MASTER EN CIENCIAS ACTUARIALES Y FINANCIERAS UCM
Requisitos mínimos de matemáticas

El Máster en Ciencias Actuariales y Financieras es un máster muy técnico que precisa una base matemática sin la cual no se pueden cursar el resto de las asignaturas. Los requerimientos matemáticos son distintos a los de otros másteres del área de economía y finanzas.

Para que los solicitantes al máster puedan evaluar si su formación matemática es adecuada o no, presentamos unos ejemplos de ejercicios que **los solicitantes deberían saber hacer para poder acceder** al máster. En la asignatura de ampliación de Matemáticas se repasarán (rápidamente) y se ampliarán estos conocimientos, pero se da por hecho que los temas que presentamos se cursaron en el grado con un nivel similar de dificultad, y que son ya conocidos al iniciar el máster.

Es posible que, dependiendo de los estudios de procedencia, pudiese haber algún tema que no se haya estudiado. Si son pocos temas, el problema no es grave, y se podrá remediar. Pero si alguien no sabe hacer más del 70% de los ejercicios que aquí presentamos, creemos que su formación matemática no es suficiente para cursar el Máster en Ciencias Actuariales y Financieras en la UCM.

Diagonalización de matrices. Autovalores y autovectores

1) Estudiar si la siguiente matriz es diagonalizable, y si lo es diagonalizarla:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: Calculamos los autovalores de A:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & -3 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3).$$

Resolviendo $p_A(\lambda) = 0$ obtenemos los autovalores $\lambda = 3$ doble (multiplicidad algebraica $m_3 = 2$) y $\lambda = 1$ simple (multiplicidad algebraica $m_1 = 1$).

• Estudiamos los autovectores de $\lambda = 3$:

$$(A - 3I)X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como el rango de la matriz es 1 la multiplicidad geométrica del autovalor $\lambda = 3$ es $\mu_3 = 3 - \text{rango}(A - 3I) = 3 - 1 = 2 = m_3$, y como el otro autovalor es simple, concluimos que A es diagonalizable.

La ecuación de autovectores para $\lambda = 3$ es $-y + 3z = 0$. Como hay dos grados de libertad, tomamos $x = a$, $z = b$, y nos queda $y = 3b$. Por tanto la solución es $x = a$, $y = 3b$, $z = b$ y una base del subespacio de autovectores es $\{(1, 0, 0), (0, 3, 1)\}$.

• Estudiamos los autovectores de $\lambda = 1$:

$$(A - 1I)X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como el rango de la matriz es 2 la multiplicidad geométrica del autovalor $\lambda = 1$ es $\mu_1 = 3 - \text{rango}(A - 1I) = 3 - 2 = 1 = m_1$.

Las ecuaciones de autovectores para $\lambda = 1$ son $\left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{array} \right.$ y haciendo $z = \alpha$ obtenemos $\left\{ \begin{array}{l} 2x - y = -3\alpha \\ y = \alpha \end{array} \right.$. La solución es $x = -\alpha, y = \alpha$, $z = \alpha$, y una base del subespacio de autovectores es $\{(-1, 1, 1)\}$.

Por tanto, tenemos $A = PDP^{-1}$ con

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Formas cuadráticas

2) Dada la forma cuadrática $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$Q(x, y, z) = -2x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2yz.$$

a) Estudiar el signo de Q.
b) Estudiar el signo de la restricción de Q al subespacio $S\colon x - y - z = 0$.

Solución: a) La matriz correspondiente a la forma cuadrática es

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculando los menores principales tenemos $\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0$. Como los signos de los menores principales son $(-, +, +)$ conluimos que la forma cuadrática Q es indefinida.

b) Tenemos $\dim S = 3 - 1 = 2$. Unas ecuaciones paramétricas de S son $x = \alpha + \beta$ $y = \alpha$, $z = \beta$, y sustituyendo en Q obtenemos la forma cuadrática restringida

$$\begin{aligned} q(\alpha, \beta) &= Q(\alpha + \beta, \alpha, \beta) = -2\,(\alpha + \beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 2\,(\alpha + \beta)\,\alpha + 2\alpha\beta \\ &= -5\alpha^2 - 3\beta^2 - 4\alpha\beta. \end{aligned}$$

La matriz correspondiente es $B = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. Calculando los menores principales tenemos $\Delta_1 = -5 < 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 11 > 0$. Como los signos de los menores principales son $(-, +)$ conluimos que la restricción de la forma cuadrática Q a S es definida negativa.

Funciones diferenciables de varias variables

3) Dada la función

$$f(x,y,z) = \sqrt{x}e^{2y-z^2}$$

determinar los valores de b para los cuales el vector $\vec{v} = (b, 1, -1)$ determina una dirección de decrecimiento de f en el punto $\vec{a} = (4, 2, -2)$.

Solución: Para que el vector $\vec{v}$ determine una dirección de decrecimiento en el punto $\vec{a}$ se tiene que cumplir que la derivada de f en $\vec{a}$ según el vector $\vec{v}$ sea negativa $D_{\vec{v}}f(\vec{a}) < 0$. La derivada la calculamos mediante la fórmula $D_{\vec{v}}f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{v}$. Derivando tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \tfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{2y-z^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\sqrt{x}e^{2y-z^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = -2\sqrt{x}ze^{2y-z^2}$$

y sustituyendo en el punto $\vec{a} = (4, 2, -2)$ obtenemos el vector gradiente $\nabla f(\vec{a}) = (\frac{1}{4}, 4, 8)$.

Por tanto, se tendrá que cumplir

$$D_{\vec{v}}f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{v} = (\tfrac{1}{4}, 4, 8) \cdot (b, 1, -1) = \tfrac{b}{4} - 4 < 0,$$

y concluimos que tendrá que ser $b < 16$.

Optimización no lineal de funciones de n variables

4) Calcular los puntos críticos de la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + xy - 3y - 3z + e^{z-1}$$

y determinar si los puntos críticos son máximos, mínimos o puntos de silla.

Solución: Calculamos los puntos críticos igualando a cero las derivadas primeras

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y + x - 3 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = -3 + e^{z-1} = 0 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos $x = -1, y = 2$ y de la tercera $z = 1 + \ln 3$. Por tanto el único punto crítico es $(-1, 2, 1 + \ln 3)$.

Para determinar qué clase de punto crítico tenemos, estudiamos la matriz Hessiana de derivadas segundas

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = e^{z-1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0 \end{array}$$

y por tanto

$$Hf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{z-1} \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(-1, 2, 1 + \ln 3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Estudiamos su signo por el criterio de menores principales. Tenemos $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 > 0$. Por el criterio de menores principales concluimos que la matriz Hessiana es definida positiva y por tanto que el punto $(-1, 2, 1 + \ln 3)$ es un mínimo local de f.

Optimización no lineal con restricciones de igualdad. Método de los multiplicadores de Lagrange

5) Calcular los puntos críticos de la función

$$f(x, y, z) = x^2yz$$

con las restricciones

$$2x^2 + y^2 + z^2 = 4, \ x, y, z > 0$$

(utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange). Determinar si los puntos críticos son máximos, mínimos o puntos de silla.

Solución: Definimos la función Lagrangiana

$$L(x, y, z; \lambda) = x^2yz - \lambda \left(2x^2 + y^2 + z^2 - 4\right).$$

Los puntos críticos restringidos son las soluciones de las ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2xyz - 4\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = x^2z - 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = x^2y - 2\lambda z = 0, \\ 2x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$$

Despejando λ en cada ecuación obtenemos

$$\lambda = \frac{yz}{2},$$
$$\lambda = \frac{x^2z}{2y},$$
$$\lambda = \frac{x^2y}{2z}.$$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos $\dfrac{yz}{2} = \dfrac{x^2z}{2y}$ y por tanto $y^2 = x^2$, y concluimos que $y = x$ (en los pasos anteriores hemos usado para simplificar que nos dicen que $x, y, z > 0$). Análogamente, de las dos últimas ecuaciones obtenemos $y = z$. Sustituyendo en la restricción obtenemos $4z^2 = 4$ y por tanto $z = 1$.
Concluimos por tanto que el punto crítico es $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ y que $\lambda = 1/2$.

Para analizar el punto crítico aplicamos el criterio de las derivada segundas. Derivando tenemos

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2yz - 4\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 2xz,$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = 2xy,$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = -2\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = x^2,$$

y por tanto la matriz Hessiana en el punto crítico es

$$\mathrm{H}L\,(1,1,1;\lambda=1/2)=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

La restricción es $g(x,y,z)=2x^2+y^2+z^2-4$, su gradiente $\nabla g(x,y,z)=(4x,2y,2z)$, y por tanto $\nabla g(1,1,1)=(4,2,2)$. El subespacio tangente a la restricción en el punto $(1,1,1)$ tiene por ecuación $T\colon\ 4t_1+2t_2+2t_3=0$.

Estudiamos el signo de la restricción de la Hessiana al subespacio tangente T. Unas ecuaciones paramétricas de T son $t_1=\alpha$, $t_2=\beta$, $t_3=-2\alpha-\beta$. La expresión polinómica de la forma cuadrática correspondiente a la matriz Hessiana es

$$Q(t_1,t_2,t_3)=-t_2^2-t_3^2+4t_1t_2+4t_1t_3+2t_2t_3.$$

Sustituimos las ecuaciones paramétricas de T y obtenemos la forma cuadrática restringida:

$$\begin{aligned} q(\alpha,\beta)&=-\beta^2-(-2\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta+4\alpha(-2\alpha-\beta)+2\beta(-2\alpha-\beta)\\ &=-12\alpha^2-8\alpha\beta-4\beta^2\end{aligned}$$

La matriz de la forma cuadrática restringida q es $\begin{pmatrix} -12 & -4\\ -4 & -4\end{pmatrix}$. Estudiamos el signo de q mediante el método de los menores principales y tenemos: $\Delta_1=-12<0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} -12 & -4\\ -4 & -4\end{vmatrix}=32>0$, Como los signos son $(-,+)$, q es definida negativa y el punto $(1,1,1)$ es un **máximo** local restringido.

Series geométricas

6) Calcular

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{2^{2n+2}}.$$

Solución: Escribimos el sumatorio como una serie geométrica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{2^{2n+2}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n 3^{-1}}{2^{2n} 2^2} = \frac{1}{3 \cdot 2^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n}} = \frac{1}{12} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{(2^2)^n} = \frac{1}{12} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

así que es una serie geométrica de razón $r = \frac{3}{4} < 1$, y por tanto es convergente. Aplicando la fórmula para la suma de la serie geométrica

$$\sum_{n=m}^{\infty} r^n = \frac{r^m}{1-r}$$

obtenemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{2^{2n+2}} = \frac{1}{12} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{12} \frac{(3/4)^2}{(1-3/4)} = \frac{3}{16}.$$

7) Calcular la siguiente integral haciendo el cambio de variable $t = \sqrt{x}$

$$\int_4^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

Solución: Hacemos el cambio de variable $t = \sqrt{x} = x^{1/2}$, $x = t^2$, $dx = 2tdt$, $x = \infty \Rightarrow t = \infty$, $x = 4 \Rightarrow t = \sqrt{4} = 2$, y tenemos

$$\int_4^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx = \int_2^{\infty} e^{-t} 2tdt$$

Esta integral se calcula integrando por partes tomando $u = 2t$, $dv = e^{-t} \Rightarrow du = 2dt, v = -e^{-t}$

$$\int e^{-t} 2tdt = -2te^{-t} - \int (-e^{-t}) 2dt = -2e^{-t}(t+1),$$

Aplicando la regla de Barrow para integrales impropias tenemos

$$\begin{aligned}\int_4^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx = \int_2^{\infty} e^{-t} 2tdt &= \left[-2e^{-t}(t+1)\right]_{t=2}^{t=\infty} \\ &= \lim_{t\to\infty} \left(-2e^{-t}(t+1)\right) - (-2e^{-2}(2+1)).\end{aligned}$$

El límite lo calculamos aplicando la regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to\infty} -2e^{-t}(t+1) = \lim_{x\to\infty} \frac{-2(t+1)}{e^t} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{e^t} = 0.$$

Por tanto

$$\int_4^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx = \frac{6}{e^2}.$$

Ecuaciones diferenciales de variables separables

8) Calcular la solución de la ecuación diferencial $y' = xe^{-2y}$, con la condición inicial $y(0) = 3$.

Solución: Es una ecuación diferencial de variables separables

$$\begin{aligned} y' &= xe^{-2y} \\ \frac{dy}{dx} &= xe^{-2y} \\ \frac{dy}{e^{-2y}} &= xdx \\ \int e^{2y}dy &= \int xdx + C \\ \frac{e^{2y}}{2} &= \frac{x^2}{2} + C \end{aligned}$$

Despejando y obtenemos

$$\frac{e^{2y}}{2} = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow e^{2y} = x^2 + 2C \Rightarrow 2y = \ln\left(x^2 + 2C\right)$$

y por tanto la solución general es $y(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2C)$.

Finalmente imponemos la condición inicial

$$3 = y(0) = \frac{1}{2}\ln(0^2 + 2C) = \frac{1}{2}\ln(2C) \Rightarrow \ln(2C) = 6 \Rightarrow 2C = e^6 \Rightarrow C = \frac{e^6}{2}.$$

y por tanto la solución es

$$y(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + e^6).$$

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

9) Calcular la solución de la siguiente ecuación diferencial

$$y' - \frac{y}{2x} = \ln x$$

con la condición inicial $y(e^2) = 2$.

Solución: Es una ecuación diferencial lineal de primer orden $y' + f(x)y = g(x)$ con $f(x) = -\dfrac{1}{2x}$ y $g(x) = \ln x$. Tenemos

$$F(x) = \int f(x)dx = \int -\frac{1}{2x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx = -\frac{1}{2}\ln x$$

y por tanto la solución de la ecuación homogénea es

$$y_H(x) = Ae^{-F(x)} = Ae^{\frac{1}{2}\ln x} = Ae^{\ln(x^{1/2})} = Ax^{1/2} = A\sqrt{x}.$$

Para la solución particular usamos la fórmula $y_P(x) = e^{-F(x)}\int g(x)e^{F(x)}dx$. Tenemos

$$\int g(x)e^{F(x)}dx = \int \ln x\left(e^{-\frac{1}{2}\ln x}\right)dx = \int \left(e^{\ln x}\right)^{-\frac{1}{2}}\ln x dx = \int x^{-1/2}\ln x dx$$

Para hacer esta integral integramos por partes tomando $u = \ln x$, $dv = x^{-1/2}dx \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$, $v = 2x^{1/2}$:

$$\int g(x)e^{F(x)}dx = 2x^{1/2}\ln x - \int 2x^{1/2}\frac{1}{x}dx = 2x^{1/2}\ln x - 2\int x^{-1/2}dx = 2x^{1/2}\ln x - 4x^{1/2}.$$

Sustituyendo obtenemos la solución particular

$$y_P(x) = e^{\frac{1}{2}\ln x}(2x^{1/2}\ln x - 4x^{1/2}) = \sqrt{x}(2x^{1/2}\ln x - 4x^{1/2}) = 2x\ln x - 4x.$$

Por tanto la solución general de la ecuación es

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = A\sqrt{x} + 2x\ln x - 4x.$$

Finalmente, imponemos la condición inicial $y(e^2) = 2$ y obtenemos

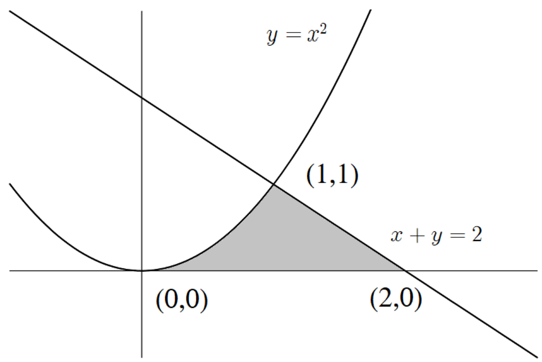
$$\begin{aligned}
2 &= y(e^2) = A\sqrt{e^2} + 2e^2\ln e^2 - 4e^2 \\
2 &= Ae + 4e^2 - 4e^2 = Ae \\
A &= \frac{2}{e},
\end{aligned}$$

y por tanto la solución es

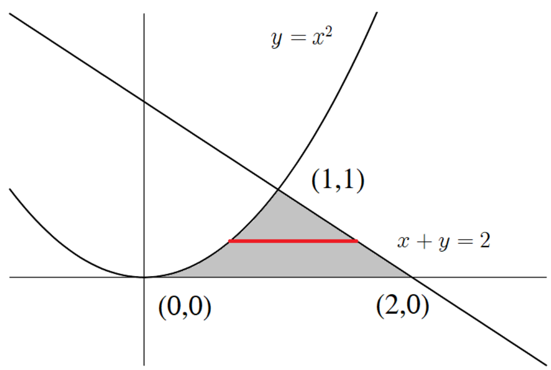
$$y(x) = \frac{2}{e}\sqrt{x} + 2x\ln x - 4x.$$

10) Calcular la integral doble $\iint_D xydxdy$, siendo
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2, y + x \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Solución: El punto de corte de la recta $y + x = 2$ y la parábola $y = x^2$ es el punto $(1,1)$, así que el recinto es el de la figura siguiente

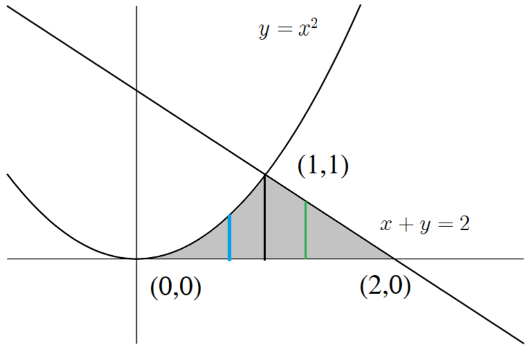


Calculamos la integral usando el teorema de Fubini. Si integramos en horizontal tenemos una sola integral



$$
\begin{aligned}
\iint_D xydxdy &= \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{2-y} xydx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{x=\sqrt{y}}^{x=2-y} dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{(2-y)^2}{2} y - \frac{\left(\sqrt{y}\right)^2}{2} y \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\left(4 + y^2 - 4y\right) y - yy \right) dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(y^3 - 5y^2 + 4y\right) dy = \frac{1}{2} \left[\frac{y^4}{4} - \frac{5y^3}{3} + 2y^2 \right]_{y=0}^{y=1} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{3} + 2 - 0 \right) = \frac{7}{24}.
\end{aligned}
$$

También se puede hacer la integral integrando en vertical, pero tenemos que descomponer la integral en dos trozos



$$
\begin{aligned}
\iint_D xydxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} xydy\right)dx + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} xydy\right)dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x^2} dx + \int_1^2 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2-x} dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x\left(x^2\right)^2}{2} - 0\right)dx + \int_1^2 \left(\frac{x\left(2-x\right)^2}{2} - 0\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 x^5 dx + \frac{1}{2}\int_1^2 \left(x^3 - 4x^2 + 4x\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{x^6}{6}\right]_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2\right]_{x=1}^{x=2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - 0\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{16}{4} - \frac{32}{3} + 8\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + 2\right)\right) = \frac{7}{24}.
\end{aligned}
$$