

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

**TEORÍA DE DISTRIBUCIONES
Y APLICACIONES A LAS EDP**

GINÉS CONESA CEREZUELA

DIRIGIDO POR F. JAVIER SORIA DE DIEGO



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA

MÁSTER EN MATEMÁTICAS AVANZADAS

CURSO 2022/2023

Madrid, 12 de febrero de 2024

RESUMEN. Este trabajo aborda, desde el punto de vista del Análisis Funcional, la Teoría de Funciones Generalizadas, más conocida como Teoría de Distribuciones. Esta se desarrolla principalmente en el contexto de espacios localmente convexos, por lo que el texto comienza con una introducción a los espacios vectoriales topológicos abstractos, cubriendo aquellos aspectos más básicos y los necesarios para el desarrollo de las secciones restantes. A raíz de esto, se presenta la teoría general de las distribuciones como el dual del espacio de funciones test, y se intentan trasladar a ellas las operaciones más relevantes del Cálculo comprobando además que en el caso funcional, es decir en aquellas distribuciones asociadas a funciones, todo permanece igual. Una de ellas, la transformada de Fourier, ocupará un capítulo propio por las dificultades que presenta su adaptación a esta nueva clase de objetos, y por las propiedades y aplicaciones tan variadas que presenta, tanto en funciones de varias variables complejas como en EDPs. Finalmente, como ejemplo de aplicación habrá un capítulo dedicado exclusivamente a las EDPs y cómo las distribuciones nos pueden ayudar a resolverlas o a obtener propiedades de regularidad de las soluciones, comentando en particular un par de problemas que involucran a la ecuación de Poisson.

ABSTRACT. From the Functional Analysis point of view, this work focuses on the Generalized Functions Theory, better known as Distributions Theory. This is mainly developed in the context of locally convex spaces, so the text begins with an introduction to abstract topological vector spaces, covering the most basic and necessary aspects for the development of the remaining sections. After this, the general theory of distributions is introduced as the dual of the test functions space, and an attempt is made to transfer the most relevant operations of Calculus to them, also verifying that in the functional case, that is, in those distributions associated to functions, everything remains the same. One of them, the Fourier transform, will take up its own chapter due to the difficulties of its translation to this new type of objects, and to the varied properties and applications it presents, both in functions of several complex variables and in PDEs. Finally, as an example of application a chapter will be dedicated exclusively to the PDEs and how distributions can help us solve them or obtain regularity properties of the solutions, commenting in particular on a couple of problems involving the Poisson equation.

Índice general

1	Introducción	3
2	Espacios vectoriales topológicos	5
2.1	Definiciones y características básicas	5
2.2	Seminormas y convexidad local	13
2.3	Dualidad y teoremas de Hahn-Banach	16
2.4	Espacios de funciones $L^p(X)$ y sucesiones ℓ^p	21
2.5	Topologías débiles	25
2.6	Integración de funciones vectoriales	31
3	Teoría de Distribuciones	35
3.1	Espacio de funciones test y distribuciones	35
3.2	Cálculo con distribuciones	42
3.3	Localización y soporte de una distribución	45
3.4	Comportamiento local	49
3.5	Convoluciones	51
4	Transformada de Fourier y distribuciones temperadas	59
4.1	Transformada de Fourier	59
4.2	Distribuciones temperadas	66
4.3	Teoremas de Paley-Wiener	72
4.4	Lema de Sobolev	76
5	Aplicaciones a las Ecuaciones en Derivadas Parciales	79
5.1	Soluciones fundamentales	79
5.2	Ecuaciones elípticas	83
5.3	Ecuación de Poisson y funciones de Green	89
A	Resultados de compacidad	93
A.1	Teorema de Alexander y Tychonoff	93
A.2	Teorema de Ascoli	93
	Bibliografía	96

Capítulo 1

Introducción

La Teoría de Funciones Generalizadas comenzó a desarrollarse ya en el siglo XVIII por múltiples matemáticos y físicos, quienes a pesar del escaso rigor con el que contaban, se encontraron con la controvertida situación de hallar funciones no diferenciables que debían ser solución de ciertas ecuaciones en derivadas parciales. Quizá uno de los ejemplos más claros es el del movimiento de la cuerda de un violín pulsada en su punto medio, la cual vibra según la ley

$$g(x, t) = a - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{t} \right) (|x - ct| + |x + ct|)$$

para ciertas constantes positivas a y c intrínsecas a la cuerda. Claramente, dicha función no es derivable en los puntos $x = ct$ y $x = -ct$, mientras que la ecuación de ondas, que es la que rige el movimiento de una cuerda vibrante, es una ecuación en derivadas parciales de orden 2. Esta misma situación se fue observando también en muchos otros fenómenos dinámicos de la Física, fenómenos que habitualmente vienen descritos por ecuaciones hiperbólicas como la de ondas. Todo ello llevó a redefinir en varias ocasiones el concepto de solución de una ecuación en derivadas parciales, dando lugar así a “soluciones generalizadas” que pasaban por ampliar el espacio de soluciones a objetos más generales donde se pudiese extender la noción de derivada.

Por otro lado, el segundo gran actor en el desarrollo de dicha teoría vino de la mano de los físicos, especialmente de aquellos relacionados con los campos de la Ingeniería Eléctrica, a finales del siglo XIX, y la Mecánica Cuántica, en 1930. Estos comenzaron a usar un cálculo formal de difícil justificación matemática basado en lo que hoy conocemos como delta de Dirac, en el primer caso influenciados por el ingeniero Oliver Heaviside con el objetivo de entender matemáticamente la contribución de las cargas eléctricas puntuales en las ecuaciones del Electromagnetismo, y en el segundo por el físico P. A. M. Dirac, pues en sus tratados sobre Mecánica Cuántica esta se desarrolla en espacios vectoriales de dimensión infinita, y los operadores físicamente más relevantes suelen ser los no acotados, por lo que el tratamiento habitual con bases y representaciones matriciales finitas o numerables debía ser sustituido por algún análogo no numerable.

Las soluciones que se dieron a esta clase de problemas fueron durante mucho tiempo particulares de cada trabajo o problema de estudio, y en numerosas ocasiones carentes del rigor matemático necesario como para ser consideradas por válidas, aunque físicamente condujesen a resultados coherentes. No obstante cabe mencionar que en 1913, con la demostración de los teoremas de representación de Riesz [1] ya se empezó a vislumbrar cuál sería el camino a seguir a partir de entonces, pues este probó que cierta clase de funcionales lineales podía ser representada mediante funciones ordinarias. La primera teoría matemáticamente exitosa de funciones generalizadas, y la más empleada hasta la fecha, es la Teoría de Distribuciones, que comenzó su desarrollo en 1936 por parte del matemático Sergéi Sóbolev, quien las introdujo (aún sin este nombre) como herramienta para un método de resolución del problema de Cauchy en ecuaciones lineales hiperbólicas normales. La cla-

ve de su definición estaba en sustituir las funciones por funcionales lineales sobre un determinado espacio funcional, y las operaciones como la derivación por su transpuesta, de modo que ahora toda función localmente integrable podía verse como una distribución y por tanto derivarse. Sin embargo, Sóbolev no continuó con su estudio más allá de lo necesario para resolver el problema de Cauchy antes mencionado, por lo que aún quedaron varios asuntos pendientes como el de la delta de Dirac o la aplicación de las transformadas de Fourier y Laplace a las distribuciones. El primero en dar una teoría realmente completa, versátil, y aplicable a gran variedad de problemas fue el matemático Laurent Schwartz, quien entre 1950-1951 presentó sus monografías sobre la Teoría de Distribuciones, haciendo de este campo de estudio un nuevo paradigma en Matemáticas, y que rápidamente se convirtieron en las obras de referencia sobre el tema. La clave de su éxito fue la aplicación del análisis funcional abstracto que él mismo había estudiado y desarrollado en detalle años atrás, y que supo dar respuesta a todos aquellos asuntos que Sóbolev no trató.

Con respecto al presente trabajo, lo hemos dividido en cuatro capítulos más un breve apéndice al final. En el primer capítulo abarcamos el análisis funcional abstracto que antes mencionamos, principalmente la teoría de espacios vectoriales topológicos, que tratan de generalizar el concepto de espacio de Banach relajando el requisito de una norma por el de una topología que preserve ciertas propiedades. Esto aunque parezca una gran diferencia vamos a ver que en realidad no lo es, pues con algunas hipótesis extras podemos recuperar varios de los grandes resultados de los espacios de Banach. No obstante, es importante mencionar que por cuestiones de espacio, se han omitido algunos asuntos típicos en dicha teoría como los teoremas de Banach-Steinhaus, el de la Gráfica Cerrada, o el de la Aplicación Abierta, además de las habituales referencias a redes, filtros, o límites inductivos.

En el segundo capítulo nos adentramos en el espacio de funciones test, dotándolo de una topología que nos va a permitir verlo como espacio vectorial topológico, y así definir el concepto de distribución como un funcional lineal y continuo sobre este. Además, si recordamos, esta definición pretendía entre otras cosas extender el concepto de derivada a objetos más generales que las funciones, es por ello que dedicaremos las siguientes secciones a ver los ejemplos más típicos de distribuciones como la delta de Dirac, o las definidas por funciones, y a extender las operaciones típicas de derivación, producto, convolución... confirmando así las distribuciones como estos objetos que andábamos buscando.

En el tercer capítulo repasamos brevemente la teoría de la transformada de Fourier e intentamos trasladarla al mundo de las distribuciones. Como las funciones test no son invariantes por este tipo de transformaciones, cambiamos dicho espacio por el de funciones de rápido decrecimiento, y en él definimos un nuevo tipo de distribuciones llamadas “temperadas”, que serán sobre las que podamos aplicar la transformada de Fourier. Tras esto vemos también algunas aplicaciones a la teoría de funciones de variable compleja (Teoremas de Paley-Wiener) y a las ecuaciones en derivadas parciales (Lema de Sobolev).

Finalmente, en el último capítulo nos centramos en algunas aplicaciones a las ecuaciones en derivadas parciales. Comenzamos con el concepto de solución fundamental, de ahí pasamos a algunos resultados de regularidad en ecuaciones elípticas, y terminamos tratando el ejemplo de la ecuación de Poisson.

Con respecto al apéndice, este contiene un par de resultados de compacidad en espacios topológicos (Teorema de Alexander y Tychonoff, y Teorema de Ascoli) que serán de utilidad para probar ciertas propiedades sobre todo en los dos primeros capítulos.

La referencia principal en este trabajo ha sido [11], pues ha guiado tanto la estructura constructiva del mismo como los resultados presentes en él, aunque la ausencia de algunos detalles relevantes han llevado a la necesidad de buscar otra bibliografía o desarrollarlos por mi cuenta.

Capítulo 2

Espacios vectoriales topológicos

En muchos problemas de Análisis los objetos de estudio son espacios vectoriales de funciones, medidas, u operadores, y por la gran importancia del paso al límite en estos problemas, surge la necesidad de dotarlos de una norma o topología que permita llevar esto a cabo. En espacios habituales como los de funciones continuas sobre un compacto o los espacios de funciones L^p con $p \geq 1$, las normas los dotan de estructura de espacio de Banach, con buenas propiedades de convergencia. Sin embargo en la teoría que estamos desarrollando, las normas jugarán un papel muy relevante pero no como un fin en sí mismo, sino como medio para definir topologías con propiedades más adecuadas. Es por ello que este capítulo lo vamos a centrar en el estudio de dichos espacios, llamados espacios vectoriales topológicos, y en entender su relación con las (semi)normas. También analizaremos cómo extender el concepto de dualidad y algunos resultados de gran relevancia como los de Hahn-Banach, tan habituales en Análisis Funcional. Finalmente introduciremos los conceptos de topología débil y débil*, y la integración de funciones con valores vectoriales. Como ejemplo de aplicación comentaremos los espacios L^p para todos los valores de $p > 0$.

2.1. DEFINICIONES Y CARACTERÍSTICAS BÁSICAS

Comenzamos definiendo el concepto sobre el que se asentará este trabajo, los espacios vectoriales dotados de una topología que no necesariamente procede de una norma, pero que respeta las estructuras básicas de este.

DEFINICIÓN 2.1. Un *espacio vectorial topológico* es un espacio topológico (X, τ) , donde X tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, que satisface las siguientes dos propiedades:

- Los puntos de X son cerrados.
- Las operaciones de suma y producto por escalares son continuas.

NOTACIÓN 2.2. Con frecuencia, nos referiremos a un espacio vectorial topológico (X, τ) simplemente por X , especificando la topología τ solo en aquellos casos donde sea conveniente.

NOTACIÓN 2.3. Si $A, B \subseteq X$ y $t \in \mathbb{K}$, entonces

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} \quad \text{y} \quad tA = \{ta : a \in A\}.$$

Un resultado inmediato pero fundamental a partir de esta segunda propiedad es:

TEOREMA 2.4. Las traslaciones y homotecias de X en X son homeomorfismos.

DEMOSTRACIÓN. La clave de la prueba reside en que si consideramos una traslación $T(x) = x + a$ y una homotecia $M(x) = \lambda x$ para ciertos $a \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, resulta que sus inversos vienen dados por $T^{-1}(x) = x - a$ y $M^{-1}(x) = \lambda^{-1}x$, es decir, siguen siendo una traslación y una homotecia. La continuidad de dichas aplicaciones se debe a que la suma y el producto por escalares lo son. $\square$

OBSERVACIÓN 2.5. Una consecuencia de este resultado es que todo abierto de X se puede escribir como el trasladado de un entorno abierto del origen, y por tanto la topología τ queda completamente determinada por una base local de este.

En términos de sucesiones, conviene aclarar los conceptos básicos de convergencia.

DEFINICIÓN 2.6. Dado un espacio vectorial topológico X con base local $\mathcal{B}$, una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se dice *de Cauchy* si para cada $V \in \mathcal{B}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n - x_m \in V$ para todo $n, m \geq N$.

Del mismo modo, una sucesión se dice *convergente* si existe $x \in X$ tal que, para cada $V \in \mathcal{B}$, hay un valor $N \in \mathbb{N}$ cumpliendo $x_n - x \in V$ para todo $n \geq N$. Un espacio vectorial topológico donde toda sucesión de Cauchy es convergente se denomina *completo*.

Algunas clases de conjuntos de gran relevancia en este tipo de espacios son las siguientes.

DEFINICIÓN 2.7. Sea X un espacio vectorial topológico.

1. Un subconjunto $C \subset X$ se dice *convexo* si

$$tC + (1 - t)C \subset C \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (2.1)$$

2. Dado un subconjunto $D \subset X$, se denomina *envoltura convexa* de D al conjunto $\text{co}(D)$ dado por la intersección de todos los convexos conteniendo a D .
3. Un subconjunto $B \subset X$ se dice *balanceado* si $\alpha B \subset B$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ con $|\alpha| \leq 1$.
4. Un subconjunto $E \subset X$ se dice *acotado* si para cada entorno V del origen existe un valor $s > 0$ tal que $E \subset tV$ para todo $t > s$.
5. Un subconjunto $T \subset X$ se dice *totalmente acotado* si para cada entorno V del origen existe un conjunto finito $F \subset X$ tal que $T \subset F + V$.
6. Un subconjunto $A \subset X$ se dice *absorbente* si cada $x \in X$ se encuentra en tA para algún $t > 0$.

Pasemos a ver algunas propiedades topológicas básicas, comenzando con un resultado técnico.

TEOREMA 2.8. Supongamos que K y C son subconjuntos de un espacio vectorial topológico X con K compacto y C cerrado tales que $K \cap C = \emptyset$. Entonces el origen tiene un entorno V tal que

$$(K + V) \cap (C + V) = \emptyset.$$

DEMOSTRACIÓN. Comenzamos probando la siguiente afirmación: Si W es un entorno del origen, entonces existe un entorno U de este que es simétrico ($U = -U$) y satisface el contenido $U + U \subset W$. La forma de probarlo consiste en emplear que la suma es una función continua, que $0 + 0 = 0$, y que por las propiedades de la topología producto existen entonces entornos V_1 y V_2 del origen tales que $V_1 + V_2 \subset W$. Considerando

$$U = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2)$$

logramos un abierto en las condiciones deseadas.

Aplicando lo que acabamos de ver al abierto U en vez de W , resulta un nuevo entorno simétrico U' cumpliendo

$$U' + U' + U' + U' \subset W.$$

Si $K = \emptyset$ entonces $K + V = \emptyset$ para cualquier V y el teorema es trivial. Asumamos por tanto $K \neq \emptyset$ y consideremos $x \in K$. Como C es cerrado y no corta a K , entonces $x \in X \setminus C$, y obtenemos un entorno del origen en la forma $W_x = -x + X \setminus C$. Aplicando la afirmación anterior a W_x , obtenemos un entorno simétrico V_x tal que $x + V_x + V_x + V_x \subset X \setminus C$, luego no corta a C . Empleando la simetría de V_x , esto implica

$$(x + V_x + V_x) \cap (C + V_x) = \emptyset. \quad (2.2)$$

Como K es compacto, hay una cantidad finita de puntos $x_1, \dots, x_n \in K$ tales que

$$K \subset (x_1 + V_{x_1}) \cup \dots \cup (x_n + V_{x_n}).$$

Elijamos $V = V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}$. Entonces

$$K + V \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i} + V) \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i} + V_{x_i}),$$

y ninguno de estos términos corta a $C + V$ por (2.2), justo como queríamos. $\square$

OBSERVACIÓN 2.9. Como $K + V$ es unión de abiertos $x + V$ con $x \in K$, resulta que es un abierto conteniendo a K , y lo mismo con $C + V$. Por tanto, el teorema lo que implica es la existencia de abiertos disjuntos conteniendo un cerrado y un compacto disjuntos. De hecho, como $C + V$ es abierto, se puede afirmar que este tampoco corta la adherencia de $K + V$.

COROLARIO 2.10. *Dada una base local del origen en un espacio vectorial topológico, cada elemento de dicha base contiene la adherencia de otro elemento de esta.*

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar el Teorema 2.8 con $K = \{0\}$ y $C = X \setminus B$, siendo B un elemento de la base local. $\square$

COROLARIO 2.11. *Los espacios vectoriales topológicos son Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN. De nuevo aplicar el Teorema 2.8 con $K = \{a\}$ y $C = \{b\}$ para $a \neq b$ y tener en cuenta que los puntos son cerrados en estas topologías. $\square$

Otras propiedades relacionadas con la adherencia y el interior de un conjunto, que denotaremos por $\overline{E}$ y E° respectivamente en un subconjunto $E \subset X$, son las siguientes.

TEOREMA 2.12. *Sea X un espacio vectorial topológico.*

1. Si $A \subset X$ entonces $\overline{A} = \bigcap_V (A + V)$, donde V se mueve en todos los entornos del origen.
2. Si $A, B \subset X$, entonces $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$.
3. Si Y es un subespacio vectorial de X , entonces $\overline{Y}$ también.
4. Si C es un subconjunto convexo, entonces $\overline{C}$ y C° también.
5. Si B es un subconjunto balanceado, $\overline{B}$ también, y si además $0 \in B^\circ$ entonces este también.
6. Si E es acotado, entonces $\overline{E}$ también.

DEMOSTRACIÓN. Analicemos cada apartado:

1. Sabemos que $x \in \overline{A}$ si y solo si $(x + V) \cap A \neq \emptyset$ para todo entorno V del origen, y esto ocurre si y solo si $x \in A - V$ para cada V . Como además $-V$ es entorno del origen si y solo lo es V , se concluye el resultado.
2. Tomemos $a \in A$, $b \in B$ y W un entorno de $a + b$. Por continuidad de la suma hay entornos W_a y W_b de a y b tales que $W_a + W_b \subset W$.

Considerando ahora $x \in A \cap W_a$ e $y \in B \cap W_b$, es claro que $x + y \in (A + B) \cap W$, por lo que la intersección es no vacía. En consecuencia, $a + b \in \overline{A + B}$.

3. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Por el Teorema 2.4 se da la igualdad $\alpha \overline{Y} = \overline{\alpha Y}$ para cualquier valor de α , luego empleando esto y el apartado anterior deducimos que

$$\alpha \overline{Y} + \beta \overline{Y} \subset \overline{\alpha Y} + \overline{\beta Y} \subset \overline{\alpha Y + \beta Y} \subset \overline{Y},$$

donde empleamos que Y es un subespacio para justificar el último contenido.

4. La prueba de que la adherencia de un conjunto convexo es convexa es análoga a la del apartado anterior, luego basta probar que el interior lo es. Como C° está contenido en C y este es convexo, entonces

$$tC^\circ + (1 - t)C^\circ \subset C^\circ \quad \forall t \in [0, 1].$$

Sin embargo los dos conjuntos en la izquierda son abiertos, por tanto su suma también lo es, de donde deducimos que de hecho está contenida en C° . Esto concluye la convexidad de C° .

5. De nuevo la prueba de la adherencia es análoga a la de 3, luego nos limitamos a estudiar el interior. Si $0 < |\alpha| \leq 1$ entonces $\alpha B^\circ = (\alpha B)^\circ$ por ser homeomorfismos las homotecias. De ello se siguen las inclusiones

$$\alpha B^\circ \subset \alpha B \subset B,$$

donde el último contenido es por ser B balanceado. Pero αB° es abierto, luego está contenido en B° . Si además B° contiene el origen, entonces el contenido $\alpha B^\circ \subset B^\circ$ se da incluso para $\alpha = 0$.

6. Sea V un entorno del origen. Por el Corolario 2.10 existe otro entorno del origen W tal que $\overline{W} \subset V$. Como E está acotado, $E \subset tW$ para valores de t suficientemente grandes. Entonces para dicho rango se dan los contenidos $\overline{E} \subset t\overline{W} \subset tV$.

□

Mostremos una sencilla estrategia para generar bases locales y todo el espacio a partir, simplemente, de un entorno del origen.

TEOREMA 2.13. *Supongamos que V es un entorno del origen en un espacio vectorial topológico.*

1. Si $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales creciente, positiva y tendiendo a infinito, entonces

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V.$$

2. Si $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales decreciente, positiva y tendiendo a 0, y si V es acotado, entonces el conjunto

$$\{\delta_n V : n \in \mathbb{N}\}$$

es una base local del origen.

DEMOSTRACIÓN. Veamos cada afirmación:

1. Fijemos $x \in X$. Como la aplicación

$$\mathbb{K} \longrightarrow X, \quad \alpha \longrightarrow \alpha x,$$

es continua, entonces la preimagen de V es un abierto conteniendo al 0, por lo que de hecho contiene la sucesión $(1/r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para valores de n suficientemente grandes. Esto significa que $(1/r_n)x \in V$ para algún valor de n , o lo que es lo mismo, $x \in r_n V$, y como x es arbitrario, se da la igualdad del enunciado.

2. Sea U un entorno del origen. Como V es acotado, existe $s > 0$ tal que $V \subset tU$ para cada $t > s$. Si n es suficientemente grande se satisfará la desigualdad $s\delta_n < 1$, luego $V \subset (1/\delta_n)V$ en dicho rango. Por tanto U contiene todos, salvo una cantidad finita, los $\delta_n V$.

□

OBSERVACIÓN 2.14. El primer apartado de este teorema nos dice, en particular, que todo entorno del origen es absorbente.

Finalmente, introducimos los distintos tipos de espacio vectorial topológico y algunas características básicas.

DEFINICIÓN 2.15. Decimos que un espacio vectorial topológico es:

- *Localmente convexo* si existe una base local de la topología cuyos miembros son convexos.
- *Localmente acotado* si el origen tiene un entorno acotado.
- *Localmente compacto* si el origen tiene un entorno de adherencia compacta.
- *Metrizable* si la topología es compatible con alguna métrica.
- Un *F-espacio* si la topología es compatible con una métrica d completa e invariante, en el sentido de que

$$d(x+z, y+z) = d(x, y) \quad \forall x, y, z \in X.$$

- Un *espacio Fréchet* si es localmente convexo y un F-espacio.
- *Normable* si la topología es compatible con la métrica inducida por alguna norma.

Además, decimos que un espacio tiene la propiedad de *Heine-Borel* si los subconjuntos cerrados y acotados son compactos.

COROLARIO 2.16. *Los subespacios cerrados de alguno de los tipos de espacio vectorial topológico expuestos en la Definición 2.15 pertenecen al mismo tipo.*

DEMOSTRACIÓN. La comprobación es sencilla con propiedades básicas de Topología general. □

TEOREMA 2.17. *Supongamos que Y es un subespacio de un espacio vectorial topológico X , que además es un F-espacio con la topología inducida por este. Entonces Y es un subespacio cerrado de X .*

DEMOSTRACIÓN. Elijamos una métrica d invariante en Y compatible con su topología. Sea

$$B_{1/n} = \left\{ y \in Y : d(0, y) < \frac{1}{n} \right\},$$

y $U_n \subset X$ un entorno del origen tal que $B_{1/n} = Y \cap U_n$. Por continuidad de la suma escogemos también un entorno simétrico $V_n \subset X$ del origen tal que $V_n + V_n \subset U_n$ y $V_{n+1} \subset V_n$.

Para ver que Y es cerrado, consideremos $x \in \overline{Y}$ y definamos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$E_n = Y \cap (x + V_n).$$

Si $y_1, y_2 \in E_n$, entonces $y_1 - y_2 \in Y$ y también en $V_n + V_n \subset U_n$, luego en $B_{1/n}$. En consecuencia, los diámetros de los conjuntos E_n tienden a 0, y como cada E_n es no vacío e Y es completo, se sigue que las Y -adherencias de los conjuntos E_n tienen exactamente un punto y_0 en común.

Sea ahora un entorno W del origen, y definamos

$$F_n = Y \cap (x + V_n \cap W).$$

Por el mismo argumento de antes, las Y -adherencias de los conjuntos F_n tienen un único punto en común y_W . Como $F_n \subset E_n$, resulta que $y_0 = y_W$, y por el contenido $F_n \subset x + W$ se sigue finalmente que y_0 se encuentra en la X -adherencia de $x + W$ para cada entorno W . Esto implica que $x = y_0 \in Y$, y por tanto que $Y = \overline{Y}$, es decir, que Y es cerrado. $\square$

Algunas características especiales en relación a los entornos y bases locales del origen se muestran a continuación.

TEOREMA 2.18. *En un espacio vectorial topológico,*

1. *Cada entorno del origen contiene un entorno balanceado de este. En particular, siempre existe una base local balanceada del espacio.*
2. *Cada entorno convexo del origen contiene un entorno convexo y balanceado de este. En particular, todo espacio localmente convexo tiene siempre una base local convexa y balanceada.*

DEMOSTRACIÓN. Probemos cada apartado:

1. Supongamos que U es un entorno del origen. Como el producto por escalares es continuo, hay un $\delta > 0$ y un entorno V del origen tal que $\alpha V \subset U$ cuando $|\alpha| < \delta$. Sea ahora $W = \bigcup_{|\alpha| < \delta} \alpha V$. Este constituye claramente un entorno del origen balanceado y cumpliendo $W \subset U$, por lo que satisface lo que queremos.
2. Supongamos que U es un entorno convexo del origen y sea $A = \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U$, conjunto convexo por ser intersección de convexos. Elijamos ahora W como en el apartado anterior. Por ser balanceado, $\alpha^{-1}W = W$ cuando $|\alpha| = 1$, y entonces $W \subset \alpha U$ y $W \subset A$, lo que implica que el interior A° de A es un entorno del origen. Claramente $A^\circ \subset U$ y es convexo por ser el interior de un conjunto convexo (Teorema 2.12), por tanto solo falta ver que es balanceado. Sean r y β tales que $0 \leq r \leq 1$ y $|\beta| = 1$, entonces

$$r\beta A = \bigcap_{|\alpha|=1} r\beta\alpha U = \bigcap_{|\alpha|=1} r\alpha U.$$

Como αU es convexo y contiene el origen, entonces $r\alpha U \subset \alpha U$. Por tanto $r\beta A \subset A$, justo como queríamos.

□

TEOREMA 2.19. *Los subconjuntos compactos de un espacio vectorial topológico con acotados.*

DEMOSTRACIÓN. Sea V un entorno arbitrario del origen y W un entorno balanceado contenido en V , el cual existe por el primer apartado del Teorema 2.18. Ahora, por el primer apartado del Teorema 2.13 se verifica que

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nW,$$

y como K es compacto, resulta que de hecho K está contenido en una cantidad finita de ellos

$$K \subset \bigcup_{i=1}^s n_i W.$$

Sin embargo, como W es balanceado, entonces $(n_i/n_s)W \subset W$, por lo que

$$\bigcup_{i=1}^s n_i W = n_s \bigcup_{i=1}^s (n_i/n_s)W = n_s W.$$

Esto implica que, para $t > n_s$ se da el contenido $K \subset tW \subset tV$, lo que concluye la acotación de K . □

Estas nos permiten decir algunas propiedades en relación a las envolturas convexas y los conjuntos totalmente acotados.

TEOREMA 2.20. *En espacios vectoriales topológicos se cumple lo siguiente.*

1. Si $A_1, \dots, A_n$ son conjuntos compactos y convexos en un espacio vectorial topológico X , entonces $\text{co}(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ también lo es.
2. Si X es un espacio localmente convexo y $E \subset X$ está totalmente acotado, entonces $\text{co}(E)$ también lo es.
3. Si X es un espacio Fréchet y $K \subset X$ es compacto, entonces $\overline{\text{co}(K)}$ también.
4. Si K es un compacto de $\mathbb{R}^n$, entonces $\text{co}(K)$ también.

DEMOSTRACIÓN. Analicemos cada uno.

1. Sea S el conjunto de puntos $(s_1, \dots, s_n)$ de $\mathbb{R}^n$ con $s_i \geq 0$ para cada i tales que $s_1 + \dots + s_n = 1$. Pongamos $A = A_1 \times \dots \times A_n$ y definamos

$$f: S \times A \longrightarrow X, \quad f(s, a) = s_1 a_1 + \dots + s_n a_n,$$

donde llamamos $K = f(S \times A)$.

Es claro que K es compacto y que $K \subset \text{co}(A_1 \cup \dots \cup A_n)$, veamos que de hecho se trata de una igualdad. En efecto, si $(s, a), (t, b) \in S \times A$ y si $\alpha, \beta \geq 0$ son tales que $\alpha + \beta = 1$, entonces

$$\alpha f(s, a) + \beta f(t, b) = f(u, c)$$

con $u = \alpha s + \beta t \in S$ y $c \in A$ en la forma

$$c_i = \frac{\alpha s_i a_i + \beta t_i b_i}{\alpha s_i + \beta t_i} \in A_i \quad i = 1, \dots, n,$$

lo que muestra que K es convexo. Como $A_i \in K$ para cada i , la convexidad de K nos otorga el contenido $\text{co}(A_1 \cup \dots \cup A_n)$, lo que prueba la igualdad deseada.

2. Sea U un entorno del origen de X , y elijamos un entorno convexo V del origen tal que $V+V \subset U$. Por hipótesis, $E \subset F+V$ para algún conjunto $F \subset X$ finito, lo que implica $E \subset \text{co}(F)+V$, y como V es convexo, se sigue también que

$$\text{co}(E) \subset \text{co}(F)+V.$$

Por el apartado anterior, $\text{co}(F)$ es compacto, y por tanto $\text{co}(E) \subset F_1+V$ para algún conjunto $F_1 \subset X$ finito. Esto implica

$$\text{co}(E) \subset F_1+V+V \subset F_1+U,$$

y como U es arbitrario, $\text{co}(E)$ está totalmente acotado.

3. La adherencia de los conjuntos totalmente acotados se encuentra totalmente acotada, y por tanto son compactos en cada espacio métrico completo (Teorema A.6). Ahora, K es un compacto en un espacio Fréchet, por lo que está totalmente acotado, y por el apartado anterior $\text{co}(K)$ también, luego es compacto.
4. Sea S el conjunto de puntos $(t_1, \dots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ en la forma $t_i \geq 0$ y $\sum_i t_i = 1$, y sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, probemos para empezar que $x \in \text{co}(K)$ si y solo si

$$x = t_1 x_1 + \dots + t_{n+1} x_{n+1}$$

para algún $t \in S$ y $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in K^{n+1}$. Es claro que todo vector x en la forma anterior se encuentra en $\text{co}(K)$, por lo que basta probar la implicación restante.

El conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x = t_1 x_1 + \dots + t_r x_r \text{ con } t_i \geq 0, t_1 + \dots + t_r = 1 \text{ y } x_1, \dots, x_r \in K \text{ para algún } r \in \mathbb{N}\}$$

es convexo y contiene a K , por lo que la definición de $\text{co}(K)$ implica que este pertenece a dicho conjunto. Con esto en mente, para concluir la implicación basta probar que si un punto $x \in \text{co}(K)$ se puede escribir como $x = t_1 x_1 + \dots + t_{r+1} x_{r+1}$ para algún valor $r > n$, entonces x es también combinación convexa de r vectores de los anteriores. La clave de esto reside en que la aplicación

$$(a_1, \dots, a_{r+1}) \longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{r+1} a_i x_i, \sum_{i=1}^{r+1} a_i \right)$$

de $\mathbb{R}^{r+1}$ en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, tiene núcleo no nulo por ser $r > n$, lo que implica que existe $(a_1, \dots, a_{r+1}) \in \mathbb{R}^{r+1}$ no nulo tal que $\sum_{i=1}^{r+1} a_i x_i = 0$ y $\sum_{i=1}^{r+1} a_i = 0$. Suponiendo sin pérdida de generalidad que $t_i > 0$ para cada i , encontramos $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda a_i| \leq t_i$ para cada i , y $\lambda a_j = t_j$ para algún subíndice j . Eligiendo finalmente $c_i = t_i - \lambda a_i$, concluimos que $x = c_1 x_1 + \dots + c_{r+1} x_{r+1}$, que al menos $c_j = 0$, y que

$$c_1 + \dots + c_{r+1} = t_1 + \dots + t_{r+1} = 1$$

con cada $c_i \geq 0$, justo como queríamos.

Con la proposición que hemos probado, resulta que $\text{co}(K)$ es la imagen de $S \times K^{n+1}$ por la aplicación continua

$$(t, x_1, \dots, x_{n+1}) \longrightarrow t_1 x_1 + \dots + t_{n+1} x_{n+1},$$

lo que nos da la compacidad buscada.

□

Por último, concluimos la sección con una lista de caracterizaciones de los distintos tipos de espacio.

TEOREMA 2.21. *Sea X un espacio vectorial topológico.*

1. *Si X es localmente acotado, entonces X tiene una base local numerable.*
2. *X es metrizable si y solo si X tiene una base local numerable. De hecho, en este último caso es metrizable con métrica invariante.*
3. *X es normable si y solo si X es localmente convexo y localmente acotado.*
4. *X es localmente compacto si y solo si X tiene dimensión finita.*
5. *Si un espacio localmente acotado X tiene la propiedad de Heine-Borel, entonces X tiene dimensión finita.*

DEMOSTRACIÓN. Consultar [11]. □

2.2. SEMINORMAS Y CONVEXIDAD LOCAL

Hay una clase de espacio vectorial topológico que cobra gran relevancia tanto por las propiedades que posee como por el papel fundamental que juega en la teoría que estamos desarrollando. Estos son los espacios localmente convexos, y aunque conocemos ya su definición y alguna propiedad básica, no contamos con ningún método eficaz para construirlos. En esta sección mostramos cómo, relajando el concepto de norma, podemos no sólo construir espacios localmente convexos, si no además caracterizarlos.

DEFINICIÓN 2.22. Una *seminorma* en un espacio vectorial X es una aplicación $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$:

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.
- $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$.

Además, una familia $\mathcal{P}$ de seminormas se dice *separante* si para cada $x \in X$ existe $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(x) \neq 0$.

OBSERVACIÓN 2.23. Notemos que, a diferencia de las normas, ahora no exigimos no negatividad ni la condición $p(x) = 0 \implies x = 0$.

DEFINICIÓN 2.24. Sea $A \subset X$ un subconjunto absorbente. Se define el *funcional de Minkowski* asociado $\mu_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ como la aplicación

$$\mu_A(x) = \inf\{t > 0 : x \in tA\}.$$

Notemos que el funcional de Minkowski está bien definido por la condición de absorbente. Algunas propiedades inmediatas de las seminormas son las siguientes.

TEOREMA 2.25. *Sea p una seminorma en un espacio vectorial X .*

1. $p(0) = 0$.
2. $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$.
3. $p(x) \geq 0$.

4. $p^{-1}(0)$ es un subespacio de X .
5. El conjunto $B = \{x \in X : p(x) < 1\}$ es convexo, balanceado, absorbente y $p = \mu_B$.

DEMOSTRACIÓN. La primera propiedad es consecuencia inmediata de que $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$ con $\alpha = 0$. La segunda surge de

$$p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y) \implies p(x) - p(y) \leq p(x - y).$$

Como dicha desigualdad se cumple igual permutando x con y y teniendo en cuenta que $p(x - y) = p(y - x)$, se deduce $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$. La tercera propiedad se obtiene de la segunda tomando $y = 0$. Para la cuarta notamos que si $x, y \in p^{-1}(0)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, entonces

$$0 \leq p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha|p(x) + |\beta|p(y) = 0 \implies \alpha x + \beta y \in p^{-1}(0),$$

justo como queríamos. Por último, es claro que B es convexo y balanceado, veamos que también es absorbente. En efecto, sea $x \in X$ y $s > p(x)$, entonces $x \in sB$ y por tanto B es balanceado. Además queda claro que $\mu_B(x) \leq p(x)$. Si ahora $0 < t \leq p(x)$ entonces $x \notin tB$ y por tanto la arbitrariedad de t implica $\mu_B(x) \geq p(x)$. De ambas desigualdades obtenemos que $\mu_B(x) = p(x)$. $\square$

En cuanto a los funcionales de Minkowski contamos con la siguiente proposición, que ahonda en la conexión entre las seminormas y dichos funcionales.

TEOREMA 2.26. Sea $A \subset X$ un subconjunto absorbente y convexo.

1. $\mu_A(x + y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$.
2. $\mu_A(tx) = t\mu_A(x)$ para todo $t \geq 0$.
3. μ_A es seminorma si A es balanceado.
4. Si $B = \{\mu_A(x) < 1\}$ y $C = \{\mu_A(x) \leq 1\}$, entonces $B \subset A \subset C$ y $\mu_B = \mu_A = \mu_C$.

DEMOSTRACIÓN. Si $t = \mu_A(x) + \varepsilon$ y $s = \mu_A(y) + \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$, entonces x/t y y/s están en A y por combinación convexa

$$\frac{x+y}{s+t} = \frac{t}{s+t} \frac{x}{t} + \frac{s}{s+t} \frac{y}{s} \in A.$$

Esto muestra que $\mu_A(x+y) \leq s+t = \mu_A(x) + \mu_A(y) + 2\varepsilon$, y por tanto concluimos la primera propiedad. La segunda es inmediata por definición, y la tercera es consecuencia de las dos anteriores y de que A es balanceado.

En cuanto a la última, es claro que se cumple la cadena de contenidos $B \subset A \subset C$, y por tanto las desigualdades $\mu_C \leq \mu_A \leq \mu_B$. Para conseguir igualdades, fijamos $x \in X$ y elegimos s, t tales que $\mu_C(x) < s < t$. Entonces $x/s \in C$, luego $\mu_A(x/s) \leq 1$ y $\mu_A(x/t) \leq s/t < 1$, es decir, $x/t \in B$ y $\mu_B(x) \leq t$. Como esto sucede para todo $t > \mu_C(x)$ concluimos $\mu_B \leq \mu_C$, justo como queríamos. $\square$

Nos encontramos ya en condiciones de entender la relación existente entre las familias separantes de seminormas y la convexidad local. Comencemos probando que un espacio localmente convexo admite una familia de este tipo.

TEOREMA 2.27. Sea $\mathcal{B}$ una base local, convexa y balanceada del origen en un espacio vectorial topológico X . Entonces:

1. $V = \{x \in X : \mu_V(x) < 1\}$, para todo $V \in \mathcal{B}$.

2. $\{\mu_V : V \in \mathcal{B}\}$ constituye una familia separante de seminormas continuas en X .

DEMOSTRACIÓN. El primer apartado resulta sencillo pues, si $x \in V$, entonces $x \in tV$ para algún $t < 1$ por la condición de abierto, y por tanto $\mu_V(x) < 1$. Ahora, si $x \notin V$ entonces por ser balanceado esto implica que si $x \in tV$ debe ser $t \geq 1$, lo que nos dice que $\mu_V(x) \geq 1$.

En cuanto al segundo apartado, sabemos que μ_V es seminorma por la tercera propiedad del Teorema 2.26. Además, por las propiedades vistas en el Teorema 2.25 y el apartado anterior, sabemos que dado $r > 0$ se cumple

$$|\mu_V(x) - \mu_V(y)| \leq \mu_V(x - y) < r \quad \forall x - y \in rV,$$

y por tanto μ_V es continua. Finalmente, si $x \neq 0$, entonces $x \notin V$ para algún $V \in \mathcal{B}$, luego $\mu_V(x) \geq 1$ y $\{\mu_V : V \in \mathcal{B}\}$ es separante. $\square$

Ahora, dicho resultado es recíproco, tal como se muestra a continuación.

TEOREMA 2.28. Sea $\mathcal{P}$ una familia separante de seminormas en un espacio vectorial X . Asociemos a cada $p \in \mathcal{P}$ y cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$V(p, n) = \left\{ x \in X : p(x) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de intersecciones finitas de conjuntos $V(p, n)$. Entonces existe una topología τ en X tal que $\mathcal{B}$ es una base local convexa y balanceada de dicha topología y (X, τ) constituye un espacio localmente convexo cumpliendo:

1. Cada $p \in \mathcal{P}$ es continuo.
2. Un conjunto $E \subset X$ está acotado si y solo si cada $p \in \mathcal{P}$ está acotado en E .

DEMOSTRACIÓN. Comenzamos definiendo la topología τ como la familia formada por uniones de trasladados de elementos de $\mathcal{B}$. Esto claramente constituye una topología invariante por traslaciones tal que cada miembro de $\mathcal{B}$ es convexo y balanceado, y $\mathcal{B}$ constituye una base local del origen.

Para ver que los puntos son cerrados en esta topología, consideramos $x \neq 0$ y $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(x) > 0$. Como $x \notin V(p, n)$ si $np(x) > 1$ entonces el origen no se encuentra en el entorno $x - V(p, n)$ de x , y por tanto x no está en la adherencia del origen. Esto nos dice que el origen es un conjunto cerrado, y por la invariancia bajo traslaciones, también lo es cada punto de X .

Queremos asegurarnos además de que las operaciones de suma y producto por escalares son continuas. Para este fin, consideramos un entorno U del origen y un elemento de la base

$$V(p_1, n_1) \cap \cdots \cap V(p_m, n_m) \subset U \tag{2.3}$$

para ciertos $p_1, \dots, p_m \in \mathcal{P}$ y $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$. Llamemos

$$V = V(p_1, 2n_1) \cap \cdots \cap V(p_m, 2n_m).$$

Como cada $p \in \mathcal{P}$ es subaditivo, $V + V \subset U$, lo que prueba la continuidad de la suma. En cuanto al producto, consideramos $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Sabemos que se cumple $x \in sV$ para algún $s > 0$, y definimos $t = s/(1 + |\alpha|s)$. Si $y \in x + tV$ y $|\beta - \alpha| < 1/s$, entonces

$$\beta y - \alpha x = \beta(y - x) + (\beta - \alpha)x,$$

lo que cae en

$$|\beta|tV + |\beta - \alpha|sV \subset V + V \subset U$$

por ser $|\beta|t \leq 1$ y V balanceado. Esto prueba la continuidad del producto por escalares.

Claramente (X, τ) es localmente convexo, y por definición de $V(p, n)$ es claro que cada $p \in \mathcal{P}$ es continuo en el origen. Además, por la segunda propiedad del Teorema 2.25 se tiene la continuidad en todo X .

Finalmente, sea $E \subset X$ acotado. Fijo $p \in \mathcal{P}$, como $V(p, 1)$ es un entorno del origen se cumple que $E \subset kV(p, 1)$ para cierto $k < \infty$. Esto implica $p(x) < k$ para cada $x \in E$, y por tanto que está acotado en E . Por el otro lado, supongamos que cada seminorma de $\mathcal{P}$ está acotada en E , y sea U un entorno del origen donde se cumple (2.3). Elijamos constantes $M_i < \infty$ tales que $p_i(x) < M_i$ en E . Entonces si $n > M_i n_i$ para $i = 1, 2, \dots, m$ se sigue que $E \subset nU$, y por tanto está acotado. $\square$

OBSERVACIÓN 2.29. Tras estos dos últimos resultados surge de forma natural la siguiente pregunta. Si $\mathcal{B}$ es una base local, convexa y balanceada de un espacio localmente convexo (X, τ) , esta genera una familia separante de seminormas continuas, lo que a su vez genera otra topología τ' en X , ¿se dará la igualdad $\tau = \tau'$?

La respuesta es afirmativa, y para verlo notamos que cada $p \in \mathcal{P}$ es τ -continuo, de forma que los conjuntos $V(p, n)$ se encuentran en τ , lo que implica el contenido $\tau' \subset \tau$. Para el otro contenido, sea $W \in \mathcal{B}$ y $p = \mu_W$. Entonces

$$W = \{x \in X : \mu_W(x) < 1\} = V(p, 1) \in \tau',$$

y como W es arbitrario resulta que $\tau \subset \tau'$, justo como queríamos.

OBSERVACIÓN 2.30. En el caso en que $\mathcal{P}$ sea numerable, los Teoremas 2.28 y 2.21 implican que el espacio vectorial topológico resultante es localmente convexo y metrizable con métrica invariante.

2.3. DUALIDAD Y TEOREMAS DE HAHN-BANACH

Asociado a todo espacio vectorial X contamos con el espacio de los funcionales $\Lambda : X \rightarrow \mathbb{K}$ lineales, que de hecho en dimensión finita es isomorfo al espacio original. El hecho de introducir una topología en X da lugar a un tipo especial de funcionales, los continuos, que serán el objeto de estudio de esta sección junto con los teoremas de Hahn-Banach, que nos van a permitir obtener funcionales de este tipo a partir de su definición en un subespacio cualquiera.

DEFINICIÓN 2.31. Dado un espacio vectorial topológico X , el *espacio dual* X^* correspondiente se define como el espacio vectorial formado por los funcionales lineales $\Lambda : X \rightarrow \mathbb{K}$ continuos con las operaciones de suma y producto por escalares:

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2)x = \Lambda_1 x + \Lambda_2 x, \quad (\alpha \Lambda)x = \alpha(\Lambda x) \quad \forall \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda \in X^*, x \in X, \alpha \in \mathbb{K}.$$

Comencemos viendo algunas propiedades de gran utilidad de dichos funcionales.

TEOREMA 2.32. Sean X e Y espacios vectoriales topológicos. Si $\Lambda : X \rightarrow Y$ es lineal y continuo en el origen, entonces Λ es continuo. De hecho, Λ es uniformemente continuo en el siguiente sentido: para cada entorno W del origen de Y existe un entorno V del origen de X tal que

$$x - y \in V \implies \Lambda x - \Lambda y \in W.$$

DEMOSTRACIÓN. Dado W , la continuidad de Λ en el origen muestra que existe un entorno V del origen de X tal que $\Lambda V \subset W$. Si ahora $y - x \in V$, la linealidad de Λ muestra que $\Lambda y - \Lambda x = \Lambda(y - x) \in W$, y por tanto Λ lleva el entorno $x + V$ de x en el entorno $\Lambda x + W$ de Λx , lo que nos dice que Λ es continua en x . $\square$

TEOREMA 2.33. *Sea Λ un funcional lineal no nulo en un espacio vectorial topológico X . Entonces las siguientes cuatro propiedades son equivalentes:*

1. Λ es continuo.
2. El núcleo de Λ , $\text{Ker}(\Lambda) = \{x \in X : \Lambda x = 0\}$, es cerrado.
3. $\text{Ker}(\Lambda)$ no es denso en X .
4. Λ está acotado en algún entorno del origen.

DEMOSTRACIÓN. Procedemos con una demostración en cadena:

$1 \Rightarrow 2$ Por las características de los espacios vectoriales topológicos, los puntos de X son cerrados, y en particular el origen, de donde deducimos que por continuidad de Λ , $\text{Ker}(\Lambda) = \Lambda^{-1}(\{0\})$ es cerrado.

$2 \Rightarrow 3$ Por hipótesis Λ es no nulo, luego $\text{Ker}(\Lambda) \neq X$. Además, $\text{Ker}(\Lambda)$ es cerrado, por lo que no puede ser denso.

$3 \Rightarrow 4$ Si suponemos cierta la tercera propiedad, entonces $X \setminus \text{Ker}(\Lambda)$ tiene interior no vacío. Por esto y el Teorema 2.18, existe un entorno balanceado V del origen tal que

$$(x + V) \cap \text{Ker}(\Lambda) = \emptyset. \quad (2.4)$$

El subconjunto $\Lambda V \subset \mathbb{K}$ es balanceado, y si suponemos que es no acotado, se tiene de hecho la igualdad $\Lambda V = \mathbb{K}$. En este caso existe $y \in V$ tal que $\Lambda y = -\Lambda x$, y por tanto $x + y \in \text{Ker}(\Lambda)$, entrando en contradicción con la igualdad (2.4).

$4 \Rightarrow 1$ Por último, si se cumple $|\Lambda x| < M$ para todo $x \in V$ y algún $M < \infty$, entonces dado $r > 0$ y $W = (r/M)V$ se cumple $|\Lambda x| < r$ para todo $x \in W$. Esto implica que Λ es continua en el origen, y por el Teorema 2.32 que es continua. $\square$

Pasando a los teoremas de extensión, comenzamos con dos resultados que no involucran topología, pero que serán la base del resto de la sección, a parte de tener gran relevancia en sí mismos.

TEOREMA 2.34. *Supongamos que X es un espacio vectorial real, $M \subset X$ un subespacio vectorial, y consideremos dos funciones, $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad p(tx) = tp(x) \quad \forall x, y \in X, t \geq 0,$$

y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ lineal cumpliendo $f(x) \leq p(x)$ para cada $x \in M$. Entonces existe un funcional lineal $\Lambda : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Lambda|_M = f$ y

$$-p(-x) \leq \Lambda x \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{P}$ la colección de pares ordenados (M', f') donde $M' \subset X$ es un subespacio conteniendo a M y f' un funcional lineal en M' extendiendo a f y cumpliendo $f' \leq p$ en M' . En $\mathcal{P}$ definimos la relación de orden parcial $(M', f') \leq (M'', f'')$ si $M' \subset M''$ y $f''|_{M'} = f'$. Por el Teorema de Maximalidad de Hausdorff [10] existe una subcolección $\Omega \subset \mathcal{P}$ maximal totalmente ordenada.

Sea ahora Φ la colección de subespacios M' para los que existe un funcional f' cumpliendo $(M', f') \in \Omega$. Φ es una familia totalmente ordenada por la relación de orden que otorga la inclusión conjuntista, y por tanto la unión $\tilde{M}$ de todos los elementos de Φ es un subespacio vectorial de X . Consideremos el funcional $\Lambda : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Lambda x = f'(x)$ si $x \in M'$ y $(M', f') \in \Omega$. Es trivial comprobar que Λ está bien definido, es lineal y que $\Lambda \leq p$. Además, esta última desigualdad implica que

$$-p(-x) \leq -\Lambda(-x) = \Lambda x \leq p(x) \quad \forall x \in \tilde{M},$$

y también por definición se cumple trivialmente $\Lambda|_M = f$, por lo que basta probar que $\tilde{M} = X$ para concluir la demostración.

Si suponemos que $\tilde{M}$ es un subespacio propio de X , entonces existe $x_1 \in X \setminus \tilde{M}$ y podemos definir el subespacio

$$\tilde{M}_1 = \{x + tx_1 : x \in \tilde{M}, t \in \mathbb{R}\}.$$

Como

$$\Lambda x + \Lambda y = \Lambda(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x - x_1) + p(x_1 + y),$$

tenemos que

$$\Lambda x - p(x - x_1) \leq p(y + x_1) - \Lambda y \quad \forall x, y \in \tilde{M}.$$

Tomando el supremo en x en el término de la izquierda de la desigualdad anterior, que denotaremos por α , resulta que

$$\Lambda x - \alpha \leq p(x - x_1) \quad y \quad \Lambda y + \alpha \leq p(y + x_1) \quad \forall x, y \in \tilde{M}. \quad (2.5)$$

Definamos ahora la siguiente aplicación lineal

$$\Lambda_1 : \tilde{M}_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Lambda_1(x + tx_1) = \Lambda x + t\alpha.$$

Claramente, $\Lambda_1|_{\tilde{M}} = \Lambda$. Si además consideramos $t > 0$, sustituimos $x \rightarrow t^{-1}x$ y $y \rightarrow t^{-1}y$ en las desigualdades (2.5) y multiplicamos las desigualdades resultantes por t , entonces se deduce que $\Lambda_1 \leq p$. Esto nos dice que $(\tilde{M}_1, \Lambda_1) \in \mathcal{P}$ y que $(M', f') \leq (\tilde{M}_1, \Lambda_1)$ para todo $(M', f') \in \Omega$ con $(\tilde{M}_1, \Lambda_1) \notin \Omega$, lo que nos lleva a contradicción con la maximalidad de Ω . $\square$

A partir de este resultado técnico obtenemos lo siguiente.

TEOREMA 2.35. *Sea X un espacio vectorial, $M \subset X$ un subespacio vectorial, p una seminorma en X y $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ un funcional lineal cumpliendo*

$$|f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in M.$$

Entonces f se extiende a un funcional $\Lambda : X \rightarrow \mathbb{K}$ satisfaciendo

$$|\Lambda x| \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$

DEMOSTRACIÓN. El caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ es inmediato por el Teorema 2.34, pues la igualdad de seminormas $p(x) = p(-x)$ se traduce en la desigualdad $|\Lambda x| \leq p(x)$ de la extensión de f , lo que concluye el resultado.

Supongamos entonces $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y llamemos $u = \operatorname{Re}(f)$. De nuevo por el Teorema 2.34 existe un funcional lineal real U en X , es decir lineal viendo X como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, tal que $U|_M = u$ y $U \leq p$ en X . Consideremos ahora el funcional

$$\Lambda : X \rightarrow \mathbb{C}, \quad \Lambda x = Ux - iU(ix),$$

el cual se inspira en la igualdad $z = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Re}(iz)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Claramente, por esta última igualdad se satisface $\Lambda|_M = f$, y es sencillo comprobar que Λ es lineal complejo. Por último, sabemos que para cada $x \in X$ existe $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$ tal que $\alpha\Lambda x = |\Lambda x|$, por lo que podemos concluir

$$|\Lambda x| = \Lambda(\alpha x) = U(\alpha x) \leq p(\alpha x) = p(x),$$

justo como queríamos. $\square$

OBSERVACIÓN 2.36. Una consecuencia inmediata de este teorema en el caso de un espacio normado X es que, para cada $x_0 \in X$, existe un funcional $\Lambda \in X^*$ tal que

$$\Lambda x_0 = \|x_0\| \quad \text{y} \quad |\Lambda x| \leq \|x\| \quad \forall x \in X.$$

El siguiente teorema de Hahn-Banach da una interpretación geométrica de lo visto anteriormente en el caso de funcionales continuos, según la cual estos “separan” conjuntos convexos disjuntos.

TEOREMA 2.37. *Supongamos que A y B son conjuntos no vacíos, disjuntos y convexos en un espacio vectorial topológico X .*

1. *Si A es abierto, existen $\Lambda \in X^*$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\operatorname{Re}(\Lambda x) < \gamma \leq \operatorname{Re}(\Lambda y) \quad \forall x \in A, y \in B.$$

2. *Si A es compacto, B es cerrado y X es localmente convexo, entonces existe $\Lambda \in X^*$ y $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\operatorname{Re}(\Lambda x) < \gamma_1 < \gamma_2 < \operatorname{Re}(\Lambda y) \quad \forall x \in A, y \in B.$$

DEMOSTRACIÓN. Al igual que ocurría en el Teorema 2.35, si suponemos probado el resultado para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ entonces el caso complejo es inmediato definiendo

$$\Lambda x = \Lambda_1 x - i \Lambda_1(ix)$$

con Λ_1 el funcional real y continuo que tenemos por hipótesis. Supongamos por tanto que nos encontramos en el caso real:

1. Fijamos $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ y definimos $x_0 = b_0 - a_0$ y $C = A - B + x_0$. Es claro que C es entorno convexo del origen en X , y llamamos p al funcional de Minkowski μ_C . Por el Teorema 2.26 sabemos que p satisface las hipótesis del Teorema 2.34, y además como $A \cap B = \emptyset$ y $x_0 \notin C$ entonces $p(x_0) \geq 1$. Definamos $f(tx_0) = t$ en el subespacio M generado por x_0 . Si $t \geq 0$ entonces

$$f(tx_0) = t \leq tp(x_0) = p(tx_0),$$

y si $t < 0$ entonces $f(tx_0) < 0 \leq p(tx_0)$. En conclusión $f \leq p$ en M . Por el Teorema 2.34 f se extiende a un funcional lineal Λ en X satisfaciendo $\Lambda \leq p$. En particular, $\Lambda \leq 1$ en C y $\Lambda \geq -1$ en $-C$, por lo que $|\Lambda| \leq 1$ en el entorno $C \cap (-C)$ del origen. El Teorema 2.33 implica entonces que $\Lambda \in X^*$.

Si $a \in A$ y $b \in B$ tenemos que

$$\Lambda a - \Lambda b + 1 = \Lambda(a - b + x_0) \leq p(a - b + x_0) < 1,$$

donde hemos empleado que $\Lambda x_0 = 1$, $a - b + x_0 \in C$ y que C es abierto. Por tanto $\Lambda a < \Lambda b$.

Se sigue entonces que $\Lambda(A)$ y $\Lambda(B)$ son subconjuntos convexos y disjuntos de $\mathbb{R}$, con $\Lambda(A)$ a la izquierda de $\Lambda(B)$. Además, $\Lambda(A)$ es abierto por ser A abierto y cada funcional lineal no constante en X una aplicación abierta. Si consideramos por último γ como el supremo de $\Lambda(A)$ concluimos la prueba.

2. Por el Teorema 2.8 hay un entorno convexo V del origen tal que $(A + V) \cap B = \emptyset$. Si ahora empleamos el apartado anterior con $A + V$ en vez de A , encontramos $\Lambda \in X^*$ tal que $\Lambda(A + V)$ y $\Lambda(B)$ son convexos disjuntos de $\mathbb{R}$, con $\Lambda(A + V)$ abierto y a la izquierda de $\Lambda(B)$. Como $\Lambda(A)$ es un subespacio compacto de $\Lambda(A + V)$, concluimos el resultado.

□

OBSERVACIÓN 2.38. De aquí concluimos que, en espacios localmente convexos, el dual X^* separa puntos en el sentido de la Definición 2.22.

COROLARIO 2.39. *Dado un espacio vectorial topológico X , el dual X^* es no nulo si y solo si X posee un abierto convexo propio.*

DEMOSTRACIÓN. Si X^* es no nulo existe $\Lambda \in X^*$ no nulo, luego $\Lambda^{-1}\{|z| < \varepsilon\}$ es no vacío para algún valor de $\varepsilon > 0$, y dicho conjunto es precisamente el abierto convexo propio en cuestión. Ahora, si X posee un abierto convexo A , entonces basta aplicar el primer apartado del Teorema 2.37 con $B = \{p\}$ y $p \notin A$ para obtener un funcional continuo no nulo. □

COROLARIO 2.40. *Supongamos que M es un subespacio vectorial de un espacio localmente convexo X y sea $x_0 \in X$. Si x_0 no se encuentra en la adherencia de M , entonces existe $\Lambda \in X^*$ tal que $\Lambda x_0 = 1$ y $\Lambda(x) = 0$ para todo $x \in M$.*

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el Teorema 2.37 con $A = \{x_0\}$ y $B = \overline{M}$, obtenemos $\Lambda \in X^*$ tal que Λx_0 y $\Lambda(M)$ son disjuntos. Esto implica que $\Lambda(M)$ es un subespacio propio del cuerpo $\mathbb{K}$ y que $\Lambda x_0 \neq 0$, lo que fuerza a que $\Lambda(M) = \{0\}$. El funcional deseado se obtiene entonces dividiendo Λ entre Λx_0 . □

Concluimos la sección con un par de resultados que se obtienen de manera sencilla con las propiedades de separación vistas en los dos últimos teoremas.

TEOREMA 2.41. *Si f es un funcional lineal continuo en un subespacio M de un espacio localmente convexo X , entonces existe $\Lambda \in X^*$ tal que $\Lambda|_M = f$.*

DEMOSTRACIÓN. Asumamos sin pérdida de generalidad que f no se anula en todo M , y definamos

$$M_0 = \{x \in M : f(x) = 0\}.$$

Sea $x_0 \in M$ tal que $f(x_0) = 1$, como f es continua es claro que x_0 no se encuentra en la M -adherencia de M_0 , y como M hereda la topología de X , tampoco se encuentra en su X -adherencia.

El Teorema 2.40 nos otorga $\Lambda \in X^*$ tal que $\Lambda x_0 = 1$ y $\Lambda(M_0) = 0$.

Si $x \in M$, entonces $x - f(x)x_0 \in M_0$ por ser $f(x_0) = 1$. En conclusión,

$$\Lambda x - f(x) = \Lambda x - f(x)\Lambda x_0 = \Lambda(x - f(x)x_0) = 0 \quad \forall x \in M,$$

de donde deducimos que $\Lambda|_M = f$. □

TEOREMA 2.42. *Supongamos que B es un subconjunto cerrado, convexo y balanceado de un espacio localmente convexo X y que $x_0 \in X \setminus B$. Entonces existe $\Lambda \in X^*$ tal que $|\Lambda x| \leq 1$ para todo $x \in B$, pero $\Lambda x_0 > 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Como B es cerrado y convexo, podemos aplicar el segundo apartado del Teorema 2.37 con $A = \{x_0\}$ para obtener $\Lambda_1 \in X^*$ tal que $\Lambda x_0 = r e^{i\theta}$ cae fuera de la adherencia K de $\Lambda(B)$. Como B es balanceado, también lo es K , y por tanto existe $0 < s < r$ de forma que $|z| \leq s$ para todo $z \in K$. El funcional $\Lambda = s^{-1} e^{-i\theta} \Lambda_1$ tiene las propiedades deseadas. □

2.4. ESPACIOS DE FUNCIONES $L^p(X)$ Y SUCESIONES ℓ^p

Antes de continuar con el estudio de los espacios vectoriales topológicos, nos detenemos a analizar dos casos de gran relevancia. Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, con X un conjunto, $\mathcal{A}$ una σ -álgebra sobre X y μ una medida no negativa en $(X, \mathcal{A})$, se define el espacio de funciones $L^p(X)$ con $0 < p < \infty$ como el conjunto cociente:

$$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X) / \sim \quad \text{con} \quad \mathcal{L}^p(X) = \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{K} : f \text{ medible y } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

y $\sim$ la relación de equivalencia $f \sim g$ si $f = g$ en casi todo punto. En el caso $p = \infty$ también se puede definir el espacio correspondiente modificando el conjunto $\mathcal{L}^p(X)$ como sigue:

$$\mathcal{L}^\infty(X) = \{ f : X \longrightarrow \mathbb{K} : f \text{ medible y acotada en casi todo punto} \}.$$

En el caso particular en que $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A}$ son las partes de $\mathbb{N}$ y μ es la medida de contar, se obtiene el espacio de sucesiones ℓ^p .

Dichos espacios, para $1 \leq p \leq \infty$, tienen estructura de espacio de Banach [1], es decir de espacio normado y completo con la métrica inducida, junto con la norma

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad \forall f \in L^p(X). \quad (2.6)$$

De hecho, se pueden probar las siguientes identificaciones [1]:

$$[L^p(X)]^* \simeq L^{p'}(X) \quad \text{con} \quad 1 \leq p < \infty \quad \text{y} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \text{y} \quad [L^\infty(X)]^* \supseteq L^1(X). \quad (2.7)$$

El caso $0 < p < 1$ cuenta con varias peculiaridades que hacen que tenga peores propiedades, veamos un ejemplo. Si consideramos $X = \{1, 2\}$, $\mathcal{A}$ las partes de X y μ la medida de contar, podemos identificar el espacio de funciones reales-medibles y $L^p(X)$ como $\mathbb{R}^2$, con la “norma” (2.6) asociada en la forma

$$\|v\|_p = (|v_1|^p + |v_2|^p)^{1/p} \quad \forall v \in L^p(X).$$

Sin embargo, dicha aplicación no satisface la desigualdad triangular si $p < 1$, como se puede comprobar considerando los vectores $v = (1/2, 0)$ y $w = (0, 1/2)$ y $p = 1/2$, de donde se obtiene

$$\|v + w\|_p = 2 > 1 = \|v\|_p + \|w\|_p.$$

Por tanto, no es una auténtica norma.

Queremos ver entonces qué tipo de estructura poseen dichos espacios, para lo cual contamos con el siguiente teorema.

TEOREMA 2.43. *Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ no negativo y $0 < p < 1$, el espacio $L^p(X)$ tiene estructura de F-espacio, donde la métrica completa e invariante viene dada por*

$$d(f, g) = \|f - g\|_p^p \quad \forall f, g \in L^p(X).$$

DEMOSTRACIÓN. Lo primero que necesitamos es ver que, si $0 < p < 1$, para cualquier par de números $a, b \in \mathbb{R}^+$ se cumple la desigualdad

$$(a + b)^p \leq a^p + b^p. \quad (2.8)$$

En efecto, si fijamos $b \in \mathbb{R}^+$ y consideramos la función

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(a) = (a + b)^p - a^p - b^p,$$

es trivial comprobar que $f' \leq 0$ en el dominio de definición, por lo que se trata de una función decreciente. En consecuencia, $f(a) \leq f(0) = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}^+$, lo que nos otorga (2.8).

Con esta desigualdad en mente resultan claras dos cosas: la primera es que $L^p(X)$ sigue teniendo estructura de espacio vectorial; y la segunda es que

$$\|f - g\|_p^p = \int_X |f - g|^p d\mu \leq \int_X |f|^p d\mu + \int_X |g|^p d\mu = \|f\|_p^p + \|g\|_p^p,$$

por lo que la aplicación

$$d(f, g) = \|f - g\|_p^p \quad \forall f, g \in L^p(X)$$

constituye una métrica invariante. La completitud se muestra con un argumento análogo al del caso $p \geq 1$ [1]. $\square$

Una vez conocida la estructura de F-espacio, podemos preguntarnos en qué casos se tiene también convexidad local, y por tanto estructura de espacio Fréchet.

DEFINICIÓN 2.44. Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, un subconjunto $A \subset X$ se denomina *un átomo* si tiene medida positiva y cualquier conjunto $B \subset A$ con

$$\mu(B) < \mu(A),$$

tiene medida nula. Un espacio de medida σ -finito $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se dice *atómico* si cada conjunto medible con medida positiva contiene un átomo.

TEOREMA 2.45. *Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, si μ toma una cantidad finita de valores entonces X es unión de una cantidad finita de átomos disjuntos.*

DEMOSTRACIÓN. Notemos para empezar que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es atómico. En efecto, en caso contrario existe un subconjunto $A \subset X$ con medida positiva y sin átomos, por lo que encontramos $A_1 \subset A$ con $0 < \mu(A_1) < \mu(A)$. A su vez, como A_1 no es un átomo, debe existir $A_2 \subset A_1$ con $0 < \mu(A_2) < \mu(A_1)$. Repitiendo el proceso por inducción, obtenemos una sucesión de subconjuntos $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cumpliendo

$$0 < \dots < \mu(A_n) < \dots < \mu(A_1) < \mu(A),$$

lo que nos lleva a contradicción con que μ tome una cantidad finita de valores.

Ahora, sea B_1 un átomo con la máxima medida posible. Si $\mu(X \setminus B_1) = 0$ hemos terminado. En caso contrario, consideramos un átomo B_2 con la máxima medida posible en $X \setminus B_1$. De nuevo, si $\mu(X \setminus (B_1 \cup B_2)) = 0$ terminamos, y en caso contrario repetimos el proceso. Este proceso debe terminar en una cantidad finita de pasos, pues en caso contrario obtenemos una sucesión $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\begin{aligned} \mu(X \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_n)) &= \mu(X \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{n+1})) + \mu(X \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_n) \cap B_{n+1}) \\ &= \mu(X \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{n+1})) + \mu(B_{n+1}) > \mu(X \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{n+1})), \end{aligned}$$

lo cual entra en contradicción con que μ tome una cantidad finita de valores.

El resultado es que existe $m \in \mathbb{N}$ de forma que el espacio total se puede descomponer como

$$X = B_1 \cup \dots \cup B_m \cup Z,$$

con los conjuntos B_n átomos disjuntos para $n = 1, \dots, m$ y Z también disjunto de medida nula. $\square$

TEOREMA 2.46. *Dado un espacio de medida no negativo, una función real o compleja-medible es constante en casi todo punto de cada átomo.*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad podemos reducirnos al caso en que la función, f , es real-medible. Supongamos entonces que A es un átomo y definamos

$$k = \frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu.$$

Probemos que f toma el valor k salvo en un conjunto de medida nula de A . En efecto, sea

$$B_1 = A \cap \{f > k\}$$

y supongamos que $\mu(B_1) > 0$. Por la condición de átomo $\mu(B_1) = \mu(A)$ y por tanto

$$k\mu(A) = \int_A f d\mu = \int_{B_1} f d\mu > \int_{B_1} k d\mu = \int_A k d\mu = k\mu(A),$$

lo que nos lleva a contradicción.

Repitiendo ahora un argumento análogo con

$$B_2 = A \cap \{f < k\}$$

se llega a $\mu(B_2) = \mu(B_1) = 0$, y por tanto f es constante en casi todo punto de A . $\square$

TEOREMA 2.47. *Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ no negativo y $0 < p < 1$, el espacio $L^p(X)$ es localmente convexo si y solo si μ toma una cantidad finita de valores.*

DEMOSTRACIÓN. Si μ toma una cantidad finita de valores, entonces por el Teorema 2.45 existe una cantidad finita de átomos disjuntos $\{B_n\}_{n=1}^m$ tal que $X = B_1 \cup \dots \cup B_m$. Además, una función real o compleja-medible es constante (en casi todo punto) en cada átomo por el Teorema 2.46, luego $(L^p(X), d)$, con la distancia d del Teorema 2.43, es topológicamente equivalente a $\mathbb{K}^m$ con la potencia p -ésima de la p -distancia usual, que es localmente convexo.

Para la implicación restante procedemos por reducción al absurdo, suponiendo que μ toma infinitos valores. Por esto último, existe una sucesión de conjuntos $Y_n \subset X$ tal que

$$0 < \mu(Y_1) < \mu(Y_2) < \dots,$$

y a partir de ella obtenemos otra sucesión $A_n \subset X$ de conjuntos disjuntos tales que $\mu(A_n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado $\varepsilon > 0$, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ la función

$$f_n = (\varepsilon / \mu(A_n))^{1/p} \chi_{A_n},$$

siendo χ_{A_n} la función característica en A_n , de modo que se cumple la igualdad

$$\int_X |f_n|^p d\mu = \varepsilon.$$

Si $(L^p(X), d)$ fuese localmente convexo, entonces dentro de la bola de radio unidad

$$B(0, 1) = \{f \in L^p(X) : d(0, f) < 1\}$$

encontraríamos un abierto convexo por el Teorema 2.18, el cual contendría a su vez una bola

$$B(0, \varepsilon) = \{f \in L^p(X) : d(0, f) < \varepsilon\}.$$

En dicha bola se encuentra la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sin embargo, si consideramos la combinación convexa

$$g_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_k,$$

como los f_k tienen soporte disjunto, se cumple

$$\int_X |g_n|^p d\mu = \frac{1}{n^p} \sum_{k=1}^n \varepsilon = \varepsilon n^{1-p},$$

y al ser $p < 1$, es claro que $d(0, g_n)$ diverge cuando n tiende a infinito. Esto nos dice que dicha sucesión estaría en el abierto convexo, pero fuera de la bola de radio unidad a partir de cierto valor de n , lo que nos llevaría a contradicción. $\square$

Una pregunta que surge de manera natural en este punto es, ¿cuándo podemos afirmar que el dual de un espacio $L^p(X)$ es no nulo?. Sabemos por el Teorema 2.39 que esto sucede si y solo si hay un abierto convexo, y que esto es trivial en el caso localmente convexo, es decir, cuando la medida toma una cantidad finita de valores por lo que acabamos de probar. No obstante, la clase de espacios en los que esto sucede es más amplia, como mostramos a continuación.

TEOREMA 2.48. *En un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ no negativo, si la medida μ contiene un átomo con medida finita entonces $[L^p(X)]^* \neq \{0\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea B un átomo con medida finita. Por el Teorema 2.46 sabemos que cada función medible es constante en casi todo punto de B , y que dicho valor, $\varphi(f)$, viene determinado por

$$\varphi(f) = \frac{1}{\mu(B)} \int_B f d\mu.$$

Definiendo ahora la aplicación $\varphi : L^p(X) \rightarrow \mathbb{K}$ que asigna a cada función f el valor $\varphi(f)$, es claro que se trata de un funcional lineal, luego en caso de que sea también continuo habremos terminado. Sin embargo, esto es sencillo de comprobar, pues por el Teorema 2.33 todo se reduce a encontrar un entorno del origen donde φ esté acotado, lo cual es trivial considerando cualquier bola

$$B(0, \varepsilon) = \{f \in L^p(X) : d(0, f) < \varepsilon\},$$

pues en dicha región se cumple que

$$\int_B |f|^p d\mu \leq \int_X |f|^p d\mu < \varepsilon \implies |\varphi(f)|^p \mu(B) < \varepsilon,$$

de donde se deduce la acotación buscada. $\square$

OBSERVACIÓN 2.49. Aplicando lo visto al espacio de sucesiones ℓ^p con $0 < p < 1$, como la medida correspondiente (la de contar sobre $\mathbb{N}$) toma una cantidad infinita de valores, el Teorema 2.47 afirma que no se trata de un espacio localmente convexo. Por otro lado, la medida de contar siempre presenta átomos con medida finita, los conjuntos unipuntuales, por lo que el Teorema 2.48 nos dice que $[\ell^p]^* \neq \{0\}$. De hecho, es posible demostrar [4] que $[\ell^p]^* = \ell^\infty$.

Finalmente, presentamos una condición suficiente para que el espacio $L^p(X)$ tenga dual nulo, o lo que es lo mismo, no posea ningún abierto convexo.

TEOREMA 2.50. *Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida no negativo y no atómico, entonces $[L^p(X)]^* = \{0\}$ para $0 < p < 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Consultar [3]. $\square$

2.5. TOPOLOGÍAS DÉBILES

A lo largo de esta sección nos centraremos en introducir y estudiar algunas de las principales propiedades de las llamadas “topología débil” y “débil*” de un espacio vectorial topológico. La topología débil surge en el contexto de la topología general como la topología más débil que hace continuas todas las aplicaciones de una cierta familia de funciones, en el sentido de que cualquier otra topología que haga continuas dichas aplicaciones está contenida en esta última.

DEFINICIÓN 2.51. Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ una familia de aplicaciones $f : X \rightarrow Y_f$, con Y_f un espacio topológico. Llamamos *la topología débil de X inducida por $\mathcal{F}$* o, de forma más simple, la $\mathcal{F}$ -topología de X , a la topología más débil en X que hace cada $f \in \mathcal{F}$ continua.

DEFINICIÓN 2.52. Una familia $\mathcal{F}$ de aplicaciones $f : X \rightarrow Y_f$ entre dos conjuntos X e Y_f se dice que *separa puntos en X* o *separante* si para cada par de puntos $x, y \in X$ existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

OBSERVACIÓN 2.53. Si X e Y_f son espacios vectoriales y las aplicaciones de $\mathcal{F}$ lineales, entonces se recupera la Definición 2.22, y que será la que usemos siempre en el caso de seminormas.

TEOREMA 2.54. Si la familia $\mathcal{F}$ separa puntos en X y los espacios Y_f son Hausdorff para todo $f \in \mathcal{F}$, entonces la $\mathcal{F}$ -topología de X también lo es.

DEMOSTRACIÓN. Sean $x, y \in X$ dos puntos distintos y sea $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Como Y_f es Hausdorff existen entornos disjuntos V_x de $f(x)$ y V_y de $f(y)$. Por continuidad de f , los conjuntos $f^{-1}(V_x)$ y $f^{-1}(V_y)$ constituyen entornos disjuntos de x e y respectivamente en la $\mathcal{F}$ -topología, y como los puntos son arbitrarios esto concluye la prueba. $\square$

TEOREMA 2.55. Si X es un espacio topológico compacto y si contamos con una sucesión de aplicaciones reales y continuas que separa puntos en X , entonces X es metrizable

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por τ la topología de X y $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión en cuestión. Supongamos también sin pérdida de generalidad que $|f_n(x)| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$ y que τ_d es la topología inducida por la aplicación

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f_n(x) - f_n(y)|,$$

que constituye una métrica gracias a la condición de separante. Como cada f_n es τ -continua y la serie converge uniformemente en $X \times X$, entonces d es τ -continua en $X \times X$, lo que significa que las bolas

$$B(y, r) = \{x \in X : d(x, y) < r\}$$

son abiertos en τ , y por tanto $\tau_d \subset \tau$. Sin embargo, al venir τ_d de una métrica, el espacio (X, τ_d) es Hausdorff, mientras que (X, τ) es compacto, veamos que esto implica la igualdad. En efecto, si F es un cerrado en τ entonces es τ -compacto, de donde se sigue que también es τ_d -compacto al ser cada recubrimiento por abiertos de τ_d un recubrimiento en τ (recordar $\tau_d \subset \tau$). Esto se traduce, por ser (X, τ_d) Hausdorff, en que F es también τ_d -cerrado, luego $\tau \subset \tau_d$. $\square$

Veamos qué podemos decir de estas topologías en el caso de espacios vectoriales.

TEOREMA 2.56. Supongamos que $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ y Λ son funcionales lineales en un espacio vectorial X , y sea

$$N = \{x : \Lambda_1 x = \dots = \Lambda_n x = 0\}.$$

Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

1. Hay escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\Lambda = \alpha_1 \Lambda_1 + \dots + \alpha_n \Lambda_n.$$

2. Existe $\gamma < \infty$ tal que

$$|\Lambda x| \leq \gamma \max_{1 \leq i \leq n} \{|\Lambda_i x|\} \quad \forall x \in X.$$

3. $\Lambda x = 0$ para todo $x \in N$.

DEMOSTRACIÓN. Procediendo con una demostración en cadena, es claro que se dan las implicaciones $1 \Rightarrow 2$ y $2 \Rightarrow 3$, luego solo falta probar $3 \Rightarrow 1$. Supongamos que se cumple la última propiedad y definamos la aplicación

$$\pi: X \longrightarrow \mathbb{K}^n, \quad \pi(x) = (\Lambda_1 x, \dots, \Lambda_n x).$$

Si $\pi x = \pi x'$, entonces por hipótesis se da la igualdad $\Lambda x = \Lambda x'$. A partir de esto podemos definir un funcional lineal f en $\pi(X)$ como $f(\pi(x)) = \Lambda x$. Extendiendo f a un funcional lineal F en todo $\mathbb{K}^n$, encontramos escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$F(z_1, \dots, z_n) = \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n.$$

Por tanto

$$\Lambda x = f(\pi(x)) = F(\Lambda_1 x, \dots, \Lambda_n x) = \alpha_1 \Lambda_1 x + \dots + \alpha_n \Lambda_n x,$$

justo como queríamos. □

TEOREMA 2.57. *Supongamos que X es un espacio vectorial y X' un subespacio vectorial separante de funcionales lineales en X . Entonces la X' -topología de X , τ' , lo convierte en un espacio localmente convexo con espacio dual X' .*

DEMOSTRACIÓN. El cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ con la topología usual es siempre Hausdorff, luego por la Observación 2.54 sabemos que τ' también lo es. Además, la linealidad de los elementos de X' muestra que τ' es invariante por traslaciones. Si ahora consideramos $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n \in X'$, $r_1, \dots, r_n > 0$, y si

$$V = \{x : |\Lambda_i x| < r_i \quad i = 1, \dots, n\}, \tag{2.9}$$

resulta que V es convexo, balanceado y $V \in \tau'$. De hecho, la colección de abiertos V como en (2.9) es una base local de τ' . De aquí concluimos que τ' es una topología localmente convexa.

Para abiertos V como en (2.9) se cumple $\frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V = V$, lo que prueba que la suma es función continua. Si ahora $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $x \in sV$ para algún $s > 0$. Si $|\beta - \alpha| < r$ y $y - x \in rV$ entonces

$$\beta y - \alpha x = (\beta - \alpha)y + \alpha(y - x)$$

cae en V supuesto que r satisfaga

$$r(s + r) + |\alpha|r < 1.$$

En conclusión, la multiplicación escalar también es continua y, por tanto, el par (X, τ') es un espacio vectorial topológico localmente convexo.

En cuanto al espacio dual, es claro que cada $\Lambda \in X'$ es τ' -continuo. Por el otro lado, supongamos que Λ es un funcional lineal τ' -continuo en X . Entonces $|\Lambda x| < 1$ para todo x en algún abierto V de la forma (2.9), y por la segunda condición del Teorema 2.56 cumple

$$\Lambda = \alpha_1 \Lambda_1 + \dots + \alpha_n \Lambda_n \in X',$$

lo que concluye la demostración. □

Pasemos a ver cómo incorporar estos conceptos en el contexto de espacios vectoriales topológicos.

DEFINICIÓN 2.58. Supongamos que (X, τ) es un espacio vectorial topológico y que su dual X^* separa puntos en X . Entonces la X^* -topología de X se llama la *topología débil de X* , y la denotaremos por τ_w . Además, al espacio vectorial topológico (X, τ_w) nos referiremos por simplicidad como X_w .

NOTACIÓN 2.59. En este contexto, llamaremos a τ la *topología original de X* para distinguirla de la débil, y nos referiremos a cualquier propiedad relativa a dicha topología con el apellido *original*, por ejemplo, hablaremos de la “adherencia original” de un subconjunto de X para referirnos a la adherencia respecto de τ . Del mismo modo, en la topología débil adoptaremos el apellido *débil*.

Comencemos viendo algunas propiedades sencillas de las topologías débiles.

TEOREMA 2.60. *Sea X un espacio vectorial topológico.*

1. X_w es localmente convexo y su dual coincide con X^* .
2. Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X converge débilmente a $x \in X$ si y solo si la sucesión $(\Lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a Λx para cada $\Lambda \in X^*$.
3. Un subconjunto $E \subset X$ está débilmente acotado si y solo si cada $\Lambda \in X^*$ es una función acotada en E .
4. Si X es infinito-dimensional entonces cada entorno débil del origen contiene un subespacio infinito-dimensional. En particular, X_w no es localmente acotado.
5. $(X_w)_w = X_w$.

DEMOSTRACIÓN. Analicemos brevemente cada una:

1. Es consecuencia del Teorema 2.57.
2. Sin pérdida de generalidad podemos reducirnos al caso en que x es el origen. Recordemos que una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio vectorial topológico converge al origen si cada entorno de este contiene todos los elementos de la sucesión a partir de un cierto valor de n . Teniendo esto en cuenta y que cada entorno débil del origen contiene otro de la forma

$$V = \{x : |\Lambda_i x| < r_i \quad i = 1, \dots, n\} \quad (2.10)$$

con $\Lambda_i \in X^*$ y $r_i > 0$, es sencillo ver que se da la equivalencia del enunciado.

3. De manera similar, un subconjunto $E \subset X$ está débilmente acotado si y solo si cada entorno V como en (2.10) contiene tE para algún valor de $t > 0$. Esto a su vez ocurre si y solo si para cada $\Lambda \in X^*$ existe un valor $\gamma < \infty$ tal que $|\Lambda x| < \gamma$ para cada $x \in E$, o lo que es lo mismo, si cada $\Lambda \in X^*$ está acotado.
4. Sea de nuevo V como en (2.10) y definamos

$$N = \{x : \Lambda_1 x = \dots = \Lambda_n x = 0\}.$$

La aplicación $x \rightarrow (\Lambda_1 x, \dots, \Lambda_n x)$ lleva X en $\mathbb{C}^n$ con núcleo N . De aquí concluimos que $\dim(X) \leq n + \dim(N)$, lo que nos dice que si X tiene dimensión infinita entonces $N \subset X$ también.

5. Es consecuencia inmediata del Teorema 2.57.

□

Pasando a resultados de mayor complejidad presentamos un par de teoremas.

TEOREMA 2.61. *Supongamos que E es un subconjunto convexo de un espacio localmente convexo X . Entonces la adherencia débil de E , $\overline{E}_w$, coincide con la adherencia original $\overline{E}$. En particular, los subconjuntos convexos originalmente cerrados o densos también lo son débilmente.*

DEMOSTRACIÓN. $\overline{E}_w$ es cerrado débil, luego cerrado original y por tanto $\overline{E} \subset \overline{E}_w$. Para obtener la inclusión restante, consideramos $x_0 \in X \setminus \overline{E}$. Por la segunda parte del Teorema 2.37 existen $\Lambda \in X^*$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que para cada $x \in \overline{E}$,

$$\operatorname{Re}(\Lambda x_0) < \gamma < \operatorname{Re}(\Lambda x).$$

El conjunto $\{x : \Lambda x < \gamma\}$ es por tanto un entorno débil de x_0 que no interseca a E , de donde deducimos que $x_0 \notin \overline{E}_w$, luego $\overline{E}_w \subset \overline{E}$. □

TEOREMA 2.62. *Supongamos que X es un espacio metrizable y localmente convexo. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergiendo débilmente a algún $x \in X$, entonces existe otra sucesión $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tal que:*

1. *Cada y_m es combinación convexa de una cantidad finita de x_n ;*
2. *$y_m \rightarrow x$ originalmente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea H la envoltura convexa del conjunto $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y K su adherencia débil, que por lo visto en el teorema anterior coincide con la adherencia original. Claramente $x \in K$, y como la topología original de X es metrizable (luego x tiene una base local numerable) entonces existe una sucesión $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ en H convergiendo originalmente a x , lo que prueba ambas condiciones. □

Veamos ahora cómo podemos trasladar la definición de topología débil de un espacio vectorial topológico X a su dual X^* . Es claro que el espacio dual sigue siendo un espacio vectorial, aunque en este caso no tenemos por qué esperar una estructura de espacio vectorial topológico, por lo que en principio no tiene sentido hablar de bidualidad (es decir, de $(X^*)^*$). Sin embargo, sabemos que la familia $\{\alpha_x\}_{x \in X}$ de funcionales lineales

$$\alpha_x : X^* \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \alpha_x \Lambda = \Lambda x,$$

es separante, pues en caso contrario existirían $\Lambda, \Lambda' \in X^*$ con $\Lambda \neq \Lambda'$ tales que $\alpha_x \Lambda = \alpha_x \Lambda'$ para todo $x \in X$, lo que implica precisamente la igualdad $\Lambda = \Lambda'$. Llamando por abuso de notación X a dicha familia de funcionales lineales, es claro que nos encontramos en las hipótesis del Teorema 2.57, y por tanto tiene sentido la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.63. Dado un espacio vectorial topológico X , llamamos *topología débil* de X^** a la X -topología de X^* .

Sabemos que la topología débil* dota a X^* de estructura de espacio localmente convexo y que su dual es precisamente la familia $\{\alpha_x\}$, sin embargo dichas topologías presentan además una propiedad de compacidad de gran relevancia.

TEOREMA 2.64 (TEOREMA DE BANACH-ALAOGLU). *Si V es un entorno del origen en un espacio vectorial topológico X y si*

$$K = \{\Lambda \in X^* : |\Lambda x| \leq 1 \quad \forall x \in V\}, \quad (2.11)$$

entonces K es débil-compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Como los entornos del origen son absorbentes, para cada $x \in X$ hay un $\gamma(x) \in \mathbb{R}^+$ tal que $x \in \gamma(x)V$, y por tanto

$$|\Lambda x| \leq \gamma(x) \quad \forall x \in X, \Lambda \in K.$$

Teniendo esto en mente, para cada $x \in X$ consideramos el disco

$$D_x = \{\beta \in \mathbb{K} : |\beta| \leq \gamma(x)\}$$

y llamamos $P = \prod_{x \in X} D_x$, al cual dotamos de la topología producto τ . Como cada D_x es compacto, también lo es P por el Teorema de Tychonoff A.3. Los elementos de P son las sucesiones $\beta = (\beta_x)_{x \in X}$ con $\beta_x \in D_x$ para cada $x \in X$, lo que podemos ver alternativamente como las aplicaciones:

$$\beta : X \longrightarrow \mathbb{K}; \quad \beta(x) = \beta_x,$$

satisfaciendo $|\beta_x| \leq \gamma(x)$.

De lo mencionado hasta ahora deducimos el contenido $K \subset X^* \cap P$, y por tanto que podemos dotar a K de dos topologías, la inducida por la topología débil* y por τ . Probemos las siguientes afirmaciones: ambas topologías coinciden en K ; y K es cerrado en P . De esta forma, por la segunda afirmación concluiremos que K es τ -compacto, y por la primera que K es débil*-compacto.

Fijemos $\Lambda_0 \in K$, y elijamos $\delta > 0$ y $x_i \in X$ con $i = 1, \dots, n$ para algún valor $n \in \mathbb{N}$. Definamos ahora

$$W_1 = \{\Lambda \in X^* : |\Lambda x_i - \Lambda_0 x_i| < \delta \quad i = 1, \dots, n\}$$

y

$$W_2 = \{\beta \in P : |\beta(x_i) - \Lambda_0 x_i| < \delta \quad i = 1, \dots, n\}.$$

Si permitimos a n , x_i y δ tomar todos los valores permitidos obtenemos, de la familia generada por W_1 una base local de la topología débil* de X^* en Λ_0 , y de la familia generada por W_2 una base local de la topología producto τ de P en Λ_0 . Sin embargo como $K \subset X^* \cap P$ tenemos la igualdad

$$W_1 \cap K = W_2 \cap K,$$

lo que concluye la primera afirmación.

Por último, consideremos β_0 en la τ -adherencia de K y elijamos $x, y \in X$, $\mu, \lambda \in \mathbb{K}$ y $\varepsilon > 0$. El conjunto

$$\{\beta \in P : |\beta(z) - \beta_0(z)| < \varepsilon, \quad z = x, y, \mu x + \lambda y\}$$

es un τ -entorno de β_0 en P , y por tanto corta a K en algún β' . Como β' es lineal, resulta

$$\beta_0(\mu x + \lambda y) - \mu \beta_0(x) - \lambda \beta_0(y) = [\beta_0 - \beta'](\mu x + \lambda y) + \mu[\beta' - \beta_0](x) + \lambda[\beta' - \beta_0](y),$$

luego

$$|\beta_0(\mu x + \lambda y) - \mu \beta_0(x) - \lambda \beta_0(y)| < (1 + |\mu| + |\lambda|)\varepsilon.$$

Como ε es arbitrario concluimos que β_0 es lineal. Finalmente, si $x \in V$ y $\varepsilon > 0$, el mismo argumento muestra que hay un $\beta' \in K$ tal que $|\beta'(x) - \beta_0(x)| < \varepsilon$, y como $|\beta'(x)| \leq 1$ por definición de K , se sigue que $|\beta_0(x)| \leq 1$. De aquí concluimos que $\beta_0 \in K$ y la segunda afirmación. $\square$

DEFINICIÓN 2.65. Dado un entorno V del origen en un espacio vectorial topológico, el conjunto definido en (2.11) recibe el nombre de *polar* de V .

En el caso de que X sea separable (tenga un subconjunto numerable denso), la conclusión del Teorema de Banach-Alaoglu puede hacerse más fuerte.

TEOREMA 2.66. Si X es un espacio vectorial topológico separable, y si $K \subset X^*$ es débil*-compacto, entonces K es metrizable en la topología débil*.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un conjunto numerable denso en X y sea $\alpha_n(\Lambda) = \Lambda x_n$ para cada $\Lambda \in X^*$. Por la definición de topología débil* dichas aplicaciones son débil*-continuas, y además la igualdad $\alpha_n(\Lambda) = \alpha_n(\Lambda')$ para todo $n \in \mathbb{N}$ implica $\Lambda = \Lambda'$ por continuidad de Λ y Λ' y la densidad de los x_n , lo que nos dice que $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia numerable de aplicaciones continuas que separa puntos en X^* . Con esto en mente, el Teorema 2.55 concluye la demostración. $\square$

COROLARIO 2.67. Si V es un entorno del origen en un espacio vectorial topológico separable y si $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en X^* tal que

$$|\Lambda_n x| \leq 1 \quad \forall x \in V, n \in \mathbb{N},$$

entonces hay una subsucesión $(\Lambda_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ y un $\Lambda \in X^*$ tal que

$$\Lambda x = \lim_{i \rightarrow \infty} \Lambda_{n_i} x \quad \forall x \in X.$$

DEMOSTRACIÓN. Basta combinar los Teoremas 2.64 y 2.66 y tener en cuenta que las sucesiones en espacios métricos compactos tienen subsucesiones convergentes. $\square$

Una formulación alternativa del Teorema de Banach-Alaoglu común en la bibliografía al hablar de espacios normados es la siguiente.

COROLARIO 2.68. Si X es un espacio normado, entonces la bola unidad cerrada de X^* es compacta en la topología débil*.

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar el Teorema 2.64 con V la bola unidad cerrada de X y a continuación usar la caracterización de la norma de un operador dada por:

$$\|\Lambda\| = \sup\{|\Lambda x| : \|x\| \leq 1\}.$$

$\square$

Presentamos a continuación algunas aplicaciones del Teorema de Banach-Alaoglu.

TEOREMA 2.69. En un espacio localmente convexo X , un conjunto es acotado débil si y solo si es acotado original.

DEMOSTRACIÓN. Comenzamos con la implicación sencilla.

$\Leftarrow$) Como cada entorno débil del origen es entorno original de este, es trivial deducir de la definición de acotación que todo conjunto originalmente acotado se encuentra débilmente acotado.

$\Rightarrow$) Supongamos que $E \subset X$ está débilmente acotado y sea U un entorno original del origen en X . Como X es localmente convexo, posee un entorno convexo, balanceado y original del origen V tal que $\overline{V} \subset U$. Sea K el polar de V , veamos que se da la siguiente igualdad

$$\overline{V} = \{x \in X : |\Lambda x| \leq 1 \text{ para todo } \Lambda \in K\}. \quad (2.12)$$

Es claro que V es un subconjunto del lado derecho, y como K es cerrado por ser intersección de conjuntos cerrados, entonces $\overline{V}$ también es un subconjunto. Supongamos ahora que $x_0 \in X \setminus \overline{V}$, entonces por el Teorema 2.42 (particularizando $B = \overline{V}$) existe $\Lambda \in K$ para el cual $\Lambda x_0 > 1$, lo que prueba la igualdad (2.12).

Como E está débilmente acotado, el Teorema 2.60 nos dice que cada $\Lambda \in X^*$ está acotado superiormente en módulo en E por una constante $\gamma(\Lambda) \in \mathbb{R}^+$. Como K es convexo y débil*-compacto por

el Teorema 2.64, y como las aplicaciones $\Lambda \rightarrow \Lambda x$ son débil*-continuas, podemos aplicar la siguiente proposición (con X^* en lugar de X y $\mathbb{K}$ en lugar de Y), cuya demostración se puede consultar en [11]:

Supongamos que X e Y son espacios vectoriales topológicos, K es un compacto convexo en X , Γ es una colección de aplicaciones lineales continuas $\Gamma : X \rightarrow Y$, y las órbitas

$$\Gamma(x) = \{\Lambda x : \Lambda \in \Gamma\}$$

son conjuntos acotados en Y para cada $x \in K$. Entonces hay un conjunto acotado $B \subset Y$ tal que $\Lambda(K) \subset B$ para cada $\Lambda \in \Gamma$.

El resultado es la acotación de cada $\Lambda \in K$ en E por una misma constante:

$$|\Lambda x| \leq \gamma \quad \forall x \in E, \Lambda \in K. \quad (2.13)$$

Ahora, las ecuaciones (2.12) y (2.13) nos dicen que $\gamma^{-1}x \in \overline{V} \subset U$ para todo $x \in E$. Como además V es balanceado, entonces

$$E \subset t\overline{V} \subset tU \quad \forall t > \gamma,$$

lo que concluye la acotación original de E . □

COROLARIO 2.70. *Si X es un espacio normado, si $E \subset X$ y si*

$$\sup\{\Lambda x : x \in E\} < \infty \quad \forall \Lambda \in X^*, \quad (2.14)$$

entonces existe $\gamma \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\|x\| \leq \gamma \quad \forall x \in E. \quad (2.15)$$

DEMOSTRACIÓN. Los espacios normados son localmente convexos, y la ecuación (2.14) nos dice (Teorema 2.60) que E está débilmente acotado, luego por el resultado anterior E está originalmente acotado, lo que se traduce en (2.15). □

2.6. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES VECTORIALES

En un espacio de medida real o complejo sabemos cómo integrar funciones reales o complejas bajo ciertas condiciones de regularidad. Sin embargo, en ocasiones nos encontraremos con funciones sobre un espacio de medida tomando valores en un espacio vectorial topológico, y nos gustaría ver si, en ese caso, podríamos extender el concepto de integral ya conocido, y bajo qué condiciones una función así es integrable. Parece razonable exigir además, a una extensión de este tipo, que el resultado de la integración sea un vector en el espacio en cuestión, y que se cumpla la siguiente igualdad

$$\Lambda \left(\int_Q f d\mu \right) = \int_Q \Lambda f d\mu$$

para cada $\Lambda \in X^*$, siendo (Q, Σ, μ) el espacio de medida y X el espacio vectorial topológico en cuestión, puesto que dicha igualdad se cumple para sumas y Λ es continua (interpretando la integral como un paso al límite de ciertas sumas).

DEFINICIÓN 2.71. Sea (Q, Σ, μ) un espacio de medida con μ una medida real o compleja sobre Q y Σ la σ -álgebra correspondiente, X un espacio vectorial topológico donde X^* separa puntos, y f una función de Q en X tal que las funciones escalares Λf dadas por

$$\Lambda f(q) = \Lambda(f(q)) \quad \forall q \in Q,$$

son integrables en (Q, Σ, μ) para cada $\Lambda \in X^*$. Si hay un vector $y \in X$ tal que

$$\Lambda y = \int_Q \Lambda f d\mu \quad \forall \Lambda \in X^*,$$

entonces definimos

$$\int_Q f d\mu := y.$$

OBSERVACIÓN 2.72. Gracias a que X^* separa puntos, en caso de existir un vector en las condiciones anteriores, este será único, por lo que la integral está bien definida.

Veamos bajo qué condiciones podemos garantizar la existencia de dicha integral.

TEOREMA 2.73. *Supongamos que X es un espacio vectorial topológico, que X^* separa puntos, y que $(Q, \mathcal{B}, \mu)$ es un espacio de medida con Q un espacio topológico Hausdorff y compacto, $\mathcal{B}$ la σ -álgebra de Borel correspondiente, y μ una medida de probabilidad, es decir, no negativa y con $\mu(Q) = 1$. Si ahora $f : Q \rightarrow X$ es una aplicación continua tal que $\overline{\text{co}(f(Q))}$ es compacto en X , entonces la integral*

$$\int_Q f d\mu$$

existe y se encuentra en $\overline{\text{co}(f(Q))}$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que X es un espacio vectorial real por simplicidad. Llamando $H = \overline{\text{co}(f(Q))}$ tenemos que probar que existe $y \in H$ tal que

$$\Lambda y = \int_Q \Lambda f d\mu \quad \forall \Lambda \in X^*. \quad (2.16)$$

Sea $L = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}$ un subconjunto finito de X^* y E_L el conjunto de los vectores $y \in \overline{H}$ satisfaciendo (2.16) para todo $\Lambda \in L$. Cada E_L es cerrado por la continuidad de Λ , y compacto por compacidad de $\overline{H}$. Si ningún E_L fuese vacío, entonces su intersección tampoco lo sería y habríamos resuelto el problema, veámoslo.

En efecto, comencemos viendo L en vez de como un conjunto, como la aplicación de X en $\mathbb{R}^n$ de componentes los funcionales Λ_i , y llamemos $K = L(f(Q))$. Definamos también

$$m_i = \int_Q \Lambda_i f d\mu \quad i = 1, \dots, n,$$

probemos que $m = (m_1, \dots, m_n)$ se encuentra en la envoltura convexa de K .

Si $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ no se encuentra en la envoltura convexa de K , aplicando el último apartado del Teorema 2.20 (teniendo en cuenta que K es compacto por serlo Q y tanto f como L continuas), que nos da la compacidad de $\text{co}(K)$, y el Teorema 2.37 (con $A = \text{co}(K)$ y $B = t$) junto con la estructura de los funcionales lineales de $\mathbb{R}^n$, obtenemos constantes $c_1, \dots, c_n, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ de forma que

$$\sum_{i=1}^n c_i u_i < \gamma_1 < \gamma_2 < \sum_{i=1}^n c_i t_i \quad \forall u_1, \dots, u_n \in K,$$

o dicho de otra forma

$$\sum_{i=1}^n c_i \Lambda_i f(q) < \gamma_1 < \gamma_2 < \sum_{i=1}^n c_i t_i \quad \forall q \in Q.$$

Como μ es una medida de probabilidad, integrando en la cadena de desigualdades anterior obtenemos en particular $\sum_i c_i m_i < \sum_i c_i t_i$, y por tanto que $t \neq m$. Esto muestra que $m \in \text{co}(K)$.

Como $K = L(f(Q))$ y L es lineal, entonces $m = Ly$ para algún $y \in H$, lo que implica

$$\Lambda_i y = m_i = \int_Q \Lambda_i f d\mu \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

es decir, $y \in E_L$. □

OBSERVACIÓN 2.74. Toda medida boreliana no negativa y finita sobre Q es, salvo producto por un escalar, una medida de probabilidad, luego este teorema se extiende con facilidad a medidas reales o complejas finitas sobre Q gracias al Teorema de Descomposición de Jordan [12].

TEOREMA 2.75 (DESIGUALDAD INTEGRAL DE MINKOWSKI). *Supongamos Q un espacio topológico Hausdorff y compacto, X un espacio de Banach, $f : Q \rightarrow X$ una función continua, y μ una medida boreliana no negativa y finita sobre Q . Entonces*

$$\left\| \int_Q f d\mu \right\| \leq \int_Q \|f\| d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN. Llamemos $y = \int_Q f d\mu$. Por la Observación 2.36 existe $\Lambda \in X^*$ tal que $\Lambda y = \|y\|$ y $|\Lambda x| \leq \|x\|$ para cada $x \in X$, lo que nos dice en particular

$$|\Lambda f(q)| \leq \|f(q)\| \quad q \in Q.$$

Por el Teorema 2.73, obtenemos

$$\|y\| = \Lambda y = \int_Q \Lambda f d\mu \leq \int_Q \|f\| d\mu,$$

lo que concluye el resultado. □

Capítulo 3

Teoría de Distribuciones

Las distribuciones surgen en el contexto de los espacio vectoriales topológicos como el dual de un espacio localmente convexo, por lo que el primer paso será introducir dicho espacio y ver que efectivamente se le puede dotar de una estructura localmente convexa. Esto nos servirá a continuación para presentar la definición de distribución, sus propiedades más relevantes, y algunos de los ejemplos habituales, mostrando a su vez cómo estas extienden el concepto de función a través de las operaciones básicas del cálculo. Finalmente, aprovecharemos todo ello para entender las propiedades locales de estas (toda distribución es, localmente, combinación de “funciones” y sus derivadas) y cómo se puede definir la convolución en el caso de una distribución y una función, y en el de dos distribuciones.

3.1. ESPACIO DE FUNCIONES TEST Y DISTRIBUCIONES

Como las distribuciones buscan extender el concepto de derivada a una clase mayor de objetos, y nosotros sólo sabemos derivar funciones, parece razonable que el espacio vectorial del que proceden tenga que ver con alguna familia de funciones diferenciables. Comencemos analizando dos espacios funcionales que van a jugar un papel fundamental.

DEFINICIÓN 3.1. Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un *multiíndice* es una n -upla $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, y su *orden* es el valor

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

A partir de un multiíndice α , definimos su operador diferencial asociado como:

$$D^\alpha : C^\infty(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega); \quad D^\alpha f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} f,$$

siendo $C^\infty(\Omega)$ el espacio de funciones complejas de clase infinito sobre Ω .

DEFINICIÓN 3.2. El *soporte* de una función $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ sobre un espacio topológico X es el conjunto

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Además, dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y un compacto $K \subset \Omega$, se define el espacio

$$\mathcal{D}_K = \{f \in C^\infty(\Omega) : \text{supp}(f) \subset K\}.$$

TEOREMA 3.3. Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, existe una topología en $C^\infty(\Omega)$ que lo dota de estructura de espacio Fréchet con la propiedad de Heine-Borel. Además, en dicha topología, $\mathcal{D}_K$ es un subespacio cerrado suyo para cada compacto $K \subset \Omega$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos una sucesión $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de compactos $K_n \subset \Omega$ tal que $K_n \subset (K_{n+1})^\circ$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Definamos ahora la familia separante de seminormas $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $C^\infty(\Omega)$ dada por

$$p_n(f) = \max\{|D^\alpha f(x)| : x \in K_n, |\alpha| \leq n\}. \quad (3.1)$$

Por el Teorema 2.28 y la Observación 2.30 obtenemos una topología τ que hace de $(C^\infty(\Omega), \tau)$ un espacio localmente convexo y metrizable con métrica invariante.

Recordemos que una base local de τ consiste en

$$V_n = \left\{ f \in C^\infty(\Omega) : p_n(f) < \frac{1}{n} \right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

La estructura de espacio Fréchet surgirá entonces si probamos la completitud. Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(C^\infty(\Omega), \tau)$. Si fijamos $N \in \mathbb{N}$, entonces por la condición de Cauchy resulta que $f_i - f_j \in V_N$ para valores de i, j suficientemente grandes, lo que implica, por cómo se definieron las seminormas, que

$$|D^\alpha f_i(x) - D^\alpha f_j(x)| < \frac{1}{N} \quad \forall x \in K_N, |\alpha| \leq N.$$

De aquí se sigue que cada sucesión $(D^\alpha f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en compactos de Ω a una función g_α . En particular, $f_i(x) \rightarrow g_0(x)$ con $D^\alpha g_0 = g_\alpha$, de donde afirmamos que $g_0 \in C^\infty(\Omega)$ y que la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente en $(C^\infty(\Omega), \tau)$. Por tanto el espacio es completo.

Supongamos ahora que $E \subset C^\infty(\Omega)$ es cerrado y acotado. Por el Teorema 2.28 la acotación de E equivale a la acotación de cada p_n en E , lo que nos otorga la acotación de $D^\alpha f$ en K_n para cada $|\alpha| \leq n$ y $f \in E$. En consecuencia, tenemos la acotación puntual y la equicontinuidad de

$$\Phi_n = \left\{ D^\beta f|_{K_{n-1}} : f \in E, |\beta| \leq n-1 \right\}$$

en K_{n-1} , es decir, se dan las siguientes dos condiciones:

- $\sup\{|D^\beta f(x)| : f \in E, |\beta| \leq n-1\} < \infty$ para cada $x \in K_{n-1}$;
- dado $\varepsilon > 0$, cada $x \in K_{n-1}$ tiene un entorno V tal que $|D^\beta f(x) - D^\beta f(y)| < \varepsilon$ para cada $y \in V$, cada $f \in E$ y $|\beta| \leq n-1$.

Empleando el Teorema de Ascoli A.7 y el Teorema A.6 deducimos que Φ_n está totalmente acotado, y de hecho, que es compacto.

Con esto en mente, consideramos una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de E , y vamos a emplear un argumento similar al proceso diagonal de Cantor para hallar una subsucesión convergente de esta. En efecto, empezando con la compacidad de Φ_1 , encontramos una subsucesión $(f_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente en Φ_1 . Para esta última sucesión, la compacidad de Φ_2 nos otorga una subsucesión $(f_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente, ahora tanto en el nuevo espacio como en el anterior. Repitiendo el argumento recursivamente, obtenemos una sucesión de subsucesiones $(f_n^m)_{n \in \mathbb{N}}$ con $m \in \mathbb{N}$, tal que cada $(f_n^m)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en Φ_k para $k = 1, \dots, m$, y que es, a su vez, subsucesión de $(f_n^{m-1})_{n \in \mathbb{N}}$. Llamando $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a la subsucesión con $g_n = f_n^m$, queremos probar que converge en E , y la forma de hacerlo es probando que es de Cauchy, pues en ese caso la completitud de $(C^\infty(\Omega), \tau)$ y la condición de ser E cerrado nos llevarían a la convergencia en cuestión. Sin embargo esto es sencillo, consideremos un elemento V_j de la base local (3.2). Como dicha sucesión converge en Φ_n para cualquier $n \in \mathbb{N}$, en particular lo hace para Φ_{j+1} , y por tanto es de Cauchy ahí. Esto implica que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$g_k|_{K_j} - g_{k'}|_{K_j} \in V_j|_{K_j} \quad \forall k, k' \geq N,$$

siendo $V_j|_{K_j}$ el abierto de Φ_{j+1} dado por

$$V_j|_{K_j} = \left\{ D^\beta f|_{K_j} : f \in E, |\beta| \leq j, \max_{K_j} \{|D^\beta f(x)|\} < \frac{1}{j} \right\}.$$

Teniendo en cuenta la definición de $V_j|_{K_j}$, es trivial que

$$p_j(g_k - g_{k'}) < \frac{1}{j} \iff g_k - g_{k'} \in V_j \quad \forall k, k' \geq N,$$

lo que nos dice que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en E .

Hemos visto entonces que toda sucesión en E contiene una subsucesión $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente, para la cual además $(D^\beta g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en compactos de Ω para cada multiíndice β . Esto se traduce en que E es compacto, y que $(C^\infty(\Omega), \tau)$ posee la propiedad de Heine-Borel.

Por último, observamos que en la topología τ , los funcionales

$$\alpha_x : C^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \alpha_x(f) = f(x),$$

son continuos, y por tanto sus núcleos cerrados. Teniendo en cuenta que $\mathcal{D}_K$ es la intersección de los núcleos de los funcionales α_x con $x \in \Omega \setminus K$, es claro que también es cerrado. $\square$

COROLARIO 3.4. *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto abierto y $K \subset \Omega$ es compacto, entonces $\mathcal{D}_K$ con la topología inducida de $C^\infty(\Omega)$, que denotaremos por τ_K , es espacio Fréchet con la propiedad de Heine-Borel.*

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar los Teoremas 3.3 y 2.16. $\square$

OBSERVACIÓN 3.5. Debido al Teorema 2.21, a lo que acabamos de probar, y a que los espacios $C^\infty(\Omega)$ y $\mathcal{D}_K$ tienen dimensión infinita (consultar [11] para $\mathcal{D}_K$), es claro que estos no son localmente acotados, y por tanto tampoco normables.

Nos encontramos ya en disposición de introducir el espacio funcional sobre el que van a actuar las distribuciones.

DEFINICIÓN 3.6. Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, se define el *espacio de funciones test* $\mathcal{D}(\Omega)$ como la unión de todos los espacios $\mathcal{D}_K$ con $K \subset \Omega$ compacto, o lo que es lo mismo, el espacio de funciones de clase infinito en Ω con soporte compacto.

Dicho conjunto tiene estructura de espacio vectorial, veamos qué mas podemos decir.

DEFINICIÓN 3.7. Sobre el espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ definimos la sucesión de normas $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$ como

$$\|\phi\|_n = \max\{|D^\alpha \phi(x)| : x \in \Omega, |\alpha| \leq n\} \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

OBSERVACIÓN 3.8. Dicha familia de normas induce, por el Teorema 2.28, una estructura localmente convexa y metrizable en $\mathcal{D}(\Omega)$. Sin embargo, la topología en cuestión cuenta con la desventaja de no ser completa. Por ejemplo, si consideramos una función $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con soporte en $[0, 1]$ y positiva en $(0, 1)$, entonces la sucesión $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por

$$\psi_n(x) = \phi(x-1) + \frac{1}{4}\phi(x-2) + \cdots + \frac{1}{n^2}\phi(x-n)$$

es de Cauchy en esta topología pero no convergente, pues su límite debe ser también el límite puntual de la sucesión, y este no tiene soporte compacto.

TEOREMA 3.9. *Si $K \subset \Omega$ es compacto, la restricción de dicha familia de normas a $\mathcal{D}_K$ induce, precisamente, la topología τ_K .*

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que τ_K venía dada por las seminormas p_n de (3.1). Para probar el resultado, notamos que en cada compacto K existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_n$ para cada $n \geq N$, siendo $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de compactos asociada a las seminormas p_n . En este rango de valores de n , $\|\phi\|_n = p_n(\phi)$ para todo $\phi \in \mathcal{D}_K$. Además, como $\|\phi\|_n \leq \|\phi\|_{n+1}$ y $p_n(\phi) \leq p_{n+1}(\phi)$, las topologías inducidas por ambas seminormas permanecen invariantes si permitimos que las sucesiones de seminormas empiecen por el término N -ésimo. En consecuencia, ambas coinciden. $\square$

El concepto de completitud es, sin embargo, de gran importancia en la teoría que estamos desarrollando, por lo que debemos explorar otras alternativas a la hora de definir una topología en el espacio de funciones test.

DEFINICIÓN 3.10. Si denotamos por β la colección de todos los conjuntos convexos balanceados $W \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tales que $\mathcal{D}_K \cap W \in \tau_K$ para todo compacto $K \subset \Omega$, definimos la topología τ en $\mathcal{D}(\Omega)$ como la colección de todas las uniones de conjuntos en la forma $\phi + W$ con $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $W \in \beta$.

Veamos que, en efecto, dicha colección τ es una topología y algunas de sus principales propiedades.

TEOREMA 3.11. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto.*

1. τ es una topología en $\mathcal{D}(\Omega)$ y β una base local de τ .
2. $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo.
3. Un subconjunto convexo y balanceado V de $\mathcal{D}(\Omega)$ es abierto si y solo si $V \in \beta$.
4. La topología τ_K de cualquier $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}(\Omega)$ coincide con la que hereda como subespacio de $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$.
5. Si E es un subconjunto acotado de $\mathcal{D}(\Omega)$, entonces $E \subset \mathcal{D}_K$ para algún compacto $K \subset \Omega$, y hay números $M_n < \infty$ tales que

$$\|\phi\|_n \leq M_n \quad \forall \phi \in E, \quad n \in \mathbb{N}.$$

6. $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ tiene la propiedad de Heine-Borel.
7. Si $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{D}(\Omega)$, entonces $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_K$ para algún compacto $K \subset \Omega$ y

$$\lim_{i, j \rightarrow \infty} \|\phi_i - \phi_j\|_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

8. Si $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{D}(\Omega)$ convergiendo al origen, entonces hay un compacto $K \subset \Omega$ que contiene el soporte de cada ϕ_n , y $(D^\alpha \phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge al origen uniformemente para cada multiíndice α .
9. $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ es completo.

DEMOSTRACIÓN. Probemos cada apartado.

1. Para ver que τ es una topología, por definición solo falta probar que es cerrado bajo la intersección de dos abiertos cualesquiera. Sean $V_1, V_2 \in \tau$, veamos que $V_1 \cap V_2$ es entorno de todos sus puntos. En efecto, si consideramos $\phi \in V_1 \cap V_2$, debemos encontrar $W \in \beta$ tal que

$$\phi + W \subset V_1 \cap V_2. \quad (3.3)$$

Como ϕ se encuentra tanto en V_1 como en V_2 , por definición de τ existen $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $W_1, W_2 \in \beta$ de forma que

$$\phi \in \phi_i + W_i \subset V_i, \quad i = 1, 2.$$

Elijamos K tal que $\mathcal{D}_K$ contenga a ϕ_1, ϕ_2 y ϕ . Como $\phi - \phi_i \in \mathcal{D}_K \cap W_i$ y este conjunto es abierto en τ_K , por continuidad del producto por escalares en $(\mathcal{D}_K, \tau_K)$ resulta que existe $\delta_i > 0$ cumpliendo

$$\phi - \phi_i \in (1 - \delta_i)\mathcal{D}_K \cap W_i \subset (1 - \delta_i)W_i.$$

La convexidad de W_i implica por tanto

$$\phi - \phi_i + \delta_i W_i \subset (1 - \delta_i)W_i + \delta_i W_i = W_i,$$

de modo que

$$\phi + \delta_i W_i \subset \phi_i + W_i \subset V_i, \quad i = 1, 2.$$

En conclusión, $W = (\delta_1 W_1) \cap (\delta_2 W_2)$ satisface (3.3) y τ es topología.

Comprobar que β es base local del origen en τ es trivial, pues al ser cada elemento de β balanceado, contiene el origen, y la condición de abierto y de base es inmediata.

2. Ver que además τ otorga la condición de espacio vectorial topológico a $\mathcal{D}(\Omega)$ requiere comprobar las dos condiciones adicionales habituales, comencemos viendo que los puntos son cerrados. En efecto, sean $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ dos puntos distintos, queremos ver que $X \setminus \{\phi_1\}$ es abierto probando que es entorno de ϕ_2 , por ser este arbitrario. Para este fin definimos

$$W = \{\phi \in \mathcal{D}(\Omega) : \|\phi\|_0 < \|\phi_1 - \phi_2\|_0\},$$

con la norma $\|\cdot\|_0$ de la Definición 3.7. Por el Teorema 3.9 tenemos $W \in \beta$, y es claro que ϕ_1 no se encuentra en $\phi_2 + W$. De aquí se sigue justo lo que queríamos, y por tanto que $\{\phi_1\}$ es cerrado en τ .

En cuanto a la continuidad de la suma, notamos que la convexidad de cada $W \in \beta$ implica

$$\left(\phi_1 + \frac{1}{2}W\right) + \left(\phi_2 + \frac{1}{2}W\right) = (\phi_1 + \phi_2) + W \quad \forall \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(\Omega),$$

de donde se sigue la continuidad.

Para la multiplicación, consideramos $\alpha_0 \in \mathbb{K}$ y $\phi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ y tenemos en cuenta la igualdad

$$\alpha\phi - \alpha_0\phi_0 = \alpha(\phi - \phi_0) + (\alpha - \alpha_0)\phi_0.$$

Si $W \in \beta$, existe $\delta > 0$ tal que $\delta\phi_0 \in (1/2)W$, y por ser W balanceado es claro que

$$(\alpha - \alpha_0)\phi_0 \in \frac{1}{2}W$$

cuando $|\alpha - \alpha_0| < \delta$. Elijamos ahora $c > 0$ tal que

$$2c(|\alpha_0| + \delta) = 1,$$

y notemos que en el rango $\phi - \phi_0 \in cW$, teniendo en cuenta que W es balanceado de nuevo, se da el contenido

$$\alpha(\phi - \phi_0) \in \frac{1}{2}W.$$

Por todo lo anterior, empleando la convexidad de W , se sigue finalmente que

$$\alpha\phi - \alpha_0\phi_0 \in W$$

cuando $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ y $\phi - \phi_0 \in cW$. De aquí concluimos lo que queríamos.

Por último, notamos cómo la condición de que β sea base local y sus elementos convexos otorga de manera trivial la convexidad local.

3. Claramente, si $V \in \beta$ es abierto por lo visto anteriormente, luego solo nos queda la implicación restante. Supongamos $V \in \tau$ y consideremos $\phi \in \mathcal{D}_K \cap V$. Por ser β base local del origen, sabemos que existe $W \in \beta$ tal que $\phi + W \subset V$, y entonces

$$\phi + (\mathcal{D}_K \cap W) \subset \mathcal{D}_K \cap V.$$

Como $\mathcal{D}_K \cap W$ es abierto en τ_K , hemos probado que $\mathcal{D}_K \cap V \in \tau_K$ si $V \in \tau$ y $K \subset \Omega$ es compacto. De aquí concluimos que si V es convexo y balanceado, entonces $V \in \beta$.

4. La prueba anterior muestra que la topología inducida por τ en $\mathcal{D}_K$ está contenida en τ_K , veamos el otro contenido. Supongamos que $E \in \tau_K$, queremos llegar a que $E = \mathcal{D}_K \cap V$ para algún $V \in \tau$. Dado $\phi \in E$, por definición de τ_K existe $N \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ tal que

$$\{\psi \in \mathcal{D}_K : \|\psi - \phi\|_N < \delta\} \subset E.$$

Sea

$$W_\phi = \{\psi \in \mathcal{D}(\Omega) : \|\psi\|_N < \delta\} \in \beta,$$

el cual cumple

$$\mathcal{D}_K \cap (\phi + W_\phi) = \phi + (\mathcal{D}_K \cap W_\phi) \subset E.$$

Definiendo entonces V como la unión de los conjuntos en la forma $\phi + W_\phi$ para cada $\phi \in E$, se obtiene la igualdad deseada.

5. Consideremos un subconjunto $E \subset \mathcal{D}(\Omega)$ que no cae en ningún $\mathcal{D}_K$. Entonces existe una sucesión de funciones $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en E y de puntos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en Ω sin punto de acumulación en Ω y tal que $\phi_n(x_n) \neq 0$ para cada valor de n . Si

$$W = \left\{ \phi \in \mathcal{D}(\Omega) : |\phi(x_n)| < \frac{1}{n} |\phi_n(x_n)| \quad \forall n \in \mathbb{N} \right\},$$

entonces al contener cada compacto K solo una cantidad finita de términos x_n , es fácil verificar que $\mathcal{D}_K \cap W \in \tau_K$, y por tanto que $W \in \beta$. Como además $\phi_n \notin nW$ por definición, ningún múltiplo de W contiene a E , lo que nos dice que E no está acotado. De aquí se sigue que cada subconjunto acotado de $\mathcal{D}(\Omega)$ está contenido en algún $\mathcal{D}_K$.

Por el apartado anterior, un subconjunto E acotado en $\mathcal{D}(\Omega)$ también lo es en el $\mathcal{D}_K$ que lo contiene. En consecuencia, los Teoremas 3.9 y 2.28 implican

$$\sup\{\|\phi\|_n : \phi \in E\} < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

lo que completa la demostración.

6. Si $E \subset \mathcal{D}(\Omega)$ es cerrado y acotado, entonces está contenido en algún $\mathcal{D}_K$, donde seguirá siendo cerrado y acotado. Como $(\mathcal{D}_K, \tau_K)$ tiene la propiedad de Heine-Borel por el Teorema 3.4, y es un subespacio cerrado de $\mathcal{D}(\Omega)$ por el Teorema 2.17, entonces E es un compacto dentro de un cerrado, luego es compacto.
7. Las sucesiones de Cauchy están acotadas, luego su contenido en algún $\mathcal{D}_K$ es trivial con lo probado anteriormente. Además, como la topología relativa coincide con τ_K , el Teorema 3.9 nos da el límite que buscamos.
8. Este apartado es una reformulación del anterior.
9. Es consecuencia de que las sucesiones de Cauchy están contenidas en algún $\mathcal{D}_K$, como vimos antes, y de que dichos espacios son completos por tener estructura de espacio Fréchet con la topología τ_K (Teorema 3.4), que coincide con la heredada por $\mathcal{D}(\Omega)$.

□

NOTACIÓN 3.12. En adelante, nos referiremos a $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ y $(\mathcal{D}_K, \tau_K)$ simplemente por $\mathcal{D}(\Omega)$ y $\mathcal{D}_K$ respectivamente, salvo en aquellas ocasiones en que convenga explicitarlo.

Por lo que acabamos de comprobar, $\mathcal{D}(\Omega)$ tiene estructura localmente convexa con esta nueva topología además de ser un espacio completo, lo que indica que vamos por buen camino.

Veamos también algunas caracterizaciones de las aplicaciones lineales continuas sobre este nuevo espacio vectorial topológico.

TEOREMA 3.13. *Supongamos que $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow Y$ es una aplicación lineal con valores en un espacio localmente convexo Y . Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. Λ es continuo.
2. Λ es acotado, es decir, lleva conjuntos acotados de $\mathcal{D}(\Omega)$ en conjuntos acotados de Y .
3. Si una sucesión converge al origen en $\mathcal{D}(\Omega)$, entonces su imagen por Λ converge al origen de Y .
4. La restricción de Λ a cada $\mathcal{D}_K$ con $K \subset \Omega$ es continua.

DEMOSTRACIÓN. Procedamos con una demostración en cadena.

$1 \Rightarrow 2$ Supongamos que Λ es continuo y consideremos un subconjunto acotado $E \subset \mathcal{D}(\Omega)$ y un entorno W del origen en Y . Como Λ es continuo, existe un entorno V del origen de $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\Lambda(V) \subset W$. Además, al estar E acotado, $E \subset tV$ para todo t suficientemente grande. Sin embargo, esto implica que $\Lambda(E) \subset tW$ para dicho rango de t , lo que nos da la acotación de Λ .

$2 \Rightarrow 3$ Supongamos ahora que Λ es acotado y que $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{D}(\Omega)$ convergiendo al origen. Por esto último y el Teorema 3.11, la sucesión está contenida en algún $\mathcal{D}_K$, y la restricción de Λ a $\mathcal{D}_K$ sigue siendo acotada. Como $\mathcal{D}_K$ es metrizable, es sencillo ver que existe una sucesión de escalares $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergiendo a infinito, tal que $(\gamma_n \phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sigue convergiendo al origen. Esto nos dice, en particular, que constituye un conjunto acotado en $\mathcal{D}_K$, por lo que su imagen $\{\Lambda(\gamma_n \phi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ se encuentra también acotada. Veamos cómo esto implica que la sucesión $\Lambda \phi_n = \gamma_n^{-1} \Lambda(\gamma_n \phi_n)$ converge a 0. Llamando $E = \{\Lambda(\gamma_n \phi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ y considerando un entorno balanceado V del origen, por estar E acotado sabemos que $E \subset tV$ para $t > 0$ suficientemente grande. Al cumplirse que $\gamma_n^{-1} \rightarrow 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\gamma_n^{-1}|t < 1$ para todo $n \geq N$. En consecuencia, como V es balanceado y $t^{-1}E \subset V$, se cumple que $\Lambda \phi_n \in V$ para cada $n \geq N$, con lo que obtenemos la convergencia deseada.

$3 \Rightarrow 4$ Comencemos notando que para tener la continuidad de Λ en $\mathcal{D}_K$ basta probar que la imagen por Λ de cualquier sucesión convergente al origen converge al origen de Y , gracias a que se trata de un espacio metrizable (recordar que los espacios metrizables tienen base local numerable según el Teorema 2.21, luego por reducción al absurdo es inmediato). Consideramos entonces una sucesión $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente al origen en $\mathcal{D}_K$, la cual converge también al origen en $\mathcal{D}(\Omega)$ por el Teorema 3.11. Por hipótesis, resulta entonces que $(\Lambda \phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge al origen de Y , lo que concluye el resultado.

$4 \Rightarrow 1$ Consideremos un entorno convexo y balanceado U del origen de Y y $V = \Lambda^{-1}(U)$, que resulta ser convexo y balanceado también. Por el Teorema 3.11, V es abierto si y solo si $V \in \beta$, lo que equivale a que $\mathcal{D}_K \cap V$ sea abierto para cada $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}(\Omega)$. Esto prueba la implicación en cuestión, y de hecho la equivalencia. □

COROLARIO 3.14. *Cada operador diferencial D^α es una aplicación lineal continua de $\mathcal{D}(\Omega)$ en sí mismo.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\|D^\alpha \phi\|_n \leq \|\phi\|_{n+|\alpha|}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, D^α es continua en cada $\mathcal{D}_K$, luego en $\mathcal{D}(\Omega)$. $\square$

Con todo esto, nos encontramos ya en condición de definir las distribuciones.

DEFINICIÓN 3.15. Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, una *distribución en Ω* es un funcional lineal continuo en $\mathcal{D}(\Omega)$, es decir, un elemento de $[\mathcal{D}(\Omega)]^*$.

NOTACIÓN 3.16. Por simplicidad, denotaremos al espacio de distribuciones en Ω como $\mathcal{D}'(\Omega)$ en lugar de $[\mathcal{D}(\Omega)]^*$.

Una definición alternativa de distribución, habitual cuando se quiere evitar todo el desarrollo topológico previo, es la siguiente caracterización.

TEOREMA 3.17. *Un funcional lineal $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{K}$ es una distribución en Ω si y solo si para cada compacto $K \subset \Omega$ hay un entero $N \in \mathbb{N}$ y una constante $C < \infty$ tal que*

$$|\Lambda(\phi)| \leq C \|\phi\|_N \quad \forall \phi \in \mathcal{D}_K.$$

DEMOSTRACIÓN. Esta equivalencia es precisamente la equivalencia $1 \iff 4$ del Teorema 3.13 junto con la descripción por seminormas de τ_K del Teorema 3.9. $\square$

NOTACIÓN 3.18. Si existe algún entero N común para cada compacto $K \subset \Omega$ según la caracterización anterior, al menor de dichos enteros se le denomina el *orden de la distribución*. Si no existe tal entero, se dice que la distribución tiene *orden infinito*.

3.2. CÁLCULO CON DISTRIBUCIONES

Aunque puede parecer complicado encontrar ejemplos de distribuciones, como da a entender la caracterización del Teorema 3.17 con sus estrictas condiciones, la realidad es que están “escondidas” en muchos de los objetos matemáticos más habituales en el Análisis Matemático.

NOTACIÓN 3.19. Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y dos multiíndices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, denotamos:

- $\beta \leq \alpha$ si y solo si $\beta_i \leq \alpha_i$ para $i = 1, \dots, n$;
- $\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \dots, \alpha_n \pm \beta_n)$;
- $D_i = \partial / \partial x_i$ para $i = 1, \dots, n$, luego podemos descomponer $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$;
- Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, el monomio $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$;
- Si $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ y $|x| = (x \cdot x)^{1/2}$.

El primer caso que vamos a introducir consiste en ver los puntos del abierto Ω como distribuciones.

DEFINICIÓN 3.20. Para cada punto $x \in \Omega$, definimos su distribución asociada como

$$\delta_x : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \delta_x \phi = \phi(x).$$

La comprobación de que dicho funcional es, en efecto, una distribución, es trivial por ser la evaluación siempre un funcional continuo en esta topología.

NOTACIÓN 3.21. La distribución δ_0 habitualmente recibe el nombre de *delta de Dirac*, y de aquí en adelante nos referiremos a ella simplemente como δ salvo cuando convenga explicitarlo.

A continuación analizamos cómo podemos entender las funciones y las medidas borelianas en sentido de distribuciones.

DEFINICIÓN 3.22. Supongamos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función localmente integrable, es decir, medible Lebesgue y tal que $\int_K |f(x)| dx < \infty$ para cada compacto $K \subset \Omega$. Definimos entonces su distribución asociada como

$$\Lambda_f \phi = \int_{\Omega} \phi(x) f(x) dx.$$

DEFINICIÓN 3.23. Supongamos que μ es una medida boreliana compleja o real no negativa sobre Ω tal que $\mu(K) < \infty$ para cada compacto $K \subset \Omega$. Definimos entonces su distribución asociada como

$$\Lambda_{\mu} \phi = \int_{\Omega} \phi d\mu.$$

OBSERVACIÓN 3.24. Las desigualdades

$$|\Lambda_f \phi| \leq \left(\int_K |f(x)| dx \right) \|\phi\|_0 \quad \text{y} \quad |\Lambda_{\mu} \phi| \leq \mu(K) \|\phi\|_0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}_K$$

y la caracterización del Teorema 3.17, nos otorgan la continuidad de Λ_f y Λ_{μ} .

Uno de los principales objetivos con las distribuciones era extender el cálculo usual a una clase mayor de objetos, veamos cómo hacer esto.

DEFINICIÓN 3.25. Si α es un multiíndice y $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definimos su derivada de orden α como la distribución

$$(D^{\alpha} \Lambda) \phi = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^{\alpha} \phi).$$

OBSERVACIÓN 3.26. La continuidad de dicho funcional se debe a que, por el Teorema 3.17, para cada compacto $K \subset \Omega$ existen N y $C < \infty$ tales que $|\Lambda(\phi)| \leq C \|\phi\|_N$ en $\mathcal{D}_K$, y entonces la desigualdad

$$|(D^{\alpha} \Lambda) \phi| = |\Lambda(D^{\alpha} \phi)| \leq C \|D^{\alpha} \phi\|_N \leq C \|\phi\|_{N+|\alpha|}$$

en $\mathcal{D}_K$, muestra por la misma caracterización la continuidad buscada.

A parte de derivar funciones reales/complejas, estas se pueden sumar y multiplicar. Ya sabemos que la suma de distribuciones sigue siéndolo por su estructura vectorial, y acabamos de entender cómo se derivan, veamos qué sucede al multiplicarlas por funciones diferenciables.

DEFINICIÓN 3.27. Supongamos que $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $f \in C^{\infty}(\Omega)$, definimos su producto en la forma

$$(f \Lambda) \phi = \Lambda(f \phi)$$

OBSERVACIÓN 3.28. Comprobar su continuidad requiere recordar la fórmula de Leibniz

$$D^{\alpha}(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} D^{\alpha-\beta} f D^{\beta} g,$$

con $f, g \in C^{\infty}(\Omega)$ y $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{N}$ para todo multiíndice α . Sabemos que para cada compacto $K \subset \Omega$ existen C y N tales que $|\Lambda \phi| \leq C \|\phi\|_N$ si $\phi \in \mathcal{D}_K$. Empleando entonces la fórmula de Leibniz encontramos una constante C' tal que $\|f \phi\|_N \leq C' \|\phi\|_N$ para $\phi \in \mathcal{D}_K$, lo que nos otorga

$$|(f \Lambda) \phi| \leq C' C \|\phi\|_N,$$

de donde deducimos la continuidad.

Pasamos a mencionar un par de propiedades clave en el desarrollo de las distribuciones, pues a pesar de su sencillez, son precisamente la justificación de que estas constituyan la mencionada extensión del concepto de función y derivada en su sentido usual.

TEOREMA 3.29. *En el espacio de distribuciones se cumple:*

1. Si $f \in C^N(\Omega)$, es decir, si f es derivable con derivadas continuas de todos los órdenes hasta orden N , entonces

$$D^\alpha \Lambda_f = \Lambda_{D^\alpha f} \quad \forall |\alpha| \leq N.$$

2. *Fórmula de Leibniz:* si $f \in C^\infty(\Omega)$ y $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ entonces

$$D^\alpha (f \Lambda) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} (D^{\alpha-\beta} f) (D^\beta \Lambda).$$

DEMOSTRACIÓN. La primera parte se reduce a probar la igualdad

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) D^\alpha \phi(x) dx = \int_{\Omega} D^\alpha f(x) \phi(x) dx,$$

que es consecuencia inmediata de la fórmula de integración por partes cuando $|\alpha| \leq N$. La segunda parte consiste en una sucesión de cálculos mecánicos que pueden ser consultados en [11]. $\square$

Por último vamos a analizar la situación de las sucesiones de distribuciones. Por ser $\mathcal{D}(\Omega)$ un espacio vectorial topológico, contamos en su dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ con una topología natural, la topología débil*, que será la que consideremos por defecto en dicho espacio. En términos de sucesiones, esto se traduce en que si $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a Λ , lo que denotaremos como

$$\Lambda_n \longrightarrow \Lambda \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega),$$

resulta que

$$\lim_n \Lambda_n \phi = \Lambda \phi \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

y de hecho son condiciones equivalentes. Veamos un par de teoremas en relación a esto último.

TEOREMA 3.30. *Sea $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $\lim_n \Lambda_n \phi$ existe para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, entonces la aplicación*

$$\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \Lambda \phi = \lim_n \Lambda_n \phi,$$

cumple que $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y

$$D^\alpha \Lambda_n \longrightarrow D^\alpha \Lambda \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega)$$

para cada multiíndice α .

DEMOSTRACIÓN. Comencemos recordando el Teorema de Banach-Steinhaus, cuya demostración se puede consultar en [11]: Si $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de aplicaciones lineales continuas de un F-espacio X en otro espacio vectorial topológico Y , y si $\Lambda x = \lim_n \Lambda_n x$ para cada $x \in X$, entonces Λ es continuo.

Supongamos que K es un subconjunto compacto de Ω . Por definición de Λ , teniendo en cuenta que $\mathcal{D}_K$ es un F-espacio y el Teorema de Banach-Steinhaus, resulta que su restricción a $\mathcal{D}_K$ es continua. El Teorema 3.13 implica entonces que Λ es continua en todo $\mathcal{D}(\Omega)$, o lo que es lo mismo, que $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, justo como queríamos.

Para la segunda parte, simplemente notamos que

$$(D^\alpha \Lambda) \phi = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha \phi) = (-1)^{|\alpha|} \lim_n \Lambda_n(D^\alpha \phi) = \lim_n (D^\alpha \Lambda_n) \phi.$$

$\square$

TEOREMA 3.31. Si $\Lambda_n \rightarrow \Lambda$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ y $g_n \rightarrow g$ en $C^\infty(\Omega)$, entonces $g_n \Lambda_n \rightarrow g \Lambda$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN. Comencemos enunciando el siguiente teorema, consecuencia del Teorema de Banach-Steinhaus y cuya demostración se puede encontrar en [11]: Supongamos que $B : X \times Y \rightarrow Z$ es una aplicación bilineal entre espacios vectoriales topológicos, con X también un F -espacio, y tal que cada restricción $B_x(y) = B(x, y)$ y $B^y(x) = B(x, y)$ es continua. Entonces

$$B(x_n, y_n) \longrightarrow B(x_0, y_0)$$

en Z para cada par de sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergentes a x_0 e y_0 respectivamente. Si además Y es metrizable, entonces B es continua.

Fijemos $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y definamos el funcional bilineal

$$B : C^\infty(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad B(g, \Lambda) = (g \Lambda) \phi = \Lambda(g \phi).$$

Como las restricciones $B_g(\Lambda) = B(g, \Lambda)$ y $B^\Lambda(g) = B(g, \Lambda)$ son continuas, entonces el Teorema anterior nos da

$$(g_n \Lambda_n) \phi = B(g_n, \Lambda_n) \longrightarrow B(g, \Lambda) = (g \Lambda) \phi.$$

Al ser ϕ una función test arbitraria, lo anterior se traduce en la convergencia $g_n \Lambda_n \rightarrow g \Lambda$ en la topología débil* de $\mathcal{D}'(\Omega)$. $\square$

3.3. LOCALIZACIÓN Y SOPORTE DE UNA DISTRIBUCIÓN

A partir de esta sección, Ω denotará siempre un abierto de $\mathbb{R}^n$.

NOTACIÓN 3.32. Supongamos que $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ y que ω es un subconjunto abierto de Ω . La afirmación

$$\Lambda_1 = \Lambda_2 \quad \text{en} \quad \omega$$

significa que $\Lambda_1 \phi = \Lambda_2 \phi$ para cada $\phi \in \mathcal{D}(\omega)$.

OBSERVACIÓN 3.33. Si f es localmente integrable y μ es una medida boreliana, entonces $\Lambda_f = 0$ en ω si y solo si $f = 0$ en casi todo punto de ω , y $\Lambda_\mu = 0$ en ω si y solo si $\mu(E) = 0$ para cada boreliano $E \subset \omega$.

El concepto de localización nos va a permitir caracterizar las distribuciones globalmente a partir de su comportamiento local. Sin embargo, para ello es necesario introducir previamente el concepto de partición de la unidad.

TEOREMA 3.34 (PARTICIÓN NUMERABLE DE LA UNIDAD). Sea Γ una colección de abiertos de $\mathbb{R}^n$ cuya unión es Ω . Entonces existe una sucesión $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de funciones no negativas en $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que:

1. El soporte de cada ψ_i está contenido en algún elemento de Γ .
2. $\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) = 1$ para cada $x \in \Omega$.
3. Para cada compacto $K \subset \Omega$ hay un entero $m \in \mathbb{N}$ y un abierto $W \supset K$ tal que

$$\psi_1(x) + \cdots + \psi_m(x) = 1$$

para cada $x \in W$.

DEMOSTRACIÓN. La prueba se basa en una construcción recursiva de las funciones ψ_i que puede consultarse en [11]. $\square$

TEOREMA 3.35. Supongamos que Γ es un recubrimiento abierto del abierto Ω , y que a cada $\omega \in \Gamma$ le asignamos una distribución $\Lambda_\omega \in \mathcal{D}'(\omega)$ tal que

$$\Lambda_\omega = \Lambda_{\omega'} \quad \text{en} \quad \omega \cap \omega'$$

siempre que $\omega \cap \omega' \neq \emptyset$. Entonces hay un único $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ cumpliendo

$$\Lambda = \Lambda_\omega \quad \text{en} \quad \omega$$

para cada $\omega \in \Gamma$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una partición de la unidad asociada a Γ según el Teorema 3.34, y elijamos para cada i un abierto $\omega_i \in \Gamma$ conteniendo el soporte de ψ_i . Definamos ahora el funcional lineal

$$\Lambda\phi = \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_{\omega_i}(\psi_i\phi),$$

inspirado en la igualdad $\phi = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i\phi$ y la linealidad de las distribuciones.

Para mostrar la continuidad de Λ consideremos una sucesión $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ convergente al origen, de modo que hay un compacto $K \subset \Omega$ conteniendo el soporte de todos los elementos de la sucesión. Si elegimos un entero $m \in \mathbb{N}$ como en la última condición del Teorema 3.34, entonces

$$\Lambda\phi_j = \sum_{i=1}^m \Lambda_{\omega_i}(\psi_i\phi_j)$$

para cada valor de j . Como $\psi_i\phi_j$ converge al origen en $\mathcal{D}(\omega_i)$ cuando $j \rightarrow \infty$, se sigue que $\Lambda\phi_j$ también lo hace en $\mathcal{D}(\Omega)$, lo que nos da por el Teorema 3.13 que $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Para probar que la restricción a $\mathcal{D}(\omega)$ coincide con Λ_ω , consideramos $\phi \in \mathcal{D}(\omega)$ y notamos que $\psi_i\phi$ se encuentra en $\mathcal{D}(\omega_i \cap \omega)$ para cada valor de i . Por hipótesis, esto implica que $\Lambda_{\omega_i}(\psi_i\phi) = \Lambda_\omega(\psi_i\phi)$, y por tanto

$$\Lambda\phi = \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_{\omega_i}(\psi_i\phi) = \Lambda_\omega \left(\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i\phi \right) = \Lambda_\omega\phi.$$

Finalmente, la unicidad de Λ se deduce de la igualdad anterior. $\square$

El siguiente concepto que vamos a definir es el de soporte de una distribución.

DEFINICIÓN 3.36. Dada una distribución $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, decimos que esta se *anula* en un abierto $\omega \subset \Omega$ si $\Lambda = 0$ en ω , siendo 0 la distribución nula. Si ahora denotamos por W la unión de todos los abiertos $\omega \subset \Omega$ en los que se anula Λ , definimos el *soporte de Λ* , S_Λ , como el complementario de W .

TEOREMA 3.37. Supongamos $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

1. Λ se anula en W , con $W = \Omega \setminus S_\Lambda$.
2. Si el soporte de $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ no corta a S_Λ , entonces $\Lambda\phi = 0$.
3. Si S_Λ es vacío, entonces $\Lambda = 0$.
4. Si $\psi \in C^\infty(\Omega)$ y $\psi = 1$ en algún abierto conteniendo a S_Λ , entonces $\psi\Lambda = \Lambda$.
5. Si S_Λ es un subconjunto compacto dentro de Ω , entonces Λ tiene orden uno. De hecho, hay una constante $C < \infty$ y un entero $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\Lambda\phi| \leq C\|\phi\|_N \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Además, Λ se extiende de forma única a un funcional lineal continuo en $C^\infty(\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN. Veamos cada apartado.

1. Por cómo definimos S_Λ , W es la unión de los abiertos ω en los que se anula Λ . Si llamamos Γ a la colección de dichos abiertos, podemos considerar la partición de la unidad $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ asociada. Si $\phi \in \mathcal{D}(W)$, es claro que $\phi = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \phi$, y en consecuencia

$$\Lambda \phi = \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda(\psi_i \phi) = 0.$$

2. Se deduce trivialmente del punto anterior.
3. Es inmediato.
4. Si $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, entonces el soporte de $\phi - \psi \phi$ no interseca a S_Λ , luego $\Lambda \phi = \Lambda(\psi \phi) = (\psi \Lambda) \phi$.
5. Si S_Λ es compacto, se sigue del Teorema 3.34 que existe $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ en las condiciones del apartado anterior. Fijemos dicha función y llamemos K a su soporte. Por el Teorema 3.17 encontramos c_1 y N tal que $|\Lambda \phi| \leq c_1 \|\phi\|_N$ para cada $\phi \in \mathcal{D}_K$, y a partir de esto y la fórmula de Leibniz otra constante c_2 tal que $\|\psi \phi\|_N \leq c_2 \|\phi\|_N$ para $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En consecuencia, como $\psi = 1$ en un abierto conteniendo a S_Λ ,

$$|\Lambda \phi| \leq |\Lambda(\psi \phi)| \leq c_1 \|\psi \phi\|_N \leq c_1 c_2 \|\phi\|_N \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Por la igualdad $\Lambda \phi = \Lambda(\psi \phi)$, parece razonable definir la extensión de Λ como

$$\Lambda f = \Lambda(\psi f) \quad \forall f \in C^\infty(\Omega).$$

La continuidad de dicha extensión se debe a que si $f_i \rightarrow 0$ en $C^\infty(\Omega)$ entonces cada derivada de f_i tiende a la función nula uniformemente en compactos de Ω . La fórmula de Leibniz muestra por tanto que $\psi f_i \rightarrow 0$ en $\mathcal{D}(\Omega)$, y al estar $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, concluimos que $\Lambda f_i \rightarrow 0$.

Si $f \in C^\infty(\Omega)$ y si K_0 es un compacto en Ω , entonces existe $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\phi = f$ en K_0 . Esto implica la densidad de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $C^\infty(\Omega)$, y que por tanto cada $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ puede tener, como máximo, una extensión a todo $C^\infty(\Omega)$.

□

Si nos centramos en el caso más simple de soporte, un punto, podemos clasificar todas las distribuciones existentes como sigue.

TEOREMA 3.38. *Supongamos $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $p \in \Omega$, $S_\Lambda = \{p\}$, y Λ de orden N . Entonces hay constantes c_α tales que*

$$\Lambda = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha D^\alpha \delta_p.$$

Por otro lado, cada distribución en la forma anterior con al menos un coeficiente no nulo tiene por soporte $\{p\}$.

DEMOSTRACIÓN. Es trivial comprobar que el soporte de $D^\alpha \delta_p$ es $\{p\}$ para todo multiíndice α , por lo que la implicación inversa es inmediata.

En cuanto a la implicación principal, asumamos sin pérdida de generalidad que p es el origen de $\mathbb{R}^n$, y consideremos una función test ϕ cumpliendo

$$(D^\alpha \phi)(0) = 0 \quad \forall |\alpha| \leq N. \quad (3.4)$$

Nuestro objetivo es probar que $\Lambda\phi = 0$.

Si $\eta > 0$, hay una bola compacta $K \subset \Omega$ centrada en el origen, tal que

$$|D^\alpha \phi(x)| \leq \eta \quad \forall x \in K, |\alpha| = N.$$

Probemos la desigualdad

$$|D^\alpha \phi(x)| \leq \eta n^{N-|\alpha|} |x|^{N-|\alpha|} \quad \forall x \in K, |\alpha| \leq N. \quad (3.5)$$

En efecto, el caso $|\alpha| = N$ es precisamente la desigualdad que tenemos por hipótesis, así que supongamos $1 \leq i \leq N$, asumamos que la desigualdad se cumple para $|\alpha| = i$ y supongamos $|\beta| = i - 1$. El gradiente de la función $D^\beta \phi$ es

$$\text{grad } D^\beta \phi = (D_1 D^\beta \phi, \dots, D_n D^\beta \phi).$$

Por hipótesis de inducción

$$|\text{grad } D^\beta \phi(x)| \leq \eta n^{N-i} |x|^{N-i},$$

y como $D^\beta \phi(0) = 0$, el Teorema del Valor Medio muestra que la ecuación (3.5) también se cumple cambiando α por β . Por inducción queda claro que dicha ecuación es cierta en el rango deseado $|\alpha| \leq N$.

Elijamos ahora una función meseta $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ que valga 1 en algún entorno del origen, y cuyo soporte esté contenido en la bola unidad B de $\mathbb{R}^n$. Definamos para $r > 0$

$$\psi_r(x) = \psi\left(\frac{x}{r}\right),$$

de forma que si r es suficientemente pequeño el soporte de ψ_r cae en $rB \subset K$.

Por la fórmula de Leibniz

$$D^\alpha (\psi_r \phi)(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} (D^{\alpha-\beta} \psi)\left(\frac{x}{r}\right) (D^\beta \phi)(x) r^{|\beta|-|\alpha|},$$

de donde concluimos que para valores de r suficientemente pequeños

$$\|\psi_r \phi\| \leq \eta C \|\psi\|_N. \quad (3.6)$$

Como Λ tiene orden N , existe una constante C_1 tal que $|\Lambda\psi| \leq C_1 \|\psi\|_N$ para todo $\psi \in \mathcal{D}_K$. Al ser $\psi_r = 1$ en un entorno del soporte de Λ , se sigue de la desigualdad (3.6) y el cuarto apartado del Teorema 3.37 que

$$|\Lambda\phi| = |\Lambda(\psi_r \phi)| \leq C_1 \|\psi_r \phi\|_N \leq \eta C C_1 \|\phi\|_N.$$

Como η es arbitrario, probamos finalmente que $\Lambda\phi = 0$ siempre que se dé (3.4). En otras palabras, Λ se anula en la intersección de los núcleos de los funcionales $D^\alpha \delta_0$ para todo $|\alpha| \leq N$. La representación del enunciado se sigue entonces del Teorema 2.56. $\square$

En cuanto a funciones, podemos decir lo siguiente.

TEOREMA 3.39. *Si f es localmente integrable, entonces el soporte de Λ_f está contenido en $\text{supp}(f)$. Si además f es continua, entonces se tiene también la igualdad.*

DEMOSTRACIÓN. Probar el contenido resulta sencillo, pues si $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y tiene soporte en $X \setminus \text{supp}(f)$, es claro que

$$\Lambda_f \phi = \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx = 0.$$

Por tanto, $\Lambda_f = 0$ en el abierto $X \setminus \text{supp}(f)$, lo que nos dice que el soporte de Λ_f debe estar contenido en el de f .

En cuanto al otro contenido cuando f es continua, procedemos como sigue. Consideremos $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x_0) \neq 0$, de modo que la parte real o imaginaria debe ser no nula (supongamos sin pérdida de generalidad que lo es la parte real, y que esta es positiva $\text{Re}(f)(x_0) > 0$). Por continuidad existe una bola de radio $\eta > 0$, $B_\eta(x_0)$, tal que $\text{Re}(f)(x) > \text{Re}(f)(x_0)/2$ para todo $x \in B_\eta(x_0)$. Si suponemos que x_0 no se encuentra también en el soporte de Λ_f , encontramos $0 < \delta < \eta$ tal que $B_\delta(x_0)$ no corta dicho soporte, y podemos elegir una función no negativa $\phi \in \mathcal{D}(B_\delta(x_0))$ tal que $\phi = 1$ en $B_{\delta/2}(x_0)$ y $0 \leq \phi \leq 1$ en el complementario. En esta situación resulta que

$$\text{Re}(\Lambda_f) = \int_{\mathbb{R}^n} \text{Re}(f)(x) \phi(x) dx \geq \int_{B_{\delta/2}(x_0)} \text{Re}(f)(x) \phi(x) dx \geq \frac{\text{Re}(f)(x_0) \delta^n}{2^{n+1}} > 0,$$

lo que nos lleva a contradicción pues por hipótesis $\Lambda_f \phi = 0$.

Todo esto implica el contenido del conjunto $\{f \neq 0\}$ en el soporte de Λ_f . Sin embargo, por ser este último cerrado, también se da el contenido de todo $\text{supp}(f)$. $\square$

3.4. COMPORTAMIENTO LOCAL

Esta sección se centra en un resultado de gran importancia, que viene a decirnos en esencia, que toda distribución es, localmente, de la forma $D^\alpha \Lambda_f$ para cierta función f . Esto se puede entender, olvidándonos de la regularidad, como que toda distribución es localmente la derivada de alguna función.

TEOREMA 3.40. *Supongamos $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y K un subconjunto compacto de Ω . Hay una función continua $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ y un multiíndice α tal que*

$$\Lambda \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) D^\alpha \phi(x) dx$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}_K$.

DEMOSTRACIÓN. Por compacidad de K sabemos que este se encuentra contenido en algún cubo, y sin pérdida de generalidad podemos asumir que dicho cubo es el cubo unidad Q de $\mathbb{R}^n$, es decir, el conjunto de puntos $(x_1, \dots, x_n)$ con $-1 \leq x_i \leq 1$ para cada i . El Teorema del Valor Medio afirma que

$$|\psi(x)| \leq \max_{z \in Q} \{|D_i \psi(z)| : i = 1, \dots, n\} \quad \forall x \in Q. \quad (3.7)$$

Si definimos $T = D_1 \cdots D_n$ y para cada $y \in Q$ llamamos $Q(y)$ al subconjunto de Q tal que $x_i \leq y_i$ para cada i , entonces

$$\psi(y) = \int_{Q(y)} T \psi(x) dx \quad \forall \psi \in \mathcal{D}_Q. \quad (3.8)$$

Si $N \in \mathbb{N}$ y si aplicamos la desigualdad (3.7) a las sucesivas derivadas de ψ , por la igualdad anterior concluimos

$$\|\psi\|_N \leq \max_{z \in Q} \{|T^N \psi(z)|\} \leq \int_Q |T^{N+1} \psi(x)| dx \quad \forall \psi \in \mathcal{D}_Q.$$

Como $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, existen N y C tal que

$$|\Lambda \phi| \leq C \|\phi\|_N \quad \forall \phi \in \mathcal{D}_K,$$

y por tanto lo visto anteriormente implica

$$|\Lambda \phi| \leq \int_K |T^{N+1} \phi(x)| dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}_K.$$

Debido a la igualdad (3.8), el operador T es inyectivo en $\mathcal{D}_Q$, y en particular, en $\mathcal{D}_K$. En consecuencia, T^{N+1} es también inyectivo, y podemos definir un funcional Λ_1 sobre la imagen Y de T^{N+1} como

$$\Lambda_1 T^{N+1} \phi = \Lambda \phi \quad \forall \phi \in \mathcal{D}_K,$$

lo que unido a la última desigualdad probada muestran

$$|\Lambda_1 \psi| \leq C \int_K |\psi(x)| dx \quad \forall \psi \in Y.$$

El Teorema de Hahn-Banach extiende entonces Λ_1 a un funcional lineal acotado en $L^1(K)$. En otras palabras, por la identificación (2.7) hay una función boreliana acotada g en K tal que

$$\Lambda \phi = \Lambda_1 T^{N+1} \phi = \int_K g(x) T^{N+1} \phi(x) dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}_K. \quad (3.9)$$

Definamos $g = 0$ fuera de K (lo que no altera la igualdad anterior), y pongamos

$$f(y) = \int_{-\infty}^{y_1} \cdots \int_{-\infty}^{y_n} g(x) dx_n \cdots dx_1 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Esta función es continua, y tras n integraciones por partes, la igualdad (3.9) otorga

$$\Lambda \phi = (-1)^n \int_{\Omega} f(x) T^{N+2} \phi(x) dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}_K,$$

que es precisamente la igualdad del enunciado con $\alpha = (N+2, \dots, N+2)$ salvo posible cambio de signo. $\square$

Cuando Λ tiene además soporte compacto, este resultado adquiere un carácter global.

TEOREMA 3.41. *Supongamos que K es compacto, V y Ω abiertos de $\mathbb{R}^n$ tales que $K \subset V \subset \Omega$, y que $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ es una distribución de orden N con soporte en K . Entonces existe una cantidad finita de funciones f_β en Ω , una por cada multiíndice β con $\beta_i \leq N+2$, con soporte en V y tal que*

$$\Lambda = \sum_{\beta} D^{\beta} \Lambda_{f_\beta}.$$

DEMOSTRACIÓN. Elijamos un abierto W con adherencia compacta $\overline{W}$ tal que $K \subset W$ y $\overline{W} \subset V$. A continuación, aplicamos el Teorema 3.40 con $\overline{W}$ en lugar de K y $\alpha = (N+2, \dots, N+2)$. La prueba de dicho teorema muestra la existencia de una función continua f en Ω cumpliendo

$$\Lambda \phi = \int_{\Omega} f(x) D^{\alpha} \phi(x) dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(W).$$

Dicha igualdad permanece idéntica si modificamos f por un producto de ella con otra función que valga 1 en $\overline{W}$ y cuyo soporte se encuentre en V .

Fijemos $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, con soporte en W , tal que $\psi = 1$ en algún abierto conteniendo a K . Entonces la igualdad anterior implica, para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, que

$$\Lambda \phi = \Lambda(\psi \phi) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) D^{\alpha} (\psi \phi)(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} D^{\alpha-\beta} \psi(x) D^{\beta} \phi(x) dx,$$

luego las funciones

$$f_{\beta} = (-1)^{|\alpha-\beta|} c_{\alpha\beta} f D^{\alpha-\beta} \psi$$

con $\beta \leq \alpha$ cumplen la igualdad del enunciado. $\square$

Veamos también qué podemos decir de la estructura global de las distribuciones.

TEOREMA 3.42. *Supongamos $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Existen funciones continuas g_α en Ω , una por cada multiíndice α , tal que cada compacto K interseca solo los soportes de una cantidad finita de ellas, y*

$$\Lambda = \sum_{\alpha} D^{\alpha} \Lambda_{g_{\alpha}}.$$

Además, si Λ tiene orden finito, entonces las funciones g_α pueden elegirse de forma que solo una cantidad finita sean no nulas.

DEMOSTRACIÓN. Elegimos una cantidad numerable de cubos Q_i y abiertos V_i tales que $Q_i \subset V_i \subset \Omega$, que Ω coincida con la unión de dichos cubos, y de forma que ningún compacto corte una cantidad infinita de V_i . Ahora, para cada V_i hay una función $\phi_i \in \mathcal{D}(V_i)$ tal que $\phi_i = 1$ en Q_i , y a partir de dicha sucesión de funciones, construimos una partición de la unidad $(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ como en el Teorema 3.34, con el soporte de cada ψ_i contenido en V_i .

Si aplicamos el Teorema 3.41 a cada $\psi_i \Lambda$, resulta que hay una cantidad finita de funciones $f_{i,\alpha}$ con soporte en V_i tales que

$$\psi_i \Lambda = \sum_{\alpha} D^{\alpha} \Lambda_{f_{i,\alpha}}.$$

Definamos

$$g_{\alpha} = \sum_{i=1}^{\infty} f_{i,\alpha}.$$

Estas sumas están bien definidas por tratarse de una familia de funciones localmente finita, en el sentido de que cada compacto interseca los soportes de solo una cantidad finita de funciones $f_{i,\alpha}$. De esto último se sigue precisamente que las funciones g_{α} son continuas en Ω . Como además $\phi = \sum_i \psi_i \phi$ para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, resulta que $\Lambda = \sum_i \psi_i \Lambda$, y de las igualdades vistas anteriormente junto con la continuidad de las funciones g_{α} concluimos la primera parte del resultado.

La segunda es una sencilla consecuencia del Teorema 3.41. □

3.5. CONVOLUCIONES

Por el papel que van a jugar más adelante, sobre todo en las aplicaciones a las ecuaciones en derivadas parciales, el último punto que vamos a tratar en este capítulo es el de las convoluciones. Estas surgen en el contexto de las funciones integrables como la aplicación

$$u * v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) v(x - y) dy,$$

con u y v cualquier par de funciones para las que esté bien definida la igualdad anterior. Su expresión integral parece indicar que hay una estrecha relación de estas con las distribuciones, y es que precisamente, en esta sección vamos a entender dicha relación y a ver cómo podemos definir la convolución de una distribución con una función test y la convolución de dos distribuciones.

NOTACIÓN 3.43. En lo que sigue vamos a adoptar la siguiente notación. Para empezar, vamos a escribir $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$ en lugar de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ respectivamente. También, si u es una función en $\mathbb{R}^n$, denotaremos

$$(\tau_x u)(y) = u(y - x), \quad \check{u}(y) = u(-y).$$

OBSERVACIÓN 3.44. Notemos que ahora

$$u(x - y) = \tau_x \check{u}(y),$$

y por tanto

$$u * v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \tau_x \check{u}(y) dy.$$

Esta nueva terminología induce de manera natural las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 3.45. Dada una distribución $u \in \mathcal{D}'$ y una función test $\phi \in \mathcal{D}$, definimos su convolución como la función

$$u * \phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \quad u * \phi(x) = u(\tau_x \check{\phi}).$$

Además, dado $x \in \mathbb{R}^n$, definimos el trasladado de u como la distribución

$$(\tau_x u) \phi = u(\tau_{-x} \phi).$$

OBSERVACIÓN 3.46. La definición del trasladado de una distribución viene inspirada por la fórmula de cambio de variables

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tau_x u(x) v(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \tau_{-x} v(x) dx.$$

La comprobación de que el trasladado sigue siendo una distribución es trivial con la caracterización del Teorema 3.17.

Antes de entrar a ver sus principales propiedades, introduzcamos el concepto de aproximación de la identidad.

DEFINICIÓN 3.47. Una sucesión de funciones $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ en la forma $h_j(x) = j^n h(jx)$ con $h \in \mathcal{D}$, $h \geq 0$ y $\int_{\mathbb{R}^n} h dx = 1$, recibe el nombre de *aproximación de la identidad en $\mathbb{R}^n$* .

TEOREMA 3.48. Supongamos que $u \in \mathcal{D}'$, $\phi, \psi \in \mathcal{D}$ y $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una aproximación de la identidad en $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$1. \quad \tau_x(u * \phi) = (\tau_x u) * \phi = u * (\tau_x \phi) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n,$$

$$2. \quad u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ y}$$

$$D^\alpha(u * \phi) = (D^\alpha u) * \phi = u * (D^\alpha \phi)$$

para cada multiíndice α ,

$$3. \quad u * (\phi * \psi) = (u * \phi) * \psi,$$

$$4. \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \phi * h_j = \phi \text{ en } \mathcal{D},$$

$$5. \quad \lim_{j \rightarrow \infty} u * h_j = u \text{ en } \mathcal{D}',$$

$$6. \quad \text{Si definimos la aplicación lineal}$$

$$L : \mathcal{D} \longrightarrow C^\infty(\Omega), \quad L\phi = u * \phi, \quad (3.10)$$

entonces L es continua y $\tau_x L = L \tau_x$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Por otro lado, si L es una aplicación lineal continua de $\mathcal{D}$ en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfaciendo la relación de conmutación $\tau_x L = L \tau_x$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$, entonces hay un único $u \in \mathcal{D}'$ satisfaciendo la igualdad (3.10).

DEMOSTRACIÓN. Analicemos cada apartado:

1. Es consecuencia de las siguientes igualdades para cada $y \in \mathbb{R}^n$

$$\tau_x(u * \phi)(y) = u * \phi(y - x) = u(\tau_{y-x} \check{\phi}),$$

$$(\tau_x u) * \phi(y) = \tau_x u(\tau_y \check{\phi}) = u(\tau_{y-x} \check{\phi}),$$

$$u * \tau_x \phi(y) = u\left(\tau_y\left(\widetilde{\tau_x \phi}\right)\right) = u(\tau_{y-x} \check{\phi}),$$

donde hemos tenido en cuenta las igualdades $\tau_y \tau_{-x} = \tau_{y-x}$ y $\widetilde{\tau_x \phi} = \tau_{-x} \check{\phi}$ de fácil comprobación.

2. Si hacemos convolución con u a ambos lados de la igualdad

$$\tau_x(\widetilde{D^\alpha \phi}) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(\tau_x \check{\phi}),$$

obtenemos una de las igualdades del enunciado.

Para la desigualdad restante fijamos un vector unitario $e \in \mathbb{R}^n$ y definimos para cada $r > 0$

$$\eta_r = r^{-1}(\tau_0 - \tau_{re}).$$

El apartado anterior implica que

$$\eta_r(u * \phi) = u * (\eta_r \phi). \quad (3.11)$$

Cuando $r \rightarrow 0$ resulta que $\eta_r \phi \rightarrow D_e \phi$ en $\mathcal{D}$, siendo D_e la derivada direccional según e , y por tanto

$$\tau_x(\widetilde{\eta_r \phi}) \rightarrow \tau_x(\widetilde{D_e \phi}) \quad \text{en } \mathcal{D}$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$, luego

$$\lim_{r \rightarrow 0} u * (\eta_r \phi)(x) = u * (D_e \phi)(x).$$

La igualdad (3.11) junto con la anterior nos otorgan finalmente

$$D_e(u * \phi) = u * (D_e \phi),$$

justo como queríamos.

3. Comencemos recordando la igualdad

$$\widetilde{\phi * \psi}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \check{\psi}(s) \tau_s \check{\phi}(t) ds. \quad (3.12)$$

Si K_1 y K_2 son los soportes de $\check{\phi}$ y $\check{\psi}$ respectivamente, definimos $K = K_1 + K_2$, de forma que la función $s \rightarrow \check{\psi}(s) \tau_s \check{\phi}$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathcal{D}_K$ resulta que es continua y se anula fuera de K_2 . Esto nos dice que (3.12) puede escribirse como una integral en $\mathcal{D}_K$ en la forma

$$\widetilde{\phi * \psi} = \int_{K_2} \check{\psi}(s) \tau_s \check{\phi} ds,$$

y con esto y el Teorema 2.73 obtenemos

$$\begin{aligned} u * (\phi * \psi)(0) &= u(\widetilde{\phi * \psi}) \\ &= \int_{K_2} \check{\psi}(s) u(\tau_s \check{\phi}) ds \\ &= \int_{K_2} \check{\psi}(-s) u * \phi(s) ds \\ &= (u * \phi) * \psi(0). \end{aligned}$$

Para que la igualdad anterior se de en cualquier $x \neq 0$ basta cambiar ψ por $\tau_{-x}\psi$ y emplear el primer apartado.

4. Es trivial comprobar que $f * h_j \rightarrow f$ uniformemente en conjuntos compactos, para cualquier función continua f en $\mathbb{R}^n$. Aplicando esto a $f = D^\alpha \phi$ obtenemos la convergencia uniforme $D^\alpha(\phi * h_j) \rightarrow D^\alpha \phi$ sobre compactos. Además, el soporte de las funciones $\phi * h_j$ se encuentra en algún conjunto compacto, pues los soportes de las funciones h_j tienden al origen. En conclusión, la convergencia se da en $\mathcal{D}$.

5. Es consecuencia de lo que acabamos de probar y del segundo apartado, pues

$$\begin{aligned}
 u(\check{\phi}) &= u * \phi(0) \\
 &= \lim_j u * (h_j * \phi)(0) \\
 &= \lim_j (u * h_j) * \phi(0) \\
 &= \lim_j u * h_j(\check{\phi}).
 \end{aligned}$$

6. La igualdad $\tau_x(u * \phi) = u * (\tau_x \phi)$ muestra que $\tau_x L = L \tau_x$, veamos la continuidad de L a partir de su restricción a cada $\mathcal{D}_K$. En efecto, como estos espacios son Fréchet, podemos aplicar el Teorema de la Gráfica Cerrada [11], reduciendo el problema de la continuidad a probar que su gráfica es cerrada. Para esto último, consideremos una sucesión convergente $\phi_i \rightarrow \phi$ en $\mathcal{D}_K$ y $u * \phi_i \rightarrow f$, veamos que $f = u * \phi$. Fijemos $x \in \mathbb{R}^n$ y observemos que $\tau_x \check{\phi}_i \rightarrow \tau_x \check{\phi}$ por continuidad, luego

$$f(x) = \lim_i u * \phi_i(x) = \lim_i u(\tau_x \check{\phi}_i) = u(\tau_x \check{\phi}) = u * \phi(x).$$

Probemos por último que toda aplicación lineal en las condiciones del enunciado es la convolución por una distribución adecuada. Definamos $u\phi = L\check{\phi}(0)$ y observemos que por continuidad de la aplicación $\phi \rightarrow \check{\phi}$, de L , y de la evaluación en el origen, u es continua en $\mathcal{D}$ y por tanto se trata de una distribución. Ahora,

$$L\phi(x) = \tau_{-x} L\phi(x) = L\tau_{-x}\phi(x) = u(\widetilde{\tau_{-x}\phi}) = u(\tau_{-x}\check{\phi}) = u * \phi(x).$$

La unicidad de u es consecuencia de que $u * \phi = 0$ para todo $\phi \in \mathcal{D}$ implica $u(\check{\phi}) = u * \phi(0) = 0$ para todo $\phi \in \mathcal{D}$, o lo que es lo mismo, $u = 0$.

□

Como vimos en el último apartado del Teorema 3.37, toda distribución con soporte compacto se extiende de forma única a un funcional lineal continuo en $C^\infty(\Omega)$. Aprovechemos esto para definir convoluciones con funciones $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

DEFINICIÓN 3.49. Sea $u \in \mathcal{D}'$ con soporte compacto y $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, definimos su convolución como

$$u * \phi(x) = u(\tau_x \check{\phi}),$$

donde u denota indistintamente la distribución en $\mathcal{D}'$ y su extensión.

TEOREMA 3.50. Supongamos $u \in \mathcal{D}'$ con soporte compacto, $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\psi \in \mathcal{D}$. Entonces

$$1. \tau_x(u * \phi) = (\tau_x u) * \phi = u * (\tau_x \phi) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n,$$

$$2. u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ y}$$

$$D^\alpha(u * \phi) = (D^\alpha u) * \phi = u * (D^\alpha \phi)$$

para cada multiíndice α ,

$$3. u * \psi \in \mathcal{D},$$

$$4. u * (\phi * \psi) = (u * \phi) * \psi = (u * \psi) * \phi.$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos cada punto.

1. Análoga a la vista en el Teorema 3.48.
2. Análoga a la vista en el Teorema 3.48.
3. Sean K y H los soportes de u y ψ respectivamente, de modo que el soporte de $\tau_x \check{\psi}$ es $x - H$. Observamos entonces que

$$u * \psi(x) = u(\tau_x \check{\psi}) = 0$$

salvo que K interseque a $x - H$, es decir, salvo que $x \in K + H$. Debido a esto, el soporte de $u * \psi$ cae en el compacto $K + H$, por lo que tiene soporte compacto y se encuentra en $\mathcal{D}$.

4. Sea W un abierto conteniendo a K , y elijamos $\phi_0 \in \mathcal{D}$ tal que $\check{\phi}_0 = \check{\phi}$ en $W + H$. Entonces, $\phi * \psi = \phi_0 * \psi$ en W , de modo que

$$u * (\phi * \psi)(0) = u * (\phi_0 * \psi)(0).$$

Si $-s \in H$, entonces $\tau_s \check{\phi} = \tau_s \check{\phi}_0$ en W y por tanto $u * \phi = u * \phi_0$ en $-H$. Esto nos da

$$(u * \phi) * \psi(0) = (u * \phi_0) * \psi(0),$$

y como el soporte de $u * \psi$ cae en $K + H$ entonces

$$(u * \psi) * \phi(0) = (u * \psi) * \phi_0(0).$$

Empleando ahora el Teorema 3.48, el lado derecho de las tres igualdades anteriores coincide, lo que prueba la igualdad del enunciado en el origen. El caso general se cumple también por traslación.

□

Finalmente, analizamos el caso de dos distribuciones.

DEFINICIÓN 3.51. Si $u, v \in \mathcal{D}'$ y al menos una de dichas distribuciones tiene soporte compacto, definimos su convolución $u * v$ o L como

$$L\phi = u * (v * \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}.$$

OBSERVACIÓN 3.52. Comencemos notando que está bien definido, pues si v tiene soporte compacto, entonces $v * \phi \in \mathcal{D}$ y $L\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, mientras que si u es quien tiene soporte compacto, entonces $v * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $L\phi$ también. Además, los Teoremas 3.48 y 3.50 nos otorgan la igualdad $\tau_x L = L\tau_x$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

OBSERVACIÓN 3.53. El funcional $\phi \rightarrow L\phi(0)$ es una distribución. En efecto, si $\phi_i \rightarrow 0$ en $\mathcal{D}$ entonces el último apartado del Teorema 3.48 nos dice que $v * \check{\phi}_i \rightarrow 0$ en $\mathcal{D}$ (suponemos sin pérdida de generalidad que v tiene soporte compacto), y por tanto $L\check{\phi}_i(0) \rightarrow 0$.

TEOREMA 3.54. Supongamos $u, v, w \in \mathcal{D}'$.

1. Si u o v tienen soporte compacto, entonces $u * v = v * u$.
2. Si S_u y S_v son los soportes de u y v respectivamente, y si al menos uno de ellos es compacto, entonces

$$S_{u*v} \subset S_u + S_v.$$

3. Si al menos dos de los soportes S_u, S_v y S_w son compactos, entonces

$$(u * v) * w = u * (v * w).$$

4. Si α es un multiíndice, entonces

$$D^\alpha u = D^\alpha \delta * u.$$

En particular $u = \delta * u$.

5. Si al menos uno de los soportes S_u o S_v es compacto y α es un multiíndice, entonces

$$D^\alpha (u * v) = D^\alpha u * v = u * D^\alpha v.$$

DEMOSTRACIÓN. Vayamos por apartados.

1. Consideremos $\phi, \psi \in \mathcal{D}$ y recordemos que como la convolución de funciones es conmutativa, entonces empleando el tercer apartado del Teorema 3.48 obtenemos

$$\begin{aligned} (u * v) * (\phi * \psi) &= u * (v * (\phi * \psi)) \\ &= u * ((v * \phi) * \psi) \\ &= u * (\psi * (v * \phi)). \end{aligned}$$

Ahora, si S_v es compacto, aplicamos de nuevo el tercer apartado del Teorema 3.48, y en caso de que lo sea S_u , el último apartado del Teorema 3.50. En ambos casos

$$(u * v) * (\phi * \psi) = (u * \psi) * (v * \phi).$$

Si además hacemos uso de $\phi * \psi = \psi * \phi$, resulta también la igualdad

$$(v * u) * (\phi * \psi) = (v * \phi) * (u * \psi).$$

Teniendo en cuenta que los términos de la derecha de las dos ecuaciones anteriores son convoluciones de funciones, una en $\mathcal{D}$ y otra en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, vemos que iguales, por lo que

$$((u * v) * \phi) * \psi = ((v * u) * \phi) * \psi.$$

Finalmente, los argumentos de unicidad empleados al final de la demostración del Teorema 3.48 nos otorgan la igualdad buscada.

2. Si $\phi \in \mathcal{D}$, es fácil comprobar que

$$u * v(\phi) = u * \widetilde{v * \check{\phi}}. \quad (3.13)$$

Por el apartado anterior, podemos asumir sin pérdida de generalidad que S_v es compacto, y por la prueba del tercer apartado del Teorema 3.50 tenemos que el soporte de $v * \check{\phi}$ cae en $S_v - S_\phi$. Por la ecuación (3.13), $u * v(\phi) = 0$ salvo que S_u interseque a $S_\phi - S_v$, o lo que es lo mismo, salvo que S_ϕ interseque a $S_u + S_v$.

3. Del apartado anterior sabemos que

$$(u * v) * w \quad \text{y} \quad u * (v * w)$$

están bien definidos si dos de los conjuntos S_u , S_v y S_w son compactos. Ahora, si $\phi \in \mathcal{D}$ se sigue directamente de la definición que

$$(u * (v * w)) * \phi = u * ((v * w) * \phi) = u * (v * (w * \phi)).$$

Si S_w es compacto, entonces

$$((u * v) * w) * \phi = (u * v) * (w * \phi) = u * (v * (w * \phi))$$

porque $w * \phi \in \mathcal{D}$ según el Teorema 3.50. Igualando los términos de la derecha en las dos cadenas anteriores, obtenemos el resultado cuando S_w es compacto.

Si S_w no es compacto, S_u lo es, luego el caso anterior junto con la regla de conmutación del primer apartado nos otorga

$$\begin{aligned} u * (v * w) &= u * (w * v) \\ &= (w * v) * u \\ &= w * (v * u) \\ &= w * (u * v) \\ &= (u * v) * w. \end{aligned}$$

4. Si $\phi \in \mathcal{D}$, entonces $\delta * \phi = \phi$ porque

$$\delta * \phi(x) = \delta(\tau_x \check{\phi}) = \tau_x \check{\phi}(0) = \check{\phi}(-x) = \phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Empleando ahora el segundo y tercer apartado del Teorema 3.48 logramos

$$D^\alpha u * \phi = u * D^\alpha \phi = u * D^\alpha (\delta * \phi) = u * D^\alpha \delta * \phi.$$

5. Es consecuencia de los tres primeros apartados, pues

$$D^\alpha (u * v) = D^\alpha \delta * (u * v) = (D^\alpha \delta * u) * v = D^\alpha u * v$$

y

$$(D^\alpha \delta * u) * v = (u * D^\alpha \delta) * v = u * (D^\alpha \delta * v) = u * D^\alpha v$$

□

Capítulo 4

Transformada de Fourier y distribuciones temperadas

La Transformada de Fourier surgió como generalización de la serie de Fourier compleja, y no tardó en popularizarse por su gran cantidad de aplicaciones tanto en áreas de la ciencia e ingeniería como la Acústica o el Tratamiento de Señales, como en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales. Debido a esto, Schwartz acabó incorporándola en su teoría de Distribuciones, teniendo que realizar varias modificaciones por el mal comportamiento de las funciones test ante este tipo de transformaciones. A lo largo de este capítulo vamos a cubrir todos estos cambios, empezando con un breve repaso a la Teoría de la Transformada de Fourier, y pasándola al mundo de las distribuciones introduciendo el espacio de funciones de rápido decaimiento y las distribuciones temperadas. Tras analizar las propiedades más relevantes de estos, terminamos con algunas aplicaciones en el mundo de las funciones complejas y las ecuaciones en derivadas parciales.

4.1. TRANSFORMADA DE FOURIER

Comencemos aclarando la notación básica y la definición que da nombre a la sección.

NOTACIÓN 4.1. Llamamos *medida de Lebesgue normalizada en $\mathbb{R}^n$* a la medida

$$dm_x = (2\pi)^{-n/2} dx,$$

siendo dx la medida de Lebesgue n -dimensional. En este capítulo emplearemos dicha normalización de la medida de Lebesgue por simplicidad en algunos resultados, es por ello que conviene también redefinir las normas y convoluciones como

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dm_x \right)^{1/p} \quad \text{y} \quad f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dm_y,$$

con $1 \leq p < \infty$.

Otras consideraciones de relevancia son, dado un multiíndice α , el operador diferencial

$$D_\alpha = i^{-|\alpha|} D^\alpha = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}.$$

Y dado un polinomio de n -variables y grado m

$$P(\xi) = \sum_{|\beta| \leq m} c_\beta \xi^\beta = \sum_{|\beta| \leq m} c_\beta \xi_1^{\beta_1} \cdots \xi_n^{\beta_n},$$

los operadores diferenciales

$$P(D) = \sum_{|\beta| \leq m} c_\beta D_\beta \quad \text{y} \quad P(-D) = \sum_{|\beta| \leq m} (-1)^{|\beta|} c_\beta D^\beta.$$

DEFINICIÓN 4.2. La transformada de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es la función

$$\hat{f}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-it \cdot x} dm_x,$$

donde $t \cdot x$ representa el producto escalar de ambos vectores (Notación 3.19).

NOTACIÓN 4.3. Por simplicidad, denotaremos la función (en la variable x) $e^{it \cdot x}$ como $e_t(x)$, de forma que la transformada de Fourier se escribirá como

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e_{-t}(x) dm_x.$$

OBSERVACIÓN 4.4. La igualdad $|e_{-t}| = 1$ nos dice que la integrabilidad de una función f es equivalente a la de $f e_{-t}$, y por tanto que la transformada de Fourier está bien definida para todo $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

OBSERVACIÓN 4.5. Notemos que los operadores antes definidos actúan sobre la función exponencial en la forma

$$D_\alpha e_t = t^\alpha e_t, \quad P(D) e_t = P(t) e_t.$$

Algunas primeras propiedades, inmediatas pero de gran utilidad al respecto, son las siguientes.

TEOREMA 4.6. Supongamos $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ y τ_x su operador de traslación asociado (Notación 3.43). Entonces

1. $\widehat{\tau_x f}(y) = e_{-x}(y) \hat{f}(y)$,
2. $\widehat{e_x f}(y) = \tau_x \hat{f}(y)$,
3. $\widehat{f * g}(y) = \hat{f}(y) \hat{g}(y)$,
4. si $\lambda > 0$ y $h(x) = f(x/\lambda)$, entonces $\hat{h}(t) = \lambda^n \hat{f}(\lambda t)$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración de los primeros dos apartados es directa de la definición. En efecto, para empezar

$$\widehat{\tau_x f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \tau_x f(y) e_{-t}(y) dm_y = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \tau_{-x} e_{-t}(y) dm_y = e_{-t}(x) \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e_{-t}(y) dm_y = e_{-x}(t) \hat{f}(t).$$

Por otro lado,

$$\widehat{e_x f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e_x(y) f(y) e_{-t}(y) dm_y = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e_{-(t-x)}(y) dm_y = \tau_x \hat{f}(t).$$

El tercer apartado es consecuencia del Teorema de Fubini [1], y por último, el cuarto se obtiene por cambio de variables en la definición de $\hat{f}$. $\square$

Introduzcamos ahora una nueva clase de funciones que será fundamental en este capítulo, pues a diferencia de las funciones test, veremos que presenta muy buenas propiedades frente a la transformada de Fourier.

DEFINICIÓN 4.7. Llamamos *función de rápido decrecimiento* a una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ cumpliendo

$$\sup_{|\alpha| \leq N} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^N |D_\alpha f(x)| \right\} < \infty \quad (4.1)$$

para todo $N \in \mathbb{N}$, según la Notación 3.19. El conjunto de funciones de rápido decrecimiento en $\mathbb{R}^n$ lo denotaremos por $\mathcal{S}_n$.

OBSERVACIÓN 4.8. Las funciones test son funciones de rápido decrecimiento, y a su vez, las de rápido decrecimiento son integrables. Comprobar la primera afirmación es evidente, y para la segunda basta notar que si $f \in \mathcal{S}_n$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{2n} |f(x)| \frac{1}{(1 + |x|^2)^{2n}} dx \leq \text{cte} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |x|^2)^{2n}} dx < \infty.$$

Esto nos dice, en particular, que se da la siguiente cadena de inclusiones

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S}_n \subset L^1(\mathbb{R}^n),$$

y que por tanto $\mathcal{S}_n$ es denso en $L^1(\mathbb{R}^n)$ [12].

Otro contenido de interés y sencilla comprobación es $\mathcal{S}_n \subset C_0(\mathbb{R}^n)$, siendo $(C_0(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ el espacio de Banach de las funciones complejas continuas en $\mathbb{R}^n$ que se anulan en el infinito junto con la norma del supremo

OBSERVACIÓN 4.9. Las funciones que determina la ecuación (4.1) para cada valor de N , cumplen trivialmente las condiciones de seminorma. Y de hecho, la implicación

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^N |f(x)| = 0 \implies f = 0$$

nos dice que se trata de una familia de normas.

Analicemos a continuación algunas de las principales propiedades de dichas funciones y su relación con la transformada de Fourier.

TEOREMA 4.10. *Las funciones de rápido decrecimiento satisfacen:*

1. $\mathcal{S}_n$ con la topología inducida por las normas (4.1) es un espacio Fréchet.
2. Si P es un polinomio, $g \in \mathcal{S}_n$ y α es un multiíndice, entonces las aplicaciones

$$f \longrightarrow Pf, \quad f \longrightarrow gf, \quad f \longrightarrow D_\alpha f$$

son aplicaciones lineales continuas de $\mathcal{S}_n$ en sí mismo.

3. Si $f \in \mathcal{S}_n$ y P es un polinomio, entonces

$$\widehat{P(D)f} = P\hat{f} \quad \text{y} \quad \widehat{Pf} = P(-D)\hat{f}.$$

4. La transformada de Fourier es una aplicación continua de $\mathcal{S}_n$ en sí mismo.

DEMOSTRACIÓN. Analicemos cada apartado.

1. Es sencillo comprobar que el conjunto $\mathcal{S}_n$ tiene estructura de espacio vectorial, y con la familia de normas (4.1) también estructura localmente convexa y metrizable con métrica invariante (Observación 2.30). Falta comprobar entonces solo la completitud de la topología en cuestión. En efecto, sea $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{S}_n$, de modo que para cada par de multiíndices α y β , las funciones $x^\beta D^\alpha f_i$ convergen uniformemente a funciones acotadas $g_{\alpha\beta}$ en la forma

$$g_{\alpha\beta}(x) = x^\beta D^\alpha g_{00}$$

cuando $i \rightarrow \infty$, y por tanto $f_i \rightarrow g_{00}$ en $\mathcal{S}_n$, con lo que concluimos la completitud.

2. Si $f \in \mathcal{S}_n$, es claro que $D_\alpha f \in \mathcal{S}_n$, y por la fórmula de Leibniz Pf y $g f$ también. La continuidad de dichas aplicaciones es una sencilla consecuencia del Teorema de la Gráfica Cerrada [11].
3. Si $f \in \mathcal{S}_n$ entonces $P(D)f$ también por lo comentado en el apartado anterior, y

$$P(D)f * e_t = f * P(D)e_t = f * P(t)e_t = P(t)[f * e_t].$$

Evaluable dicha igualdad en el origen de $\mathbb{R}^n$ llegamos entonces a la primera igualdad del enunciado

$$\widehat{P(D)f}(t) = P(t)\hat{f}(t).$$

Por otro lado, si consideramos $\varepsilon > 0$, $t = (t_1, \dots, t_n)$ y $t' = (t_1 + \varepsilon, t_2, \dots, t_n)$, entonces

$$\frac{\hat{f}(t') - \hat{f}(t)}{i\varepsilon} = \int_{\mathbb{R}^n} x_1 f(x) \frac{e^{-ix_1\varepsilon} - 1}{ix_1\varepsilon} e^{-ix \cdot t} dm_x.$$

Como $x_1 f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada [1] para calcular el límite $\varepsilon \rightarrow 0$, resultando

$$-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t_1} \hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} x_1 f(x) e^{-ix \cdot t} dm_x.$$

Esto muestra la segunda igualdad del enunciado para $P = x_1$, el caso general se deduce de este por iteración.

4. Supongamos $f \in \mathcal{S}_n$ y $g(x) = (-1)^{|\alpha|} x^\alpha f(x)$, de modo que $g \in \mathcal{S}_n$. El apartado anterior implica que $\hat{g} = D_\alpha \hat{f}$ y $P D_\alpha \hat{f} = P \hat{g} = \widehat{P(D)g}$, que se trata de una función acotada puesto que $P(D)g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Esto prueba que $\hat{f} \in \mathcal{S}_n$. Ahora, si $f_i \rightarrow f$ en $\mathcal{S}_n$, entonces $f_i \rightarrow f$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$, lo que implica $\hat{f}_i(t) \rightarrow \hat{f}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}^n$. Que $f \rightarrow \hat{f}$ sea una aplicación continua se sigue finalmente del Teorema de la Gráfica Cerrada [11].

□

OBSERVACIÓN 4.11. El último apartado de este resultado ilustra el principal motivo que nos lleva a abandonar el espacio de funciones test por el de funciones de rápido decrecimiento cuando trabajamos con transformadas de Fourier, y es que las primeras no son invariantes por dicha transformada. Para ver esto último vamos a trabajar en el caso unidimensional y a considerar una función $\phi \in \mathcal{D}$ no nula, de forma que

$$\hat{\phi}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \phi(x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-itx)^k}{k!} \phi(x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

Como la integral se extiende solo al soporte compacto de ϕ , la serie puede intercambiarse con la integral resultando

$$\hat{\phi}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{(-ix)^k}{k!} \phi(x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \right) t^k.$$

Esto muestra que $\hat{\phi}$ es analítica, y de hecho conocemos su desarrollo en serie. Si consideramos la función compleja holomorfa con el mismo desarrollo en serie, sabemos que los ceros de dicha función están aislados salvo que se trate de la función nula. En particular, esto implica que $\hat{\phi}$ no puede tener soporte compacto salvo que sea la función nula, lo que no puede suceder por ser $\phi \neq 0$.

COROLARIO 4.12. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ y $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

DEMOSTRACIÓN. Para empezar es claro que

$$|\hat{f}(t)| \leq \|f\|_1 \quad \forall t \in \mathbb{R}^n, \quad (4.2)$$

pues $|e_t| = 1$. Además, por densidad de $\mathcal{S}_n$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$, para la función f existe una sucesión $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{S}_n$ tal que $\|f - f_i\|_1 \rightarrow 0$. Como $\hat{f}_i \in \mathcal{S}_n \subset C_0(\mathbb{R}^n)$ por lo probado en el Teorema 4.10, y como la desigualdad (4.2) implica la convergencia $\hat{f}_i \rightarrow \hat{f}$ uniforme en $\mathbb{R}^n$, la prueba queda concluida. $\square$

Nuestra intención en este punto es demostrar que la aplicación $f \rightarrow \hat{f}$ en $\mathcal{S}_n$ no solo es continua, sino que de hecho es biyectiva y con inversa continua. Sin embargo, la forma de probarlo no es inmediata, sino que requiere de algún resultado previo como el que exponemos a continuación.

TEOREMA 4.13. Si ϕ_n es la función de $\mathbb{R}^n$ definida como

$$\phi_n(x) = e^{-\frac{1}{2}|x|^2},$$

entonces $\phi_n \in \mathcal{S}_n$, $\hat{\phi}_n = \phi_n$, y

$$\phi_n(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}_n(x) dm_x.$$

DEMOSTRACIÓN. Para empezar, la afirmación $\phi_n \in \mathcal{S}_n$ es inmediata, analicemos el resto. Como ϕ_1 satisface la ecuación diferencial

$$y' + xy = 0, \quad (4.3)$$

un cálculo sencillo o el tercer apartado del Teorema 4.10 muestran que $\hat{\phi}_1$ también satisface (4.3). En consecuencia, al ser $\phi_1(0) = 1$ y

$$\hat{\phi}_1(0) = \int_{\mathbb{R}} \phi_1(x) dm_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1,$$

resulta por unicidad de soluciones que $\hat{\phi}_1 = \phi_1$. Ahora,

$$\phi_n(x) = \phi_1(x_1) \cdots \phi_1(x_n) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

por lo que el Teorema de Fubini [1] nos lleva a

$$\hat{\phi}_n(t) = \hat{\phi}_1(t_1) \cdots \hat{\phi}_1(t_n) \quad \forall t \in \mathbb{R}^n.$$

De aquí se sigue que $\hat{\phi}_n = \phi_n$. Además, como $\hat{\phi}_n(0) = \int \phi_n(x) dx$ y $\hat{\phi}_n = \phi_n$, la igualdad del enunciado es inmediata. $\square$

Pasemos a analizar la inversión antes mencionada.

TEOREMA 4.14 (TEOREMA DE INVERSIÓN). Se dan las siguientes afirmaciones:

1. Si $g \in \mathcal{S}_n$, entonces

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(t) e_x(t) dm_t \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.4)$$

2. La transformada de Fourier constituye una aplicación lineal, biyectiva, de periodo 4 (es decir, que al componerla consigo misma 4 veces se obtiene la identidad), y continua con inversa continua de $\mathcal{S}_n$ en sí mismo.

3. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, y

$$f_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) e_x(t) dm_t \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

entonces $f_0 = f$ en casi todo punto.

DEMOSTRACIÓN. Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, el Teorema de Fubini [1] puede aplicarse a la integral doble

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y) e^{-ix \cdot y} dm_x dm_y,$$

logrando la identidad

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x) dm_x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) dm_x. \quad (4.5)$$

Analicemos ahora cada apartado:

1. Tomemos $g, \phi \in \mathcal{S}_n$ y $f(x) = \phi(x/\lambda)$ para algún $\lambda > 0$. Por el último apartado del Teorema 4.6, la identidad (4.5) se convierte en

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(t) \lambda^n \hat{\phi}(\lambda t) dm_t = \int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \hat{g}(y) dm_y,$$

o mediante un cambio de variable

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\left(\frac{t}{\lambda}\right) \hat{\phi}(t) dm_t = \int_{\mathbb{R}^n} \phi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \hat{g}(y) dm_y.$$

Si hacemos tender $\lambda \rightarrow \infty$, entonces $g(t/\lambda) \rightarrow g(0)$ y $\phi(t/\lambda) \rightarrow \phi(0)$, permaneciendo acotadas para todo λ , lo que nos permite aplicar el Teorema de Convergencia Dominada [1] a ambos lados de la igualdad resultando

$$g(0) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(t) dm_t = \phi(0) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(t) dm_t \quad \forall g, \phi \in \mathcal{S}_n.$$

Si particularizamos ϕ a la aplicación ϕ_n del Teorema 4.13, la igualdad anterior nos da la fórmula de inversión (4.4) para $x = 0$. El caso general se deduce a partir de este empleando el primer apartado del Teorema 4.6:

$$g(x) = \tau_{-x} g(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\tau_{-x} g}(t) dm_t = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(t) e_x(t) dm_t.$$

2. Introduzcamos temporalmente la aplicación $\Phi g = \hat{g}$. La fórmula de inversión (4.4) muestra que Φ es una aplicación inyectiva en $\mathcal{S}_n$ pues $\hat{g} = 0$ implica claramente $g = 0$, y de hecho biyectiva pues la misma fórmula nos dice que

$$\Phi^2 g = \check{g},$$

y por tanto que Φ^4 es la identidad. La continuidad de Φ la probamos ya en el Teorema 4.10, y la de Φ^{-1} es sencilla pues $\Phi^{-1} = \Phi^3$ por lo dicho previamente.

3. Para probar este apartado recuperamos la identidad (4.5) con $g \in \mathcal{S}_n$, y a continuación insertamos la fórmula (4.4) en el lugar de g y empleamos el Teorema de Fubini [1] para obtener

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_0(x) \hat{g}(x) dm_x = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) dm_x.$$

Por el apartado anterior y la arbitrariedad de g , las funciones $\hat{g}$ abarcan todo $\mathcal{S}_n$, y en particular todo $\mathcal{D}$, por lo que

$$\int_{\mathbb{R}^n} [f_0(x) - f(x)] \phi(x) dm_x = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}.$$

Esto implica que $f_0 = f$ en casi todo punto [1], justo como queríamos.

□

Como primera aplicación del Teorema de Inversión contamos con el siguiente resultado.

TEOREMA 4.15. Si $f, g \in \mathcal{S}_n$ entonces:

1. $f * g \in \mathcal{S}_n$,
2. $\widehat{f * g} = \hat{f} * \hat{g}$.

DEMOSTRACIÓN. En la notación de la demostración anterior (es decir, $\Phi f = \hat{f}$) y el Teorema 4.6, tenemos $\Phi(f * g) = \Phi f \cdot \Phi g$. A partir de esto y recordando que $\Phi^2 f = \check{f}$ deducimos

$$\Phi(\hat{f} * \hat{g}) = \Phi^2 f \cdot \Phi^2 g = \check{f} \check{g} = \widetilde{f g} = \Phi^2(f g).$$

Teniendo en cuenta que $f g \in \mathcal{S}_n$ y aplicando ahora Φ^{-1} a ambos lados de esta cadena de igualdades, obtenemos el segundo apartado. En particular, este nos dice que $\hat{f} * \hat{g} \in \mathcal{S}_n$, y como Φ es biyectiva por lo visto en el Teorema 4.14, el primer apartado es inmediato. □

Lo último que vamos a hacer en esta sección es explorar la posibilidad de extender el concepto de transformada de Fourier a las funciones de cuadrado integrable, y ver cómo hacerlo en caso afirmativo. La respuesta a estas preguntas se encuentra en el siguiente resultado, que constituye uno de los más relevantes que se han obtenido en la teoría de Fourier junto con el Teorema de Inversión.

TEOREMA 4.16 (TEOREMA DE PLANCHEREL). Existe una única isometría Ψ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, es decir, un único isomorfismo lineal cumpliendo $\|\Psi f\|_2 = \|f\|_2$ para cada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, tal que:

$$\Psi f = \hat{f} \quad \forall f \in \mathcal{S}_n.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $f, g \in \mathcal{S}_n$, entonces el Teorema de Inversión 4.14 nos lleva a que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bar{g}(x) dm_x &= \int_{\mathbb{R}^n} \bar{g}(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) e^{ix \cdot t} dm_t \right) dm_x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \bar{g}(x) e^{ix \cdot t} dm_x \right) dm_t, \end{aligned}$$

siendo $\bar{g}$ la función compleja conjugada de g . La integral anterior entre paréntesis es precisamente la compleja conjugada de $\hat{g}(t)$, por lo que de aquí concluimos la igualdad

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \bar{g}(x) dm_x = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) \bar{\hat{g}}(t) dm_t, \quad (4.6)$$

conocida como *identidad de Parseval*. En particular, si consideramos $g = f$, la identidad anterior se convierte en

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2 \quad \forall f \in \mathcal{S}_n.$$

Notemos que $\mathcal{S}_n$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$ por el mismo motivo que lo es en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Teniendo en cuenta esto y el Teorema de Inversión, la transformada de Fourier en el subespacio denso $\mathcal{S}_n$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ resulta ser una isometría con la norma de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Por el Teorema de la Transformación Lineal Acotada (Teorema 1.9.1 de [9]), la existencia y unicidad de Ψ es entonces inmediata. $\square$

OBSERVACIÓN 4.17. Notemos que la identidad de Parseval (4.6) sigue siendo cierta para cualquier par de funciones $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Como no podía ser de otra forma, esta única isometría define la extensión de la transformada de Fourier al espacio de funciones de cuadrado integrable, manteniendo además la condición de isomorfismo que teníamos en el caso original.

4.2. DISTRIBUCIONES TEMPERADAS

En la sección anterior estudiamos un nuevo espacio vectorial topológico de funciones diferenciables que además es invariante por transformaciones de Fourier, las funciones de rápido decrecimiento. Veamos qué podemos decir de su dual $[\mathcal{S}_n]^*$, espacio que denotaremos por simplicidad como $\mathcal{S}'_n$.

TEOREMA 4.18. *En $\mathbb{R}^n$ se cumple lo siguiente:*

1. $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{S}_n$.
2. La inclusión $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S}_n$ es continua.

DEMOSTRACIÓN. Analicemos cada apartado.

1. Elijamos una función $f \in \mathcal{S}_n$ y otra $\psi \in \mathcal{D}$ tal que $\psi = 1$ en la bola unidad de $\mathbb{R}^n$, y definamos para cada $r > 0$

$$f_r(x) = f(x)\psi(rx),$$

de modo que $f_r \in \mathcal{D}$. Si P es un polinomio y α un multiíndice, entonces

$$P(x)D^\alpha(f - f_r)(x) = P(x) \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} D^{\alpha-\beta} f(x) r^{|\beta|} D^\beta[1 - \psi](rx).$$

Por la elección realizada de ψ , $D^\beta[1 - \psi] = 0$ en todo punto de la bola unidad para cualquier valor de β , y por ser f de rápido decrecimiento, $PD^{\alpha-\beta} f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ para cada $\beta \leq \alpha$. De aquí se sigue que cuando $r \rightarrow 0$, la suma anterior converge uniformemente a la función nula, y por tanto $f_r \rightarrow f$ en $\mathcal{S}_n$, justo como queríamos.

2. Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto compacto, la topología inducida en $\mathcal{D}_K$ por $\mathcal{S}_n$ es la misma que su topología usual pues cada $(1 + |x|^2)^N$ está acotado en K . La inclusión $\mathcal{D}_K \hookrightarrow \mathcal{S}_n$ es por tanto continua, y por el Teorema 3.13 la inclusión del enunciado también.

$\square$

Introduzcamos sin más dilación el concepto que da nombre a la sección.

DEFINICIÓN 4.19. Las *distribuciones temperadas* son aquellas distribuciones $u \in \mathcal{D}'$ con extensión continua a $\mathcal{S}_n$.

OBSERVACIÓN 4.20. Una caracterización sencilla de las distribuciones temperadas es que se pueden escribir en la forma

$$u_L = L \circ \iota,$$

con $L \in \mathcal{S}'_n$ y $\iota: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{S}_n$ la inclusión canónica. Su comprobación es inmediata pues, al ser tanto L como ι aplicaciones continuas (Teorema 4.18), $u_L \in \mathcal{D}'$ y su extensión es L . Del mismo modo, dada una distribución temperada, la aplicación L sería su extensión continua a $\mathcal{S}_n$.

Además, dos aplicaciones L distintas no pueden dar lugar a una misma distribución, por lo que la relación entre $\mathcal{S}'_n$ y el espacio de distribuciones temperadas es biyectiva, lo que nos lleva a asociar indistintamente L con u_L .

Para entender mejor el significado del apellido “temperadas” vamos a analizar algunos ejemplos sencillos. Comencemos viendo que las distribuciones con soporte compacto son temperadas.

En efecto, sea $u \in \mathcal{D}'$ con soporte compacto K , y fijemos una función $\psi \in \mathcal{D}$ tal que $\psi = 1$ en un abierto conteniendo a K . Definamos entonces el siguiente funcional

$$\tilde{u}: \mathcal{S}_n \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \tilde{u}(f) = u(\psi f),$$

de modo que $\tilde{u} = u$ en $\mathcal{D}$. Para concluir que u es temperada basta probar que $\tilde{u}$ es continua, veámoslo considerando una sucesión $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{S}_n$ convergente al origen. Por converger al origen en la topología de $\mathcal{S}_n$, es claro que todas las sucesiones $(D^\alpha f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ convergen uniformemente a la función nula en $\mathbb{R}^n$, y lo mismo con $D^\alpha(\psi f_i)$, lo que nos dice en particular que $(\psi f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge al origen de $\mathcal{D}$. De esto concluimos la continuidad de $\tilde{u}$, justo como queríamos.

Algunos de los ejemplos más relevantes de distribuciones son los dados por funciones y medidas, estudiemos algún caso donde también sean temperadas. Para empezar, afirmamos que si μ es una medida satisfaciendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-k} d\mu < \infty$$

para algún valor de $k \in \mathbb{N}$, entonces Λ_μ es temperada. De hecho, la extensión a $\mathcal{S}_n$ es el funcional

$$\Lambda f = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu.$$

La forma de verlo consiste en notar que si $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge al origen, entonces

$$\varepsilon_i = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{(1 + |x|^2)^k |f_i(x)|\} \longrightarrow 0.$$

Como

$$|\Lambda f_i| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^k f_i(x) (1 + |x|^2)^{-k} d\mu \right| \leq \varepsilon_i \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-k} d\mu,$$

es claro que converge a 0 también, lo que prueba la continuidad de Λ .

En el caso funcional, la condición análoga es que la función medible g satisfaga

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(1 + |x|^2)^{-N} g(x)|^p dm_x = C < \infty$$

para algún $N > 0$ y $1 \leq p < \infty$. Al igual que en el caso anterior, la extensión que proponemos es

$$\Lambda f = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x) dm_x,$$

y vamos a empezar suponiendo $p > 1$ (llamamos q a su conjugado). Observemos lo siguiente,

$$\begin{aligned} |\Lambda f| &\leq C^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(1+|x|^2)^N f(x)|^q dm_x \right)^{1/q} \\ &\leq C^{1/p} B^{1/q} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{|(1+|x|^2)^M f(x)|\}, \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta la desigualdad de Hölder y $M > 0$ es una constante auxiliar lo suficientemente grande como para que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{(N-M)q} dm_x = B < \infty.$$

La desigualdad anterior prueba que Λ es continua para $\mathcal{S}_n$. El caso con $p = 1$ es mucho más sencillo.

De esto último deducimos que Λ_g es una distribución temperada para todo $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$, y más generalmente, cualquier función medible que se pueda acotar en valor absoluto por un polinomio.

TEOREMA 4.21. *Si α es un multiíndice, P un polinomio, $g \in \mathcal{S}_n$, y u una distribución temperada, entonces las distribuciones $D^\alpha u$, Pu y gu también son temperadas.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue del segundo apartado del Teorema 4.10, de que u es temperada, y de la propia definición de dichas distribuciones. $\square$

DEFINICIÓN 4.22. Dado un funcional $u \in \mathcal{S}'_n$, definimos su *transformada de Fourier* $\hat{u}$ como el funcional de $\mathcal{S}'_n$ dado por

$$\hat{u}(\phi) = u(\hat{\phi}) \quad \forall \phi \in \mathcal{S}_n.$$

OBSERVACIÓN 4.23. La afirmación $\hat{u} \in \mathcal{S}'_n$ se debe al último apartado del Teorema 4.10.

Pasemos a ver algunas propiedades relevantes.

TEOREMA 4.24. *La transformada de Fourier de una distribución cumple:*

1. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ o $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $\widehat{\Lambda f} = \Lambda \hat{f}$, donde Λf y $\Lambda \hat{f}$ en este caso representan su extensión a $\mathcal{S}_n$ como distribuciones temperadas.
2. La transformada de Fourier es una aplicación lineal, continua, biyectiva, de periodo 4, y con inversa también continua en $\mathcal{S}'_n$ (con la topología débil*).
3. Si $u \in \mathcal{S}'_n$ y P es un polinomio, entonces

$$\widehat{P(D)u} = P \hat{u} \quad \text{y} \quad \widehat{Pu} = P(-D) \hat{u}.$$

DEMOSTRACIÓN. Analicemos cada apartado.

1. En $L^1(\mathbb{R}^n)$ es consecuencia del Teorema de Fubini [1] y las igualdades

$$\widehat{\Lambda f}(\phi) = \Lambda f(\hat{\phi}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{\phi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) \phi(x) dx = \Lambda \hat{f}(\phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{S}_n.$$

En $L^2(\mathbb{R}^n)$ es inmediato por la densidad de $\mathcal{S}_n$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$ y las igualdades anteriores.

2. Sea W un entorno del origen en $\mathcal{S}'_n$ y escojamos funciones $\phi_1, \dots, \phi_k \in \mathcal{S}_n$ tales que

$$\{u \in \mathcal{S}'_n : |u(\phi_i)| < 1 \quad i = 1, 2, \dots, k\} \subset W.$$

Definamos entonces

$$V = \{u \in \mathcal{S}'_n : |u(\hat{\phi}_i)| < 1 \quad i = 1, 2, \dots, k\},$$

lo que constituye otro entorno del origen. Como $\hat{u}(\phi) = u(\hat{\phi})$, vemos que $\hat{u} \in W$ cuando $u \in V$, lo que prueba la continuidad de Φ , siendo esta la aplicación $\Phi u = \hat{u}$. Como Φ tiene periodo 4 en $\mathcal{S}_n$, es inmediato que en $\mathcal{S}'_n$ también por definición. Además, esto último nos dice que $\Phi^3 = \Phi^{-1}$, por lo que la aplicación es invertible y con inversa continua.

3. Este apartado se concluye del Teorema 4.10 y el Teorema 4.21 a partir de los siguientes cálculos

$$\begin{aligned} \widehat{P(D)u}(\phi) &= P(D)u(\hat{\phi}) = u(P(-D)\hat{\phi}) \\ &= u(\widehat{P\phi}) = \hat{u}(P\phi) = P\hat{u}(\phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{S}_n \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} P(-D)\hat{u}(\phi) &= \hat{u}(P(D)\phi) = u(\widehat{P(D)\phi}) \\ &= u(P\hat{\phi}) = Pu(\hat{\phi}) = \widehat{Pu}(\phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{S}_n. \end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN 4.25. Es importante notar que para valores de $p > 2$, la transformada de Fourier no está bien definida en $L^p(\mathbb{R}^n)$ pues siempre podemos encontrar una función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que la transformada de Fourier de Λ_f es una distribución temperada que no procede de ninguna función propia. La forma de probarlo consiste en suponer que la afirmación anterior es falsa, luego por el Teorema de la Gráfica Cerrada [11] se verifica

$$\int_{\{|x| \leq 1\}} |\hat{f}(x)| dx \leq A \|f\|_p \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad (4.7)$$

para cierta constante $A > 0$. Sin embargo, yéndonos al caso $n = 1$ por simplicidad, la función

$$\hat{f}(x) = e^{-\pi(1+i\delta)x^2} \implies f(x) = \frac{e^{-\pi x^2/(1+i\delta)}}{\sqrt{1+i\delta}}$$

verifica que

$$\int_{-1}^1 |\hat{f}(x)| dx = A_1$$

y si $\delta > 1$

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-p\pi x^2/(1+\delta^2)}}{(1+\delta^2)^{p/4}} dx \right)^{1/p} = \left(\frac{1+\delta^2}{p} \right)^{1/(2p)} (1+\delta^2)^{-1/4} \leq A_2 \delta^{1/p-1/2}$$

para ciertas constantes $A_1, A_2 > 0$ que dependen, como mucho, de p . No obstante, si $p > 2$ y δ suficientemente grande, entramos claramente en contradicción con (4.7).

Volviendo a los ejemplos vistos de distribuciones temperadas, vamos a analizar cómo se comporta la transformada de Fourier ante distribuciones dadas por polinomios, intentando caracterizarlas. Comenzando con el polinomio constante 1 tenemos

$$\widehat{\Lambda}_1(\phi) = \Lambda_1(\hat{\phi}) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(x) dm_x = \phi(0) = \delta(\phi),$$

y por otro lado

$$\hat{\delta}(\phi) = \delta(\hat{\phi}) = \hat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dm_x = \Lambda_1(\phi).$$

En conclusión, $\widehat{\Lambda}_1 = \delta$ y $\hat{\delta} = \Lambda_1$. Pasando ahora a un polinomio P arbitrario, empleamos el tercer apartado del Teorema 4.24 con $u = \delta$ y $u = \Lambda_1$, de modo que obtenemos

$$\widehat{P(D)\delta} = \Lambda_P \quad \text{y} \quad \widehat{\Lambda_P} = P(-D)\delta. \quad (4.8)$$

Finalmente, si combinamos las fórmulas (4.8) con el Teorema 3.38 deducimos que una distribución está dada por un polinomio si y solo si su soporte es el origen.

Cabe resaltar que los pares de fórmulas (4.8) y su caso particular $P = 1$, se podrían obtener a partir de un solo elemento de cada par, pues al igual que sucedía en $\mathcal{S}_n$

$$\hat{u} = \check{u},$$

siendo

$$\check{u}(\phi) = u(\check{\phi}) \quad \forall \phi \in \mathcal{S}_n.$$

Pasemos a probar un lema auxiliar del siguiente teorema, que recuerda a un viejo conocido del cálculo.

LEMA 4.26. Si $w = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $\phi \in \mathcal{S}_n$ y

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{\phi(x + \varepsilon w) - \phi(x)}{\varepsilon} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0,$$

entonces ϕ_ε converge a $\partial\phi/\partial x_1$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ en la topología de $\mathcal{S}_n$.

DEMOSTRACIÓN. Esta conclusión se puede obtener mostrando que la transformada de Fourier de $\phi_\varepsilon - \partial\phi/\partial x_1$ tiende a la función nula en $\mathcal{S}_n$, es decir, mostrando que

$$\psi_\varepsilon \hat{\phi} \rightarrow 0 \quad \text{en } \mathcal{S}_n,$$

donde

$$\psi_\varepsilon(y) = \frac{e^{i\varepsilon y_1} - 1}{\varepsilon} - i y_1 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0.$$

Si P es un polinomio y α un multiíndice, entonces

$$PD^\alpha(\psi_\varepsilon \hat{\phi}) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta} PD^{\alpha-\beta} \hat{\phi} D^\beta \psi_\varepsilon. \quad (4.9)$$

Un cálculo sencillo muestra que

$$|D^\beta \psi_\varepsilon(y)| \leq \begin{cases} \varepsilon y_1^2 & \text{si } |\beta| = 0, \\ \varepsilon |y_1| & \text{si } |\beta| = 1, \\ \varepsilon^{|\beta|-1} & \text{si } |\beta| > 1, \end{cases}$$

y por tanto que (4.9) tiende a 0 uniformemente en $\mathbb{R}^n$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. La definición de la topología en $\mathcal{S}_n$ nos da finalmente el resultado. $\square$

DEFINICIÓN 4.27. Si $u \in \mathcal{S}'_n$ y $\phi \in \mathcal{S}_n$, entonces definimos su convolución como

$$u * \phi(x) = u(\tau_x \check{\phi}) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

OBSERVACIÓN 4.28. Notemos que la convolución anterior está bien definida pues $\tau_x \check{\phi} \in \mathcal{S}_n$.

Presentemos por último algunas propiedades de la convolución.

TEOREMA 4.29. *Supongamos $\phi \in \mathcal{S}_n$ y u una distribución temperada. Entonces*

1. $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y

$$D^\alpha(u * \phi) = (D^\alpha u) * \phi = u * (D^\alpha \phi)$$
 para cada multiíndice α ,
2. $u * \phi$ tiene crecimiento polinomial, por lo que su distribución asociada es temperada,
3. $\widehat{u * \phi} = \hat{\phi} \hat{u}$,
4. $(u * \phi) * \psi = u * (\phi * \psi)$ para cada $\psi \in \mathcal{S}_n$,
5. $\hat{u} * \hat{\phi} = \widehat{\phi u}$.

DEMOSTRACIÓN. Vayamos apartado por apartado.

1. La segunda igualdad se muestra igual que en el Teorema 3.48, pues la convolución conmuta con la traslación. De hecho, esto último nos muestra que

$$\left(\frac{\tau_{-\varepsilon w} - \tau_0}{\varepsilon}\right) u * \phi = u * \left(\frac{\tau_{-\varepsilon w} - \tau_0}{\varepsilon}\right) \phi,$$

y ahora el Lema 4.26 nos da que $D^\alpha u * \phi = u * D^\alpha \phi$ cuando $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$. Por iteración obtenemos finalmente la diferenciabilidad deseada y la igualdad para cualquier α .

2. Denotemos por p_N la norma N -ésima de la Definición 4.7 y tengamos presente la desigualdad

$$1 + |x + y|^2 \leq 2(1 + |x|^2)(1 + |y|^2) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

A partir de ella deducimos que

$$p_N(\tau_x f) \leq 2^N (1 + |x|^2)^N p_N(f) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, f \in \mathcal{S}_n.$$

Como u es un funcional lineal continuo en $\mathcal{S}_n$ y como las normas p_N determinan la topología, hay un valor de N y $C < \infty$ tales que

$$|u(f)| \leq C p_N(f) \quad \forall f \in \mathcal{S}_n.$$

Por las desigualdades anteriores resulta que

$$|u * \phi(x)| = |u(\tau_x \check{\phi})| \leq 2^N C p_N(\phi) (1 + |x|^2)^N,$$

lo que nos da la acotación polinomial buscada.

3. Por ser $\Lambda_{u * \phi}$ distribución temperada, su extensión a $\mathcal{S}'_n$, que por simplicidad denotaremos $u * \phi$, tiene transformada de Fourier en $\mathcal{S}'_n$. Si $\psi \in \mathcal{D}$ tiene soporte compacto K , entonces

$$\begin{aligned} \widehat{u * \phi}(\hat{\psi}) &= u * \phi(\check{\psi}) = \int_{\mathbb{R}^n} u * \phi(x) \psi(-x) dm_x \\ &= \int_{-K} u[\psi(-x) \tau_x \check{\phi}] dm_x = u \left[\int_{-K} \psi(-x) \tau_x \check{\phi} dm_x \right] \\ &= u(\widehat{\phi * \psi}) = \hat{u}(\widehat{\phi * \psi}) = \hat{u}(\hat{\phi} \hat{\psi}), \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta el Teorema 2.73 para sacar u de la integral. Debido a esto,

$$\widehat{u * \phi}(\hat{\psi}) = \hat{\phi} \hat{u}(\hat{\psi}). \quad (4.10)$$

Esto ha sido probado para $\hat{\psi}$ con $\psi \in \mathcal{D}$. Sin embargo, por el Teorema 4.14, la densidad de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{S}_n$ implica que la transformada de los elementos de $\mathcal{D}$ también es denso en $\mathcal{S}_n$, por lo que la igualdad (4.10) se sigue cumpliendo si cambiamos $\hat{\psi}$ por un elemento cualquiera de $\mathcal{S}_n$. En conclusión, las distribuciones $u * \phi$ y $\hat{\phi} \hat{u}$ son iguales.

4. Los cálculos que preceden a (4.10) hemos visto que se cumplen para todo $\psi \in \mathcal{S}_n$, por lo que

$$u * \phi(\check{\psi}) = u(\widehat{\phi * \psi}),$$

o lo que es lo mismo,

$$(u * \phi) * \psi(0) = u * (\phi * \psi)(0).$$

Si ahora reemplazamos ψ por $\tau_x \psi$ logramos lo que queríamos.

5. En cuanto al último apartado, el tercero de este teorema muestra

$$\widehat{\hat{u} * \hat{\phi}} = \check{\phi} \check{u} = \widetilde{\phi u},$$

y como $\widetilde{\phi u} = \widehat{\widehat{\phi u}}$ concluimos el resultado.

□

4.3. TEOREMAS DE PALEY-WIENER

Uno de los teoremas clásicos de Paley y Wiener caracteriza las funciones enteras en una variable con acotación exponencial, las cuales se pueden escribir como la transformada de Fourier de funciones en L^2 con soporte compacto (ver [12]). En esta sección vamos a presentar dos análogos en varias variables, uno sustituyendo las funciones en L^2 por funciones C^∞ con soporte compacto, y el otro por distribuciones con soporte compacto.

NOTACIÓN 4.30. Los elementos de $\mathbb{C}^n$ los denotaremos como $z = (z_1, \dots, z_n)$, donde cada $z_k \in \mathbb{C}$. Si $z_k = x_k + i y_k$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, entonces $z = x + i y$ y llamaremos $x = \operatorname{Re}(z)$ e $y = \operatorname{Im}(z)$, es decir, la parte *real* e *imaginaria* de z respectivamente. $\mathbb{R}^n$ será considerado como el subconjunto de puntos $z \in \mathbb{C}^n$ con $\operatorname{Im}(z) = 0$. También adoptaremos las notaciones

$$\begin{aligned} |z| &= (|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2)^{1/2} \\ |\operatorname{Im}(z)| &= (y_1^2 + \dots + y_n^2)^{1/2} \\ z^\alpha &= z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n} \\ z \cdot t &= z_1 t_1 + \dots + z_n t_n \\ e_z(t) &= e^{iz \cdot t}, \end{aligned}$$

con α un multiíndice y $t \in \mathbb{R}^n$.

DEFINICIÓN 4.31. Si Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^n$ y si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua, decimos que f es *holomorfa* en Ω si lo es en cada una de sus variables por separado. En el caso de que además sea holomorfa en todo $\mathbb{C}^n$, decimos que es *entera*.

TEOREMA 4.32. Si f es una función entera en $\mathbb{C}^n$ que se anula en $\mathbb{R}^n$, entonces $f = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Consideramos conocido el caso $n = 1$, analicemos el resto. llamemos P_k a la siguiente propiedad sobre f : si $z \in \mathbb{C}^n$ tiene al menos k coordenadas reales, entonces $f(z) = 0$. Por hipótesis P_n se cumple, y nuestro objetivo es probar P_0 . Asumamos que P_i se cumple para $i = 1, 2, \dots, n$, lo cual es sencillo de ver por inducción y haciendo uso del caso unidimensional. Consideremos ahora $z = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ arbitrario y mostremos que $f(z) = 0$, para lo cual consideramos la función compleja holomorfa auxiliar

$$g(\lambda) = (\lambda, a_2, \dots, a_n).$$

Basta probar que esta función es nula, pues en ese caso $f(z) = g(a_1) = 0$. En efecto, como se cumple P_1 , dicha función se anula en $\mathbb{R}$, y por ser holomorfa unidimensional, el resultado correspondiente nos dice que $g = 0$. $\square$

Denotemos de aquí en adelante $rB = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ para cualquier $r > 0$.

TEOREMA 4.33. Si $\phi \in \mathcal{D}$ tiene soporte en rB , y si

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t) e^{-iz \cdot t} dm_t \quad \forall z \in \mathbb{C}^n, \quad (4.11)$$

entonces f es entera y existen constantes $\gamma_N < \infty$ tales que

$$|f(z)| \leq \gamma_N (1 + |z|)^{-N} e^{r|\operatorname{Im}(z)|} \quad \forall z \in \mathbb{C}^n, N \in \mathbb{N}. \quad (4.12)$$

Por el otro lado, si f es una función entera satisfaciendo (4.12), entonces existe una función $\phi \in \mathcal{D}$ con soporte en rB cumpliendo (4.11).

DEMOSTRACIÓN. En cuanto a la primera implicación, si $t \in rB$ entonces

$$|e^{-iz \cdot t}| = e^{\operatorname{Im}(z) \cdot t} \leq e^{|t||\operatorname{Im}(z)|} \leq e^{r|\operatorname{Im}(z)|},$$

lo que nos dice que el integrando de (4.11) se encuentra en $L^1(\mathbb{R}^n)$ para cualquier $z \in \mathbb{C}^n$, y por tanto que f está bien definida. La continuidad de f es trivial, y la holomorfía es consecuencia del Teorema de Morera [12] aplicado a cada variable por separado, luego f es entera. Integrando por partes obtenemos que

$$z^\alpha f(z) = \int_{\mathbb{R}^n} (D_\alpha \phi)(t) e^{-iz \cdot t} dm_t,$$

y por tanto

$$|z^\alpha| |f(z)| \leq \|D_\alpha \phi\|_1 e^{r|\operatorname{Im}(z)|}.$$

Si juntamos estas desigualdades con

$$(1 + |z|)^N \leq A(1 + |z|^2)^{N/2} \leq A(1 + |z|^2)^{[N/2]+1} \leq \sum_{|\alpha_j| \leq N+2} c_j |z^{\alpha_j}|$$

para constantes $A, c_j > 0$, llegamos finalmente a la ecuación (4.12).

Pasando a la segunda implicación, partimos de una función f entera y definimos

$$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{ix \cdot t} dm_x. \quad (4.13)$$

Notando que $(1 + |x|)^N f(x)$ se encuentra en $L^1(\mathbb{R}^n)$ para cada N por (4.12), entonces un argumento similar al empleado en el tercer apartado del Teorema 4.10 muestra que $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

A continuación queremos probar que la integral

$$\int_{\mathbb{R}} f(\xi + i\eta, z_2, \dots, z_n) e^{i[t_1(\xi + i\eta) + t_2 z_2 + \dots + t_n z_n]} d\xi \quad (4.14)$$

no depende de η , para cualesquiera $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ y $z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. En efecto, consideremos un camino rectangular Γ en el plano complejo con lados horizontales de altura $\eta = 0$ y $\eta = \eta_1$, para un valor η_1 cualquiera, y lados verticales en la posición que queramos. Por tratarse de un camino cerrado y el integrando de (4.14) una función entera, el Teorema de Cauchy [12] nos dice que la integral de dicha función a lo largo de Γ con respecto a la primera variable (es decir, $\xi + i\eta$), es nula. Si hacemos tender los lados verticales de Γ a $\xi = \infty, -\infty$, la desigualdad (4.12) implica que la integral en dichos lados también se anula, y por tanto que la integral en el lado horizontal $\eta = \eta_1$, que es precisamente (4.14), coincide con la de $\eta = 0$, lo que nos confirma su independencia del valor de η .

Haciendo lo mismo con el resto de coordenadas, concluimos que

$$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x + iy) e^{it \cdot (x + iy)} dm_x \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Dado $t \in \mathbb{R}^n$ con $t \neq 0$, elegimos $y = \lambda t / |t|$ con $\lambda > 0$, de modo que $t \cdot y = \lambda |t|$, $|y| = \lambda$,

$$|f(x + iy) e^{it \cdot (x + iy)}| \leq \gamma_N (1 + |x|)^{-N} e^{(r - |t|)\lambda},$$

y por tanto

$$|\phi(t)| \leq \gamma_N e^{(r - |t|)\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{-N} dm_x$$

cuando N es elegido lo suficientemente grande como para que la última integral sea finita. Haciendo ahora tender $\lambda \rightarrow \infty$, si $|t| > r$, resulta por la desigualdad anterior que $\phi(t) = 0$, lo que nos confirma que su soporte se encuentra en rB .

Finalmente, la igualdad (4.11) para $z \in \mathbb{R}^n$ se sigue de (4.13) y el Teorema de Inversión 4.14, mientras que la igualdad para $z \in \mathbb{C}^n$ se sigue de que se cumple en los reales y el Teorema 4.32, pues las funciones a ambos lados de (4.11) son enteras. $\square$

El segundo teorema de Paley-Wiener que viene motivado por la siguiente cuestión. Por definición

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e_{-x}(t) dm_t = \Lambda_f(e_{-x}),$$

lo que sugiere que la transformada de Fourier de una distribución con soporte compacto u podría definirse alternativamente a la Definición 4.22 como la función

$$\hat{u}(x) = u(e_{-x}),$$

la cual tiene sentido por ser $e_{-x} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y el quinto apartado del Teorema 3.37.

TEOREMA 4.34. *Si $u \in \mathcal{D}'$ tiene soporte en rB , tiene orden N , y si*

$$f(z) = u(e_{-z}) \quad \forall z \in \mathbb{C}^n, \quad (4.15)$$

entonces f es entera, la restricción a $\mathbb{R}^n$ (vista como la distribución que define) coincide con la transformada de Fourier de u , y hay una constante $\gamma < \infty$ tal que

$$|f(z)| \leq \gamma (1 + |z|)^N e^{r|\operatorname{Im}(z)|}. \quad (4.16)$$

Por otro lado, si f es una función entera en $\mathbb{C}^n$ satisfaciendo (4.16) para algún N y algún γ , entonces existe $u \in \mathcal{D}'$ con soporte en rB cumpliendo la igualdad (4.15).

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $u \in \mathcal{D}'$ tiene soporte en rB , y escojamos $\psi \in \mathcal{D}$ tal que $\psi = 1$ en $(r+1)B$. En ese caso $u = \psi u$, y por el quinto apartado del Teorema 4.29

$$\hat{u} = \widehat{\psi u} = \hat{u} * \hat{\psi},$$

lo que muestra que $\hat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Entendemos que al hablar de $\hat{u} * \hat{\psi}$ nos referimos a la distribución que define, pero al omitirlo se ve más clara la identificación de $\hat{u}$ como función. Consideremos ahora $\phi \in \mathcal{S}_n$ tal que $\hat{\phi} = \psi$, de modo que

$$\begin{aligned} \hat{u} * \hat{\psi}(x) &= \hat{u} * \check{\phi}(x) = \hat{u}(\tau_x \phi) = u(\widehat{\tau_x \phi}) \\ &= u(e_{-x} \hat{\phi}) = u(\psi e_{-x}) = u(e_{-x}), \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo según lo visto al principio,

$$\hat{u}(x) = u(e_{-x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

justo como queríamos.

Mostremos ahora que f es entera, para lo cual elegimos $a, b \in \mathbb{C}^n$ y definimos

$$g(\lambda) = f(a + \lambda b) = u(e_{-a-\lambda b}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

La continuidad de f es sencilla pues si $w \rightarrow z$ en $\mathbb{C}^n$ entonces $e_{-z} \rightarrow e_{-w}$ en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, y u es continua en dicho espacio. Para ver que f es entera basta comprobar que las funciones g son enteras en $\mathbb{C}$ para cualesquiera a y b , veámoslo. Sea Γ un camino rectangular en $\mathbb{C}$ y observemos que la función $\lambda \rightarrow e_{-a-\lambda b}$ de $\mathbb{C}$ en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es continua. Debido a esto, la integral en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$F = \int_{\Gamma} e_{-a-\lambda b} d\lambda$$

está bien definida, y de hecho si tenemos en cuenta que la evaluación en t es un funcional lineal continuo en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, deducimos que conmuta con la integral resultando

$$F(t) = \int_{\Gamma} e_{-a-\lambda b}(t) d\lambda = e^{-ia \cdot t} \int_{\Gamma} e^{-i\lambda(b \cdot t)} d\lambda = 0,$$

donde hemos tenido en cuenta el Teorema de Cauchy [12]. Esto nos dice que F es la función nula, y por tanto

$$0 = u(F) = \int_{\Gamma} u(e_{-a-\lambda b}) d\lambda = \int_{\Gamma} g(\lambda) d\lambda,$$

luego el Teorema de Morera [12] afirma que g es entera.

Para terminar la primera implicación solo falta probar la desigualdad (4.16). Con este fin elegimos una función auxiliar real $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $h(s) = 1$ si $s < 1$ y $h(s) = 0$ cuando $s > 2$, y asociamos a cada $z \in \mathbb{C}^n$ no nulo la función

$$\phi_z(t) = e^{-iz \cdot t} h(|t||z| - r|z|) \quad \forall t \in \mathbb{R}^n,$$

que claramente verifica $\phi_z \in \mathcal{D}$. Como el soporte de u se encuentra en rB y $h(|t||z| - r|z|) = 1$ si $|t| \leq |z|^{-1} + r$, entonces se cumple

$$f(z) = u(\phi_z).$$

Por tener u orden N , hay una constante $\gamma_0 < \infty$ tal que $|u(\phi)| \leq \gamma_0 \|\phi\|_N$ para todo $\phi \in \mathcal{D}$, lo que nos da

$$|f(z)| \leq \gamma_0 \|\phi_z\|_N.$$

En el soporte de ϕ_z , que está contenido en la región $|t| \leq r + 2/|z|$, se verifica además

$$|e^{-iz \cdot t}| = e^{y \cdot t} \leq e^{2+r|\operatorname{Im}(z)|}.$$

Aplicando ahora la fórmula de Leibniz al producto que define ϕ_z para desarrollar $\|\phi_z\|_N$ y juntándolo con las dos desigualdades anteriores, resulta (4.16).

Pasemos a la implicación inversa. Como f satisface (4.16), es trivial que

$$|f(x)| \leq \gamma(1 + |x|)^N \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

por lo que la restricción de f a $\mathbb{R}^n$ define una distribución temperada, y su extensión a $\mathcal{S}'_n$ será la transformada de Fourier de una distribución temperada que llamamos u .

Consideremos de nuevo una función auxiliar $h \in \mathcal{D}$, en esta ocasión con soporte en B y tal que $\int_{\mathbb{R}^n} h(x) dm_x = 1$. Definiendo entonces $h_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-n} h(t/\varepsilon)$ para $\varepsilon > 0$ y

$$f_\varepsilon(z) = f(z) \hat{h}_\varepsilon(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}^n,$$

donde $\hat{h}_\varepsilon$ denota la función entera cuya restricción a $\mathbb{R}^n$ es la transformada de Fourier de h_ε (esto puede hacerse siempre que la función original tenga soporte compacto como, por ejemplo en este caso, $\hat{h}_\varepsilon(z) = \int_{\mathbb{R}^n} h_\varepsilon(t) e^{-iz \cdot t} dm_t$, que por el Teorema 4.33 es entera), resulta que la primera parte del Teorema 4.33 aplicado a h_ε nos dice que f_ε satisface (4.12) con $r + \varepsilon$ en lugar de r . La segunda parte del Teorema 4.33 implica además que $f_\varepsilon = \hat{\phi}_\varepsilon$ para algún $\phi_\varepsilon \in \mathcal{D}$ con soporte en $(r + \varepsilon)B$.

Consideremos $\psi \in \mathcal{S}_n$ tal que el soporte de $\hat{\psi}$ no corte a rB , por lo que $\hat{\psi}\phi_\varepsilon = 0$ para valores de ε suficientemente pequeños. Como $f\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\hat{h}_\varepsilon(x) = \hat{h}(\varepsilon x) \rightarrow 1$ de manera acotada en $\mathbb{R}^n$, concluimos que

$$\begin{aligned} u(\hat{\psi}) &= \hat{u}(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \psi(x) dm_x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) \psi(x) dm_x \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}_\varepsilon(x) \psi(x) dm_x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\psi}(x) \phi_\varepsilon(x) dm_x = 0, \end{aligned}$$

por lo que el soporte de u se encuentra en rB .

De todo esto deducimos que la función $z \rightarrow u(e_{-z})$ es entera, y como la igualdad (4.15) se da para todo $z \in \mathbb{R}^n$, entonces el Teorema 4.32 nos da la igualdad en $\mathbb{C}^n$. $\square$

4.4. LEMA DE SOBOLEV

Si Ω es un subconjunto abierto propio de $\mathbb{R}^n$ no tenemos definido ningún tipo de transformada de Fourier para funciones o distribuciones en ese dominio. Sin embargo, sí podemos usar técnicas de transformada de Fourier para resolver problemas de carácter local, como veremos en el lema que da nombre a la sección. En lo que sigue denotaremos $D_i^k = (\partial/\partial x_i)^k$.

DEFINICIÓN 4.35. Una función compleja medible f en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se denomina *localmente L^2 en Ω* si $\int_K |f(x)|^2 dm_x < \infty$ para cada compacto $K \subset \Omega$. Por otro lado, diremos que una distribución $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ es *localmente L^2* si hay una función g localmente L^2 en Ω tal que $u(\phi) = \int_\Omega g(x) \phi(x) dm_x$ para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

DEFINICIÓN 4.36. Dada una función f localmente L^2 en Ω y un multiíndice α , diremos que esta es *α -derivable en sentido débil* si la distribución $D^\alpha \Lambda_f$ es localmente L^2 , y a la función g localmente L^2 de la Definición 4.35 la denominaremos su *α -derivada débil* $D^\alpha f$.

TEOREMA 4.37. Supongamos que n, p y r son enteros con $n > 0$, $p \geq 0$ y

$$r > p + \frac{n}{2}. \quad (4.17)$$

Supongamos también que f es una función en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con derivadas débiles $D_i^k f$ para $i = 1, \dots, n$ y $k = 1, \dots, r$. Entonces hay una función $f_0 \in C^{(p)}(\Omega)$ tal que $f_0 = f$ en casi todo punto de Ω .

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis hay funciones g_{ik} localmente L^2 en Ω tales que

$$\int_{\Omega} g_{ik}(x)\phi(x)dm_x = (-1)^k \int_{\Omega} f(x)D_i^k \phi(x)dm_x \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, r. \quad (4.18)$$

Sea ω un abierto con adherencia K compacta en Ω , elijamos $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\psi = 1$ en K , y definamos F en $\mathbb{R}^n$ como

$$F(x) = \begin{cases} \psi(x)f(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega, \end{cases}$$

de modo que $F \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$. En Ω la fórmula de Leibniz (Teorema 3.29) nos da

$$D_i^r F = \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} D_i^{r-s} \psi D_i^s f = \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} D_i^{r-s} \psi g_{is},$$

mientras que en el complementario del soporte de ψ , Ω_0 , $D_i^r F = 0$. Ambas distribuciones coinciden en $\Omega \cap \Omega_0$, y por tanto $D_i^r F$ visto como distribución en $\mathbb{R}^n$ es una “distribución en L^2 ”, pues las funciones $D_i^{r-s} \psi g_{is}$ se encuentran en $L^2(\Omega)$.

El Teorema de Plancherel 4.16 aplicado a F y sus derivadas $D_1^r F, \dots, D_n^r F$ nos otorga

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{F}(y)|^2 dm_y < \infty$$

y

$$\int_{\mathbb{R}^n} y_i^{2r} |\hat{F}(y)|^2 dm_y < \infty \quad i = 1, \dots, n.$$

Además como

$$(1 + |y|)^{2r} < (2n + 2)^r (1 + y_1^{2r} + \dots + y_n^{2r}),$$

entonces por las acotaciones anteriores

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |y|)^{2r} |\hat{F}(y)|^2 dm_y < \infty.$$

Si J denota la integral anterior, y si σ_n representa el volumen de la esfera unidad $(n - 1)$ -dimensional en $\mathbb{R}^n$, la desigualdad de Schwarz [1] nos dice que

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |y|)^p |\hat{F}(y)| dm_y \right)^2 &\leq J \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |y|)^{2p-2r} dm_y \\ &= J \sigma_n \int_0^\infty (1 + t)^{2p-2r} t^{n-1} dt < \infty, \end{aligned}$$

pues $2p - 2r + n - 1 < -1$, con lo que queda probado que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |y|)^p |\hat{F}(y)| dm_y < \infty. \quad (4.19)$$

Definamos ahora

$$F_\omega(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{F}(y) e^{ix \cdot y} dm_y \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

función que por el tercer apartado del Teorema de Inversión 4.14 coincide con F en casi todo punto. Además, (4.19) implica que $y^\alpha \hat{F}(y)$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n)$ cuando $|\alpha| \leq p$, por lo que un argumento similar al empleado en la demostración del tercer apartado del Teorema 4.10 muestra entonces que $F_\omega \in C^{(p)}(\mathbb{R}^n)$. Tengamos en cuenta también que como f coincide con F en ω , coincide con F_ω en casi todo punto de ω .

Finalmente, si ω' es otro conjunto en las condiciones de ω , la demostración anterior nos otorga $F_{\omega'} \in C^{(p)}(\mathbb{R}^n)$ tal que $F_{\omega'} = f$ en casi todo punto de ω' , y por tanto $F_\omega = F_{\omega'}$ en $\omega \cap \omega'$. La deseada función f_0 puede obtenerse entonces definiéndola en Ω como $f_0(x) = F_\omega(x)$ si $x \in \omega$. $\square$

Capítulo 5

Aplicaciones a las Ecuaciones en Derivadas Parciales

El último capítulo lo vamos a destinar a ver algunas de las aplicaciones más relevantes de la Teoría de Distribuciones a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales. En este respecto, lo primero que trataremos será el concepto de solución fundamental, clave para encontrar soluciones globales de ecuaciones lineales con coeficientes constantes. De ahí pasaremos a introducir las ecuaciones de tipo elíptico y a mostrar un teorema de regularidad con importantes consecuencias. Y finalmente, como ejemplo de aplicación, haremos un breve repaso a la ecuación de Poisson, encontrando su solución fundamental y su función de Green, que será de gran utilidad para resolver ciertos problemas locales con condiciones de contorno homogéneas, como veremos en el caso de la bola unidad.

5.1. SOLUCIONES FUNDAMENTALES

En esta sección vamos a estudiar un tipo particular de solución de las ecuaciones en derivadas parciales con coeficientes constantes, es decir, de ecuaciones de la forma

$$P(D)u = v, \quad (5.1)$$

para un polinomio P no constante en n variables y coeficientes complejos, que nos otorga el operador diferencial $P(D)$ correspondiente (Notación 4.1), v representa normalmente una función dada, pero en esta ocasión permitiremos más generalmente que sea una distribución, y u es la distribución incógnita o solución.

DEFINICIÓN 5.1. Una distribución $E \in \mathcal{D}'$ se denomina una *solución fundamental* del operador $P(D)$ si es solución de la ecuación

$$P(D)E = \delta. \quad (5.2)$$

La clave de esta sección va a ser probar que una solución de este tipo siempre existe, resultado debido a Malgrange [7] y Ehrenpreis [5], quienes lo desarrollaron a la vez y de manera independiente.

En caso de existir una solución E al problema (5.2) y en caso de que v sea una distribución de soporte compacto, encontrar una solución al problema (5.1) es inmediato definiendo $u = E * v$, pues

$$P(D)u = (P(D)E) * v = \delta * v = v,$$

como afirma el Teorema 3.54. De hecho, todas las soluciones del problema (5.1) se pueden obtener añadiendo a la que hemos obtenido las soluciones del problema homogéneo $P(D)u = 0$. Mencionar también que esta forma de las soluciones nos da $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ siempre que $v \in \mathcal{D}$ (Teorema 3.50).

Si ν no tuviese soporte compacto, podríamos preguntarnos por la existencia de alguna condición sobre E que permitiese la correcta definición de $E * \nu$, como que este tenga soporte compacto. Sin embargo si esto fuese posible, la extensión canónica de $\hat{E}$ a $\mathbb{C}^n$ sería una función entera, y tomando la transformada de Fourier de (5.1) y empleando el Teorema 4.32 llegaríamos a que se cumple la igualdad $P(z)\hat{E}(z) = 1$ en $\mathbb{C}^n$, lo que solo puede suceder si ambas funciones son constantes.

NOTACIÓN 5.2. El toro n -dimensional $\mathbb{T}^n$ va a representar el conjunto

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1,$$

con $\mathbb{S}^1$ la circunferencia unidad del plano, que puede verse alternativamente como el subconjunto de puntos de $\mathbb{C}^n$ en la forma

$$\mathbb{T}^n = \left\{ w \in \mathbb{C}^n : w = (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}), \theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Como σ_w vamos a representar la medida de Haar (ver Teorema 5.14 de [11]) canónica de $\mathbb{T}^n$.

Comencemos viendo un lema previo a los teoremas de existencia.

LEMA 5.3. Si P es un polinomio de grado N en $\mathbb{C}^n$, existe una constante $A < \infty$ que solo depende de P , tal que

$$|f(z)| \leq Ar^{-N} \int_{\mathbb{T}^n} |(fP)(z + rw)| d\sigma_w \quad \forall z \in \mathbb{C}^n, r > 0 \quad (5.3)$$

para cada función entera f .

DEMOSTRACIÓN. Asumamos para empezar que F es una función entera en $\mathbb{C}$ y que

$$Q(\lambda) = c \prod_{i=1}^N (\lambda + a_i) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

para ciertas constantes $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$. Definiendo también $Q_0(\lambda) = c \prod_{i=1}^N (1 + \bar{a}_i \lambda)$, resulta $cF(0) = (FQ_0)(0)$, y como $|Q| = |Q_0|$ en el círculo unidad se sigue que

$$|cF(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(FQ)(e^{i\theta})| d\theta. \quad (5.4)$$

El polinomio P se puede describir como suma $P = P_0 + P_1 + \cdots + P_N$ de polinomios homogéneos P_j de grado j . Definamos entonces

$$\frac{1}{A} = \int_{\mathbb{T}^n} |P_N(w)| d\sigma_w,$$

integral positiva por tener P grado N , y si $z \in \mathbb{C}^n$ y $w \in \mathbb{T}^n$, definimos también

$$F(\lambda) = f(z + r\lambda w) \quad \text{y} \quad Q(\lambda) = P(z + r\lambda w) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

El coeficiente principal de Q es $r^N P_N(w)$, por lo que (5.4) nos da

$$r^N |P_N(w)| |f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(fP)(z + re^{i\theta} w)| d\theta.$$

Si integramos dicha desigualdad con respecto a σ_w obtenemos

$$|f(z)| \leq Ar^{-N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{\mathbb{T}^n} |(fP)(z + re^{i\theta} w)| d\sigma_w \right) d\theta,$$

y como la medida σ_w es invariante bajo el cambio de variables $w \rightarrow e^{i\theta} w$, la integral anterior es independiente de θ , lo que nos da (5.3). $\square$

TEOREMA 5.4. *Supongamos que P es un polinomio en n variables, que $v \in \mathcal{D}'$, y que v tiene soporte compacto. Entonces la ecuación*

$$P(D)u = v \quad (5.5)$$

tiene una solución con soporte compacto si y solo si hay una función entera g en $\mathbb{C}^n$ tal que

$$Pg = \hat{v}, \quad (5.6)$$

entendiendo en dicha ecuación que g hace referencia a la distribución que define su restricción a $\mathbb{R}^n$. De hecho, cuando se satisface esta condición, la solución con soporte compacto es única y su soporte cae en la envoltura convexa del soporte de v .

DEMOSTRACIÓN. Si partimos de una solución u con soporte compacto de (5.5), entonces la primera implicación del Teorema 4.34 nos dice que $g(z) = u(e_{-z})$ satisface (5.6).

Por otro lado, supongamos que existe una función entera g cumpliendo (5.6) y elijamos $r > 0$ tal que el soporte de v esté contenido en $\overline{rB}$. Por el Lema 5.3, la ecuación (5.6) implica

$$|g(z)| \leq A \int_{\mathbb{T}^n} |\hat{v}(z+w)| d\sigma_w \quad \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Por la primera implicación del Teorema 4.34 existen N y γ tales que

$$|\hat{v}(z+w)| \leq \gamma(1+|z+w|)^N e^{r|\operatorname{Im}(z+w)|}.$$

Además, hay constantes c_1 y c_2 que satisfacen

$$1+|z+w| \leq c_1(1+|z|)$$

y

$$|\operatorname{Im}(z+w)| \leq c_2 + |\operatorname{Im}(z)|$$

para todo $z \in \mathbb{C}^n$ y $w \in \mathbb{T}^n$, de donde se sigue

$$|g(z)| \leq B(1+|z|)^N e^{r|\operatorname{Im}(z)|} \quad \forall z \in \mathbb{C}^n$$

para cierta constante B . Por la desigualdad anterior y la segunda implicación del Teorema 4.34, $g(z) = u(e_{-z})$ para cierta distribución u con soporte en rB .

La unicidad de solución cuando se satisface (5.6) es sencilla, pues si hubiese otra solución con soporte compacto, encontraríamos otra función entera g' distinta satisfaciendo (5.6), lo cual es imposible.

En cuando a los soportes, el argumento anterior muestra que el soporte S_u cae en cada bola centrada en el origen conteniendo a S_v . Como (5.5) implica

$$P(D)(\tau_x u) = \tau_x v \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

la misma conclusión es cierta en el caso de $x + S_u$ y $x + S_v$. En conclusión, S_u se encuentra en la intersección de todas las bolas cerradas centradas en cualquier punto de $\mathbb{R}^n$ que contienen a S_v , y como esta intersección es precisamente la envoltura convexa de S_v , tenemos lo que queríamos. $\square$

TEOREMA 5.5. *Si P es un polinomio en $\mathbb{C}$ de grado N y si $r > 0$, entonces el operador diferencial $P(D)$ tiene una solución fundamental E que satisface*

$$|E(\psi)| \leq Ar^{-N} \int_{\mathbb{T}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(t+rw)| dm_t \right) d\sigma_w \quad \forall \psi \in \mathcal{D}, \quad (5.7)$$

con A la constante del Lema 5.3.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $r > 0$ y definamos

$$\|\psi\| = \int_{\mathbb{T}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(t + r w)| dm_t \right) d\sigma_w. \quad (5.8)$$

Antes de pasar al resultado principal estudiemos la siguiente afirmación:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\psi_j\| = 0 \quad \text{si } \psi_j \rightarrow 0 \text{ en } \mathcal{D}. \quad (5.9)$$

Comenzamos notando que $\hat{\psi}(t + w) = \widehat{e_{-w}\psi}(t)$, por lo que podemos reescribir

$$\|\psi\| = \int_{\mathbb{T}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{e_{-w}\psi}(t)| dm_t \right) d\sigma_w.$$

Si $\psi_j \rightarrow 0$ en $\mathcal{D}$, entonces todas las funciones ψ_j tienen su soporte contenido en algún compacto K . Como las funciones e_{rw} con $w \in \mathbb{T}^n$ están uniformemente acotadas en K , se sigue de la fórmula de Leibniz que

$$\|D^\alpha(e_{rw}\psi_j)\|_\infty \leq C(K, \alpha) \max_{\beta \leq \alpha} \|D^\beta \psi_j\|_\infty.$$

El lado derecho de la desigualdad anterior tiende a 0 para cualquier valor de α , y por tanto dado $\varepsilon > 0$ existe j_0 tal que para cada $j > j_0$

$$\|(I - \Delta)^n(e_{rw}\psi_j)\|_2 < \varepsilon \quad \forall w \in \mathbb{T}^n,$$

con $\Delta = D_1^2 + \dots + D_n^2$ el Laplaciano. Por el Teorema de Plancherel 4.16, la desigualdad anterior es equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(1 + |t|^2)^n \hat{\psi}_j(t + r w)|^2 dm_t < \varepsilon^2,$$

y teniendo ahora en cuenta la desigualdad de Cauchy-Schwarz [1] y la definición (5.8), resulta que $\|\psi_j\| \leq C\varepsilon$ para cada $j > j_0$, con

$$C^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |t|^2)^{-2n} dm_t < \infty.$$

Por tanto la afirmación es cierta.

Yendo al resultado central de teorema, escojamos $\phi \in \mathcal{D}$ y definamos

$$\psi = P(D)\phi, \quad (5.10)$$

de modo que $\hat{\psi} = P\hat{\phi}$ y como $\hat{\psi}$ y $\hat{\phi}$ tienen extensión entera deducimos que ψ determina ϕ . Esto último se debe a que, en caso de haber dos funciones ϕ_1 y ϕ_2 cumpliendo (5.10), entonces $P\hat{\phi}_1 = P\hat{\phi}_2$, o lo que es lo mismo, $0 = P(\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2)$, y esto último implica la igualdad $\hat{\phi}_1 = \hat{\phi}_2$ por tratarse de funciones enteras que se anulan en algún conjunto abierto acotado de $\mathbb{C}^n$, ya que P es un polinomio y su conjunto de ceros no es denso (Teorema de la Función Implícita [8] aplicado a $\mathbb{R}^{2n}$). En particular, por la linealidad de (5.10), $\phi(0)$ resulta ser un funcional lineal de ψ . Veamos que de hecho este funcional lineal puede ser continuo, o sea que podemos encontrar una distribución $u \in \mathcal{D}'$ satisfaciendo

$$u(P(D)\phi) = \phi(0) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}. \quad (5.11)$$

En ese caso, la distribución $E = \check{u}$ verificará

$$\begin{aligned} P(D)E(\phi) &= E(P(-D)\phi) = u\left(\widehat{P(-D)\phi}\right) \\ &= u(P(D)\check{\phi}) = \check{\phi}(0) = \phi(0) = \delta(\phi), \end{aligned}$$

y por tanto $P(D)E = \delta$, por lo que habremos terminado.

En efecto, el Lema 5.3 aplicado a $P\hat{\phi} = \hat{\psi}$ nos da

$$|\hat{\phi}(t)| \leq Ar^{-N} \int_{\mathbb{T}^n} |\hat{\psi}(t + r w)| d\sigma_w \quad \forall t \in \mathbb{R}^n.$$

Por el Teorema de Inversión 4.14 tenemos $\phi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(t) dm_t$, y por tanto la desigualdad anterior junto con (5.8) y (5.10) nos llevan a

$$|\phi(0)| \leq Ar^{-N} \|P(D)\phi\| \quad \forall \phi \in \mathcal{D}.$$

Sea $Y \subset \mathcal{D}$ el subespacio

$$Y = \{\psi \in \mathcal{D} : \psi = P(D)\phi, \phi \in \mathcal{D}\}.$$

Por la última desigualdad que hemos obtenido y el Teorema de Hahn-Banach 2.35, el funcional lineal definido en Y por $P(D)\phi \rightarrow \phi(0)$ se extiende a un funcional lineal u en $\mathcal{D}$ satisfaciendo (5.11) y

$$|u(\psi)| \leq Ar^{-N} \|\psi\| \quad \forall \psi \in \mathcal{D},$$

lo que junto a la afirmación (5.9) nos permite concluir que $u \in \mathcal{D}'$. □

5.2. ECUACIONES ELÍPTICAS

Si partimos de una función real $u \in C^{(2)}(\Omega)$, es decir definida en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dos veces diferenciable y con derivadas continuas, y dicha función satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

entonces es bien conocido que u es de hecho $C^\infty(\Omega)$. Esta clase de teoremas, que afirman que las soluciones de una determinada clase de ecuaciones diferenciales o en derivadas parciales tienen más regularidad de la que podríamos suponer de partida, reciben el nombre de *teoremas de regularidad*. Nuestro objetivo en esta sección va a ser probar un teorema de este tipo para las ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico, que definimos a continuación.

DEFINICIÓN 5.6. Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un entero $N \in \mathbb{N}$, funciones $f_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ para cada multiíndice α con $|\alpha| \leq N$, y con al menos una función f_α con $|\alpha| = N$ no nula. Definimos el *operador lineal diferencial* asociado como

$$L: \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega), \quad Lu = \sum_{|\alpha| \leq N} f_\alpha D_\alpha u,$$

que por simplicidad denotaremos como

$$L = \sum_{|\alpha| \leq N} f_\alpha D_\alpha.$$

El valor N va a ser el *orden* de L , y el operador

$$\sum_{|\alpha|=N} f_\alpha D_\alpha$$

la *parte principal* de L . Además, el polinomio

$$p(x, y) = \sum_{|\alpha|=N} f_\alpha(x) y^\alpha \quad \forall x \in \Omega, y \in \mathbb{R}^n$$

recibe el nombre de *polinomio característico* de L , y es un polinomio homogéneo de grado N en las variables $y = (y_1, \dots, y_n)$ con coeficientes en $C^\infty(\Omega)$.

DEFINICIÓN 5.7. Un operador diferencial L en las condiciones anteriores se denomina *elíptico* si $p(x, y) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$ e $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

OBSERVACIÓN 5.8. Notemos que la elipticidad se define en términos de la parte principal de L , los términos de menor orden no juegan ningún papel.

Un ejemplo sencillo de operador elíptico es el Laplaciano

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \quad (5.12)$$

pues su polinomio característico es $p(x, y) = -(y_1^2 + \cdots + y_n^2)$.

El resultado principal de esta sección involucra un tipo especial de distribuciones temperadas, introduzcámoslo.

DEFINICIÓN 5.9. Asociemos a cada $s \in \mathbb{R}$ la siguiente medida positiva μ_y^s en $\mathbb{R}^n$:

$$d\mu_y^s = (1 + |y|^2)^s dm_y.$$

OBSERVACIÓN 5.10. Notemos que si $f \in L^2(\mu_y^s)$ entonces f determina una distribución temperada (ver ejemplos de la Sección 4.2), y por tanto existe una distribución temperada u cuya transformada de Fourier es Λ_f .

DEFINICIÓN 5.11. Llamamos *espacio de Sobolev de orden s* al espacio vectorial

$$H^s = \{u \in \mathcal{D}' \text{ temperada} : \hat{u} = \Lambda_f, f \in L^2(\mu_y^s)\}$$

junto con la norma

$$\|u\|_s = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^2 d\mu_y^s \right)^{\frac{1}{2}}.$$

OBSERVACIÓN 5.12. H^2 es claramente isométricamente isomorfo a $L^2(\mu_y^s)$. De hecho, por el Teorema de Plancherel 4.16 y el primer apartado del Teorema 4.24, podemos identificar $H^0 = L^2(\mathbb{R}^n)$.

OBSERVACIÓN 5.13. Es interesante recordar la definición que se suele presentar de los espacios de Sobolev en otros libros como [1], donde vienen definidos para cada $m \in \mathbb{N}$ como

$$H_{\text{alt}}^m = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : D^\alpha \Lambda_f = \Lambda_{g_\alpha} \text{ con } g_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ para todo } |\alpha| \leq m\}.$$

Para ver que la definición que hemos presentado nosotros no es más que una generalización de esta, debemos mostrar que si $f \in H_{\text{alt}}^m$ entonces $\Lambda_f \in H^m$, o lo que es lo mismo, ver que $\hat{f} \in L^2(\mu_y^s)$ mostrando que $P\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para cada polinomio P de grado menor o igual a m . Sin embargo esto es sencillo, pues tomando transformadas de Fourier

$$D^\alpha \Lambda_f = \Lambda_{g_\alpha} \implies y^\alpha \Lambda_{\hat{f}} = \Lambda_{\hat{g}_\alpha} \implies P\Lambda_{\hat{f}} = \Lambda_g$$

con $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y P un polinomio cualquiera de grado menor o igual a m al ser α un multiíndice cualquiera con $|\alpha| \leq m$. Teniendo en cuenta ahora que $P\Lambda_{\hat{f}} = \Lambda_{P\hat{f}}$ y que la igualdad $\Lambda_{P\hat{f}} = \Lambda_g$ implica $P\hat{f} = g$ en casi todo punto (ver Corolario 4.24 [1]), resulta $P\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ como buscábamos.

También es importante mencionar que se verifican las inclusiones $H^s \subset H^t$ para cada $t < s$, por lo que la unión X de todos los espacios de Sobolev constituye un espacio vectorial.

DEFINICIÓN 5.14. Un operador lineal $\Lambda : X \rightarrow X$ se dice que tiene *orden* t con $t \in \mathbb{R}$ si la restricción de Λ a cada H^s es una aplicación continua de H^s en H^{s-t} .

OBSERVACIÓN 5.15. Notemos que en caso de tener Λ orden t , también tiene orden t' para cada $t' > t$.

Veamos algunas propiedades de los espacios de Sobolev que nos harán falta en esta sección.

TEOREMA 5.16. *Los espacios de Sobolev cumplen:*

1. *Cada distribución con soporte compacto pertenece a algún H^s .*
2. *Para cada $t \in \mathbb{R}$ la aplicación $u \rightarrow v$ dada por*

$$\hat{v}(y) = (1 + |y|^2)^{t/2} \hat{u}(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

donde identificamos $\hat{u}$ y $\hat{v}$ con sus correspondientes funciones asociadas, es un isometría lineal de H^s en H^{s-t} y se trata por tanto de un operador de orden t con inversa de orden $-t$.

3. *Si $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, la aplicación $u \rightarrow v$ con $\hat{v} = b\hat{u}$ es un operador de orden 0.*
4. *Para cada multiíndice α , el operador D_α es de orden $|\alpha|$.*
5. *Si $f \in \mathcal{S}_n$, entonces $u \rightarrow fu$ es un operador de orden 0.*

DEMOSTRACIÓN. En cuanto al primer apartado, si $u \in \mathcal{D}'$ tiene soporte compacto entonces la primera implicación del Teorema 4.34 muestra que

$$|\hat{u}(y)| \leq C(1 + |y|)^N \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

para ciertas constantes C y N . De aquí deducimos que $u \in H^s$ si $s < -N - n/2$.

El segundo y tercer apartado son obvios, y el cuarto se resume en que la relación

$$|\widehat{D_\alpha u}(y)| = |y^\alpha| |\hat{u}(y)| \leq (1 + |y|^2)^{|\alpha|/2} |\hat{u}(y)|$$

implica

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{D_\alpha u}(y)|^2 d\mu_y^{s-|\alpha|} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(y)|^2 d\mu_y^s,$$

luego $D_\alpha u \in H^{s-|\alpha|}$.

Centrémonos finalmente en el último apartado. La desigualdad central de la prueba es

$$(1 + |x + y|^2)^s \leq 2^{|s|} (1 + |x|^2)^s (1 + |y|^2)^{|s|} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}, \quad (5.13)$$

veámosla. El caso $s = 1$ es obvio y el caso $s = -2$ también remplazando $x \rightarrow x - y$ e $y \rightarrow -y$. El caso general se obtiene de estos dos elevándolo todo a la potencia $|s|$. Una vez probada, deducimos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h(x - y)|^2 d\mu_x^s \leq 2^{|s|} (1 + |y|^2)^{|s|} \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|^2 d\mu_x^s$$

para toda función medible h en $\mathbb{R}^n$.

Supongamos ahora $u \in H^s$, $f \in \mathcal{S}_n$ y $t > |s| + n/2$. Como $\hat{f} \in \mathcal{S}_n$, entonces $\hat{f} \in L^2(\mu_y^t)$. Definamos $\gamma = \mu_y^{|s|-t}(\mathbb{R}^n)$ y $F = |\hat{u}| * |\hat{f}|$, de modo que por el Teorema 4.29

$$|\widehat{fu}| = |\hat{u} * \hat{f}| \leq |\hat{u}| * |\hat{f}| = F. \quad (5.14)$$

Por la desigualdad de Schwarz

$$|F(x)|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(y)|^2 d\mu_y^t \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(x-y)|^2 d\mu_y^{-t} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

e integrando esta desigualdad en $\mathbb{R}^n$ con respecto a μ_x^s y empleando (5.13) llegamos a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x)|^2 d\mu_x^s \leq 2^{|s|} \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(y)|^2 d\mu_y^t \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(y)|^2 d\mu_y^s.$$

Finalmente, la desigualdad (5.14) aplicada a la desigualdad anterior nos da

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{fu}(y)|^2 d\mu_y^s \leq 2^{|s|} \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(y)|^2 d\mu_y^t \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(y)|^2 d\mu_y^s < \infty,$$

y por tanto $fu \in H^s$. □

DEFINICIÓN 5.17. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto. Una distribución $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se dice *localmente* H^s si a cada punto $x \in \Omega$ le podemos asignar una distribución $v \in H^s$ tal que $u = v$ en un entorno ω de x .

TEOREMA 5.18. Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $s \in \mathbb{R}$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. u es localmente H^s .
2. $\psi u \in H^s$ para cada $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, entendiendo ψu como su extensión canónica a $\mathbb{R}^n$.

Si además $s \in \mathbb{N}$, las afirmaciones anteriores también son equivalentes a

3. $D_\alpha u$ es localmente L^2 para cada $|\alpha| \leq s$.

DEMOSTRACIÓN. Analicemos cada equivalencia.

[1 $\Rightarrow$ 2] Supongamos que u es localmente H^s , y llamemos K al soporte de algún $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ dado. Como K es compacto, hay una cantidad finita de abiertos $\omega_i \subset \Omega$ cuya unión cubre K , y en los cuales u coincide con alguna distribución $v_i \in H^s$. Por el Teorema 3.34 hay funciones $\psi_i \in \mathcal{D}(\omega_i)$ tales que $\sum \psi_i = 1$ en K . Si ahora $\phi_i \in \mathcal{D}$ entonces

$$u(\psi\phi) = \sum_{i=1}^k u(\psi_i\psi\phi) = \sum_{i=1}^k v_i(\psi_i\psi\phi),$$

donde hemos tenido en cuenta que $\psi_i\psi\phi \in \mathcal{D}(\omega_i)$. En conclusión $\psi u = \sum_i \psi_i\psi v_i$, y por el quinto apartado del Teorema 5.16 deducimos $\psi_i\psi v_i \in H^s$, y por tanto que $u\psi \in H^s$.

[2 $\Rightarrow$ 1] Si ahora partimos del segundo apartado, si $x \in \Omega$, y si $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ vale 1 en un entorno ω de x , entonces $u = \psi u$ en ω . Como además $\psi u \in H^s$ por hipótesis, podemos concluir que u es localmente H^s .

[2 $\Rightarrow$ 3] Supongamos $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, de modo que $\psi u \in H^s$ y $D_\alpha(\psi u) \in H^{s-|\alpha|}$ por el cuarto apartado del Teorema 5.16. Si $|\alpha| \leq s$ entonces $H^{s-|\alpha|} \subset H^0 = L^2(\mathbb{R}^n)$, es decir $D_\alpha(\psi u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Elijiendo ahora para cada $x \in \Omega$ una función ψ que valga 1 en un entorno de dicho punto, deducimos que $D_\alpha u$ es localmente L^2 en Ω .

[3 $\Rightarrow$ 2] Finalmente, asumamos que $D_\alpha u$ es localmente L^2 para $|\alpha| \leq s$ y fijemos $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. La fórmula de Leibniz para distribuciones (Teorema 3.29) muestra que $D_\alpha(\psi u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ si $|\alpha| \leq s$, y por tanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} |y^\alpha|^2 |\widehat{\psi u}(y)|^2 dm_y < \infty.$$

Si $s \in \mathbb{N}$ la acotación anterior la podemos particularizar con los monomios $y_1^s, \dots, y_n^s$ en el lugar de y^α , y por tanto con un razonamiento similar al del Teorema 4.37 logramos

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |y|^2)^s |\widehat{\psi u}(y)|^2 dm_y < \infty,$$

lo que nos dice que $\psi u \in H^s$. □

Aplicando esto a las ecuaciones de tipo elíptico tenemos el siguiente resultado de regularidad.

TEOREMA 5.19. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto, L un operador diferencial elíptico de orden N con coeficientes asociados $f_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ para cada $|\alpha| \leq N$ de forma que f_α es constante si $|\alpha| = N$, y sean $u, v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ con v localmente H^s tales que*

$$Lu = v.$$

Entonces u es localmente H^{s+N} .

DEMOSTRACIÓN. Fijemos un punto $x \in \Omega$, sea $B_0 \subset \Omega$ una bola cerrada centrada en x , y sea $\phi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ valiendo 1 en algún abierto conteniendo a B_0 . Por el primer apartado del Teorema 5.16, $\phi_0 u \in H^t$ para algún valor de t , y teniendo en cuenta que H^t se vuelve más grande según decrece t vamos a suponer que $t = s + N - k$ con $k \in \mathbb{N}$ y $s \in \mathbb{R}$. Elijamos ahora k bolas cerradas $B_1, \dots, B_k$ centradas en x y conteniendo cada una la anterior, es decir

$$B_k \subset \dots \subset B_1 \subset B_0.$$

Elijamos también funciones $\phi_1, \dots, \phi_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ cumpliendo que $\phi_i = 1$ en algún abierto conteniendo a B_i y $\phi_i = 0$ fuera de B_{i-1} . Como $\phi_0 u \in H^t$, el Lema 5.20 implica

$$\phi_1 u \in H^{t+1}, \dots, \phi_k u \in H^{t+k},$$

lo que conduce a la conclusión de que u es localmente H^{s+N} pues $t + k = s + N$ y $\phi_k = 1$ en B_k . □

Probemos el lema auxiliar antes mencionado, que es donde realmente vamos a hacer uso de toda la artillería que nos otorga las hipótesis del Teorema 5.19.

LEMA 5.20. *Si a las hipótesis del Teorema 5.19 le añadimos $\psi u \in H^t$ para algún $t \leq s + N - 1$ y algún $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ valiendo 1 en un abierto conteniendo el soporte de cierta función $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, entonces $\phi u \in H^{t+1}$.*

DEMOSTRACIÓN. Comencemos mostrando que $L(\phi u) \in H^{t-N+1}$. En efecto, consideremos la distribución

$$\Lambda = L(\phi u) - \phi Lu = L(\phi u) - \phi v.$$

Al caer su soporte en el de ϕ , podemos sustituir u por ψu sin cambiar Λ , y desarrollando explícitamente el operador L podemos escribir

$$\Lambda = L(\phi \psi u) - \phi L(\psi u) = \sum_{|\alpha| \leq N} f_\alpha [D_\alpha(\phi \psi u) - \phi D_\alpha(\psi u)].$$

Si aplicamos la fórmula de Leibniz a $D_\alpha(\phi \cdot \psi u)$ vemos que las derivadas de orden N de ψu se cancelan en la igualdad anterior. Como consecuencia, Λ resulta una combinación lineal (con coeficientes en $\mathcal{D}$) de derivadas de ψu hasta orden $N - 1$. Además por ser $\psi u \in H^t$, el cuarto y quinto apartado del Teorema 5.16 implican $\Lambda \in H^{t-N+1}$. El Teorema 5.18 también nos da $\phi v \in H^s$, y como $t - N + 1 \leq s$, resulta $\phi v \in H^{t-N+1}$, lo que nos permite concluir precisamente $L(\phi u) \in H^{t-N+1}$.

Visto esto, recordamos que L es un operador elíptico, por lo que su polinomio característico

$$p(y) = \sum_{|\alpha|=N} f_\alpha y^\alpha \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

no se anula en ningún punto salvo en $y = 0$. Definamos las funciones

$$q(y) = |y|^{-N} p(y), \quad r(y) = (1 + |y|)^N q(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

y los operadores

$$\widehat{Qw} = q\hat{w}, \quad \widehat{Rw} = r\hat{w}, \quad Sw = \sum_{|\alpha| < N} \psi f_\alpha D_\alpha w \quad \forall w \in X,$$

siendo X la unión de todos los espacios de Sobolev.

Al ser p un polinomio homogéneo de grado N , $q(\lambda y) = q(y)$ si $\lambda > 0$, y juntando esto con que p solo se anula en el origen, deducimos que q nunca se anula y que solo depende de sus valores en la esfera unidad, lo que por compacidad implica la acotación de q y $1/q$. En cuanto a sus operadores correspondientes, el tercer apartado del Teorema 5.16 afirma que Q y Q^{-1} son de orden 0.

Gracias a que $(1 + |y|^2)^{N/2}(1 + |y|^N)$ y su inverso son funciones acotadas en $\mathbb{R}^n$, se sigue del párrafo anterior junto con el segundo y tercer apartado del Teorema 5.16 que R es un operador de orden N con inversa de orden $-N$.

Por último, en cuanto al operador S basta observar que $\psi f_\alpha \in \mathcal{D}$ y los apartados cuarto y quinto del Teorema 5.16 para concluir que tiene orden $N - 1$.

Ahora $p = r - q$, y como p tiene coeficientes constantes f_α , entonces

$$\sum_{|\alpha|=N} \widehat{f_\alpha D_\alpha w} = p\hat{w} = (r - q)\hat{w} = \widehat{Rw} - \widehat{Qw} \quad \forall w \in X.$$

De aquí se sigue la igualdad

$$(R - Q + S)(\phi u) = L(\phi u). \quad (5.15)$$

Como $\psi u \in H^t$ y $\phi\psi = \phi$, el quinto apartado del Teorema 5.16 implica $\phi u = \phi\psi u \in H^t$, luego

$$(Q - S)(\phi u) \in H^{t-N+1}$$

gracias a que Q tiene orden 0 y S orden $N - 1 \geq 0$. Finalmente, del contenido anterior, de la afirmación $L(\phi u) \in H^{t-N+1}$ que probamos al comienzo, y de la igualdad 5.15 llegamos a

$$R(\phi u) \in H^{t-N+1},$$

lo que teniendo en cuenta que R^{-1} tiene orden $-N$, nos otorga $\phi u \in H^{t+1}$. $\square$

COROLARIO 5.21. Si L es un operador diferencial elíptico de orden N en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y para cada multiíndice $|\alpha| = N$ f_α es constante, entonces toda solución u del problema $Lu = v$ pertenece a $C^\infty(\Omega)$ si $v \in C^\infty(\Omega)$. En particular, cada solución del problema homogéneo $Lu = 0$ pertenece a $C^\infty(\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN. Si $v \in C^\infty(\Omega)$ entonces $\psi v \in \mathcal{D}$ para cada $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En consecuencia, v es localmente H^s para cada valor de s , lo que implica por el Teorema de regularidad 5.19 que u también es localmente H^s para cada s . Se sigue entonces del tercer apartado del Teorema 5.18 y del Teorema 4.37 lo que queremos. $\square$

OBSERVACIÓN 5.22. Merece la pena comentar que, en el caso de operadores diferenciales elípticos en $\mathbb{R}^n$ con coeficientes constantes, las soluciones fundamentales E satisfacen la igualdad $LE = \delta$, que en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ se reduce a $LE = 0$ (recordemos que δ_p coincide con la distribución nula en $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$). Por tanto, el corolario anterior nos dice que E se puede describir como una función infinitamente diferenciable en todo punto salvo en el origen, donde aparece una singularidad.

5.3. ECUACIÓN DE POISSON Y FUNCIONES DE GREEN

La *ecuación de Poisson* es una ecuación en derivadas parciales de tipo elíptico ampliamente conocida y empleada en áreas de la Física como el Electromagnetismo o la Mecánica Clásica, pues describe adecuadamente el comportamiento de potenciales estáticos como el electrostático o el gravitatorio. Dicha ecuación es

$$\Delta u = \nu, \quad (5.16)$$

con Δ el Laplaciano (5.12). Habitualmente, ν representa la densidad de carga o de masa que genera el campo. En el caso particular de ausencia de generadores, $\nu = 0$, se denomina *ecuación de Laplace*.

Las soluciones clásicas de la ecuación de Laplace, las funciones armónicas, son conocidas y sabemos que presentan buenas propiedades como que son funciones de clase infinito [6]. De hecho, algunas de ellas como las funciones afines, son bastante fáciles de deducir. Sin embargo encontrar una solución en el caso no homogéneo no parece tan evidente, es por ello que vamos a dedicar esta sección a encontrar una solución particular de este empleando para ello la herramienta que vimos en la primera sección, la solución fundamental, e introduciendo una nueva para problemas de naturaleza local, las funciones de Green.

Como dijimos en la Observación 5.22, la solución fundamental es de clase infinito y satisface la ecuación de Laplace en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, por lo que vamos a empezar obteniendo alguna de sus soluciones. Al haber quitado el origen y teniendo en cuenta la simetría esférica del Laplaciano Δ , parece razonable probar con soluciones radiales en la forma

$$E_n(x) = \psi(r), \quad r = |x|.$$

En este caso, la ecuación de Laplace resulta

$$\psi''(r) + \frac{n-1}{r}\psi'(r) = 0,$$

de donde obtenemos las funciones

$$\psi(r) = \begin{cases} C \ln r & \text{si } n = 2, \\ \frac{C}{2-n} r^{2-n} & \text{si } n > 2 \end{cases} + \text{cte.} \quad (5.17)$$

TEOREMA 5.23. *La función*

$$E_n : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad E_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_1} \ln |x| & \text{si } n = 2, \\ -\frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}} |x|^{2-n} & \text{si } n \neq 2, \end{cases} \quad (5.18)$$

con ω_{n-1} el área de la esfera unidad $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, es localmente integrable, de clase infinito, y es la solución fundamental del Laplaciano.

DEMOSTRACIÓN. Comencemos recordando un par de identidades de Green [2] que nos serán de utilidad:

$$\int_{\Omega} \nu(x) \Delta u(x) dx + \int_{\Omega} \nabla \nu(x) \cdot \nabla u(x) dx = \int_S \nu \partial_{\nu} u d\sigma; \quad (5.19)$$

y

$$\int_{\Omega} \nu(x) \Delta u(x) dx - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla \nu(x) dx = \int_S (\nu \partial_{\nu} u - u \partial_{\nu} \nu) d\sigma, \quad (5.20)$$

siendo Ω un abierto con superficie frontera S , $\partial_{\nu} \phi$ la derivada normal de ϕ con respecto a S , y la integral de la derecha la integral de superficie con respecto a S .

Pasando a la demostración del teorema, integrando en coordenadas esféricas es sencillo ver que E_n es integrable en la bola unidad de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (y por tanto localmente integrable), y por otro lado su diferenciabilidad es trivial.

Ahora, para cada $\varphi \in \mathcal{D}$ queremos probar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} E_n(x) \Delta \varphi(x) dx = \varphi(0).$$

La forma de hacerlo va a consistir en suprimir de $\mathbb{R}^n$ la bola cerrada $r\bar{B}$ de radio $r > 0$, pues E_n es singular en $x = 0$, en denotar $\Omega_r = \{x \in \mathbb{R}^n : r < |x| < R\}$ para algún valor de R tal que φ tenga soporte en $\{|x| < R\}$, y en mostrar que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Omega_r} E_n(x) \Delta \varphi(x) dx = \varphi(0).$$

En efecto, para empezar aplicamos la identidad de Green (5.20) con $v(x) = E_n(x) = \psi(r)$ para la función (5.17) y $u = \varphi$. Como $\Delta v = 0$ en Ω_r y φ se anula en un entorno del exterior de la frontera de Ω_r , tenemos

$$\int_{\Omega_r} E_n(x) \Delta \varphi(x) dx = \int_{\{|x|=R\}} (E_n \partial_\nu \varphi - \varphi \partial_\nu E_n) d\sigma.$$

En la superficie $\{|x| = R\}$ el vector normal es radial y $E(x) = \psi(r)$. En consecuencia, usando de nuevo las identidades de Green con $v = 1$ y $u = \varphi$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r} E_n(x) \Delta \varphi(x) dx &= \psi(r) \int_{\{|x|=R\}} \partial_\nu \varphi d\sigma + \psi'(r) \int_{\{|x|=R\}} \varphi d\sigma \\ &= -\psi(r) \int_{rB} \Delta \varphi dx + Cr^{1-n} \int_{\{|x|=R\}} \varphi d\sigma. \end{aligned}$$

El volumen de la bola de radio r , rB , es Ar^n para cierta constante $A > 0$, y además $\lim_{r \rightarrow 0} r^n \psi(r) = 0$, por lo que gracias a la continuidad de φ

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Omega_r} E_n(x) \Delta \varphi(x) dx = C\omega_{n-1} \varphi(0),$$

y tomando $C = 1/\omega_{n-1}$ obtenemos la igualdad deseada. $\square$

A partir de lo que acabamos de mostrar, una posible solución del problema (5.16) en $\mathbb{R}^n$ vendría dada por $u = \Lambda_{E_n} * v$, tal como explicamos al comienzo del capítulo.

La siguiente pregunta que nos planteamos ahora es cómo encontrar una solución local de (5.16), entendiendo por local una solución definida en un dominio abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y satisfaciendo ciertas condiciones de contorno homogéneas sobre el borde topológico $\partial\Omega$. Esto requiere en particular que la solución $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ sea de tipo funcional, es decir $u = \Lambda_f$ con f anulándose en $\partial\Omega$. Una posible forma de resolver esto es introduciendo una nueva herramienta.

DEFINICIÓN 5.24. Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y un operador diferencial L en Ω , llamamos *función de Green* del operador L a una función G cumpliendo

$$G: \bar{\Omega} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \Lambda_{G(\cdot, \xi)} \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{y} \quad L\Lambda_{G(\cdot, \xi)} = \delta_\xi \quad \forall \xi \in \Omega.$$

OBSERVACIÓN 5.25. Notemos que si E es la solución fundamental de un operador diferencial con coeficientes constantes L y $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, entonces la aplicación $G(x, \xi) = E(x - \xi)$ es función de Green de L en $\Omega = \mathbb{R}^n$ pues

$$LG(\cdot, \xi) = L\tau_\xi E = \tau_\xi LE = \tau_\xi \delta = \delta_\xi.$$

Como ejemplo de aplicación de esta nueva herramienta a nuestra ecuación, vamos a resolver el siguiente problema, llamado *problema de Dirichlet* en el abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con condiciones de contorno homogéneas:

$$\begin{cases} \Delta \Lambda_u = \Lambda_v & \text{en } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

aunque nosotros nos vamos a centrar solo en el caso de la bola unidad $\Omega = B$. Los requisitos para la función de Green, G , van a ser en general:

$$\begin{cases} \Delta \Lambda_{G_\xi} = \delta_\xi & \text{en } \Omega, \\ G_\xi|_{\partial\Omega} = 0, \\ G_\xi \in C(\overline{\Omega}) \end{cases}$$

para cada $\xi \in \Omega$, donde $G_\xi(x) = G(x, \xi)$. Notemos que a la condición de definición le hemos añadido la continuidad y la condición de contorno $G_\xi = 0$ en la frontera. La idea al hacer esto es definir la solución como

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, \xi) v(\xi) d\xi, \quad (5.21)$$

de modo que satisfaga trivialmente $u(y) = 0$ para cada $y \in \partial\Omega$.

Una estrategia que puede resultar de utilidad para encontrar dicha función de Green (y que será la que empleemos aquí), consiste en resolver el problema de Dirichlet auxiliar:

$$\begin{cases} \Delta g_\xi = 0 & \text{en } \Omega, \\ g_\xi(y) = E_n(y - \xi) & y \in \partial\Omega, \\ g_\xi \in C(\overline{\Omega}) \end{cases}$$

para cada $\xi \in \Omega$, y con E_n según (5.18), pues entonces definiendo

$$G(x, \xi) = E_n(x - \xi) - g_\xi(x)$$

obtenemos lo que queremos.

Pasando a resolver el problema, vamos a llamar $E(x, y) = E(y, x) = E_n(x - y)$ y a notar que si $x \neq 0$, la función

$$g_x = |x|^{2-n} E\left(\frac{x}{|x|^2}, \cdot\right)$$

es armónica en $\mathbb{R}^n \setminus \{0, x/|x|^2\}$. En el borde ∂B afirmamos que $g_x(y) = E(x, y)$, veámoslo.

En efecto, si $n > 2$ y $|y| = 1$ entonces

$$E(x, y) - g_x(y) = -\frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}} \left(|x - y|^{2-n} - |x|^{-1}x - |x|y|^{2-n} \right),$$

y

$$\begin{aligned} |x - y|^2 &= |x|^2 - 2x \cdot y + 1 \\ &= |x|y|^2 - 2|x|^{-1}x \cdot (|x|y) + |x|^{-1}x|^2 \\ &= |x|y - |x|^{-1}x|^2, \end{aligned}$$

luego nuestra afirmación es correcta.

En el caso $n = 2$

$$E(x, y) - g_x(y) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln|x - y| - \ln|x|^{-1}x - |x|y| \right),$$

por lo que también se cumple.

Definiendo entonces $G(x, y) = E(x, y) - g_x(y)$ obtenemos la función de Green deseada.

Concluamos la sección probando que la función (5.21) define, efectivamente, una solución del problema de Dirichlet original. Para empezar es importante notar que

$$\begin{aligned}\Delta \Lambda_u(\phi) &= \int_{\Omega} u(x) \Delta \phi(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \left[\int_{\Omega} G(x, \xi) v(\xi) d\xi \right] \Delta \phi(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \underbrace{\left[\int_{\Omega} G(x, \xi) \Delta \phi(x) dx \right]}_I v(\xi) d\xi \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),\end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta el Teorema de Fubini [1] para la última igualdad. Como nuestro objetivo es mostrar la igualdad $\Delta \Lambda_u = \Lambda_v$ en Ω , el problema quedaría resuelto si $I = \phi(\xi)$, veámoslo. Separamos

$$I = \underbrace{\int_{\Omega} E_n(x - \xi) \Delta \phi(x) dx}_{I_1} - \underbrace{\int_{\Omega} g_{\xi}(x) \Delta \phi(x) dx}_{I_2},$$

y empleando (5.20) llegamos a

$$I_2 = \int_{\Omega} \phi(x) \Delta g_{\xi}(x) dx - \int_{\partial \Omega} (g_{\xi} \partial_{\nu} \phi - \phi \partial_{\nu} g_{\xi}) d\sigma = 0,$$

donde hemos tenido en cuenta que la primera integral se anula por ser $\Delta g_{\xi} = 0$ en Ω , y la segunda porque ϕ tiene soporte compacto. En cuanto a la integral restante, el análisis es un poco más complejo:

$$I_1 = \underbrace{\int_{\Omega \setminus B_{\delta}(\xi)} E_n(x - \xi) \Delta \phi(x) dx}_{I_{11}} + \underbrace{\int_{B_{\delta}(\xi)} E_n(x - \xi) \Delta \phi(x) dx}_{I_{12}},$$

siendo $B_{\delta}(\xi)$ la bola de radio δ centrada en ξ , analicemos cada sumando en el límite $\delta \rightarrow 0$ a ver si obtenemos $\phi(\xi)$. Si suponemos $n \geq 3$, entonces

$$|I_{12}| \leq \int_{B_{\delta}(\xi)} E_n(x - \xi) |\Delta \phi(x)| dx \leq \text{cte} \cdot \delta^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

En cuanto al otro sumando, conviene recordar primero que en la superficie de una bola centrada en el origen y radio δ

$$\partial_{\nu} E_n(x) = \nabla E_n(x) \cdot \nu(x) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \frac{x}{|x|^n} \cdot \frac{x}{|x|} = \frac{1}{\omega_{n-1}} |x|^{1-n} = \frac{1}{\text{área}(\partial B_{\delta}(0))}.$$

Analizando ahora I_{11} , empleamos (5.20) de nuevo para obtener

$$I_{11} = \int_{\Omega \setminus B_{\delta}(\xi)} \phi(x) \Delta E_n(x - \xi) dx + \int_{\partial(\Omega \setminus B_{\delta}(\xi))} (\phi \partial_{\nu} E_n - E_n \partial_{\nu} \phi) d\sigma = \int_{\partial B_{\delta}(\xi)} (\phi \partial_{\nu} E_n - E_n \partial_{\nu} \phi) d\sigma,$$

donde hemos hecho uso de que $\Delta E_n = 0$ fuera del origen, por lo que la primera integral se anula, y de que ϕ tiene soporte compacto. En cuanto a la segunda debemos detenernos un segundo y observar que

$$\left| \int_{\partial B_{\delta}(\xi)} E_n \partial_{\nu} \phi d\sigma \right| \leq \text{cte} \cdot \delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0,$$

y que

$$\int_{\partial B_{\delta}(\xi)} \phi \partial_{\nu} E_n d\sigma = \frac{1}{\text{área}(\partial B_{\delta}(\xi))} \int_{\partial B_{\delta}(\xi)} \phi d\sigma \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \phi(\xi),$$

lo que nos otorga justo lo que queríamos. El caso $n = 2$ es completamente análogo.

Apéndice A

Resultados de compacidad

A.1. TEOREMA DE ALEXANDER Y TYCHONOFF

Comenzamos con un resultado de compacidad en la topología producto.

DEFINICIÓN A.1. Una colección de abiertos $\mathcal{S}$ de un espacio topológico X tal que la colección de todas las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ constituye una base de X , se denomina una *subbase* de X . Además, cualquier subcolección de $\mathcal{S}$ cuya unión sea X se denomina un $\mathcal{S}$ -recubrimiento.

TEOREMA A.2 (SUBBASE DE ALEXANDER). *Sea $\mathcal{S}$ una subbase de un espacio topológico X . Si cada $\mathcal{S}$ -recubrimiento de X tiene un subrecubrimiento finito, entonces X es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Consultar [11]. □

TEOREMA A.3 (TYCHONOFF). *Si X es el producto cartesiano de una colección de espacios topológicos compactos $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$, entonces X es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Si π_α denota la proyección canónica de X en X_α , sabemos que la topología producto es la más débil que hace cada una de estas proyecciones continuas. Sea $\mathcal{S}_\alpha$ la colección de abiertos $\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ con V_α abierto en X_α , y $\mathcal{S}$ la unión de todos los $\mathcal{S}_\alpha$, de modo que constituye una subbase de X .

Consideramos un $\mathcal{S}$ -recubrimiento Γ de X y definimos $\Gamma_\alpha = \Gamma \cap \mathcal{S}_\alpha$. Si suponemos que ningún Γ_α recubre X , entonces hay una correspondencia que asigna a cada α un punto $x_\alpha \in X_\alpha$ tal que Γ_α no cubre ningún punto de $\pi_\alpha^{-1}(x_\alpha)$. Si consideramos entonces el vector $x \in X$ tal que $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$ para todo $\alpha \in A$, es claro que x no está cubierto por Γ , lo que nos lleva a contradicción con la condición de recubrimiento.

Esto nos permite afirmar que existe al menos un Γ_α recubriendo X , y como X_α es compacto, alguna subcolección finita de Γ_α también. Por último, $\Gamma_\alpha \subset \Gamma$, por lo que Γ tiene un subrecubrimiento finito, y el Teorema A.2 implica entonces la compacidad de X . □

A.2. TEOREMA DE ASCOLI

Lo siguiente que queremos ver es cómo se relacionan la compacidad con la acotación total, y una condición suficiente para probar esta última.

DEFINICIÓN A.4. Dado un subconjunto E de un espacio métrico X , decimos que E está *totalmente acotado* si se encuentra recubierto por una cantidad finita de bolas de radio ε para cada $\varepsilon > 0$.

OBSERVACIÓN A.5. En el caso en que X sea un espacio vectorial topológico metrizable, la Definición 2.7 y esta coinciden.

TEOREMA A.6. Si K es un subconjunto cerrado de un espacio métrico completo X , entonces las siguientes tres propiedades son equivalentes:

1. K es compacto.
2. Cada subconjunto infinito de K tiene un punto de acumulación en K .
3. K está totalmente acotado.

DEMOSTRACIÓN. Procedamos con una demostración en cadena:

$1 \Rightarrow 2$ Si $E \subset K$ es infinito y no tiene ningún punto de acumulación en K , hay un recubrimiento abierto $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de K tal que cada V_α contiene, como mucho, un punto de E . Sin embargo esto implica que $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ no tiene ningún subrecubrimiento finito de K , contradicción.

$2 \Rightarrow 3$ Denotemos por d la métrica de X y fijemos $\varepsilon > 0$. Consideramos $x_1 \in K$ y, a continuación, buscamos $x_2 \in K$ tal que $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. Si no existe dicho x_2 entonces hemos terminado, en caso contrario repetimos el proceso exigiendo que $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ para $i, j = 1, 2$ y 3. Dicho proceso debe terminar en una cantidad finita de pasos, pues en caso contrario nos encontraríamos en las hipótesis de 2, que nos lleva a contradicción. En consecuencia, logramos una cantidad finita de puntos tales que las bolas de radio ε en torno a ellas recubren K , lo que implica la acotación total.

$3 \Rightarrow 1$ Supongamos que K no es compacto, de modo que existe un recubrimiento abierto Γ que no admite un subrecubrimiento finito. Por acotación total, K se puede escribir como unión de una cantidad finita de cerrados de diámetro ≤ 1 , y por lo que acabamos de suponer, uno de estos cerrados, que denotaremos por K_1 , no puede recubrirse con una cantidad finita de elementos de Γ . Repitiendo el proceso con K_1 pero con cerrados de diámetro $1/2$ y procediendo por inducción, obtenemos una sucesión de cerrados $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cumpliendo:

- $K \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots$;
- el diámetro de K_n es menor o igual que $1/n$;
- y ningún K_n se puede recubrir por una cantidad finita de elementos de Γ .

Eligiendo ahora $x_n \in K_n$, obtenemos una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy, que por completitud converge a un punto $x \in \bigcap K_n$. Como x pertenece a algún elemento de Γ y K_n está contenido en dicho elemento para algún valor de n por la condición sobre el diámetro, esto nos lleva a contradicción con que no se pueda recubrir por una cantidad finita de elementos de Γ . En consecuencia K es compacto. $\square$

TEOREMA A.7 (ASCOLI). Supongamos que X es un espacio topológico compacto, $C(X)$ el espacio de Banach de las funciones complejas continuas sobre X con la norma del supremo, y $\Phi \subset C(X)$ cumpliendo las siguientes dos condiciones:

1. Acotación puntual: $\sup\{|f(x)| : f \in \Phi\} < \infty$ para cada $x \in X$;
2. Equicontinuidad: dado $\varepsilon > 0$, todo $x \in X$ tiene un entorno V tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ para cada $y \in V$ y $f \in \Phi$.

Entonces Φ está totalmente acotado.

DEMOSTRACIÓN. Dado $\varepsilon > 0$, la equicontinuidad junto con la compacidad de X muestran que existen puntos $x_1, \dots, x_n \in X$ con entornos $V_1, \dots, V_n$ tales que $X = \bigcup V_i$ y

$$|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon \quad \forall f \in \Phi, x \in V_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

Si aplicamos ahora la condición de acotación puntual en los puntos x_i y tenemos en cuenta la desigualdad anterior, se obtiene la acotación uniforme de Φ por cierta constante $M > 0$:

$$\sup\{|f(x)| : x \in X, f \in \Phi\} = M < \infty.$$

Definimos el disco complejo de radio M como

$$D_M = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq M\}$$

y asociamos a cada $f \in \Phi$ el punto

$$p(f) = (f(x_1), \dots, f(x_n)) \in D_M^n \subset \mathbb{C}^n.$$

Por ser D_M^n una unión finita de conjuntos de diámetro menor que ε , existen funciones $f_1, \dots, f_m \in \Phi$ tales que $p(f)$ dista de algún $p(f_k)$ menos de ε . Esto significa que

$$|f(x_i) - f_k(x_i)| < \varepsilon \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Cada $x \in X$ cae en algún V_i , y para este valor de i

$$|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |f_k(x) - f_k(x_i)| < \varepsilon.$$

Por tanto, $|f(x) - f_k(x)| < 3\varepsilon$ para cada $x \in X$.

Las bolas de radio 3ε centradas en $f_1, \dots, f_m$ cubren entonces todo Φ , y por la arbitrariedad de ε logramos la acotación total buscada. $\square$

Bibliografía

- [1] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011.
- [2] J. Cerdà. *Linear Functional Analysis*. American Mathematical Society, 2010.
- [3] K. Conrad. *L^p -Spaces for $0 < p < 1$* . <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/analysis/lpspace.pdf>.
Expository papers: <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/>.
- [4] M. M. Day. *The Spaces L^p with $0 < p < 1$* . Bull. Amer. Math. Soc. 46, 816–823, 1940.
- [5] L. Ehrenpreis. *Solutions of some problems of division I*. Amer. J. Math. 76, 883–903, 1954.
- [6] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Second Edition, 2010.
- [7] B. Malgrange. *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 6, 271–355, 1956.
- [8] J.E. Marsden y A.J. Tromba. *Cálculo Vectorial*. Pearson, 1998.
- [9] R. E. Megginson. *An Introduction to Banach Space Theory*. Springer, 1998.
- [10] J. Munkres. *Topology*. Pearson, Second Edition, 2000.
- [11] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 1991.
- [12] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, Third edition, 1987.