y^2)-4by(x^2+y^2)+2(b^2-a^2-6)x^2+2(a^2-b^2+2)y^2$$
$$+8abxy-4a(2-a^2-b^2)x-4b(2-a^2-b^2)y+4-(2-a^2-b^2)^2=0$$

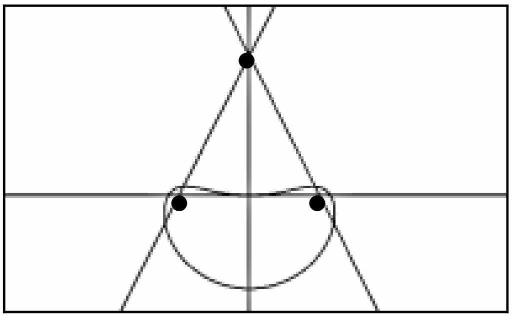
Es pues una familia biparamétrica de curvas de cuarto orden. El estudio global no es en absoluto fácil, de manera que nos limitaremos a la subfamilia correspondiente a triángulos isósceles (esto es, hacemos $a=0$ y queda libre la *b*):

$$3(x^2+y^2)^2-4by(x^2+y^2)+2(b^2-6)x^2+2(2-b^2)y^2-4b(2-b^2)y+4b^2-b^4=0$$

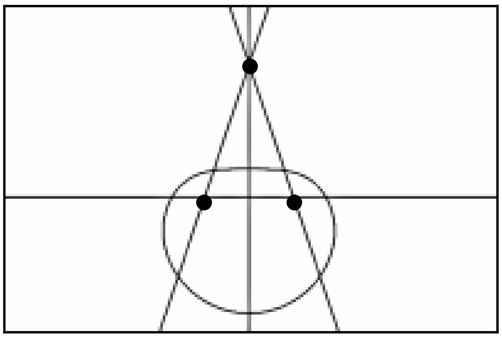
A continuación, algunos ejemplos de la curva para ciertos valores de *b*:



$$3(x^2+y^2)^2-4y(x^2+y^2)-10x^2+2y^2-4y+3=0 \ \ (b=1)$$



$$3(x^2+y^2)^2-8y(x^2+y^2)-4x^2-4y^2+16y=0 \ (b=2)$$



$$3(x^2+y^2)^2-12y(x^2+y^2)+6x^2-14y^2+84y-45=0 \ \ (b=3)$$

Hay que hacer notar que para ciertos puntos de la curva (por ejemplo A para $b=1$) no se cumple que $PB+PC=PA$, sino $PB-PC=PA$. Esto se debe al doble signo de la raíz cuadradas en las fórmulas de las distancias.

2. Corte con los ejes

Si en la ecuación de la curva hacemos $y=0$ resulta la ecuación bicuadrada $3x^4+2(b^2-6)x^2+4b^2-b^4=0$, cuyo discriminante es $16(b^2-3)^2$. Entonces:

$$x^2=\frac{-2(b^2-6)\pm 4(b^2-3)}{6}$$

En consecuencia $x^2=b^2/3$ (y $x=\pm b/\sqrt{3}$) o $x^2=4-b^2$ (y $x=\pm\sqrt{4-b^2}$). Entonces, si $b<2$, la curva corta al eje de abscisas en cuatro puntos reales, si $b=2$, en tres puntos reales, en uno de ellos con tangencia, y si $b>2$, en dos puntos reales y dos imaginarios. Hacemos a continuación $x=0$:

$$3y^4-4by^3+2(2-b^2)y^2-4b(2-b^2)y+4b^2-b^4=0$$

Ahora bien, el primer miembro de esta ecuación es fácilmente descomponible:

$$(y-b)^2(3y^2+2by+4-b^2)=0$$

Entonces la curva corta al eje de ordenadas dos veces en el punto $(0,b)$. De $3y^2+2by+4-b^2=0$ se deduce lo siguiente:

$$y=\frac{-b\pm 2\sqrt{b^2-3}}{3}$$

En consecuencia, si $b>\sqrt{3}$, la curva corta al eje de las ordenadas en dos puntos reales, y si $b<\sqrt{3}$ en dos puntos imaginarios conjugados. Si $b=\sqrt{3}$, resulta que la ecuación de la curva se convierte en $3(x^2+y^2-(4\sqrt{3}/3)\,y-1)^2=0$. Es una circunferencia doble y su estudio carece de interés.

3. Puntos singulares

Para buscar los puntos singulares, escribimos la ecuación de la curva en coordenadas homogéneas:

$$F(x,y,z) = 3(x^2+y^2)^2 - 4by(x^2+y^2)z + 2(b^2-6)x^2z^2$$
$$+2(2-b^2)y^2z^2 - 4b(2-b^2)yz^3 + (4b^2-b^4)z^4$$

A continuación, planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$F=0 \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 12x(x^2+y^2) - 8bxyz + 4(b^2-6)xz^2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 12y(x^2+y^2) - 4b(x^2+y^2)z - 8by^2z + 4(2-b^2)yz^2 - 4b(2-b^2)z^3 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -4by(x^2+y^2) + 4(b^2-6)x^2z + 4(2-b^2)y^2z - 12b(2-b^2)yz^2 + 4(4b^2-b^4)z^3 = 0$$

Empezamos haciendo $z=0$. Entonces, o $x=y=0$ (y esto no significa nada), o $x^2+y^2=0$, y tenemos los puntos cíclicos $I=(1,i,0)$ y $J=(1,-i,0)$. Para ver qué clase de puntos dobles son, fabricamos la curva $F^*(y,z)=F(1,y+i,z)$, que tiene en el origen una singularidad de la misma naturaleza que *F* en *I*:

$$F^*(y,z) = 3(y^2+2yi)^2 - 4b(y+i)(y^2+2yi)z + 2(b^2-6)z^2$$
$$+2(2-b^2)(y^2+2yi-1)z^2 - 4b(2-b^2)(y+i)z^3 + (4b^2-b^4)z^4$$

El monomio de menor grado es $(b^2-4)z^2+2byz-3y^2$, cuyo discriminante (como ecuación en *z*) es $16y^2(b^2-3)$, que solo se anula si $b=\sqrt{3}$ (cuando la curva degenera). Luego los puntos cíclicos son nodos.

En el plano afín hay, como mucho, un punto doble (dos puntos dobles más o uno triple superaría lo que puede soportar una cuártica sin degenerar). Y por la simetría de la curva tal punto solo puede estar sobre el eje de ordenadas. Para dar con él, hacemos $z=1$ y $x=0$ en el anterior sistema de ecuaciones anteriores y prescindimos de la última:

$$F(0,y,1) = 3y^4 - 4by^3 + 2(2-b^2)y^2 - 4b(2-b^2)y + 4b^2 - b^4 = 0$$

$$\frac{\partial F(0,y,1)}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial F(0,y,1)}{\partial y} = 3y^3 - 3by^2 + (2-b^2)y - b(2-b^2) = 0$$

Una solución es $y = b$, entonces el punto $(0, b)$ es doble. Para discernir si es nodo o cúspide, trasladamos la curva de modo que el punto esté en el origen:

$$F(x, y+b, 1) = 3(x^2 + y^2)^2 + 8by(x^2 + y^2) + (4b^2 - 12)x^2 + (4b^2 + 4)y^2 = 0$$

Las ecuaciones de las rectas tangentes en el origen de esta nueva curva son $x\sqrt{3-b^2} + y\sqrt{1+b^2} = 0$ y $x\sqrt{3-b^2} - y\sqrt{1+b^2} = 0$. Como la posibilidad $b = \sqrt{3}$ está excluida, el punto es un nodo. Si $b < \sqrt{3}$, las tangentes son reales, y si $b > \sqrt{3}$ son imaginarias, y el punto aparece aislado en el plano real.

4. El género de la curva

El género de la curva es cero, por tener todas las singularidades que permite su grado. Esto significa que posee parametrizaciones racionales, una de las cuales se va a fabricar a continuación (suponiendo $b < \sqrt{3}$). Usaremos la notación $\alpha = \sqrt{3-b^2}$ y $\beta = \sqrt{1+b^2}$ y supondremos el punto singular en el origen:

$$3(x^2 + y^2)^2 + 8by(x^2 + y^2) - 4\alpha^2 x^2 + 4\beta^2 y^2 = 0$$

Cortaremos la curva con las circunferencias que pasan por el punto $(0,0)$ y son allí tangentes a la recta $\alpha x + \beta y = 0$. Cada una de ellas corta a la cuártica tres veces en dicho punto y dos en cada uno de los puntos cíclicos (siete en total). El punto de corte que queda libre proporciona las ecuaciones paramétricas. Esto se puede ver en la Figura 1 (la curva es la que corresponde a $b = 1$).

La ecuación de la familia de circunferencias es $x^2 + y^2 - 2\alpha tx - 2\beta ty = 0$. Entonces, sustituyendo en la ecuación de la cuártica:

$$3(2\alpha tx + 2\beta ty)^2 + 8by(2\alpha xt + 2\beta ty) - 4\alpha^2 x^2 + 4\beta^2 y^2 = 0$$

$$12t^2(\alpha x + \beta y)^2 + 16byt(\alpha x + \beta y) + 4(\alpha x + \beta y)(\beta y - \alpha x) = 0$$

$$3t^2(\alpha x + \beta y) + 4byt + \beta y - \alpha x = 0$$

$$y = x\frac{\alpha(1 - 3t^2)}{3\beta t^2 + 4bt + \beta} = x\alpha f(t)$$

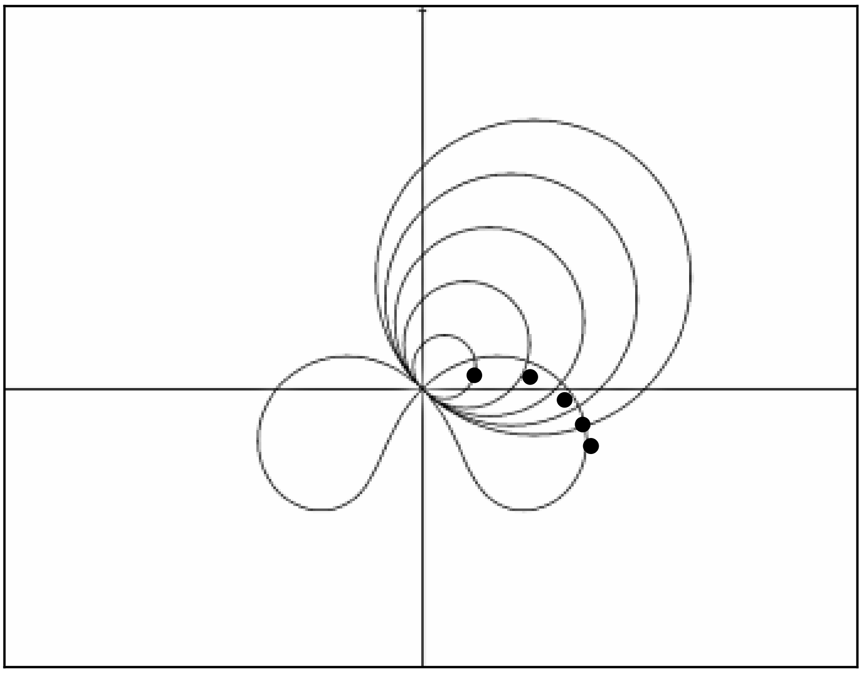


Figura 1

La función *f* es racional en *t*. Volviendo a la ecuación de la circunferencia:

$$x^2 + x^2\alpha^2[f(t)]^2 - 2\alpha tx - 2\alpha\beta txf(t) = 0$$

De aquí despejamos x, y ya tenemos las ecuaciones paramétricas:

$$x = 2\alpha t\frac{1+\beta f(t)}{1+\alpha^2[f(t)]^2} \qquad y = 2\alpha^2 t f(t)\frac{1+\beta f(t)}{1+\alpha^2[f(t)]^2}$$

5. Clase, inflexiones y bitangentes

Sea n el grado de una curva, m su clase, i el número de inflexiones, t el de bitangentes, r el de cúspides y d el de nodos. Si no hay más singularidades, estos números están relacionados mediante las *fórmulas de Plücker*:

$$\begin{gathered} m + 2d + 3r = n(n-1) \\ i + 6d + 8r = 3n(n-2) \\ n + 2t + 3i = m(m-1) \\ r + 6t + 8i = 3m(m-2) \end{gathered}$$

Según la primera, la clase es 6, según la segunda hay 6 inflexiones, y según la tercera, hay 4 bitangentes. La última ya no dice nada nuevo. Existe otra fórmula, debida a Klein, en la cual solo se tienen en cuenta los elementos reales:

$$n+i+2t=m+r+2d$$

Por ella sabemos que el número de inflexiones reales más el doble de bitangentes reales suman cuatro. Entonces el número de inflexiones reales (que ha de ser par, por la simetría de la curva) puede ser 0, 2 o 4. En cada uno de estos casos, el de bitangentes reales es 2, 1 o 0.

6. Algunas propuestas

Planteo los siguientes problemas:

1. Fabricar las ecuaciones paramétricas suponiendo $b>\sqrt{3}$, cosa nada trivial. El trabajo de Recio-Sendra citado en la bibliografía da el camino para dar con ellas.

2. Se podrían estudiar otras subfamilias de la familia de cuárticas. Por ejemplo la que resulta de hacer $a=1$:

$$\begin{aligned}&3(x^2+y^2)^2-4x(x^2+y^2)-4by(x^2+y^2)+2(b^2-7)x^2+2(3-b^2)y^2\\&\quad+8bxy-4(1-b^2)x-4b(1-b^2)y+4-(1-b^2)^2=0\end{aligned}$$

O la que resulta de hacer $a=b$:

$$\begin{aligned}&3(x^2+y^2)^2-4ax(x^2+y^2)(x+y)-12x^2+4y^2\\&+8a^2xy-8a(1-a^2)(x+y)+4-4(1-a^2)^2=0\end{aligned}$$

3. Retomamos la familia biparamétrica y el triángulo *ABC*. Su ortocentro es el punto $H=(a,(1-a^2)/b$, su circuncentro $O=(0,(a^2+b^2-1)/2b)$ y su baricentro $G=(a/3,b/3)$. ¿Bajo qué condiciones de *a* y *b* pasan por ellos las curvas?

La ecuación de la círcunferencia circunscrita y la de la recta de Euler son $x^2+y^2-y(a^2+b^2-1)/b-1=0$ y $(3-3a^2-b^2)x-2aby=a-a^3-ab^2$. ¿En qué puntos se encuentran círcunferencia y recta con las cuárticas? ¿Qué curvas generan estos puntos cuando damos ciertas libertades al vértice *A*?

4. El vértice *A* juega un papel singular. ¿Cómo sería la familia de curvas si ese papel lo desempeña el vértice *B*?

Son casi todos problemas elementales, pero su resolución puede ser un inofensivo pasatiempo para el lector, a la par que una honesta diversión.

Agradecimiento

Dejo constancia de mi gratitud a mi amigo José Manuel Gamboa Mutuberría, a quien le planteé algunas dudas sobre este trabajo, y me asesoró con sabias orientaciones bibliográficas.

Bibliografía

Fulton, W. (1971), *Curvas algebraicas*, Editorial Reverté, Barcelona.

Gomes Teixeira, F. (1907), *Traité des courbes spéciales remarquables*, Coimbra.

Moreno Castillo, R. (2005), *Plücker y Poncelet. Dos modos de entender la geometría*, Editorial Nivola, Madrid.

De la Puente Muñoz, Mª. J. (2007), *Curvas algebraicas planas*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

Recio, T. y Sendra, R. J. (1997), "Real Reparametrizations of Real Curvas", en *J. Symbolic computation,* nº 23, págs. 241-254.

Distintas aproximaciones a un lugar geométrico con GeoGebra

Nicolás Rosillo Fernández
IES Máximo Laguna. Santa Cruz de Mudela. Ciudad Real
nicolasrosillo@gmail.com

Abstract

Making use of symbolic and algebraic views of GeoGebra, we proceed to find a locus.

Dedicado a D. Pedro Puig Adam

Introducción

Utilizando cuatro aproximaciones diferentes, y haciendo uso de las posibilidades de *GeoGebra*, se procede a buscar cierto lugar geométrico [1], caso particular del genérico en que *A* y *E* pueden ser puntos cualesquiera (con ordenada no nula).

1. Descripción

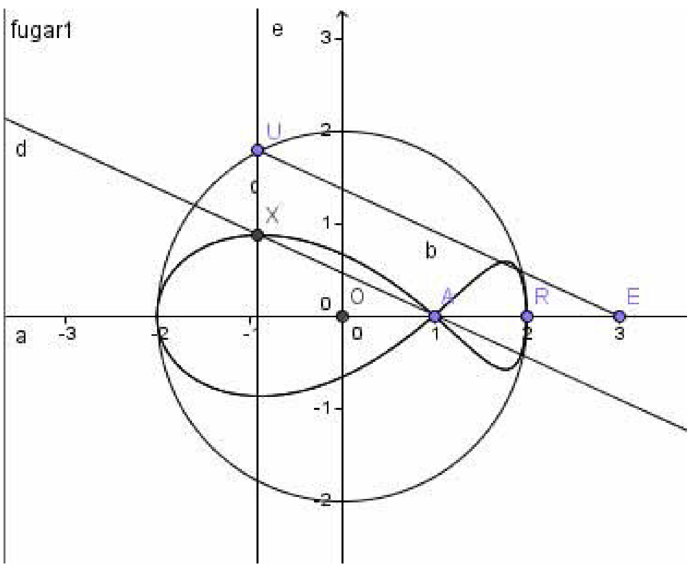


Figura 1

Sean una circunferencia de centro $O(0,0)$ y radio $R(r,0)$ y dos puntos A(a,0) y E(e,0). Si U es un punto variable sobre la circunferencia, la perpendicular por U a AE y la paralela d por A a EU se cortan en X. Hallar la ecuación del lugar geométrico de X al variar U sobre la circunferencia (Figura 1). Para evitar que los puntos A y E puedan tener ordenada distinta de cero se definen sobre la recta a que pasa por O y R.

2. Obtención del lugar geométrico de forma algebraica

Con *GeoGebra* se pueden definir los puntos y las condiciones que se desea cumplan entre ellos. Acto seguido se procede a solicitar de manera gráfica el lugar geométrico que genera X al desplazarse U. La obtención de la expresión algebraica del lugar geométrico puede realizarse mediante la instrucción *EcuaciónLugar*, (https://wiki.geogebra.org/es/Comando_EcuaciónLugar), creada por los profesores Botana (fbotana@uvigo.es) y Recio. Dicha expresión aparece en la parte superior izquierda de la Figura 2, como curva implícita f.

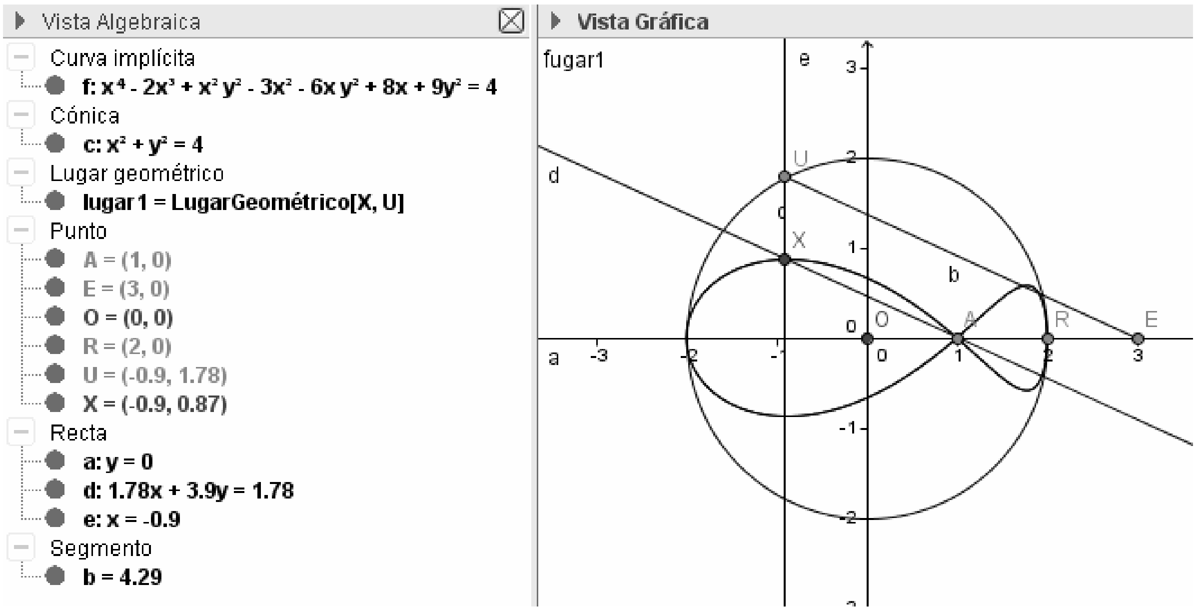


Figura 2

Pasos de la construcción.

1. Se definen los puntos O y R. (se han de cambiar su nombre una vez definidos).
2. Se traza la recta a que pasa por esos dos puntos.
3. Sobre a, se definen los puntos A y E (cambiando sus nombres).

4. Se traza la circunferencia *c* de centro *O* y radio *R*.
5. Se define el punto *U* (renombrado) sobre dicha circunferencia.
6. Se traza el segmento *b* de extremos *E* y *U*.
7. Se traza la recta *d*, paralela al segmento *b* por el punto *A*.
8. Se traza la recta e, perpendicular a la recta *a* por *U*.
9. Se halla el punto de intersección de las rectas *c* y *d*, y se le nombra *X*.
10. Se pide el lugar geométrico que traza *X* al moverse *U* sobre la circunferencia.

3. Obtención del lugar geométrico de forma simbólica

Esta sería un tipo de aproximación usual con sistemas de cómputo algebraico como *Derive*, *Mathematica*, *Maple*, etc.

Comenzamos definiendo los procedimientos auxiliares que utilizamos para la obtención de lugares geométricos. En la *Vista CAS* hay que tomar la precaución de emplear literales que no estén definidos como nombres de variables. Una idea práctica que ahorra contratiempos en este sentido es emplear en la *Vista CAS* literales que *GeoGebra* nunca asigna espontáneamente a los objetos que se generan al trabajar en la *Vista Gráfica* o *Algebraica*. Por ejemplo: á, é, ä, ë…

Asimismo, y para evitar confusiones con las ordenes ya predefinidas en *GeoGebra*, llamamos a todas nuestras instrucciones con terminación 2D, Distancia2D, Circunferencia2D, etc.

Las configuraciones geométricas se traducen algebraicamente en la anulación de las expresiones polinómicas que las definen.

<u>*Puntos*</u> *A* = (á,ä)

<u>*Distancia entre los puntos A y E*</u> $\text{Distancia2D}(\acute{a},\ddot{a},\acute{e},\ddot{e}) = (\acute{a}-\acute{e})^2 + (\ddot{a}-\ddot{e})^2$

(es la distancia al cuadrado, pues sólo pueden usarse expresiones polinómicas)

<u>*Circunferencia que pasa por A, con centro en E y radio í*</u>

$$\text{Circunferencia2D}(\acute{a},\ddot{a},\acute{e},\ddot{e},\acute{\imath}) = \text{Distancia2D}(\acute{a},\ddot{a},\acute{e},\ddot{e}) - \acute{\imath}^2$$

<u>*Ortogonalidad entre las rectas AE* e *IO*</u>

$$\text{Perpendiculares2D}(\acute{a},\ddot{a},\acute{e},\ddot{e},\acute{\imath},\ddot{\imath},\acute{o},\ddot{o}) := (\acute{a}-\acute{e})(\acute{\imath}-\acute{o}) + (\ddot{a}-\ddot{e})(\ddot{\imath}-\ddot{o})$$

<u>*Colineación de los puntos A, E e I*</u>

$$\text{Colineales2D}(\acute{a},\ddot{a},\acute{e},\ddot{e},\acute{\imath},\ddot{\imath}) = (\acute{a}-\acute{e})(\ddot{e}-\ddot{\imath}) - (\acute{e}-\acute{\imath})(\ddot{a}-\ddot{e})$$

<u>*Paralelismo de las rectas AE e IO*</u>

$$\text{Paralelas2D}(\acute{a},\ddot{a},\acute{e},\ddot{e},\acute{\imath},\ddot{\imath},\acute{o},\ddot{o}) = (\acute{a}-\acute{e})(\ddot{\imath}-\ddot{o}) - (\acute{\imath}-\acute{o})(\ddot{a}-\ddot{e})$$

<u>*Simetría*</u>: *I* simétrico de *A* respecto de *E* (*E* punto medio de *AI*): $A + I - 2E$

(Se definen para las componentes *x* e *y* de manera separada).

Pasos de la construcción

0. Suponemos que el lector ya ha obtenido el lugar geométrico de forma algebraica tal y como se describe en el apartado anterior.
1. Se introducen en la *Vista CAS* las expresiones antes descritas (Figura 3).

▸ Cálculo Simbólico (CAS)	
1	Distancia2D(á,ä,é,ë):=(á-é)^2+(ä-ë)^2 → **Distancia2D(á, ä, é, ë)** := $á^2 + ä^2 + é^2 + ë^2 - 2\,á\,é - 2\,ä\,ë$
2	Circunferencia2D(á,ä,é,ë,í):=Distancia2D(á,ä,é,ë)-í^2 → **Circunferencia2D(á, ä, é, ë, í)** := $á^2 + ä^2 + é^2 + ë^2 - í^2 - 2\,á\,é - 2\,ä\,ë$
3	Perpendiculares2D(á,ä,é,ë,í,ï,ó,ö):=(á-é)*(í-ó)+(ä-ë)*(ï-ö) → **Perpendiculares2D(á, ä, é, ë, í, ï, ó, ö)** := $á\,í - á\,ó + ä\,ï - ä\,ö - é\,í + é\,ó - ë\,ï + ë\,ö$
4	Colineales2D(á,ä,é,ë,í,ï):=(á-é)*(ë-ï)-(é-í)*(ä-ë) → **Colineales2D(á, ä, é, ë, í, ï)** := $á\,ë - á\,ï - ä\,é + ä\,í + é\,ï - ë\,í$
5	Paralelas2D(á,ä,é,ë,í,ï,ó,ö):=(á-é)*(ï-ö)-(í-ó)*(ä-ë) → **Paralelas2D(á, ä, é, ë, í, ï, ó, ö)** := $á\,ï - á\,ö - ä\,í + ä\,ó - é\,ï + é\,ö + ë\,í - ë\,ó$
6	Simétricox2D(á,ä,é,ë,í,ï):=á+í-2*é → **Simétricox2D(á, ä, é, ë, í, ï)** := $á - 2\,é + í$
7	Simetricoy2D(á,ä,é,ë,í,ï):=ä+ï-2*ë → **Simetricoy2D(á, ä, é, ë, í, ï)** := $ä - 2\,ë + ï$

Figura 3

Particularizamos para la configuración gráfica inicialmente trazada en la *Vista Algebraica*, operando como se indica en la Figura 4:

2. Circunferencia2D($ú, ü$,0,0,2) (circunferencia de centro origen y radio 2).
3. Paralelas2D($é$,0,$ú, ü, á$,0,x, y) (las rectas *UE* y *AX* son paralelas).
4. Perpendiculares2D(0,0,2,0,$ú, ü, x, y$) (*UX* y *OR* son perpendiculares).

5. Se eliminan las variables ligadas (*ú*,*ü*) de los polinomios que acaban de ser introducidos.
6. Sustituimos las variables (Figura 5), comprobando que la expresión obtenida simbólicamente es idéntica a la que obtuvo la instrucción *EcuaciónLugar*.

8	Circunferencia2D(ú,ü,0,0,2) → $\text{ú}^2 + \text{ü}^2 - 4$
9	Paralelas2D(é,0,ú,ü,á,0,x,y) → $\text{á ü} - \text{é y} + \text{ú y} - \text{ü x}$
10	Perpendiculares2D(0,0,2,0,ú,ü,x,y) → $-2\,\text{ú} + 2\,x$
11	Eliminación[{$8, $9, $10},{ú, ü}] → $\{x^4 - 2\,x^3\,\text{á} + x^2\,\text{á}^2 + x^2\,y^2 - 2\,x\,\text{é}\,y^2 + \text{é}^2\,y^2 - 4\,x^2 + 8\,x\,\text{á} - 4\,\text{á}^2\}$

Figura 4

12	Sustituye[$11,{á = 1, é = 3}] → $\{x^4 + x^2\,y^2 - 2\,x^3 - 6\,x\,y^2 - 3\,x^2 + 9\,y^2 + 8\,x - 4\}$

$f: x^4 - 2x^3 + x^2 y^2 - 3x^2 - 6x y^2 + 8x + 9y^2 = 4$

$g: x^4 - 2x^3 + x^2 y^2 - 3x^2 - 6x y^2 + 8x + 9y^2 = 4$

Curva implícita **f**: EcuaciónLugar[X, U]

Figura 5

4. Obtención del lugar geométrico de forma simbólico-manipulativa

Una segunda aproximación simbólica podría ser usar A y E ya definidas en la *Vista Algebraica* desde el inicio de la construcción, lo que va a permitir que las entradas de la *Vista CAS* (Figuras 6 y 7) se vayan actualizando conforme se modifique la construcción en la *Vista Gráfica*.

Pasos de la construcción

Sólo cambia el paso 3, $\text{Paralelas2D}(é,0,ú,ü,á,0,x,y)$, de la construcción anterior, que pasa a ser $\text{Paralelas2D}(x(E),y(E),ú,ü,x(A),y(A),x,y)$ de manera que desplazando el punto A o el punto E en la *Vista Gráfica* toda la *Vista CAS* se actualiza (Figuras 6 y 7).

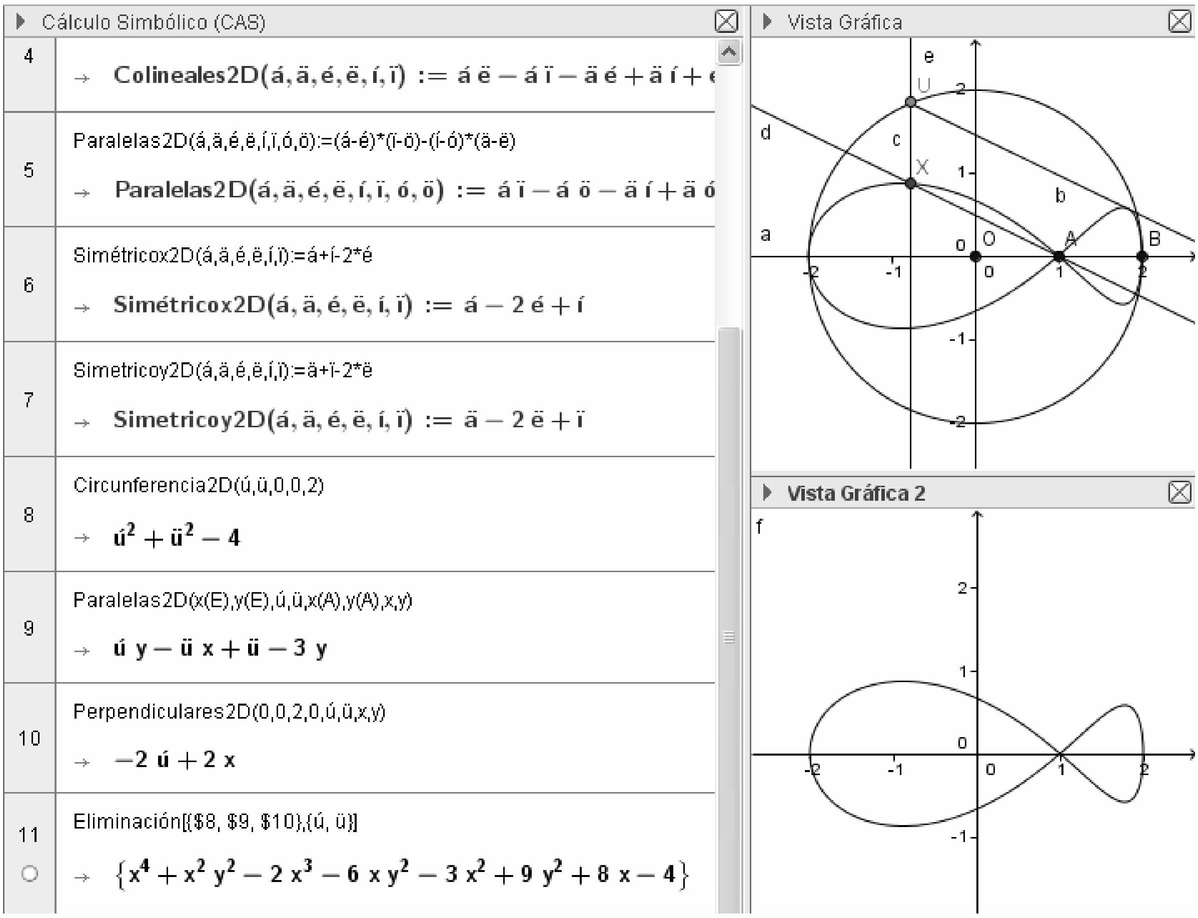


Figura 6

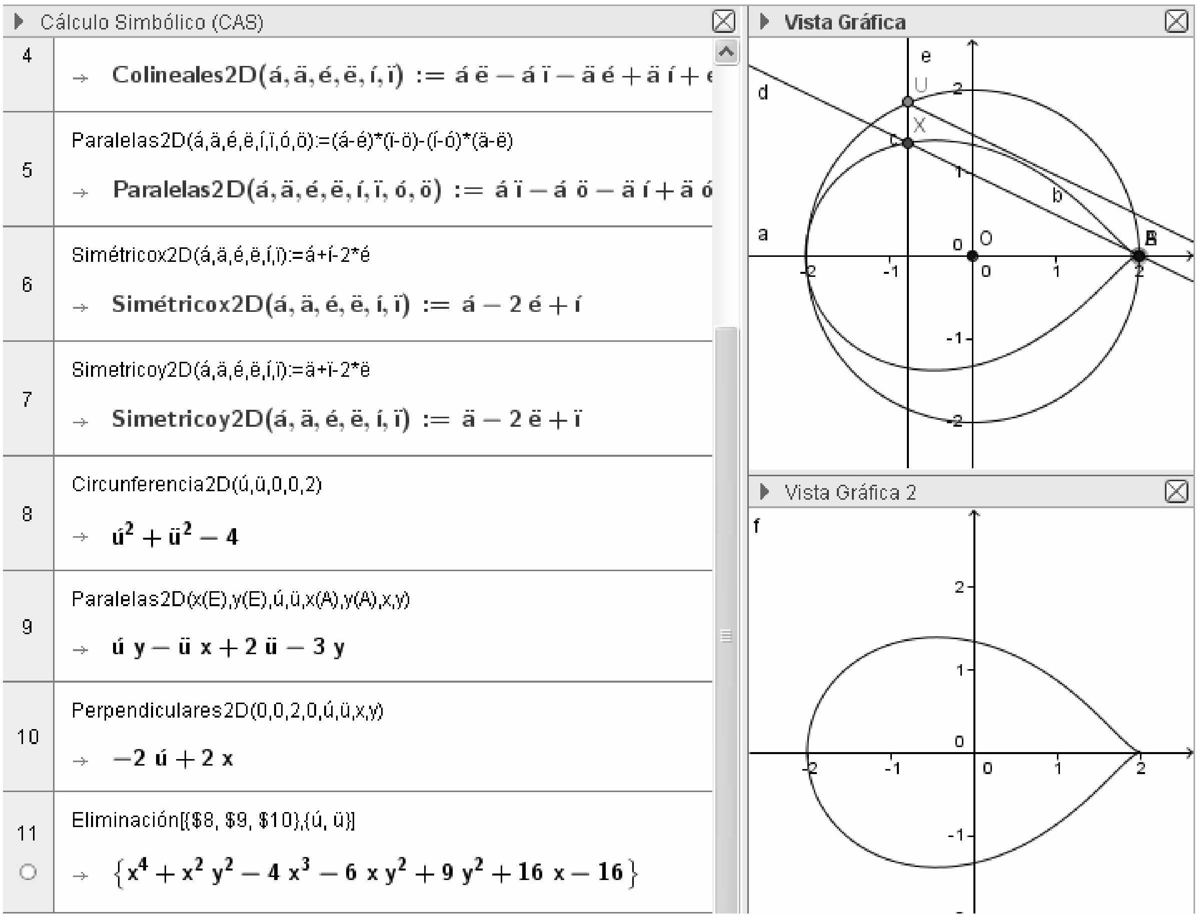


Figura 7

5. Obtención del lugar geométrico genérico de forma simbólica

Obtengamos ahora la ecuación del lugar geométrico, cuya expresión es [2]:

$$y = \pm \frac{(a-x)\sqrt{R^2 - x^2}}{(e-x)}$$

Realizamos una última aproximación puramente simbólica. Tras definir en la *Vista CAS* las condiciones que se desea se cumplan, se procede a eliminar las variables ligadas, manipulando por último la expresión hallada a fin de obtener la factorización de ésta, si es posible.

Pasos de la construcción

2. Circunferencia2D($\acute{u}, \ddot{u}, 0, 0, R$) (circunferencia de centro origen y radio 2).
3. Paralelas2D($\acute{e}, 0, \acute{u}, \ddot{u}, \acute{a}, 0, x, y$) (las rectas UE y AX son paralelas).
4. Perpendiculares2D($0, 0, \acute{a}, 0, \acute{u}, \ddot{u}, x, y$) ($UX$ y OR son perpendiculares).
5. Se procede a eliminar las variables ligadas ($\acute{u}$,$\ddot{u}$) del conjunto de polinomios que acabamos de introducir.
6. Se resuelve la expresión obtenida en y.
7. Se factorizan las soluciones obtenidas.

8	Circunferencia2D(ú, ü, 0, 0, R) → $-R^2 + \acute{u}^2 + \ddot{u}^2$
9	Paralelas2D(á, 0, x, y, é, 0, ú, ü) → $-\acute{a}\,\ddot{u} + \acute{e}\,y - \acute{u}\,y + \ddot{u}\,x$
10	Perpendiculares2D(0, 0, á, 0, x, y, ú, ü) → $\acute{a}\,\acute{u} - \acute{a}\,x$
11 ○	Eliminación[{$8, $9, $10},{ú, ü}] → $\{R^2\,\acute{a}^3 - \acute{a}\,\acute{e}^2\,y^2 - 2\,R^2\,\acute{a}^2\,x + 2\,\acute{a}\,\acute{e}\,y^2\,x + R^2\,\acute{a}\,x^2 - \acute{a}^3\,x^2 - \acute{a}\,y^2\,x^2 + 2\,\acute{a}^2\,x^3 - \acute{a}\,x^4\}$
12 ○	Resuelve[$11,y] → $\left\{y = -\sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{\lvert \acute{a}\,\acute{e} - \acute{a}\,x - \acute{e}\,x + x^2 \rvert}{\acute{e}^2 - 2\,x\,\acute{e} + x^2}, y = \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{\lvert \acute{a}\,\acute{e} - \acute{a}\,x - \acute{e}\,x + x^2 \rvert}{\acute{e}^2 - 2\,x\,\acute{e} + x^2}\right\}$
13	Factoriza[-sqrt(R² - x²) (á é - á x - é x + x²) / (é² - 2 x é + x²),x] → $\sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{-\acute{a} + x}{\acute{e} - x}$
14	Factoriza[sqrt(R² - x²) (á é - á x - é x + x²) / (é² - 2 x é + x²),x] → $\sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{\acute{a} - x}{\acute{e} - x}$

Figura 8

Conclusiones

El uso del programa *GeoGebra* posibilita que los procedimientos que permiten trazar determinados lugares geométricos puedan desentrañarse con mayor facilidad al identificarse lo que sucede en la *Vista Algebraica* y en la *Vista CAS*. El reto ulterior consistente en encontrar la formulación simbólica que dé lugar a la representación gráfica coincidente con un lugar geométrico resulta más atractivo cuando se le suma la posibilidad de *GeoGebra* que permite corroborarlo no solo por superposición de trazados sino también empleando el comando *EcuaciónLugar*. Este tipo de actuaciones no solo permitiría a los estudiantes verificar sin necesidad de ayuda por parte del docente, sino que los dota de una autonomía creciente en el quehacer matemático.

Bibliografía

[1] `http://www.mathcurve.com/courbes2d/rosillo/rosillo.shtml`

[2] N. Rosillo F., (2010), *La curva de… ¿Rosillo?* Boletín Sociedad "Puig Adam", nº 85, págs. 40-44.

Reseña de libros

JAVIER PERALTA CORONADO: *Las mates en verso*. Editorial Nivola (191 páginas). ISBN: 978-84-15913-13-9. Madrid, 2015.

Es bien conocida la actividad de Javier Peralta en los dos ámbitos en los que ha concentrado su actividad matemática: el de la educación, y el de la historia. En las cuestiones de enseñanza de la matemática se distingue rápidamente su condición de Doctor en Matemáticas –en un campo tan abstracto como la Geometría Diferencial- y de Catedrático de Instituto desde muy joven, nada más licenciarse. Por ello es de los que enseñan, y piensan en cómo debe enseñarse, sabiendo muy bien lo que enseña, qué se debe enseñar, y cómo son aquellos a los que se enseña. Y es que nunca ha sido un desertor de la tiza, de esos que tanto abundan, y tanto predican.

En cuanto a la historia de la matemática, siempre le ha atraído, y su mayor atención se ha centrado en la matemática española de los siglos XIX y XX. Abundantes son sus publicaciones sobre estos temas, algunas en este Boletín. Sus trabajos son fuente de documentación indispensable para reconstruir muchos aspectos olvidados de la actividad de aquellos que nos precedieron, y que tanto explican la nuestra.

Ahora nos sorprende con la aparición de este libro publicado por la acreditada editorial Nivola. En él hace un recorrido por cincuenta puntos señeros de la historia de las matemáticas, desde la Prehistoria hasta la Matemática contemporánea. Pero lo hace ¡en verso!, dedicando a cada uno de ellos esa pieza mayor del arte de la versificación que es el soneto.

Lógicamente, con sólo un soneto quedaría coja la explicación matemática de cada tema, de tal suerte que la parte poética se ve complementada con lo que el autor llama modestamente ‘comentarios’, que son auténticas lecciones breves sobre cada uno de los puntos tratados.

No es la primera vez que se escribe de poesía matemática, recientemente en este mismo Boletín se recensionaba el libro de J. Malia titulado Ποetas, una antología de poesía matemática. Pero sin duda la vocación didáctica de este texto, en el mejor estilo de enseñar deleitando y de combinar dos artes tan aparentemente lejanos como son la poesía y la matemática, lo hace muy singular y de gran interés.

Javier Etayo Gordejuela

Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el Boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, congresos, etc., deben enviarse *en formato electrónico*, del modo especificado a continuación.

Formato: Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex.

En caso de usar Word

El formato de texto debe ser 17cm(alto) x 12.8cm(ancho), exactamente como este archivo. Configuración de página con márgenes: superior 3cm; inferior 9,7cm; izquierdo 4,1cm; derecho 4,1cm; encuadernación 0cm. Todo en el estilo de letra Times New Roman con "Interlineado sencillo" (en vez de múltiple).

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos en el estilo de letra usual; debajo el nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en estilo de letra negrita; debajo la referencia de su departamento o institución de trabajo en 11 puntos en el estilo de letra usual; y debajo la dirección de correo electrónico en estilo de letra Courier New en 11 puntos.

A continuación la palabra Abstract, en minúsculas de 12 puntos en estilo de letra negrita y debajo su contenido en inglés el tamaño de letra de texto 11 puntos en estilo itálica o cursiva, estrechado a ambos lados aproximadamente 1 cm.

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto. La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como en estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

En caso de usar Latex

Usar estilo "article" en 11 puntos y, por lo demás, tener en cuenta lo indicado para usuarios de Word. Para la dirección de correo electrónico usar el tipo de letra \tt.

Si se usan paquetes específicos de Latex distintos de los usuales, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Respecto de las Figuras

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser impresas. Las figuras deben llevar debajo numeración (Figura 1, Figura 2, …), para referirse a ellas en el texto. No debe escribirse texto a ninguno de los lados de la figura, ni a la izquierda ni a la derecha (es decir, las figuras no deben intercalarse en el texto)

Reseñas de libros

Las reseñas de libros, se enviarán como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Envío de originales

Se enviará en formato electrónico a nuestra cuenta `puigadam@mat.ucm.es` o bien en un CD o disquete formateado para PC compatible.

De otro modo, también puede enviarse impreso en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, cuya dirección que figura en la página 2 del Boletín. Pero, una vez aceptado para su publicación, se ha de enviar el correspondiente archivo en formato electrónico en la forma anteriormente indicada.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de diez euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son del 39 en adelante.

El importe puede ser abonado mediante transferencia a la cuenta de la Sociedad, ES13-3025-0006-2414-0000-2948, domiciliada en la entidad bancaria *Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28003*.(o bien mediante un cheque a nombre de *la Sociedad)*.

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella la *dirección* a donde se han de enviar y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia*.

BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN EN LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

D. ....Teléf.: ....
Dirección: ....
Ciudad: .... Cod. Postal: ....E-mail: ....
Centro de trabajo: ....

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NÚMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco: ....
Dirección de la Sucursal: ....
para que cargue en mi cuenta: .... / .... / .... / .... /.
los recibos de las cuotas correspondientes al año 2015 y siguientes.

Fecha: .... de .... de 2015

Firma:

La cuota anual fue establecida en la Asamblea 2012 (como ya se anunció en el Boletín nº 91) en 51 euros para socios individuales y 62 para institucionales (que incluyen la cuota de la Federación de Sociedades, que envía a nuestros socios la revista SUMA).
Quienes prefieran abonar la cuota mediante transferencia pueden hacerlo a la c.c. de nuestra Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

CAJA DE INGENIEROS
c/. Carranza, 5 - 28004 Madrid
cc. ES13 3025-0006-24-1400002948

ORDEN DE DOMICILIACIÓN EN LA ENTIDAD BANCARIA

Fecha: .... BANCO: ....

Sucursal o Agencia: .... en: ....

Dirección de esta: ....

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta: .... / .... / .... / .... /.
los recibos de mi cuota anual de la Sociedad "Puig Adam", de profesores de Matemáticas hasta nueva orden. Les saluda atentamente:

Firma:

Nombre y Apellidos: ....

Dirección: ....

Remítanse ambas partes (toda esta página) a nuestra sede:

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matematicas
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)
C/ Rector Royo Villanova, s/n. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.