

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Propiedades funcionales de los espacios
de Lorentz y desigualdades de Hardy



Alberto Caldera Morante

Trabajo dirigido por
F. Javier Soria de Diego

Curso académico 2024/25

Máster en Matemáticas Avanzadas, UCM

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es estudiar la interrelación entre las desigualdades clásicas de Hardy en el cono de funciones positivas y decrecientes (que son equivalentes a las acotaciones del operador maximal de Hardy-Littlewood en los espacios de Lorentz), las propiedades funcionales de estos espacios y la caracterización de los pesos que permiten estas acotaciones. Asimismo, se consideran propiedades estructurales que satisfacen estas clases, como la automejora o la monotonía entre otras. Además, aplicando técnicas similares, se aborda el problema de existencia y acotación de la transformada de Hilbert en los espacios de Lorentz, lo que conduce a unas clases de pesos estrechamente relacionadas con el operador de Calderón.

Palabras clave: Desigualdades con pesos, Espacios de Lorentz, Reordenada decreciente, Operador Maximal de Hardy-Littlewood, Operador de Hardy, Transformada de Hilbert.

El contenido de este trabajo de fin de máster ha sido realizado con el apoyo de la ayuda Jae Intro ICU 2024, financiada por el CSIC, bajo el plan de formación JAEICU_24_03180: Propiedades funcionales de los espacios de Lorentz y desigualdades de Hardy.

Abstract

The main goal of this work is to study the interplay between the classical Hardy inequalities in the cone of positive and decreasing functions (which are equivalent to the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator on Lorentz spaces), the functional properties of these spaces, and the characterization of the weights that allow such boundedness. Additionally, structural properties satisfied by these classes, such as self-improvement and monotonicity, among others, are considered. Moreover, applying similar techniques, the problem of existence and boundedness of the Hilbert transform in Lorentz spaces is tackled, leading to classes of weights closely related to the Calderon operator.

Key words: Weighted inequalities, Lorentz spaces, Decreasing rearrangement, Hardy-Littlewood maximal operator, Hardy operator, Hilbert transform.

The work contained in this Master's thesis has been supported by the grant Jae Intro ICU 2024, undertaken under the training plan JAEICU_24_03180: Propiedades funcionales de los espacios de Lorentz y desigualdades de Hardy.

Índice general

1. Introducción	1
2. Resultados clásicos de espacios de Banach de funciones	3
2.1. Espacios de Banach de funciones	3
2.2. El espacio asociado	8
2.3. Función de distribución y reordenada decreciente	9
2.4. La desigualdad clásica de Hardy-Littlewood	15
2.5. Una función maximal elemental	18
2.6. Espacios invariantes por reordenamientos	20
2.7. La función fundamental	22
2.8. Los índices de Boyd	25
3. Espacios de Lorentz y el operador maximal	31
3.1. El operador maximal de Hardy-Littlewood	31
3.2. Espacios de Lorentz	44
4. Espacios de Lorentz clásicos y desigualdades con pesos	49
4.1. Espacios de Lorentz clásicos	50
4.2. El operador de Hardy y las clases B_p	60
4.3. Normabilidad de $\Lambda^p(w)$ y acotación débil del operador maximal	78
4.4. Normabilidad de $\Lambda^{p,\infty}(w)$ y acotación fuerte del operador maximal	94
5. La transformada de Hilbert sobre espacios de Lorentz	101
5.1. La transformada de Hilbert	101
5.2. El operador adjunto de Hardy y la clase B_∞^*	115
5.3. La transformada de Hilbert en los espacios de Lorentz $\Lambda^p(w)$	126
Bibliografía	131

Capítulo 1

Introducción

En la década de los años 1950, G. G. Lorentz publicó una serie de artículos en los que estudiaba algunas propiedades de una nueva clase de espacios de funciones [22], que más adelante se conocerían como los *espacios de Lorentz clásicos* o *espacios de Lorentz con peso* $\Lambda^p(w)$. La teoría sobre estos espacios continuó desarrollándose de la mano de M. A. Ariño, B. Muckenhoupt y E. Sawyer, entre otros, aunque el problema de encontrar una caracterización manejable de la acotación de los operadores clásicos sobre estos espacios resultó ser una ardua tarea.

En esta línea, el desarrollo de la teoría sobre los espacios invariantes por reordenamientos (r.i.) durante los años posteriores fue fundamental. En 1955, G. G. Lorentz [24] ya aportó una caracterización de la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood sobre dichos espacios, la cual fue refinada en 1965 por T. Shimogaki [33]. Más adelante, en 1967, W. D. Boyd [5] extendió este resultado a una amplia gama de operadores, entre los cuales también se encontraba la transformada de Hilbert. Sin embargo, estas caracterizaciones involucran unos índices asociados a los espacios, que aunque efectivamente permiten determinar la acotación de los operadores más relevantes, no son fáciles de determinar en la mayoría de los casos, y por tanto carecen de sentido práctico.

De esta manera, aunque ya existía una caracterización de la acotación del operador maximal para algunos espacios de Lorentz $\Lambda^p(w)$ (aquellos invariantes por reordenamientos), se buscó durante años una condición más sencilla y manejable, hecha a medida para dichos espacios. No fue hasta 1991 que M. A. Ariño y B. Muckenhoupt [2] caracterizaron completamente la acotación del operador maximal sobre $\Lambda^p(w)$, dando lugar a la clase B_p . Para ello, partieron de que la reordenada decreciente del operador maximal de Hardy-Littlewood es puntualmente equivalente al operador de Hardy sobre la reordenada decreciente de la función. De este modo, el problema de acotación del operador maximal se reduce a probar una desigualdad de Hardy con un peso sobre el cono de funciones positivas y decrecientes. Estas ideas se generalizaron fácilmente para aquellos operadores cuya reordenada puede ser dominada por un operador más sencillo de estudiar, como es el caso de la transformada de Hilbert.

Paralelamente, la comunidad matemática de la época también trabajaba en la caracterización de la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood sobre los espacios de Lebesgue

con pesos $L^p(w)$. Esta cuestión permaneció abierta hasta 1970, cuando B. Muckenhoupt [27], utilizando técnicas propias de la teoría de Calderón-Zygmund, llegó a la solución que actualmente es conocida como la clase A_p . Además, aunque la naturaleza de esta clase de pesos es completamente distinta a la de B_p (ya sea por las teorías de las que provienen o por las técnicas utilizadas), en la década de los 2000 se consiguieron unificar bajo un mismo marco común [8], dado por el estudio de los espacios de Lorentz $\Lambda_u^p(w)$.

A la luz de los resultados mencionados, el presente trabajo tiene como objetivo principal desarrollar (de la forma más autocontenida posible) la teoría de pesos B_p , y estudiar su relación con la acotación del operador maximal y la normabilidad de los espacios de Lorentz $\Lambda^p(w)$. Además, como consecuencia de aplicar las mismas técnicas a la transformada de Hilbert, analizaremos también la clase B_∞^* y su relación con B_p . En cuanto a su organización, el TFM consiste en 4 capítulos que resumiremos a continuación:

El primer capítulo es una introducción a los espacios de Banach de funciones y a los espacios invariantes por reordenamientos. Definimos el espacio asociado de un espacio de Banach de funciones, la reordenada decreciente, la función fundamental, y presentamos la desigualdad de Hardy-Littlewood (Teorema 2.33). Además, estudiamos los índices de Boyd, que nos permiten caracterizar la acotación del operador maximal y la transformada de Hilbert (Teoremas 2.71 y 2.72).

El segundo capítulo se centra en el operador maximal de Hardy-Littlewood y los espacios de Lorentz más elementales. Examinaremos su acotación débil $(1, 1)$ y fuerte en L^p , $p > 1$ (Teoremas 3.9 y 3.19), para lo cual debemos probar su equivalencia puntual con el operador de Hardy (Teorema 2.33).

En el tercer capítulo definimos los espacios de Lorentz $\Lambda^p(w)$ y $\Lambda^{p,\infty}(w)$ y las clases de pesos B_p y $B_{p,\infty}$. Estudiamos algunas de sus propiedades (Proposición 4.25) y su relación con la acotación del operador maximal y la normabilidad de los espacios de Lorentz (Teoremas 4.23, 4.31, 4.39 y 4.52).

En el último capítulo estudiamos la existencia y acotación de la transformada de Hilbert sobre L^p (Teoremas 5.13 y 5.12), y la equivalencia puntual de su reordenada con el operador de Calderón (Teorema 5.12). Además, con el fin de caracterizar la acotación de la transformada de Hilbert sobre los espacios de Lorentz $\Lambda^p(w)$ y $\Lambda^{p,\infty}(w)$ (Teorema 5.28) estudiamos la acotación del adjunto del operador de Hardy en el cono de funciones positivas y decrecientes (Teoremas 5.20 y 5.23)

Capítulo 2

Resultados clásicos de espacios de Banach de funciones

Los espacios de Lebesgue L^p , con $1 \leq p \leq \infty$, juegan un rol fundamental en varias áreas del análisis matemático. Sin embargo, existen otros espacios de Banach de funciones medibles de gran interés, como pueden ser aquellos de Orlicz, o los de Lorentz clásicos. Si bien estos pueden llegar a poseer propiedades radicalmente distintas, entre 1930 y 1950, matemáticos de la talla de Orlicz, Lorentz y Luxemburg buscaron y desarrollaron un marco común con el que describir todas estas clases de funciones, lo que supuso el inicio de la teoría de *espacios de Banach de funciones*.

En este capítulo desarrollaremos brevemente algunos aspectos básicos de los espacios de Banach de funciones. En las secciones 2.1 y 2.2 estableceremos el concepto de función norma y discutiremos algunas aspectos elementales de los espacios de Banach de funciones, como la completitud, las inclusiones entre los mismos, y el concepto del espacio asociado. En la sección 2.3 hablaremos de la función de distribución y la reordenada decreciente, lo que nos permitirá introducir la desigualdad de Hardy-Littlewood, funciones maximales, espacios invariantes por reordenamientos y la función fundamental, en las secciones 2.4, 2.5, 2.6 y 2.7 respectivamente. Finalmente, en la sección 2.8 definiremos los conocidos índices de Boyd, y discutiremos su relación con la acotación de ciertos operadores clásicos.

El libro de referencia para este capítulo es [3], aunque también puede consultarse [30] de forma complementaria.

2.1. Espacios de Banach de funciones

La idea central de los espacios de Banach de funciones es considerar normas sobre espacios de funciones que preserven su estructura natural de retículo dada por el orden puntual, y que además, tengan un buen comportamiento con el espacio de medida subyacente. Estas normas se conocen como *funciones norma*, y para definir las debemos recordar antes algunas nociones básicas de teoría de la medida.

Definición 2.1. Un espacio de medida (R, Σ, μ) es σ -finito si existe una sucesión $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ de manera que $\mu(R_n) < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n = R$.

Notación 2.2. Sea $\mathcal{M}(R, \mu)$ la clase de todas las funciones μ -medibles sobre R tomando valores en $\overline{\mathbb{R}}$ o \mathbb{C} , $\mathcal{M}_0(R, \mu)$ la clase de funciones en $\mathcal{M}(R, \mu)$ que son finitas μ -a.e. y $\mathcal{M}^+(R, \mu)$ el cono de las funciones no negativas en $\mathcal{M}(R, \mu)$. Además, como es habitual, identificaremos funciones iguales en casi todo punto.

Observación 2.3. $\mathcal{M}_0(R, \mu)$ es un espacio vectorial con las operaciones naturales de suma de funciones y multiplicación por un escalar (no así $\mathcal{M}(R, \mu)$). De hecho, podemos ver $\mathcal{M}_0(R, \mu)$ como un espacio vectorial topológico metrizable si consideramos la topología asociada a la convergencia en medida en conjuntos de medida finita.

Definición 2.4. Decimos que una función $f : R \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (o \mathbb{C}) es una *función simple* si es μ -medible, toma un número finito de valores y $\mu(\text{sop}(f)) < \infty$. Además, a la clase de las funciones simples definidas en R la denotamos por $S(R, \mu)$.

Definición 2.5. Decimos que una aplicación $\rho : \mathcal{M}^+(R, \mu) \rightarrow [0, \infty]$ es una *función norma* si para cada f, g y $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{M}^+(R, \mu)$, cada $\lambda \geq 0$ y cada conjunto μ -medible E , se satisfacen las siguientes propiedades:

$$(P1) \quad \rho(f) = 0 \iff f = 0 \text{ } \mu\text{-a.e.}$$

$$\rho(\lambda f) = \lambda \rho(f)$$

$$\rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g),$$

$$(P2) \quad 0 \leq g \leq f \text{ } \mu\text{-a.e.} \implies \rho(g) \leq \rho(f) \quad (\text{Propiedad de retículo}),$$

$$(P3) \quad 0 \leq f_n \uparrow f \text{ } \mu\text{-a.e.} \implies \rho(f_n) \uparrow \rho(f) \quad (\text{Propiedad de Fatou}),$$

$$(P4) \quad \mu(E) < \infty \implies \rho(\chi_E) < \infty,$$

$$(P5) \quad \mu(E) < \infty \implies \int_E f d\mu \leq C_E \rho(f),$$

para alguna constante $C_E \in (0, \infty)$ independiente de f .

Ejemplo 2.6. Uno de los ejemplos más sencillos de funciones norma son las normas de los espacios $L^p = L^p(R, \Sigma, \mu)$, donde $1 \leq p \leq \infty$, definidas para cada $f \in \mathcal{M}(R, \mu)$ como

$$\rho_p(|f|) = \begin{cases} \left(\int_R |f|^p d\mu \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \sup_{x \in R} \text{ess } |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Como consecuencia de la desigualdad de Minkowski las aplicaciones ρ_p satisfacen (P1), mientras que (P2) y (P3) se siguen de la monotonía de la integral de Lebesgue y el Teorema de la Convergencia Monótona respectivamente. Por otro lado, (P4) es obvio, mientras que (P5)

se concluye por la desigualdad de Hölder, pues si $p \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ entonces para cada $f \in \mathcal{M}(R, \mu)$ y E medible con $\mu(E) < \infty$,

$$\int_E |f| d\mu = \int_R |f| \chi_E d\mu \leq \left(\int_R |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_R \chi_E^{p'} d\mu \right)^{\frac{1}{p'}} = C_E \rho(|f|),$$

donde $C_E = \mu(E)^{\frac{1}{p'}}$. Los casos $p = 1$ y $p = \infty$ se deducen análogamente.

Definición 2.7. Sea ρ una función norma. La clase $X = X(\rho)$ de todas las funciones f en $\mathcal{M}(R, \mu)$ con $\rho(|f|) < \infty$ se denomina *espacio de Banach de funciones*. Además, para cada $f \in X$ se define

$$\|f\|_X = \rho(|f|). \quad (1)$$

Teorema 2.8. Sea ρ una función norma, $X = X(\rho)$ y $\|\cdot\|_X$ como en la Definición 2.7. Entonces bajo las operaciones naturales, $(X, \|\cdot\|_X)$ es un espacio normado para el cual se cumplen las siguientes inclusiones

$$S(R, \mu) \subset X \hookrightarrow \mathcal{M}_0(R, \mu).$$

En particular si $f_n \rightarrow f$ en X , entonces $f_n \rightarrow f$ en medida en conjuntos de medida finita, y por tanto existe una subsucesión de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a f μ -a.e.

Demostración. Se sigue de la Definición 2.7 y la propiedad (P5) de la Definición 2.5 que cualquier función en X es localmente integrable y por tanto es finita en casi todo punto, pues X es σ -finito. El conjunto X hereda las operaciones de espacio vectorial de \mathcal{M}_0 , y de (P1) y (2.7) se deduce que $(X, \|\cdot\|_X)$ es un espacio vectorial normado. La propiedad (P4) muestra que X contiene a las funciones características de cualquier conjunto medible de medida finita, y por linealidad, X contiene cualquier función simple. Esto establece las inclusiones

$$S(R, \mu) \subset X \subset \mathcal{M}_0(R, \mu).$$

Finalmente, basta probar que la inclusión de X en $\mathcal{M}_0(R, \mu)$ es continua. Dado que ambos espacios son metrizable, será suficiente mostrar que cualquier sucesión convergente en X también converge en $\mathcal{M}_0(R, \mu)$ al mismo límite. En efecto, si $f_n \rightarrow f$ en X entonces por la Definición 2.7 se tiene que $\rho(|f - f_n|) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ y E un subconjunto medible de X de medida finita, se sigue de (P5) que,

$$\mu(\{x \in E : |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}) \leq \int_E \frac{1}{\varepsilon} |f - f_n| d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon} C_E \rho(|f - f_n|),$$

que converge a 0 cuando $n \rightarrow \infty$. Por tanto, $f_n \rightarrow f$ en medida en cualquier conjunto de medida finita, o equivalentemente, $f_n \rightarrow f$ en $\mathcal{M}_0(R, \mu)$. Un resultado conocido de la teoría de la medida nos asegura la existencia de una subsucesión que converge en casi todo punto a f . \square

El lema de Fatou es uno de los pilares de la teoría de los espacios L^p , del cual se pueden deducir tanto el teorema de la convergencia monótona como el de la convergencia dominada. El siguiente resultado muestra que, gracias en gran medida a la propiedad (P3), existe un homónimo para los espacios de Banach de funciones.

Lema 2.9 (Lema de Fatou para espacios de Banach de funciones). *Sea $X = X(\rho)$ un espacio de Banach de funciones y $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X . Si $f_n \rightarrow f$ μ -a.e. y $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_X < \infty$, entonces $f \in X$ y*

$$\|f\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_X.$$

Demostración. Sea $h_n(x) = \inf_{m \geq n} |f_m(x)|$. Entonces $0 \leq h_n \uparrow |f|$ μ -a.e., de modo que por (P2) y (P3),

$$\rho(|f|) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(h_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{m \geq n} \rho(|f_m|) \right) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_X < \infty.$$

Dado que f es medible por ser límite de funciones medibles, concluimos que $f \in X$ y

$$\|f\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_X.$$

□

Con el objetivo de estudiar la completitud de los espacios de Banach de funciones, es interesante introducir la siguiente propiedad.

Definición 2.10. Decimos que un espacio normado $(X, \|\cdot\|_X)$ tiene la propiedad de *Riesz-Fischer* si para cada sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X satisfaciendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X < \infty,$$

existe $f \in X$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$, esto es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n f_k - f \right\|_X = 0.$$

Observación 2.11. Es fácil comprobar que un espacio normado es completo si y solo si tiene la propiedad de Riesz-Fischer ([30, Theorem 1.9.5]).

Teorema 2.12. *Todo espacio de Banach de funciones es completo.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach de funciones y $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X < \infty. \quad (2)$$

Definamos $g_n = \sum_{k=1}^n |f_k|$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $g = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$, de modo que $0 \leq g_n \uparrow g$. Como

$$\|g_n\|_X \leq \sum_{n=1}^N \|f_n\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

se sigue de (2.1) y del Lema 2.9 que $g \in X$. Por el Teorema 2.8 sabemos que $\sum_{k=1}^{\infty} |f_n|$ converge puntualmente μ -a.e., y en consecuencia $\sum_{k=1}^{\infty} f_n$ también lo hace. Esto es, si definimos

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n, \quad s_n = \sum_{k=1}^n f_k \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

entonces $s_n \rightarrow f$ μ -a.e. Por tanto, para cada $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $s_n - s_m \rightarrow f - s_m$ μ -a.e. cuando $n \rightarrow \infty$. Además,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|s_n - s_m\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m+1}^n \|f_k\|_X = \sum_{k=m+1}^{\infty} \|f_k\|_X.$$

Por el Lema de Fatou 2.9 se sigue que $f - s_m \in X$ y $\|f - s_m\|_X \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|f_k\|_X$. Por tanto, $f \in X$, y como $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X < \infty$, concluimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n\|_X = 0$ y $s_n \rightarrow f$ en X . De esta manera X tiene la propiedad de Riesz-Fischer, que por la Observación 2.11 es equivalente a que $(X, \|\cdot\|_X)$ sea completo. \square

En general, la inclusión entre dos espacios normados no tiene por qué ser continua, para lo cual basta considerar $(L^\infty \cap L^1, \|\cdot\|_{L^\infty})$ y $(L^1, \|\cdot\|_{L^1})$. Sin embargo, el siguiente resultado muestra que las topologías de los espacios de Banach de funciones no son tan “diferentes” entre sí, lo que permite asegurar que las inclusiones entre ellos siempre son continuas.

Teorema 2.13. *Sean X e Y dos espacios de Banach de funciones sobre el mismo espacio de medida. Si $X \subset Y$, entonces $X \hookrightarrow Y$; esto es, existe $C > 0$ tal que*

$$\|f\|_Y \leq C\|f\|_X,$$

para cada $f \in X$.

Demostración. Supongamos por reducción absurdo que la inclusión $X \hookrightarrow Y$ no es continua. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n \in X$ tal que

$$\|f_n\|_X = 1, \quad \|f_n\|_Y > n^3.$$

Además, $f_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{1}{n^2} |f_n| \right\|_X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Como X tiene la propiedad de Riesz-Fischer por el Teorema 2.12, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} |f_n|$ converge en X a alguna función $f \in X \subset Y$. Sin embargo, $0 \leq n^{-2} |f_n| \leq f$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de modo que

$$n = \frac{n^3}{n^2} < \frac{1}{n^2} \|f_n\|_Y \leq \|f\|_Y < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

lo que nos lleva a contradicción. Por tanto, la inclusión $X \hookrightarrow Y$ es un aplicación continua. \square

2.2. El espacio asociado

La desigualdad de Hölder clásica sostiene que, si $1 \leq p, p' \leq \infty$ son exponentes conjugados, entonces se cumple que

$$\int_R |fg| d\mu \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}},$$

para cada $f \in L^p$ y $g \in L^{p'}$. A partir de ella, no es difícil comprobar que se puede reescribir la norma del espacio $L^{p'}$ en función de la norma de L^p como

$$\|g\|_{L^{p'}} = \sup \left\{ \int_R |fg| d\mu : f \in L^p, \|f\|_{L^p} \leq 1 \right\}, \quad \forall g \in L^{p'}. \quad (3)$$

Esta definición alternativa será la base de la construcción del espacio asociado a un espacio de Banach de funciones.

Definición 2.14. Sea $\rho : \mathcal{M}^+(R, \mu) \rightarrow [0, \infty]$ una función norma, se define la *norma asociada* a ρ , que denotamos por ρ' , sobre $\mathcal{M}^+(R, \mu)$ como

$$\rho'(g) = \sup \left\{ \int_R fg d\mu : f \in \mathcal{M}^+(R, \mu), \rho(f) \leq 1 \right\},$$

para cada $g \in \mathcal{M}^+(R, \mu)$.

Teorema 2.15. *Sea ρ una función norma. Entonces su norma asociada ρ' es también una función norma.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{M}^+(R, \mu)$ con $\rho(f) \leq 1$, de modo que f es finita μ -a.e. Entonces si $g = 0$ μ -a.e., tenemos que $fg = 0$ μ -a.e., y por tanto $\int_R fg d\mu = 0$ y $\rho'(g) = 0$. Recíprocamente, supongamos que $\rho'(g) = 0$ y definamos $E := \{x \in R : g(x) \neq 0\}$. Como (R, Σ, μ) es σ -finito podemos asumir s.p.g que $\mu(E) < \infty$. Si $\mu(E) > 0$, entonces por las propiedades (P1) y (P4) se tiene que $0 < \rho(\chi_E) < \infty$. Tomando $f = \frac{\chi_E}{\rho(\chi_E)}$, entonces $\rho(f) = 1$, y obtenemos que

$$0 = \int_R fg d\mu = \rho(\chi_E)^{-1} \int_E g d\mu,$$

lo que es una contradicción. Por tanto $\mu(E) = 0$ y $g = 0$ μ -a.e. Las propiedades (P1) y (P2) se siguen de la linealidad y monotonía de la integral de Lebesgue respectivamente.

Para la propiedad de Fatou (P3), tomamos $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}^+(R, \mu)$, $g \in \mathcal{M}^+(R, \mu)$, con $0 \leq g_n \uparrow g$ μ -a.e. Por la monotonía de ρ' , tenemos que $\rho'(g_n) \leq \rho'(g_{n+1})$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\rho'(g_n) \leq \rho'(g)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, si $\rho'(g_n) = \infty$ para algún $n \in \mathbb{N}$ el resultado es trivial, por lo que supongamos entonces que $\rho'(g_n) < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda < \rho'(g)$. Entonces existe $f \in \mathcal{M}^+(R, \mu)$ con $\rho(f) \leq 1$ tal que $\lambda < \int_R fg d\mu$. Dado que $0 \leq fg_n \uparrow fg$ μ -a.e., aplicando el Teorema de Convergencia Monótona se deduce que $\int_R fg_n d\mu \uparrow \int_R fg d\mu$. De esta manera existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda < \int_R fg_n d\mu \leq \rho'(g_n)$ para cada $n \geq N$, por lo que $\rho'(g_n) \uparrow \rho'(g)$.

Sea ahora E un conjunto medible con $\mu(E) < \infty$. Como ρ es una función norma, por la propiedad (P5) existe $C_E < \infty$ tal que

$$\int_R \chi_E f \, d\mu \leq C_E \rho(f),$$

para cada $f \in \mathcal{M}^+(R, \mu)$. Por tanto, $\rho'(\chi_E) \leq C_E < \infty$.

Veamos por último que ρ' verifica (P5). Para ello consideramos un conjunto medible E con $\mu(E) < \infty$. Si $\mu(E) = 0$ el resultado es trivial, por lo que supongamos que $0 < \mu(E) < \infty$. Entonces, por (P1) y (P4) para ρ sabemos que $0 < \rho(\chi_E) < \infty$. Por tanto, para cualquier $g \in \mathcal{M}^+(R, \mu)$ se tiene que

$$\int_E g \, d\mu = \int_R \chi_E g \, d\mu = \rho(\chi_E) \int_R \frac{\chi_E}{\rho(\chi_E)} g \, d\mu \leq \rho(\chi_E) \rho'(g),$$

lo que implica (P5) con constante $C'_E = \rho(\chi_E)$. \square

Definición 2.16. Sea ρ una función norma y sea $X = X(\rho)$ el espacio de Banach de funciones como en la Definición 2.7. Sea ρ' la norma asociada a ρ . El espacio de Banach de funciones $X(\rho')$ determinado por ρ' se denomina *espacio asociado* de X y se denota por X' .

Observación 2.17. Si $1 \leq p, p' \leq \infty$ son exponentes conjugados, entonces por (2.2) se tiene que $(L^p)' = L^{p'}$.

Teorema 2.18 (Desigualdad de Hölder). *Sea X un espacio de Banach de funciones con espacio asociado X' . Si $f \in X$ y $g \in X'$, entonces fg es integrable y*

$$\int_R |fg| \, d\mu \leq \|f\|_X \|g\|_{X'}$$

Demostración. En el caso en que $\|f\|_X = 0$, entonces $f = 0$ μ -a.e., por lo que el resultado es trivial. Por otro lado, si $\|f\|_X > 0$, entonces

$$\int_R |fg| \, d\mu = \|f\|_X \int_R \frac{f}{\|f\|_X} g \, d\mu \leq \|f\|_X \|g\|_{X'}.$$

\square

2.3. Función de distribución y reordenada decreciente

Si bien los espacios $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ son espacios de Banach de funciones, si consideramos un elemento $u = (u_n)_{n \geq 1} \in \ell^p$ cualquiera, entonces para cualquier permutación $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ se tiene que

$$(u_{\sigma(n)})_{n \geq 1} \in \ell^p, \quad \|(u_n)_{n \geq 1}\| = \|(u_{\sigma(n)})_{n \geq 1}\|.$$

Este concepto de invariancia bajo reordenamientos de elementos puede ser extendido a los espacios de Banach de funciones, para lo cual haremos uso de la función de distribución y la reordenada decreciente.

2.3. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN Y REORDENADA DECRECIENTE

Definición 2.19. Dada $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$, se define su *función de distribución* μ_f como

$$\mu_f(t) = \mu(\{x \in R : |f(x)| > t\}), \quad t > 0.$$

Definición 2.20. Decimos que dos funciones $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$ y $g \in \mathcal{M}_0(S, \nu)$ son *equimedibles* si tiene la misma función de distribución, esto es, si

$$\mu_f(t) = \nu_g(t), \quad \forall t > 0.$$

Ejemplo 2.21. Dado que las funciones simples cobrarán cierta relevancia en resultados posteriores, obtengamos una expresión explícita de la función de distribución μ_f de una función simple no negativa de la forma

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}, \quad (4)$$

donde $\{E_i\}_{i=1}^n$ son conjuntos medibles disjuntos dos a dos y $a_1 > a_2 > \dots > a_n > a_{n+1} := 0$. Si $\lambda \geq a_1$, entonces $\mu_f(\lambda) = 0$. Por otro lado, si $a_{j+1} \leq \lambda < a_j$ entonces

$$\{x \in R : |f(x)| > \lambda\} = \bigcup_{i=1}^j E_i \quad \text{y} \quad \mu_f(\lambda) = \sum_{i=1}^j \mu(E_i).$$

Por tanto, si definimos $m_j = \sum_{i=1}^j \mu(E_i)$, concluimos que

$$\mu_f = \sum_{j=1}^n m_j \chi_{[a_{j+1}, a_j)}. \quad (5)$$

Proposición 2.22. Sea $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$. Entonces la función de distribución μ_f de f es no negativa, decreciente, y continua por la derecha en $[0, \infty)$.

Demostración. Definamos los conjuntos

$$E_t := \{x \in R : |f(x)| > t\}, \quad t > 0,$$

de modo que $\mu_f(t) = \mu(E_t)$ para cada $t > 0$. Claramente μ_f es una función no negativa, por ser μ una medida positiva. Además, si $t_1 \leq t_2$ entonces $E_{t_2} \subset E_{t_1}$, por lo que $\mu_f(t_2) \leq \mu_f(t_1)$ por la monotonía de μ . Veamos por último que μ_f es continua por la derecha. Dado $t_0 > 0$ cualquiera y una sucesión $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset [0, \infty)$ tal que $t_n \downarrow t_0$,

$$E_{t_0} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{t_n},$$

y $\{E_{t_n}\}_{n \geq 1}$ es una sucesión creciente de conjuntos μ -medibles. Por tanto,

$$\mu_f(t) = \mu(E_t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_{t_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_f(t_n).$$

□

Proposición 2.23. Sean f, g y $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $\mathcal{M}_0(R, \mu)$. Sea $a \in \mathbb{R}$ no nulo.

(i) Si $|g| \leq |f|$ μ -a.e., entonces $\mu_g \leq \mu_f$.

(ii) $\mu_{af}(\lambda) = \mu_f\left(\frac{\lambda}{|a|}\right)$, $\forall \lambda \geq 0$.

(iii) $\mu_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2)$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$.

(iv) Si $|f| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n|$ en μ -a.e. entonces $\mu_f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_{f_n}$.

(v) Si $|f_n| \uparrow |f|$, entonces $\mu_{f_n} \uparrow \mu_f$.

Demostración. Las propiedades (i) y (ii) son triviales a partir de la Definición 2.19. Veamos ahora (iii). Dados $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, entonces,

$$\begin{aligned} \{x \in R : |f(x) + g(x)| \geq \lambda_1 + \lambda_2\} &\subset \{x \in R : |f(x)| + |g(x)| \geq \lambda_1 + \lambda_2\} \\ &\subset \{x \in R : |f(x)| \geq \lambda_1\} \cup \{x \in R : |g(x)| \geq \lambda_2\}, \end{aligned}$$

de donde se deduce que $\mu_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2)$.

Claramente (v) es consecuencia inmediata de (iv), por lo que basta probar este último para concluir el resultado. Fijemos $\lambda \geq 0$ y definamos

$$E_n = \{x \in R : |f_n(x)| > \lambda\} \quad \text{y} \quad E = \{x \in R : |f(x)| > \lambda\}.$$

Veamos que $E \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq m} E_n$. Dado $x \in R$ con $|f(x)| > \lambda$, como $|f(x)| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)|$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq m$ se verifica que $|f(x)| \leq \inf |f_n(x)|$. Es decir,

$$\lambda < |f(x)| \leq |f_n(x)|, \quad \forall n \geq m,$$

por lo que $x \in \bigcap_{n \geq m} E_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n > m} E_n$. Como $\{\bigcap_{n \geq m} E_n\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de conjuntos medibles, por el Teorema de la Convergencia Monótona se tiene que

$$\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E_n\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} E_n\right) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\inf_{n \geq m} \mu(E_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \mu(E_n).$$

y en consecuencia $\mu_f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_{f_n}$. □

Definición 2.24. Dada $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$, se define la reordenada decreciente de f como la función $f^* : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ dada por

$$f^*(t) = \inf\{\lambda : \mu_f(\lambda) \leq t\},$$

De ahora en adelante adoptaremos la notación $\inf(\emptyset) = \infty$. Por tanto, si existe $t \geq 0$ de modo que $\mu_f(\lambda) > t$ para cada $\lambda \geq 0$, entonces $f^*(t) = \infty$. Además, si (R, μ) es un espacio de medida finita, entonces $\mu_f(\lambda) \leq \mu(R)$ para cada $\lambda \geq 0$, de manera que $f^*(t) = 0$ para todo $t \geq \mu(R)$. Por tanto, en esta caso podemos asumir que f^* está definida en $[0, \mu(R)]$.

2.3. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN Y REORDENADA DECRECIENTE

Observación 2.25. Dada $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$, como por la Proposición 2.28, μ_f es decreciente, se puede comprobar que

$$f^*(t) = \sup\{\lambda : \mu_f(\lambda) > t\} = m_{\mu_f}(t), \quad (6)$$

donde m es la medida de Lebesgue en \mathbb{R} .

Ejemplo 2.26. Hallemos la reordenada decreciente para una función simple de la forma (2.21). Tomando $m_0 := 0$, está claro por (2.21) que $f^*(t) = 0$ si $t \geq m_n$, mientras que $f^*(t) = a_j$ si $m_{j-1} \leq t < m_j$ para algún $j \in \{1, \dots, n\}$. Por tanto, concluimos que

$$f^* = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{[m_{j-1}, m_j)}. \quad (7)$$

En algunos cálculos posteriores será conveniente utilizar una expresión alternativa de la reordenada decreciente de una función simple. Para ello, definamos

$$b_i := a_i - a_{i+1}, \quad F_i = \bigcup_{j=1}^i E_j, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

de modo que podemos reescribir la reordenada decreciente f^* como

$$f^* = \sum_{i=1}^n b_i \chi_{[0, \mu(F_i))}. \quad (8)$$

Proposición 2.27. Sean $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$. Entonces la función reordenada decreciente f^* es no negativa, decreciente y continua por la derecha en $[0, \infty)$.

Demostración. Esto es consecuencia de la Proposición 2.22 y la Observación 2.25. \square

Proposición 2.28. Sean $f, g, \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ funciones de $\mathcal{M}_0(R, \mu)$ y sea $a \in \mathbb{R}$.

- (i) Si $|g| \leq |f|$ μ -a.e., entonces $g^* \leq f^*$.
- (ii) $(af)^* = |a|f^*$.
- (iii) $(f + g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$, $t_1, t_2 \geq 0$.
- (iv) Si $|f| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n|$ μ -a.e., entonces $f^* \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n^*$.
- (v) Si $|f_n| \uparrow |f|$ μ -a.e., entonces $f_n^* \uparrow f^*$.
- (vi) Si $\mu_f(\lambda) < \infty$ entonces $f^*(\mu_f(\lambda)) \leq \lambda$, y si $f^*(t) < \infty$ entonces $\mu_f(f^*(t)) \leq t$.
- (vii) f y f^* son equimedibles.
- (viii) Si $0 < p < \infty$, entonces $(|f|^p)^* = (f^*)^p$.

(ix) Si $t, s \geq 0$, entonces $f^*(t) \leq s$ si y solo si $\mu_f(s) \leq t$.

Demostración. (i), (ii), (iv), (v) Estos son consecuencia inmediata de los respectivos (i), (ii), (iv) y (v) de la Proposición 2.28 y la Observación 2.25.

(vi) Fijemos $\lambda \geq 0$ y supongamos que $t = \mu_f(\lambda) < \infty$. Entonces como μ_f es decreciente,

$$f^*(\mu_f(\lambda)) = \inf\{\lambda' : \mu_f(\lambda') \leq \mu_f(\lambda)\} \leq \lambda,$$

Por otro lado, fijemos $t \geq 0$ y supongamos que $\lambda = f^*(t) < \infty$. Entonces por definición existe una sucesión $\lambda_n \downarrow \lambda$ con $\mu_f(\lambda_n) \leq t$, y como μ_f es continua por la derecha,

$$\mu_f(f^*(t)) = \mu_f(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_f(\lambda_n) \leq t.$$

(iii) Supongamos que $\lambda = f^*(t_1) + g^*(t_2) < \infty$, ya que en otro caso el resultado es trivial. Entonces por la desigualdad triangular y (v), obtenemos que

$$\begin{aligned} \mu_{f+g}(\lambda) &= \mu(\{x : |f(x) + g(x)| > f^*(t_1) + g^*(t_2)\}) \\ &\leq \mu(\{x : |f(x)| > f^*(t_1)\}) + \mu(\{x : |g(x)| > g^*(t_2)\}) \\ &= \mu_f(f^*(t_1)) + \mu_g(g^*(t_2)) \\ &\leq t_1 + t_2. \end{aligned}$$

Por tanto, como $(f + g)^*$ es decreciente,

$$(f + g)^*(t_1 + t_2) \leq (f + g)^*(\mu_{f+g}(\lambda)) \leq \lambda = f^*(t_1) + g^*(t_2).$$

(vii) Dada $f \in \mathcal{M}_0$ cualquiera, podemos encontrar una sucesión no negativa de funciones simples $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $f_n \uparrow |f|$. A partir de la expresión (2.25), es fácil comprobar que f_n y f_n^* son equimedibles para cada $n \in \mathbb{N}$, i.e.

$$\mu_{f_n}(\lambda) = m_{f_n^*}(\lambda), \quad \lambda \geq 0.$$

Además, como $f_n \uparrow |f|$, se tiene por (v) que $f_n^* \uparrow f^*$. Por tanto, por la propiedad (v) de la Proposición 2.23 se tiene que

$$\mu_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} m_{f_n^*} = m_{f^*}, \quad (9)$$

de donde concluimos que f y f^* son equimedibles.

(viii) Dado $0 < p < \infty$ cualquiera, de (2.3) se deduce que

$$\mu_{|f|^p}(\lambda) = \mu_f(\lambda^{\frac{1}{p}}) = m_{f^*}(\lambda^{\frac{1}{p}}) = m_{(f^*)^p}(\lambda), \quad \forall \lambda \geq 0.$$

Por tanto, teniendo en cuenta la Observación 2.25 obtenemos que

$$(|f|^p)^*(t) = m_{\mu_{|f|^p}}(t) = m_{m_{(f^*)^p}}(t) = (f^*)^p(t), \quad \forall t \geq 0.$$

(ix) Sean $t, s \geq 0$ cualesquiera. Supongamos que $f^*(t) < s$. Entonces $f^*(t) < \infty$, por lo que aplicando la propiedad (vi) tenemos que $\mu_f(f^*(t)) \leq t$. Además, μ_f una función decreciente, de modo que $\mu_f(s) \leq \mu_f(f^*(t)) \leq t$. Recíprocamente, supongamos que $\mu_f(s) \leq t$. Entonces por la propiedad (vi) y por el hecho de que f^* es decreciente, concluimos que $f^*(t) \leq f^*(\mu_f(s)) \leq s$. \square

2.3. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN Y REORDENADA DECRECIENTE

Observación 2.29. Aunque f y f^* sean equimedibles, al pasar a la reordenada decreciente se pierde una cantidad considerable de información. Consideremos por ejemplo la función

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 1 - e^{-x}, \quad \forall x > 0.$$

La función de distribución m_f es infinita si $0 < \lambda < 1$, y se anula para cada $\lambda \geq 1$. Por tanto, $f^*(t) = 1$ para todo $t > 0$.

El siguiente resultado nos asegura que al pasar a la reordenada decreciente no se pierde información relativa a las normas L_p (que al fin y al cabo es lo que nos interesa en este contexto).

Proposición 2.30. Sea $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$ y $0 < p < \infty$. Entonces,

$$\int_R |f|^p d\mu = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu_f(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty f^*(t)^p dt.$$

Además, para el caso $p = \infty$,

$$\sup_{x \in R} \text{ess } |f(x)| = \inf\{\lambda : \mu_f(\lambda) = 0\} = f^*(0).$$

Demostración. Sean $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$ y $0 < p < \infty$ cualesquiera. Definamos los conjuntos medibles

$$E_\lambda = \{x \in R : |f(x)| > \lambda\}, \quad \forall \lambda \geq 0.$$

Entonces, por el Teorema de Fubini-Tonelli se tiene que

$$\begin{aligned} p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu_f(\lambda) d\lambda &= \int_0^\infty p \lambda^{p-1} \mu(E_\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \int_R p \lambda^{p-1} \chi_{E_\lambda}(x) d\mu(x) d\lambda \\ &= \int_R \int_0^\infty p \lambda^{p-1} \chi_{E_\lambda}(x) d\lambda d\mu(x) = \int_R \int_0^{|f(x)|} p \lambda^{p-1} d\lambda d\mu(x) \\ &= \int_R |f(x)|^p d\mu(x). \end{aligned}$$

Además, f y f^* son equimedibles, de modo que $\mu_f(\lambda) = m_{f^*}(\lambda)$ para cada $\lambda \geq 0$. Entonces, repitiendo el argumento anterior se llega a que

$$p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu_f(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty f^*(t)^p dt.$$

En el caso $p = \infty$, para cada $\lambda \geq \|f\|_{L^\infty(R)}$ se tiene que $\mu(E_\lambda) = 0$. Por tanto,

$$\|f\|_{L^\infty(R)} = \inf\{\lambda : \mu_f(\lambda) = 0\} = f^*(0).$$

□

2.4. La desigualdad clásica de Hardy-Littlewood

Aunque la reordenada decreciente no conserva el producto ni la suma de funciones, sí que existen desigualdades que gobiernan estas dos operaciones. Los resultados asociados a estas operaciones se desarrollarán en esta sección (para productos a través de la desigualdad de Hardy-Littlewood) y en la siguiente sección (para sumas mediante la función maximal).

Con el objetivo de motivar el resultado central de esta sección, es interesante discutir una versión discreta (elemental) de la desigualdad de Hardy-Littlewood. Esta expone que, dadas dos sucesiones finitas $(a_i)_{i=1}^n, (b_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^+$, entonces

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sum_{i=1}^n a_i^* b_i^*, \quad (10)$$

donde $(a_i^*)_{i=1}^n$ ($(b_i^*)_{i=1}^n$) son las sucesiones de elementos de $(a_i)_{i=1}^n$ ($(b_i)_{i=1}^n$) ordenados de forma decreciente. En cierto modo, lo que nos dice es que la suma alcanza su máximo cuando los términos en cada sucesión están ordenados de forma decreciente. El Teorema 2.33 nos permite trasladar de forma satisfactoria esta desigualdad del contexto de las sumas discretas al de la integral de Lebesgue, para lo cual es fundamental el concepto de reordenada decreciente.

Lema 2.31. *Sean g una función simple no negativa en (R, μ) y E un subconjunto medible de R . Entonces*

$$\int_E g d\mu \leq \int_0^{\mu(E)} g^*(s) ds.$$

Demostración. Como g es simple no negativa, por (2.26) podemos expresar g y g^* como

$$g = \sum_{i=1}^n b_i \chi_{F_i}, \quad g^* = \sum_{i=1}^n b_i \chi_{[0, F_i)},$$

donde $F_1 \subset \dots \subset F_n$ y $b_i \geq 0$ para cada $i = 1, \dots, n$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_E g d\mu &= \sum_{i=1}^n b_i \mu(E \cap F_i) \leq \sum_{i=1}^n b_i \min\{\mu(E), \mu(F_i)\} \\ &= \sum_{i=1}^n b_i \int_0^{\mu(E)} \chi_{[0, \mu(F_i))}(s) ds = \int_0^{\mu(E)} g^*(s) ds. \end{aligned}$$

□

Lema 2.32 (G. H. Hardy [15]). *Sean ξ_1 y ξ_2 dos funciones medibles no negativas en $(0, \infty)$ y supongamos que*

$$\int_0^t \xi_1(s) ds \leq \int_0^t \xi_2(s) ds, \quad (11)$$

para cada $t > 0$. Sea η una función decreciente no negativa en $(0, \infty)$. Entonces,

$$\int_0^\infty \xi_1(s) \eta(s) ds \leq \int_0^\infty \xi_2(s) \eta(s) ds.$$

2.4. LA DESIGUALDAD CLÁSICA DE HARDY-LITTLEWOOD

Demostración. En virtud del teorema de la convergencia monótona, basta probar el resultado cuando η es una función simple no negativa y decreciente. En este caso, podemos expresar η como

$$\eta(s) = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{(0,t_j)}(s),$$

donde $a_j > 0$ para cada $j = 1, \dots, n$ y $0 < t_1 < \dots < t_n$. Entonces, aplicando (2.32),

$$\int_0^\infty \xi_1 \eta ds = \sum_{j=1}^n a_j \int_0^{t_j} \xi_1 ds \leq \sum_{j=1}^n a_j \int_0^{t_j} \xi_2 ds = \int_0^\infty \xi_2 \eta ds,$$

lo que concluye la demostración. □

Teorema 2.33 (G. H. Hardy, J. E. Littlewood [15]). *Si $f, g \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$, entonces*

$$\int_R |fg| d\mu \leq \int_0^\infty f^*(s)g^*(s) ds. \quad (12)$$

Demostración. Como f^* y g^* solo dependen de $|f|$ y $|g|$ respectivamente, es suficiente probar (2.33) para funciones medibles no negativas. Además, dado que toda función medible no negativa es el límite de una sucesión creciente de funciones simples no negativas, por el teorema de la convergencia monótona y la propiedad (v) de la Proposición 2.28 basta probar el resultado cuando f es una función simple no negativa. En tal caso, por (2.26) podemos escribir

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}, \quad f^* = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{[0, E_i]},$$

donde $E_1 \subset \dots \subset E_m$ y $a_i \geq 0$ para cada $i = 1, \dots, m$. Por tanto, aplicando el Lema 2.31 concluimos que

$$\begin{aligned} \int_R |fg| d\mu &= \sum_{i=1}^m a_i \int_{E_i} g d\mu \leq \sum_{i=1}^m a_i \int_0^{\mu(E_i)} g^*(s) ds \\ &= \int_0^\infty \sum_{i=1}^m a_i \chi_{[0, \mu(E_i)]}(s) g^*(s) ds = \int_0^\infty f^*(s)g^*(s) ds. \end{aligned}$$

□

A partir de la desigualdad de Hardy-Littlewood (2.33) está claro que

$$\int_R |f\bar{g}| d\mu \leq \int_0^\infty f^*(s)g^*(s) ds,$$

para cualquier función medible \bar{g} definida sobre R equimedible con g . En el caso en que podemos interpretar f y g como sucesiones finitas, como en (2.4), es inmediato que la igualdad se alcanza para una función \bar{g} equimedible con g adecuada. Sin embargo, esto no suele ocurrir en espacios de medida más generales y se hace necesario aislar aquellas clases de espacios de medida que verifican propiedades semejantes.

Definición 2.34. Un espacio de medida σ -finito (R, μ) se dice que es *resonante* si para cada $f, g \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$ se cumple que

$$\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt = \sup \int_R |f\bar{g}|d\mu,$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones \bar{g} definidas sobre R equimedibles con g .

Análogamente, se dice que (R, μ) es *fuertemente resonante* si para cada par de funciones f y g en $\mathcal{M}_0(R, \mu)$, existe una función \bar{g} definida sobre R y equimedible con g tal que

$$\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt = \int_R |f\bar{g}|d\mu.$$

Naturalmente, necesitamos conocer qué espacios de medida tienen estas propiedades de resonancia. Para ello, necesitamos introducir el concepto de átomo en un espacio de medida general.

Definición 2.35. Sea (R, μ) un espacio de medida σ -finito. Decimos que un conjunto medible $E \subset R$ es un *átomo* si $\mu(E) > 0$ y para cada $F \subset R$ medible se tiene que $\mu(E \cap F) = 0$ ó $\mu(E \setminus F) = 0$. Además, diremos que (R, μ) es *completamente atómico* si existe $E \subset R$ de modo que $\mu(R \setminus E) = 0$ y $\mu(\{x\}) > 0$ para cada $x \in M$. De forma similar, diremos que (R, μ) es *no atómico* si R no contiene ningún átomo.

Observación 2.36. Las medidas no atómicas también se conocen como medidas continuas, dado que su rango es de la forma $[0, \mu(R)]$. Esto es, si el espacio es no atómico se puede probar ([3, Lemma 2.5]) que, dado $0 \leq t \leq \mu(R)$ cualquiera, existe un conjunto medible E_t de manera que

$$\mu(E_t) = t.$$

Ahora ya estamos en condiciones de caracterizar los espacios de medida resonantes y fuertemente resonantes. Sin embargo, como las pruebas son extensas y estos resultados no son centrales en este trabajo, los enunciaremos sin sus demostraciones, mencionando una referencia en la que puedan encontrarse las mismas.

Teorema 2.37. *Un espacio de medida σ -finito (R, μ) es resonante si y solo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

- (i) (R, μ) es no atómico;
- (ii) (R, μ) es completamente atómico y todos los átomos tienen la misma medida.

Demostración. Véase [3, Theorem 2.7]. □

Teorema 2.38. *Un espacio de medida σ -finito (R, μ) es resonante si y solo si es un espacio de medida finita y se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

- (i) (R, μ) es no atómico;
- (ii) (R, μ) es completamente atómico y todos los átomos tienen la misma medida.

Demostración. Véase [3, Theorem 2.6]. □

Observación 2.39. Una consecuencia inmediata de este último resultado es que un espacio de medida es fuertemente resonante si y solo si es finito y resonante.

2.5. Una función maximal elemental

En el caso de considerar la función característica de un conjunto medible E , y denotando $t = \mu(E)$, por la desigualdad de Hardy-Littlewood (2.33) se tiene que

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E |f| d\mu \leq \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds. \quad (13)$$

Definición 2.40. Dada una función $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ localmente integrable, se define el *operador de Hardy* sobre f como

$$Af(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds, \quad t > 0.$$

A partir de (2.5), está claro que el promedio de f sobre cualquier conjunto medible de medida t está dominado por el promedio de f^* en el intervalo $(0, t)$. Tal y como veremos más adelante, resulta que el problema de acotación del operador de Hardy-Littlewood es equivalente a la acotación del operador de Hardy en el cono de funciones decrecientes. Por tanto, entenderemos este promedio de f^* como una función maximal asociada a f , lo que induce la siguiente definición.

Definición 2.41. Sea $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$. Se define la función maximal de f , y se denota f^{**} , como

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds = Af^*(t), \quad t > 0.$$

Proposición 2.42. Sean $f, g, \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_0(R, \mu)$, y $a \in \mathbb{R}$. Entonces f^{**} es una función no negativa, decreciente y continua en $(0, \infty)$. Además, se verifican las siguientes propiedades:

- (i) $f^{**} \equiv 0$ si y solo si $f = 0$ μ -a.e.
- (ii) $f^* \leq f^{**}$.
- (iii) Si $|g| \leq |f|$ μ -a.e., entonces $g^{**} \leq f^{**}$.
- (iv) $(af)^{**} = |a|f^{**}$.
- (v) Si $|f_n| \uparrow |f|$ μ -a.e., entonces $f_n^{**} \uparrow f^{**}$.

Demostración. Notemos que como f^* es decreciente, se tiene que f^{**} es finita para algún $t_0 > 0$ si y solo si es finita para cada $t > 0$. En efecto, supongamos que existe $t_0 > 0$ tal que $f^{**}(t_0) < \infty$. Entonces, para cada $t \leq t_0$ se tiene que

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \leq \frac{1}{t} \int_0^{t_0} f^*(s) ds = \frac{t_0}{t} \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} f^*(s) ds = \frac{t_0}{t} f^{**}(t_0) < \infty,$$

mientras que si $t > t_0$ se cumple que

$$\begin{aligned} f^{**}(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds = \frac{1}{t} \int_0^{t_0} f^*(s) ds + \frac{1}{t} \int_{t_0}^t f^*(s) ds \\ &\leq \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} f^*(u) du + \frac{1}{t} \int_{t_0}^t f^*(t_0) ds = f^{**}(t_0) + \frac{t - t_0}{t} f^*(t_0). \end{aligned}$$

Por tanto, f^{**} será finita para cada $t > 0$, o infinita para cada $t > 0$. En cualquier caso, f^{**} será no negativa y continua por el Teorema de la Convergencia Dominada. Además, como f^* es decreciente, dados $0 < t_1 \leq t_2$ se tiene que $f^*(s) \leq f^*(\frac{t_1}{t_2}s)$ para cada $s > 0$. De esta manera,

$$f^{**}(t_2) = \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} f^*(s) ds \leq \frac{1}{t_2} \int_0^{t_2} f^*\left(\frac{t_1}{t_2}s\right) ds = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} f^*(u) du = f^{**}(t_1),$$

por lo que f^{**} es decreciente.

Finalmente, las propiedades (i), (iii), (iv) y (v) son inmediatas a partir de la Proposición 2.28, mientras que para probar (ii) basta notar que, como f^* es decreciente, se tiene para cada $t > 0$ que

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \geq \frac{1}{t} \int_0^t f^*(t) ds = f^*(t).$$

□

Proposición 2.43. *Sea (R, μ) un espacio de medida resonante. Si $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$ y t está en el rango de μ , entonces*

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \sup \left\{ \int_E |f| d\mu : \mu(E) = t \right\}. \quad (14)$$

Demostración. Como t se encuentra en el rango de μ , existe un conjunto medible E de modo que $\mu(E) = t$. Sea $g = \chi_E$, de modo que $g^* = \chi_{[0,t]}$ por la Observación 2.26.

Notemos que una función \tilde{g} será equimedible con g si y solo si $|\tilde{g}|$ es igual μ -a.e. a la función característica de un medible F tal que $\mu(F) = t$. En efecto, si existe un medible F tal que $\mu(F) = t$ y $|\tilde{g}| = \chi_F$, entonces g y \tilde{g} serán equimedibles en virtud de la Observación 2.21. Supongamos ahora que g y \tilde{g} son equimedibles, de modo que

$$\mu_{\tilde{g}}(\lambda) = \mu_g(\lambda) = t\chi_{[0,1]}(\lambda).$$

Por tanto, se tiene que $\mu_{\tilde{g}}(\lambda) = \mu\{x \in R : |\tilde{g}(x)| > \lambda\} = 0$ para cada $\lambda \geq 1$, por lo que $|\tilde{g}| \leq 1$ μ -a.e. Análogamente se prueba que $|\tilde{g}| \geq 1$ μ -a.e., luego $|\tilde{g}|$ es la función característica del conjunto $F = \{x \in R : |\tilde{g}(x)| = 1\}$, que verifica

$$\mu(F) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in R : |\tilde{g}(x)| > 1 - \frac{1}{n}\right\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{\tilde{g}}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = t.$$

Como (R, μ) es resonante, concluimos que

$$\begin{aligned} f^{**}(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds = \frac{1}{t} \int_0^{\infty} f^*(s)\chi_{[0,t]}(s) ds = \frac{1}{t} \int_0^{\infty} f^*(s)g^*(s) ds \\ &= \frac{1}{t} \sup \left\{ \int_R |f\tilde{g}| d\mu : \mu_g = \mu_{\tilde{g}} \right\} = \frac{1}{t} \sup \left\{ \int_E |f| d\mu : \mu(E) = t \right\}. \end{aligned}$$

□

Una de las diferencias fundamentales entre f^* y su función maximal f^{**} , es que la igualdad (2.43) nos permite deducir que la función maximal f^{**} es subaditiva. Esto es,

$$(f + g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t), \quad \forall t > 0.$$

Además, aunque esto sólo se cumple a priori para espacios resonantes, podemos conseguir generalizar este resultado a espacios de medida σ -finitos arbitrarios. La idea es utilizar el *método de los retractos* [3, Theorem 3.4], que nos permite introducir un espacio de medida σ -finito dentro de un espacio de medida no atómico (y por tanto, resonante por la Proposición 2.37). La inclusión en este nuevo espacio resulta preservar la reordenada decreciente y su función maximal asociada, de modo que la subaditividad se sigue del caso resonante.

Teorema 2.44. *Sea (R, μ) un espacio de medida σ -finito y $f, g \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$. Entonces,*

$$(f + g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t), \quad \forall t > 0.$$

2.6. Espacios invariantes por reordenamientos

En los conocidos espacios ℓ_p^n , la norma de un vector de componentes positivas (a_1, \dots, a_n) depende obviamente de los valores a_1, \dots, a_n , pero no del orden en el que estos elementos están dispuestos. Esta propiedad puede generalizarse a ciertos espacios de Banach de funciones, conocidos como *espacios invariantes por reordenamientos*, en los cuales se puede desarrollar una teoría considerablemente más rica que la de los espacios de Banach de funciones más generales.

Definición 2.45. *Sea ρ una función norma definida sobre un espacio de medida σ -finito (R, μ) . Decimos que ρ es *invariante por reordenamientos* si*

$$\rho(f) = \rho(g), \quad \forall f, g \in \mathcal{M}_0(R, \mu).$$

Además, en tal caso el espacio de Banach de funciones $X = X(\rho)$ se dice que es un *espacio invariante por reordenamientos (r.i.)*.

Observación 2.46. *Por la Proposición 2.30, los espacios $L^p(R, \mu)$ son invariantes por reordenamientos.*

Una de las virtudes de los espacios invariantes por reordenamientos (sobre espacios de medida resonantes), es que muchas de las propiedades que hemos descrito tienen una interpretación en términos de f^* en lugar de f .

Proposición 2.47. *Sea ρ una función norma invariante por reordenamiento definida sobre un espacio de medida resonante (R, μ) . Entonces la norma asociada ρ' es también una función norma invariante por reordenamiento. Además, las normas ρ y ρ' vienen dadas por*

$$\begin{aligned} \rho'(g) &= \sup \left\{ \int_0^\infty f^*(s)g^*(s) ds : \rho(f) \leq 1 \right\}, \quad \forall g \in \mathcal{M}_0(R, \mu), \\ \rho(f) &= \sup \left\{ \int_0^\infty f^*(s)g^*(s) ds : \rho'(g) \leq 1 \right\}, \quad \forall f \in \mathcal{M}_0(R, \mu). \end{aligned} \quad (15)$$

Demostración. Dada $g \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$, como (R, μ) es resonante y ρ es invariante por reordenamientos se tiene que

$$\begin{aligned} \rho'(g) &= \sup_{\rho(\tilde{f}) \leq 1} \left\{ \int_R \tilde{f}g \, d\mu \right\} = \sup_{\substack{\rho(f) \leq 1 \\ \mu_f = \mu_{\tilde{f}}}} \left\{ \int_R fg \, d\mu \right\} = \sup_{\rho(f) \leq 1} \sup_{\mu_f = \mu_{\tilde{f}}} \left\{ \int_R fg \, d\mu \right\} \\ &= \sup_{\rho(f) \leq 1} \int_0^\infty f^*(s)g^*(s) \, ds. \end{aligned}$$

Razonando de forma análoga se demuestra (2.47). \square

Corolario 2.48. *Sea X un espacio de Banach de funciones sobre un espacio de medida resonante (R, μ) . Entonces X es invariante por reordenamientos si y solo si X' es invariante por reordenamientos, en cuyo caso se tiene que*

$$\begin{aligned} \|g\|_{X'} &= \sup \left\{ \int_0^\infty f^*(s)g^*(s) \, ds : \|f\|_X \leq 1 \right\}, \quad \forall g \in X', \\ \|f\|_X &= \sup \left\{ \int_0^\infty f^*(s)g^*(s) \, ds : \|g\|_{X'} \leq 1 \right\}, \quad \forall f \in X. \end{aligned}$$

Corolario 2.49 (Desigualdad de Hölder). *Sea X un espacio invariante por reordenamientos sobre un espacio de medida resonante (R, μ) . Si $f \in X$ y $g \in X'$, entonces*

$$\int_R |fg| \, d\mu \leq \int_0^\infty f^*(s)g^*(s) \, ds \leq \|f\|_X \|g\|_{X'}.$$

Demostración. Trivial por el Teorema 2.33 y el Corolario 2.48. \square

El siguiente resultado nos dice que, en cierto modo, los espacios invariantes por reordenamientos (sobre espacios de medida resonantes) están caracterizados por las reordenadas decrecientes de sus funciones. Más aún, estos espacios pueden interpretarse como espacios invariantes por reordenamientos sobre (\mathbb{R}^+, m) .

Teorema 2.50 (Teorema de representación de Luxemburg [25]). *Sea $X = X(\rho)$ un espacio invariante por reordenamientos definido sobre un espacio de medida resonante (R, μ) . Entonces, existe un espacio invariante por reordenamientos $\bar{X} = \bar{X}(\bar{\rho})$, definido sobre (\mathbb{R}^+, m) , de modo que*

$$\rho(f) = \bar{\rho}(f^*), \quad \forall f \in \mathcal{M}_0^+(R, \mu).$$

Además, si σ es una función norma sobre (\mathbb{R}^+, m) invariante por reordenamientos que representa a $\bar{\rho}$, en el sentido de que

$$\rho(f) = \sigma(f^*), \quad \forall f \in \mathcal{M}_0^+(R, \mu),$$

entonces la función norma asociada ρ' de ρ es representada de la misma manera por la norma asociada σ' de σ , esto es,

$$\rho'(g) = \sigma'(g^*), \quad \forall g \in \mathcal{M}_0^+(R, \mu).$$

Demostración. Véase [3, Theorem 4.10]. □

Ejemplo 2.51. Sea (R, μ) un espacio de medida resonante y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces, por la Proposición 2.28 se tiene que

$$\|f\|_{L^p(R, \mu)} = \|f^*\|_{L^p(\mathbb{R}^+, m)}, \quad \forall f \in L^p(R, \mu).$$

Por tanto, el espacio invariante por reordenamientos definido sobre (\mathbb{R}^+, m) asociado a $L^p(R, \mu)$, cuya existencia está asegurada por el teorema de representación de Luxemburg (Teorema 2.50), es justamente $L^p(\mathbb{R}^+, m)$.

2.7. La función fundamental

Algunas de las propiedades de los espacios invariantes por reordenamientos pueden reformularse a través de una función asociada a cada uno de estos espacios, la *función fundamental*. A través de esta herramienta, es posible clasificar estos espacios, y preguntarse cuáles son los espacios más “grandes” y “pequeños” que comparten la misma función fundamental, lo que nos lleva a los conocidos *espacios de Lorentz* $\Lambda(X)$ y $M(X)$.

Definición 2.52. Sea X un espacio invariante por reordenamientos sobre un espacio de medida resonante (R, μ) . Para cada $t > 0$ en el rango de μ , sea un conjunto medible E de modo que $\mu(E) = t$, y definamos

$$\varphi_X(t) := \|\chi_E\|_X.$$

La función φ_X se conoce como la *función fundamental* de X .

Como el espacio X es invariante por reordenamientos, la función fundamental φ_X está bien definida. En efecto, si tomamos $t > 0$ en el rango de μ , y dos conjuntos medibles E, F de modo que $\mu(E) = \mu(F) = t$, entonces

$$\|\chi_E\|_X = \|\chi_F\|_X.$$

Ejemplo 2.53. Sea (R, μ) un espacio de medida no atómico. Por la Observación 2.36, el rango de μ es el intervalo $[0, \mu(R)]$, y se puede comprobar que la función fundamental de $L^p(R, \mu)$ es,

$$\varphi_{L^p}(t) = \begin{cases} t^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \chi_{(0, \mu(R))}(t), & p = \infty \end{cases}, \quad 0 < t < \mu(R).$$

Ejemplo 2.54. Por el Teorema 2.37, sabemos que los únicos espacios de medida resonantes y atómicos son aquellos completamente atómicos, y cuyos átomos tienen todos la misma medida. Consideremos \mathbb{Z} con la medida de contar μ , cuyo rango es $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces, la función fundamental de $\ell_p = L^p(\mathbb{Z}, \mu)$ es,

$$\varphi_{\ell_p}(t) = \begin{cases} n^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \chi_{(0, \infty)}(n), & p = \infty \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Veamos a continuación algunas propiedades de la función fundamental.

Teorema 2.55. *Sea X un espacio invariante por reordenamientos sobre un espacio de medida resonante (R, μ) , y X' su espacio asociado. Entonces,*

$$\varphi_X(t)\varphi_{X'}(t) = t,$$

para cada $t > 0$ en el rango de μ .

Demostración. Si $t = 0$ el resultado es trivial, dado que toda función fundamental se anula en el origen. Por tanto, supongamos que $0 < t < \infty$. Como t está en el rango de μ , existe un conjunto medible E con $\mu(E) = t$, de modo que por la desigualdad de Hölder (Corolario 2.49), se tiene que

$$t = \mu(E) = \int_R \chi_E d\mu \leq \|\chi_E\|_X \|\chi_E\|_{X'} = \varphi_X(t)\varphi_{X'}(t).$$

La desigualdad opuesta se prueba utilizando la relación de Hardy-Littlewood-Pólya y el Lema de Hardy (Lema 2.31) (véase [3, Theorem 5.2] para una demostración más detallada). \square

Definición 2.56. Sea φ una función no negativa definida en $[0, \infty)$. Decimos que φ es *cuasicóncava* si

- (i) $\varphi(t)$ es creciente en $(0, \infty)$,
- (ii) $\varphi(t)/t$ es decreciente en $(0, \infty)$,
- (iii) $\varphi(t) = 0$ si y solo si $t = 0$.

Corolario 2.57. *Sea X un espacio invariante por reordenamientos sobre un espacio resonante (R, μ) . Entonces la función fundamental de X , φ_X , es cuasicóncava y continua excepto quizás en el origen.*

Demostración. Veamos que φ_X es cuasicóncava. Como X es un espacio de Banach de funciones, dados dos conjuntos medibles E, F con $E \subset F$, se tiene que $\|\chi_E\|_X \leq \|\chi_F\|_X$, y en consecuencia φ_X es creciente. Además, por la Proposición 2.48, X' es invariante por reordenamientos, de modo que aplicando el Teorema 2.55 deducimos que $\varphi_X(t)/t = 1/\varphi_{X'}(t)$ es decreciente, y trivialmente $\varphi_X(t) = 0$ si y solo si $t = 0$.

Consideremos $0 < t_0 < \infty$ en el rango de μ . Si (R, μ) es completamente atómico, entonces φ_X está definida sobre un conjunto discreto de $[0, \infty)$, y por tanto es continua. Supongamos que (R, μ) es no atómico. Como φ_X es creciente, si no es continua en t_0 tendrá, en el peor de los casos, un salto de discontinuidad en t_0 . Sin embargo, en ese caso $\varphi_X(t)/t$ no será decreciente a la derecha de t_0 , lo que supone una contradicción. \square

Observación 2.58. Se puede probar [3, Proposition 5.8] que toda función cuasicóncava es la función fundamental de cierto espacio de Banach de funciones invariante por reordenamientos.

Claramente, no toda función cuasicóncava es cóncava, para lo cual basta considerar la función $\varphi(t) = \max\{1, t\}$ si $t > 0$ y $\varphi(0) = 0$. Sin embargo, todo espacio invariante por reordenamiento sobre un espacio resonante se puede dotar de una norma equivalente a la inicial [3, Proposition 5.11], de forma que su función fundamental sea cóncava. Esto da pie a la siguiente definición.

Definición 2.59. Sea X un espacio invariante por reordenamientos sobre un espacio resonante (R, μ) , y asumamos sin pérdida de generalidad que su función fundamental φ_X es cóncava. El *espacio de Lorentz* $\Lambda(X)$ consiste en aquellas funciones de $\mathcal{M}_0(R, \mu)$ para las cuales

$$\|f\|_{\Lambda(X)} = \int_0^\infty f^*(s) d\varphi_X(s) < \infty.$$

De forma similar, se define el *espacio de Marcinkiewicz* $M(X)$ como aquellas funciones de $\mathcal{M}_0(R, \mu)$ para las cuales

$$\|f\|_{M(X)} = \sup_{0 < t < \infty} \left\{ f^{**}(t) \varphi_X(t) \right\} < \infty.$$

Ejemplo 2.60. Sabemos por el Ejemplo 2.53 que $\varphi_{L^1}(t) = t$ para todo $t \geq 0$, de modo que aplicando la Proposición 2.30 para cada $f \in L^1$,

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Lambda(L^1)} &= \int_0^\infty f^*(s) d\varphi_{L^1}(s) = \int_0^\infty f^*(s) ds = \int_R |f| d\mu, \\ \|f\|_{M(L^1)} &= \sup_{0 < t < \infty} \left\{ f^{**}(t) \varphi_{L^1}(t) \right\} = \sup_{0 < t < \infty} \left\{ t f^{**}(t) \right\} = \sup_{0 < t < \infty} \left\{ \int_0^t f^*(s) ds \right\} \\ &= \int_0^\infty f^*(s) ds = \int_R |f| d\mu. \end{aligned}$$

Por tanto, $\Lambda(L^1) = L^1 = M(L^1)$. De forma similar, $\varphi_{L^\infty}(t) = \chi_{(0, \mu(R))}(t)$ para todo $t \geq 0$, de manera que dado $f \in L^\infty$,

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Lambda(L^\infty)} &= \int_0^\infty f^*(s) d\varphi_{L^\infty}(s) = f^*(0) = \sup_{x \in R} \text{ess } |f(x)|, \\ \|f\|_{M(L^\infty)} &= \sup_{0 < t < \infty} \left\{ f^{**}(t) \varphi_{L^\infty}(t) \right\} = \sup_{0 < t < \infty} \left\{ f^{**}(t) \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ f^{**}(t) \right\} = f^*(0) = \sup_{x \in R} \text{ess } |f(x)|. \end{aligned}$$

En conclusión, $\Lambda(L^\infty) = L^\infty = M(L^\infty)$.

El siguiente resultado expone la relevancia de estas clases de funciones en el contexto de los espacios invariantes por reordenamientos. La idea es que, dado un espacio invariante por reordenamientos X , los espacios $\Lambda(X)$ y $M(X)$ se corresponden, respectivamente, con el espacio invariante por reordenamientos más “pequeño” y con el más “grande”, que comparte la función fundamental φ_X del espacio original X .

Teorema 2.61. *Sea X un espacio invariante por reordenamientos sobre un espacio resonante (R, μ) . Entonces, los espacios $\Lambda(X)$ y $M(X)$ son espacios de Banach de funciones invariantes por reordenamientos, y sus funciones fundamentales son φ_X . Además,*

$$\Lambda(X) \hookrightarrow X \hookrightarrow M(X),$$

y las inclusiones son de norma 1.

Demostración. Véase [3, Theorem 4.47]. □

2.8. Los índices de Boyd

En esta última sección, estudiaremos los conocidos índices de Boyd $\underline{\alpha}_X, \bar{\alpha}_X$ de un espacio invariante por reordenamientos, introducidos en 1969 por W. D. Boyd [5]. Analizando las propiedades de los operadores de dilatación somos capaces de definir estos parámetros, que en cierto sentido nos dicen dónde se sitúa nuestro espacio en la escala entre L^1 y L^∞ (véase [3, Theorem 6.6]). Sin embargo, antes debemos recoger algunos resultados elementales sobre la teoría de funciones subaditivas.

Definición 2.62. Decimos que una función $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *subaditiva* si

$$w(s+t) \leq w(s) + w(t), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Lema 2.63. *Sea w una función creciente y subaditiva en \mathbb{R} tal que $w(0) = 0$. Entonces,*

$$-w(-s) \leq w(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Además, los límites $\lim_{s \rightarrow \infty} w(s)/s$ y $\lim_{s \rightarrow -\infty} w(s)/s$ existen, y se cumple que

$$\bar{\alpha} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{w(s)}{s} = \inf_{s > 0} \frac{w(s)}{s}, \quad \underline{\alpha} = \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{w(s)}{s} = \sup_{s < 0} \frac{w(s)}{s}.$$

Demostración. Dado $s \in \mathbb{R}$, por la subaditividad de w sabemos que

$$0 = w(0) = w(s + (-s)) \leq w(s) + w(-s).$$

Por otro lado, sea $\bar{\alpha} = \inf_{s > 0} w(s)/s$. Está claro que $0 \leq \bar{\alpha} \leq w(1)$, por lo que en particular $\bar{\alpha}$ es finito. Además, dado $\epsilon > 0$, sabemos que existe $t_0 > 0$ tal que $\bar{\alpha} \leq w(t)/t < \bar{\alpha} + \epsilon$, y por tanto podemos escoger $N \in \mathbb{N}$ tal que $(1 + 1/N)w(t)/t < \bar{\alpha} + \epsilon$. De este modo, para cada $s \geq Nt$ existe $n \geq N$ tal que $nt \leq s < (n+1)t$, por lo que como w es creciente y subaditiva

$$\bar{\alpha} \leq \frac{w(s)}{s} \leq \frac{w((n+1)t)}{nt} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{w(t)}{t} \leq \left(1 + \frac{1}{N}\right) \frac{w(t)}{t} < \bar{\alpha} + \epsilon,$$

luego $\lim_{s \rightarrow \infty} w(s)/s = \bar{\alpha}$. □

Definición 2.64. Decimos que una función $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ es *submultiplicativa* si

$$\psi(st) \leq \psi(s)\psi(t), \quad t, s > 0.$$

Observación 2.65. Dada una función $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ submultiplicativa, le podemos asociar la función

$$w(s) = \log \psi(e^s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Claramente w es una función subaditiva. Además, si ψ es creciente y cumple que $\psi(1) = 1$, entonces w satisface las hipótesis del Lema 2.63. Por tanto, existen los límites

$$\bar{\alpha}(\psi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \psi(t)}{\log t} = \inf_{t > 1} \frac{\log \psi(t)}{\log t}, \quad \underline{\alpha}(\psi) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\log \psi(t)}{\log t} = \sup_{0 < t < 1} \frac{\log \psi(t)}{\log t}.$$

En lo que queda de sección, denotaremos por $X = X(\rho)$ a un espacio de Banach de funciones invariante por reordenamientos sobre un espacio de medida (R, μ) σ -finito, infinito y no atómico (la teoría se puede desarrollar también si el espacio de medida es resonante [3]). En ese caso, sabemos que el Teorema de representación de Luxemburg (Teorema 2.50) proporciona un espacio invariante por reordenamientos $\bar{X} = \bar{X}(\bar{\rho})$ sobre (\mathbb{R}^+, m) , de modo que

$$\rho(f) = \bar{\rho}(f^*), \quad \forall f \in \mathcal{M}_0^+(R, \mu).$$

Definición 2.66. Dado $t > 0$, se define el *operador de dilatación* como

$$E_t f(s) = f(st), \quad s > 0, \quad f \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^+, m).$$

Además, si X es un espacio invariante por reordenamientos, y \bar{X} es el espacio de representación dado por el Teorema de representación de Luxemburg (Teorema 2.50), se define la función

$$h_X(t) = \|E_{1/t}\|_{\bar{X} \rightarrow \bar{X}}, \quad t > 0.$$

A priori, no sabemos si los operadores de dilatación están acotados en todo espacio invariante por reordenamientos. El siguiente resultado confirma su acotación y además proporciona una estimación de su norma como operadores.

Proposición 2.67. *La función h_X es una función creciente y submultiplicativa sobre \mathbb{R}^+ tal que $h_X(1) = 1$ y satisface la estimación*

$$h_X(t) \leq \max\{1, t\}, \quad t > 0. \tag{16}$$

Además, si X' es el espacio asociado de X , entonces

$$h_X(t) = t h_{X'}\left(\frac{1}{t}\right), \quad t > 0.$$

Demostración. Para probar la desigualdad (2.67) son necesarios resultados de interpolación sobre espacios invariantes por reordenamientos (véase [3, Proposition 5.11] para una demostración en detalle de este hecho). Por otro lado, observemos que E_1 es la identidad, luego $h_X(1) = 1$ trivialmente. Además, dado $s > 0$ y $f \in \bar{X}$, se tiene que

$$\begin{aligned} m_{E_t f}(s) &= |\{x \in \mathbb{R} : E_t f(x) > s\}| = |\{x \in \mathbb{R} : f(tx) > s\}| \\ &= |\{x/t \in \mathbb{R} : f(x) > s\}| = \left| \frac{1}{t} \{x \in \mathbb{R} : f(x) > s\} \right| \\ &= \frac{1}{t} |\{x \in \mathbb{R} : f(x) > s\}| = \frac{m_f(s)}{t}, \end{aligned}$$

de donde se sigue fácilmente que $(E_t f)^* = E_t f^*$. Por tanto, por el Corolario 2.48, se cumple que

$$\begin{aligned} \|E_{1/t} f\|_{\bar{X}} &= \sup \left\{ \int_0^\infty E_{1/t} f^*(s) g^*(s) ds : \|g\|_{X'} \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_0^\infty f^*(s/t) g^*(s) ds : \|g\|_{X'} \leq 1 \right\}. \end{aligned} \tag{17}$$

De esta manera, está claro que h_X es una función creciente. Por otro lado, como $E_s E_t = E_{st}$ para cada $s, t > 0$, sabemos que h_X es además submultiplicativa. Finalmente, realizando el cambio de variables $u = s/t$ en (2.8), deducimos que

$$\|E_{1/t} f\|_{\bar{X}} \leq t \|f\|_{\bar{X}} \|E_t g\|_{(\bar{X})'} = t \|f\|_{\bar{X}} \|E_t g\|_{\bar{X}'} \leq t \|f\|_{\bar{X}} h_X \left(\frac{1}{t} \right),$$

donde hemos utilizado que $(\bar{X})' = \bar{X}'$, consecuencia del Teorema de representación de Luxemburg (Teorema 2.50). Por tanto, $h_X(t) \leq t h_{X'}(1/t)$ para cada $t > 0$. La desigualdad opuesta se deduce del teorema de Lorentz-Luxemburg (véase [3, Teorema 2.7]). \square

Definición 2.68. Se definen los *índices de Boyd* $\underline{\alpha}_X$ y $\bar{\alpha}_X$ como

$$\underline{\alpha}_X = \sup_{0 < t < 1} \frac{\log h_X(t)}{\log t}, \quad \bar{\alpha}_X = \inf_{1 < t < \infty} \frac{\log h_X(t)}{\log t}.$$

Proposición 2.69. *Los índices de Boyd vienen dados por los límites*

$$\underline{\alpha}_X = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\log h_X(t)}{\log t}, \quad \bar{\alpha}_X = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log h_X(t)}{\log t}, \tag{18}$$

y satisfacen

$$0 \leq \underline{\alpha}_X \leq \bar{\alpha}_X \leq 1.$$

Además,

$$\underline{\alpha}_{X'} = 1 - \bar{\alpha}_X, \quad \bar{\alpha}_{X'} = 1 - \underline{\alpha}_X. \tag{19}$$

Demostración. Por la Proposición 2.67 sabemos que h_X es creciente, submultiplicativa y verifica que $h_X(1) = 1$. Entonces, por el Lema 2.63 y la Observación 2.65, concluimos (2.69). Por la Proposición 2.67 sabemos que

$$\frac{\log h_X(t)}{\log t} = 1 - \frac{\log h_X(1/t)}{\log(1/t)}, \quad t > 0,$$

de donde se sigue (2.69). Además, el mismo resultado garantiza que $h_X(t) \leq t$ para todo $t > 0$. De esta manera, sabemos que $\bar{\alpha}_X \leq 1$, y como $1 - \underline{\alpha}_X = \bar{\alpha}_{X'} \leq 1$, deducimos también que $\underline{\alpha}_X \geq 0$. Por último, como h es submultiplicativa sabemos que $1 = h_X(1) \leq h_X(t)h_X(1/t)$ para cada $t > 0$. Por tanto,

$$\frac{\log h_X(1/t)}{\log(1/t)} = \frac{\log \left(\frac{1}{h_X(t)} \right)}{\log t} \leq \frac{\log h_X(t)}{\log t},$$

para cada $t > 1$, luego tomando $t \rightarrow \infty$ concluimos que $\underline{\alpha}_X \leq \bar{\alpha}_X$. \square

Ejemplo 2.70. Sea (R, μ) un espacio de medida resonante. Sabemos por la Proposición 2.30 que

$$\|f\|_{L^p(R, \mu)} = \|f^*\|_{L^p(\mathbb{R}^+, m)}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

para cada $f \in L^p(R, \mu)$. Por tanto, el espacio de representación de $L^p(R, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, que nos proporciona el teorema de representación de Luxemburg (Teorema 2.50) es justamente $L^p(\mathbb{R}^+, m)$, $1 \leq p \leq \infty$. De este modo, si $t > 0$, $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^+, m)$,

$$\|E_{1/t}f\|_{L^p(\mathbb{R}^+, m)}^p = \int_0^\infty |f(s/t)|^p ds = t \int_0^\infty |f(r)|^p dr = t \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^+, m)}^p,$$

luego $E_{1/t}$ está acotado en $L^p(\mathbb{R}^+, m)$, y su norma es $\|E_{1/t}\| = t^{1/p}$. Por otro lado, si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^+, m)$ se tiene que

$$\|E_{1/t}f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, m)} = \sup_{0 < s < \infty} \text{ess } |f(s/t)| = \sup_{0 < z < \infty} \text{ess } |f(z)| = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, m)}.$$

luego $E_{1/t}$ está acotado en $L^\infty(\mathbb{R}^+, m)$, y su norma es $\|E_{1/t}\| = 1$. En conclusión,

$$h_{L^p(R, \mu)}(t) = \begin{cases} t^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ 1 & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Por tanto, si $1 \leq p < \infty$, los índices de Boyd de $L^p(R, \mu)$ serán

$$\underline{\alpha}_{L^p(R, \mu)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\log h_{L^p(R, \mu)}(t)}{\log t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\log t^{1/p}}{\log t} = \frac{1}{p},$$

$$\bar{\alpha}_{L^p(R, \mu)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log h_{L^p(R, \mu)}(t)}{\log t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t^{1/p}}{\log t} = \frac{1}{p}.$$

mientras que si $p = \infty$,

$$\begin{aligned}\underline{\alpha}_{L^\infty(R,\mu)} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\log h_{L^\infty(R,\mu)}(t)}{\log t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\log 1}{\log t} = 0, \\ \bar{\alpha}_{L^\infty(R,\mu)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log h_{L^\infty(R,\mu)}(t)}{\log t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log 1}{\log t} = 0.\end{aligned}$$

Aunque los índices de Boyd tienen interés en sí mismos, uno de sus aspectos más fundamentales es su relación con la acotación de ciertos operadores clásicos sobre espacios invariantes por reordenamientos. Si bien aún no hemos definido el operador maximal de Hardy-Littlewood (Capítulo 3) y la transformada de Hilbert (Capítulo 5), es interesante tener siempre en mente los siguientes resultados clásicos.

Teorema 2.71 (G. G. Lorentz [24], T. Shimogaki [33]). *Sea X un espacio invariante por reordenamientos sobre \mathbb{R}^n . Entonces el operador maximal de Hardy-Littlewood M está acotado en X si y solo si $\bar{\alpha}_X < 1$.*

Demostración. Véase [3, Theorem 5.17]. □

Teorema 2.72 (D. W. Boyd [4]). *Sea X un espacio invariante por reordenamientos sobre \mathbb{R}^n . Entonces la transformada de Hilbert H está acotada en X si y solo si se cumple que*

$$0 < \underline{\alpha}_X \leq \bar{\alpha}_X < 1.$$

Demostración. Véase [3, Theorem 5.18]. □

Capítulo 3

Espacios de Lorentz y el operador maximal de Hardy-Littlewood

El *operador maximal de Hardy-Littlewood* es una de las piedras angulares del análisis moderno, estableciendo vínculos entre el análisis armónico, el análisis funcional y las ecuaciones en derivadas parciales. Su importancia no solo recae en las propiedades intrínsecas que exhibe, sino en sus profundas implicaciones en el estudio de ciertas funciones y sus promedios.

En este capítulo desarrollaremos algunas propiedades del operador maximal de Hardy-Littlewood, así como su relación con los espacios de Lorentz. En la sección 3.1 discutiremos la acotación fuerte en los espacios L^p y el teorema de diferenciación de Lebesgue, para lo cual estudiaremos la relación entre el operador maximal y el operador de Hardy actuando sobre el cono de funciones decrecientes (Teorema 3.17), así como las desigualdades clásicas de Hardy (Lema 3.18). En la sección 3.2 veremos cómo surgen de forma natural los espacios de Lorentz al interpolar entre L^1 y L^∞ , y su conexión con la acotación débil del operador maximal de Hardy-Littlewood. Además, discutiremos algunas de sus propiedades funcionales, y las inclusiones (continuas) clásicas entre los mismos.

El libro de referencia en este capítulo será [3].

3.1. El operador maximal de Hardy-Littlewood

En general, el operador maximal de Hardy-Littlewood puede definirse sobre espacios métricos de medida con buenas propiedades, como puede ser que la medida sea doblante. Sin embargo, en esta sección nos centraremos en su versión clásica sobre \mathbb{R}^n , definida para funciones localmente integrables.

Definición 3.1. Se define el *operador maximal de Hardy-Littlewood* como la aplicación que, a cada $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, le asocia su función maximal $Mf : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por

$$(Mf)(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (20)$$

3.1. EL OPERADOR MAXIMAL DE HARDY-LITTLEWOOD

donde el supremo se extiende sobre todos los cubos (con lados paralelos a los ejes) que contienen a x en su interior.

Observación 3.2. Existen otras versiones de este operador, como puede ser el *operador maximal de Hardy-Littlewood centrado*,

$$(M_C f)(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

donde el supremo se extiende sobre todos los cubos (con lados paralelos a los ejes) centrados en x , o el *operador maximal de Hardy-Littlewood sobre bolas*,

$$(M_B f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

En cualquier caso, no es difícil comprobar que estas definiciones son equivalentes, en el sentido de que existen constantes $c_n, c'_n > 0$, que no dependen de f , de manera que

$$c_n M_B f(x) \leq M f(x) \leq c'_n M_B f(x), \quad c_n M_C f(x) \leq M f(x) \leq c'_n M_C f(x),$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Por tanto, las acotaciones que veremos a continuación son las mismas para todos estos operadores maximales. De esta manera, por comodidad, será suficiente trabajar con el operador dado por (3.1).

Antes de estudiar las diversas propiedades del operador maximal, veamos que aplicado sobre una función localmente integrable este es, al menos, una función medible.

Proposición 3.3. Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, entonces Mf es una función medible. Más aún, el conjunto

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\},$$

es abierto para cada $\lambda > 0$.

Demostración. Sea $\lambda > 0$ cualquiera, veamos que E_λ es abierto, y por tanto medible. Sea $x \in E_\lambda$ arbitrario. Como

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy > \lambda,$$

existe un cubo Q_x y $r > 0$ de manera que $B(x, r) \subset Q_x$ y además,

$$\frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x} |f(y)| dy > \lambda.$$

Veamos que $B(x, r) \subset E_\lambda$. Dado $z \in B(x, r) \subset Q_x$, se tiene que

$$Mf(z) = \sup_{Q \ni z} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \geq \frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x} |f(y)| dy > \lambda,$$

por lo que $z \in E_\lambda$. □

Observación 3.4. Es fácil comprobar que el operador maximal es sublineal, es decir,

$$M(f + g) \leq Mf + Mg, \quad M(\lambda f) = |\lambda|Mf,$$

para cada $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Uno de las primeras cuestiones que surgen al tratar con el operador maximal de Hardy-Littlewood es su acotación entre espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $p \in [1, \infty]$, esto es, si

$$M : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n).$$

El caso $p = \infty$ es trivial, dado que

$$\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty, \quad \forall f \in L^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (21)$$

Por tanto, si M estuviera acotado en $L^1(\mathbb{R}^n)$, podríamos aplicar el Teorema de Interpolación de Riesz-Thorin (véase [3, Theorem 2.2]) para concluir su acotación para todo $p \in [1, \infty]$. Sin embargo, no sólo M no está acotado en $L^1(\mathbb{R}^n)$, sino que no está ni siquiera bien definido (Proposición 3.5).

Una solución a este problema pasa por buscar un espacio en el que el operador maximal esté acotado de forma natural. La idea clave está en la desigualdad de Chebyshev, que nos dice que para cada función f medible se tiene que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \epsilon\}| \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy.$$

En el caso de que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, esta desigualdad nos da una cota sobre la medida de los conjuntos de nivel de nuestra función. Sin embargo, es posible tener cotas similares aunque la función no sea integrable, lo que nos da la pista de cómo podríamos debilitar los espacios L^p clásicos. Esta idea da lugar a los espacios de Lorentz, aunque antes de introducirlos, estudiaremos el estrecho vínculo entre la reordenada decreciente de la función maximal de Hardy-Littlewood $(Mf)^*$, y la función maximal f^{**} que se introdujo en el capítulo anterior, lo que nos permitirá establecer la acotación fuerte del operador maximal M .

Proposición 3.5. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es no nula, entonces $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$. Más aún, existen constantes $R, C > 0$ tal que*

$$Mf(x) \geq \frac{C}{(\|x\|_2)^n},$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\|_2 > R$.

Demostración. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ no nula. Consideremos el conjunto $E = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$, que es medible y de medida estrictamente positiva. Como $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(0, k)$, existe $R \in \mathbb{N}$ tal que

$$m(B(0, R) \cap E) > 0.$$

3.1. EL OPERADOR MAXIMAL DE HARDY-LITTLEWOOD

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\|_2 > R$. Si consideramos $Q_x = [-\|x\|_2, \|x\|_2]^n$, se tiene que $B(0, R) \subset Q_x$, y por tanto,

$$\begin{aligned} Mf(x) &= \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \geq \frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x} |f(y)| dy \\ &\geq \frac{1}{|Q_x|} \int_{B(0,R) \cap E} |f(y)| dy = \frac{1}{(2\|x\|_2)^n} \int_{B(0,R) \cap E} |f(y)| dy = \frac{C}{\|x\|_2^n}, \end{aligned}$$

donde $C = \frac{1}{2^n} \int_{B(0,R) \cap E} |f(y)| dy > 0$.

Finalmente, el hecho de que $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ se sigue de que

$$\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x) dx \geq \int_{\|x\|_2 > R} Mf(x) dx \geq \int_{\|x\|_2 > R} \frac{C}{\|x\|_2} dx = \infty.$$

□

Para alcanzar nuestro objetivo principal en esta sección, una estimación del “tamaño” de Mf para una función $f \in L^p$ con $p > 1$, necesitaremos una serie de lemas de recubrimientos (entre los cuales se encuentra una versión elemental del Lema del recubrimiento de Vitali), y otros resultados relacionados con la reordenada decreciente.

Lema 3.6. *Sean Q_1, Q_2 dos cubos en \mathbb{R}^n tal que $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$. Si $m(Q_1) \leq m(Q_2)$, entonces*

$$Q_1 \subset \tilde{Q}_2,$$

donde \tilde{Q}_2 es el cubo concéntrico con Q_2 y de lado 3 veces el de Q_2 .

Demostración. Sean $c_1 \in \mathbb{R}^n$, $l_1 > 0$ y $c_2 \in \mathbb{R}^n$, $l_2 > 0$ los centros y longitudes de los lados de Q_1 y Q_2 respectivamente, de forma que

$$Q_1 = B_\infty(c_1, l_1/2), \quad Q_2 = B_\infty(c_2, l_2/2), \quad \tilde{Q}_2 = B_\infty(c_2, 3l_2/2).$$

Sea $x_0 \in Q_1 \cap Q_2$, y observemos que $l_1 = m(Q_1)^{1/n} \leq m(Q_2)^{1/n} = l_2$. Entonces, para cada $x \in Q_1$ se tiene que

$$\|x - c_2\|_\infty \leq \|x - c_1\|_\infty + \|c_1 - x_0\|_\infty + \|x_0 - c_2\|_\infty \leq \frac{l_1}{2} + \frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{2} \leq \frac{3}{2}l_2,$$

y por tanto $Q_1 \subset \tilde{Q}_2$. □

Lema 3.7. *Sea Ω un subconjunto medible de \mathbb{R}^n de medida finita y \mathcal{F} una colección de cubos Q que recubren a Ω . Entonces existe una subfamilia finita Q_1, \dots, Q_K de \mathcal{F} , con cubos disjuntos dos a dos, tal que*

$$|\Omega| \leq 4^n \sum_{k=1}^K |Q_k|. \quad (22)$$

Demostración. Por la regularidad interior de la medida de Lebesgue de \mathbb{R}^n , el conjunto Ω lo podemos aproximar desde dentro tanto como se quiera mediante conjuntos compactos. Además, cada cubo Q de la familia \mathcal{F} se puede reemplazar por un cubo abierto más grande con medida tan próxima como se quiera a la medida del cubo original Q . Por tanto, basta probar el lema suponiendo que Ω es compacto y los cubos Q de la familia \mathcal{F} son abiertos, siempre y cuando se demuestre (3.7) para una constante menor que 4^n (en nuestro caso será 3^n).

Por tanto, en estas condiciones \mathcal{F} es un recubrimiento abierto del conjunto Ω compacto, con lo que existe una cantidad finita de cubos de la familia \mathcal{F} que cubren a Ω . Por tanto, podemos suponer también que la familia \mathcal{F} es finita. Sea Q_1 el cubo más grande en \mathcal{F} , sea Q_2 el cubo más grande de los restantes de \mathcal{F} que sea disjunto con Q_1 , sea Q_3 el cubo más grande de los restantes de \mathcal{F} que sea disjunto con Q_2 , y así recursivamente. Como \mathcal{F} es finita, el proceso anterior termina después de un cierto número finito de pasos, resultando así un número finito de cubos Q_1, \dots, Q_K . Para cada $k \in \{1, \dots, K\}$, sea Q_k^* el cubo concéntrico con Q_k pero que tiene sus lados tres veces más largos que los lados de Q_k . Entonces la familia $\{Q_k^*\}_{k=1}^K$ recubre a Ω . En efecto, por reducción al absurdo, supongamos que no es así, luego existe $x \in \Omega \setminus \cup_{k=1}^K Q_k^*$, y dado que \mathcal{F} recubre a Ω , tenemos que x pertenece, al menos, a uno cubo Q de la familia \mathcal{F} . Tenemos que Q no pertenece a la familia $\{Q_k^*\}_{k=1}^K$ ya que si $Q = Q_k^*$ para algún $k \in \{1, \dots, K\}$, tendríamos que x pertenece a Q_k^* , y llegaríamos a una contradicción, porque hemos supuesto que $x \in \Omega \setminus \cup_{k=1}^K Q_k^*$. Por construcción sabemos que existe $k \in \{1, \dots, K\}$ de manera que $Q_k \cap Q \neq \emptyset$ y $|Q| \leq |Q_k|$, porque si $Q_k \cap Q = \emptyset$ para cada $k = 1, \dots, K$. Aplicando el Lema 3.6, tenemos que $Q \subset Q_k^*$, con lo que x pertenece a Q_k^* , y llegamos a una contradicción, dado que habíamos supuesto que $x \in \Omega \setminus \cup_{k=1}^K Q_k^*$. Luego la familia $\{Q_k^*\}_{k=1}^K$ recubre a Ω , de modo que

$$|\Omega| \leq \sum_{k=1}^K |Q_k^*| = 3^n \sum_{k=1}^K |Q_k|.$$

□

Lema 3.8. *Sea (R, μ) un espacio de medida y $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$. Entonces,*

$$\sup_{t>0} t\mu_f(t) = \sup_{t>0} tf^*(t).$$

Demostración. Veamos en primer lugar que $\sup_{t>0} t\mu_f(t) \leq \sup_{t>0} tf^*(t)$. En el caso de que $\sup_{t>0} tf^*(t) = \infty$ el resultado es trivial, por lo que asumamos que $\sup_{t>0} tf^*(t) < \infty$. Sea $t > 0$ arbitrario. Supongamos que $f^*(t) > 0$, pues en caso contrario no hay nada que probar. Consideremos $\epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon < f^*(t)$, y definamos $t_\epsilon = f^*(t) - \epsilon < f^*(t)$. Entonces, por la Proposición 2.28 tenemos que $t \leq \mu_f(t_\epsilon)$, y por tanto,

$$t(f^*(t) - \epsilon) \leq t_\epsilon \mu_f(t_\epsilon) \leq \sup_{s>0} t\mu_f(s).$$

Tomando el límite $\epsilon \rightarrow 0$, concluimos que

$$tf^*(t) \leq \sup_{t>0} t\mu_f(t).$$

3.1. EL OPERADOR MAXIMAL DE HARDY-LITTLEWOOD

Para la desigualdad contraria, supongamos sin pérdida de generalidad que $\sup_{t>0} t\mu_f(t) < \infty$ y tomemos $\epsilon > 0$ arbitrario. Al igual que antes basta suponer que $\mu_f(t) > 0$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon < \mu_f(s)$, y definamos $t_\epsilon = \mu_f(t) - \epsilon < \mu_f(t)$. Entonces, por la Proposición 2.28 tenemos que $t \leq f^*(t_\epsilon)$, y por tanto

$$t(\mu_f(t) - \epsilon) \leq t_\epsilon f^*(t_\epsilon) \leq \sup_{t>0} t\mu_f^*(t).$$

Tomando límite $\epsilon \rightarrow 0$, concluimos que

$$s\mu_f(s) \leq \sup_{t>0} tf^*(t).$$

□

Teorema 3.9. *Si f pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$t(Mf)^*(t) \leq 4^n \|f\|_{L^1}, \quad t > 0. \quad (23)$$

Demostración. Supongamos en primer lugar que f tiene soporte compacto, en cuyo caso, aplicando la Proposición 3.5, tenemos que existen $R, c > 0$ tales que $(Mf)(x) \geq c\|x\|^{-n}$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\| \geq R$. En particular, para cada $\lambda > 0$, el conjunto definido como $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : (Mf)(x) > \lambda\}$ tiene medida finita, dado que

$$E_\lambda \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sqrt[n]{\frac{c}{\lambda}} > \|x\| \right\} = B\left(0, \sqrt[n]{\frac{c}{\lambda}}\right).$$

Además, para cada $x \in E_\lambda$ existe un cubo Q_x que contiene a x tal que

$$\lambda|Q_x| < \int_{Q_x} |f(y)| dy. \quad (24)$$

La colección de todos esos cubos Q_x cubren a E_λ , de modo que aplicando el Lema 3.7 existe un número finito de cubos, Q_1, \dots, Q_K , de esa colección tales que

$$|E_\lambda| \leq 4^n \sum_{k=1}^K |Q_k|. \quad (25)$$

Por tanto, combinando (3.1) con (3.1), obtenemos

$$m_{Mf}(\lambda) = |E_\lambda| \leq 4^n \sum_{k=1}^K |Q_k| \leq \frac{4^n}{\lambda} \sum_{k=1}^K \int_{Q_k} |f(y)| dy \leq \frac{4^n}{\lambda} \|f\|_{L^1}.$$

De esta manera, por el Lema 3.8 se tiene que

$$t(Mf)^*(t) \leq \sup_{t>0} t(Mf)^*(t) = \sup_{\lambda>0} \lambda m_{Mf}(\lambda) \leq 4^n \|f\|_{L^1},$$

para cada $t > 0$.

En el caso general de una función integrable f , podemos tomar una sucesión de funciones simples $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $|f_k| \uparrow |f|$ m -a.e. Claramente $\{Mf_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente. Veamos además que $Mf_k \uparrow Mf$, o equivalentemente, que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple

$$\sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f_k(y)| dy \right\}.$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Dado un cubo Q que contenga a x , se tiene que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f_k(y)| dy \leq \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f_k(y)| dy,$$

para cada $k \geq 1$. Por tanto, por el Teorema de la Convergencia Monótona,

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |f_k(y)| dy \right\} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f_k(y)| dy \right\},$$

de modo que,

$$\sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f_k(y)| dy \right\}.$$

Por otro lado, dado un cubo Q que contenga a x , se tiene que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f_k(y)| dy \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f_k(y)| dy = \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy,$$

para cada $k \geq 1$. Por tanto,

$$\sup_{Q \ni x} \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |f_k(y)| dy \right\} \leq \sup_{Q \ni x} \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \right\},$$

y en consecuencia,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f_k(y)| dy \right\} \leq \sup_{Q \ni x} \left\{ \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \right\}.$$

Finalmente, como $Mf_k \uparrow Mf$, por la Proposición 2.28 se tiene que $(Mf_k)^* \uparrow (Mf)^*$, y dado que $f_k \uparrow f$, por el Teorema de la Convergencia Monótona sabemos que $\|f_k\|_{L^1} \uparrow \|f\|_{L^1}$. De esta manera, como (3.9) se cumple para cada f_k , entonces también será cierto para f . \square

En esencia, el resultado anterior implica que, dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, el operador maximal aplicado a f , Mf , satisface la desigualdad

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}| \leq \frac{4^n}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy.$$

Este tipo de acotaciones, que se conocerán más adelante como acotaciones débiles, resultan tener una importante aplicación en la diferenciación de integrales.

3.1. EL OPERADOR MAXIMAL DE HARDY-LITTLEWOOD

Teorema 3.10 (Teorema de diferenciación de Lebesgue). *Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$\lim_{\substack{|Q| \rightarrow 0 \\ Q \ni x}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f(x)| dy = 0, \quad (26)$$

en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definamos para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(\Omega f)(x) = \limsup_{\substack{|Q| \rightarrow 0 \\ x \in Q}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f(x)| dy.$$

Veamos que $\Omega f = 0$ m -a.e. Por un lado, está claro que

$$(\Omega f)(x) \leq (Mf)(x) + |f(x)|,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por tanto, aplicando la Proposición 2.28 para cada $t > 0$,

$$(\Omega f)^*(t) \leq (Mf)^*\left(\frac{t}{2}\right) + f^*\left(\frac{t}{2}\right),$$

y la Proposición 2.42,

$$f^*\left(\frac{t}{2}\right) \leq f^{**}\left(\frac{t}{2}\right) \leq \frac{2}{t} \|f\|_{L^1},$$

concluimos por el Teorema 3.9 que

$$(\Omega f)^*(t) \leq \frac{4^n 2}{t} \|f\|_{L^1} + \frac{2}{t} \|f\|_{L^1} \leq \frac{2(4^n + 1)}{t} \|f\|_{L^1} = \frac{C_n}{t} \|f\|_{L^1}. \quad (27)$$

Además, dada $h \in C_c(\mathbb{R}^n)$, por el Teorema Fundamental del Cálculo es fácil comprobar que $\Omega f = \Omega(f - h)$, de manera que aplicando (3.1) a $f - h$, obtenemos que

$$(\Omega f)^*(t) \leq \frac{C}{t} \|f - h\|_{L^1}.$$

Además, es bien sabido que $C_c(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^1(\mathbb{R}^n)$, por lo que existe una sucesión $\{h\}_{n \geq 1} \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - h_n\|_{L^1} = 0$. Por tanto, $(\Omega f)^*(t) = 0$ para cada $t > 0$, de donde concluimos por la Proposición 2.28 que $\Omega f(x) = 0$ m -a.e.

En el caso general de que $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, tomemos $N \in \mathbb{N}$ cualquiera. Sabemos que f es integrable en $B(0, N)$, de modo que si consideramos la extensión de $f_{B(0, N)}$ por 0 fuera de $B(0, N)$, \tilde{f} , se tiene que $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces, por el caso anterior, se cumple (3.10) en casi todo punto de $B(0, N)$, y el resultado se sigue de que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{N=1}^{\infty} B(0, N)$. \square

Corolario 3.11. *Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$\lim_{\substack{|Q| \rightarrow 0 \\ x \in Q}} \frac{1}{|Q|} \int_Q f(y) dy = f(x),$$

en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Corolario 3.12. Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$|f(x)| \leq (Mf)(x),$$

en casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Observación 3.13. En realidad, este tipo de resultados se pueden estudiar también si reemplazamos los cubos por otras familias de conjuntos \mathcal{B} (bolas, intervalos, dilataciones de conjuntos convexos, ...) y definimos su correspondiente operador maximal como

$$M_{\mathcal{B}}f(x) = \sup_{x \in B \in \mathcal{B}} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)| dy.$$

En ese caso, se demuestra [14, Chapters 6-7] que las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) Acotación (en ciertos espacios) de $M_{\mathcal{B}}$.
- (ii) Propiedades geométricas de la clase \mathcal{B} .
- (iii) Diferenciación de integrales, en el sentido de que

$$\lim_{\mathcal{B} \ni B \rightarrow x} \frac{1}{|B|} \int_B f(y) dy = f(x), \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Antes de continuar con el análisis del operador maximal de Hardy-Littlewood, veamos un último lema de recubrimiento en el que haremos uso de la colección de cubos diádicos.

Lema 3.14. Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n de medida finita. Entonces existe una sucesión de cubos diádicos $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, con interiores disjuntos, que recubre a Ω y satisface

$$(i) \quad Q_k \cap \Omega^c \neq \emptyset, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$(ii) \quad |\Omega| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| \leq 2^n |\Omega|.$$

Demostración. Como Ω es abierto, para cada x de Ω existe un cubo diádico, que denotaremos por $Q(x)$, de diámetro más pequeño, de manera que $x \in Q(x)$ y $\Omega^c \cap Q(x) \neq \emptyset$. Subdividimos $Q(x)$ en 2^n subcubos diádicos, y seleccionamos uno (cualquiera) de ellos que contiene a x , y lo denotamos por $\tilde{Q}(x)$. Por construcción de $Q(x)$, sabemos que $\tilde{Q} \subset \Omega$ y además,

$$2^{-n}|Q(x)| = |\tilde{Q}(x)| = |\tilde{Q}(x) \cap \Omega| \leq |Q(x) \cap \Omega|.$$

En estas condiciones, si los interiores de dos cubos diádicos se cortan, entonces un cubo está contenido en otro. Por tanto, como Ω tiene medida finita, todo $x \in \Omega$ se encuentra en un cubo maximal de la colección $\{Q(y) : y \in \Omega\}$. Además, hay un número a lo sumo numerable de esos cubos maximales (ya que hay un número numerable de cubos diádicos), que denotaremos $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Evidentemente los interiores de estos cubos no se cortan, cubren a Ω , no están enteramente contenidos en Ω y cumplen que

$$|\Omega| \leq \left| \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| \leq 2^n \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k \cap \Omega| = 2^n |\Omega|.$$

□

3.1. EL OPERADOR MAXIMAL DE HARDY-LITTLEWOOD

Lema 3.15. *Sea (R, μ) un espacio de medida σ -finito y $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$. Entonces*

$$\inf_{f=g+h} \{\|g\|_{L^1} + t\|h\|_{L^\infty}\} = \int_0^t f^*(s) ds = tf^{**}(t),$$

para cada $t > 0$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$, $t > 0$ y definamos

$$c_t = \inf_{f=g+h} \{\|g\|_{L^1} + t\|h\|_{L^\infty}\}.$$

Veamos que $tf^{**}(t) \leq c_t$. Si $f \notin L^1 + L^\infty$ entonces $c_t = \infty$ y el resultado es trivial, de modo que podemos suponer que $f \in L^1 + L^\infty$. En ese caso, tomemos $g \in L^1$ y $h \in L^\infty$ tal que $f = g + h$ cualesquiera, de manera que por la subaditividad de f^{**} ,

$$tf^{**}(t) \leq tg^{**}(t) + th^{**}(t) = \int_0^t g^*(s) ds + \int_0^t h^*(s) ds \leq \|g\|_{L^1} + t\|h\|_{L^\infty}.$$

Tomando ínfimos en ambos lados llegamos a la desigualdad buscada.

Por otra parte, veamos que $c_t \leq tf^{**}(t)$. Al igual que antes, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $tf^{**}(t) < \infty$. Gracias al Teorema 2.33 (Desigualdad de Hardy-Littlewood), sabemos que f es integrable sobre cualquier conjunto medible de R de medida a lo sumo igual a t . Por tanto, si tomamos $E = \{x : |f(x)| > f^*(t)\}$ y $t_0 = \mu(E)$, entonces por la Proposición 2.28 se tiene que $t_0 \leq t$, y en consecuencia f es integrable sobre E . Consideremos las funciones

$$\begin{aligned} g(x) &= \max\{|f(x)| - f^*(t), 0\} \cdot \operatorname{sgn} f(x), \quad x > 0, \\ h(x) &= \min\{|f(x)|, f^*(t)\} \cdot \operatorname{sgn} f(x), \quad x > 0. \end{aligned}$$

Por lo anterior, está claro que $g \in L^1(R, \mu)$ y $h \in L^\infty$ con $\|h\|_{L^\infty(R, \mu)} \leq f^*(t)$. Por tanto, por el Teorema 2.33,

$$\|g\|_{L^1} = \int_E |f| d\mu - \mu(E)f^*(t) \leq \int_0^{t_0} f^*(s) ds - t_0 f^*(t),$$

entonces

$$\|g\|_{L^1} + t\|h\|_{L^\infty} \leq \int_0^{t_0} f^*(s) ds + (t - t_0)f^*(t).$$

Como $f = g + h$ y f^* es constante cuando $t_0 \leq s \leq t$, llegamos a que $c_t \leq tf^{**}(t)$, lo que concluye el resultado. \square

Observación 3.16. El resultado anterior tiene una interpretación elegante desde el punto de vista de la teoría de interpolación de espacios de Banach. En general, la idea es que dados dos espacios de Banach X_0, X_1 (que deben estar inmersos en un espacio vectorial topológico Hausdorff) podemos dotar a $X_0 + X_1$ con una estructura de espacio de Banach como

$$\|f\|_{X_0+X_1} := \inf_{f=f_0+f_1} \{\|f_0\|_{X_0} + \|f_1\|_{X_1}\}, \quad f \in X_0 + X_1.$$

Entonces, dado $t > 0$, surge de forma natural el K -funcional o funcional de Peetre, definido como

$$K(f, t; X_0, X_1) := \inf_{f=f_0+f_1} \{\|f_0\|_{X_0} + t\|f_1\|_{X_1}\}, \quad f \in X_0 + X_1.$$

Este objeto nos permite definir espacios de interpolación entre X_0 y X_1 (véase [3, Chapter 5]). En nuestro caso particular $X_0 = L^1$, $X_1 = L^\infty$, y el resultado anterior se traduce en una expresión explícita del funcional de Peetre,

$$K(f, t; L^1, L^\infty) = \int_0^t f^*(s) ds, \quad t > 0, f \in L^1 + L^\infty.$$

Más adelante discutiremos en profundidad cuáles son los espacios de interpolación que surgen de este funcional de Peetre.

Ahora sí, estamos en condiciones de probar el resultado central de esta sección, que establece la equivalencia entre la función maximal de la reordenada decreciente, f^{**} , y la reordenada decreciente de la función maximal, $(Mf)^*$.

Teorema 3.17. *Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

$$c_n(Mf)^*(t) \leq f^{**}(t) \leq C_n(Mf)^*(t), \quad \forall t > 0, \quad (28)$$

donde $c_n, C_n > 0$ son constantes que dependen únicamente de n .

Demostración. Fijemos $t > 0$. Para la desigualdad de la izquierda, podemos suponer que $f^{**}(t) < \infty$, dado que el resultado es inmediato en caso contrario. De esta manera, dado $\epsilon > 0$, por el Lema 3.15 existen $g_t \in L^1$, $h_t \in L^\infty$ tales que $f = g_t + h_t$ y

$$\|g_t\|_{L^1} + t\|h_t\|_{L^\infty} \leq tf^{**}(t) + \epsilon.$$

Entonces, tomando $c_n = 4^{-n}/2$, por la Proposición 2.28, el Teorema 3.9 y (3.1), se tiene que

$$\begin{aligned} (Mf)^*(t) &\leq (Mg_t)^*\left(\frac{t}{2}\right) + (Mh_t)^*\left(\frac{t}{2}\right) \leq 2\frac{4^n}{t}\|g_t\|_{L^1} + \|h_t\|_{L^\infty} \\ &\leq \frac{1}{c_n t}(\|g_t\|_{L^1} + t\|h_t\|_{L^\infty}) \leq \frac{1}{c_n t}(tf^{**}(t) + \epsilon) = \frac{1}{c_n}f^{**}(t) + \frac{\epsilon}{c_n t}. \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, haciendo $\epsilon \rightarrow 0$ obtenemos la primera desigualdad de (3.17).

Para la otra desigualdad, de forma similar a la primera, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $(Mf)^*(t) < \infty$. Por el Lema 3.3, sabemos que el conjunto

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : (Mf)(x) > (Mf)^*(t)\},$$

es abierto, y además $|\Omega| \leq t$, dado que Mf y $(Mf)^*$ son equimedibles. Aplicando el Lema 3.14, llegamos una sucesión de cubos diádicos $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, con interiores disjuntos, que recubre a Ω y satisface

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| \leq 2^n |\Omega| \leq 2^n t, \quad Q_k \cap \Omega^c \neq \emptyset \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (29)$$

3.1. EL OPERADOR MAXIMAL DE HARDY-LITTLEWOOD

Definamos

$$F = (\cup_{k=1}^{\infty} Q_k)^c, \quad g = \sum_{k=1}^{\infty} f \chi_{Q_k}, \quad h = f \chi_F.$$

Por (3.1), para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $q_k \in Q_k \cap \Omega^c$, esto es, $q_k \in Q_k$ y $Mf(q_k) \leq (Mf)^*(t)$. Por tanto,

$$\frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} |f(y)| dy \leq (Mf)^*(t),$$

luego

$$\|g\|_{L^1} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Q_k} |f(y)| dy \leq \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| (Mf)^*(t) \leq 2^n t (Mf)^*(t).$$

Por otro lado, $F \subset \Omega^c$, de modo que por el Corolario 3.12 se tiene que

$$\|h\|_{L^\infty} = \|f \chi_F\|_{L^\infty} \leq \|(Mf) \chi_F\|_{L^\infty} \leq (Mf)^*(t).$$

De esta manera, $g \in L^1$, $h \in L^\infty$ y además $f = g + h$. Por tanto, tomando $C_n = 2^n + 1$, y aplicando el Lema 3.15, concluimos que

$$f^{**}(t) \leq \frac{1}{t} \left(\|g\|_{L^1} + t \|h\|_{L^\infty} \right) \leq \frac{1}{t} \left(2^n t (Mf)^*(t) + t (Mf)^*(t) \right) = C_n (Mf)^*(t).$$

□

Este resultado simplifica en gran medida la acotación del operador maximal, no solo sobre los espacios L^p , sino sobre espacios invariantes por reordenamientos más generales. El problema de acotación del operador maximal pasa a ser el problema de acotar la función maximal f^{**} , esto es, acotar el operador de Hardy sobre el cono de funciones decrecientes. De esta manera, como primera aplicación de este resultado, podemos probar la acotación fuerte en L^p ($p > 1$) del operador maximal de Hardy-Littlewood, para lo cual necesitaremos las desigualdades clásicas de Hardy.

Lema 3.18 (Desigualdades de Hardy). *Sea ψ una función medible no negativa en el intervalo $(0, \infty)$ y supongamos que $-\infty < \lambda < 1$ y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces*

$$\left(\int_0^\infty \left(t^\lambda \frac{1}{t} \int_0^t \psi(s) ds \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{1-\lambda} \left(\int_0^\infty (t^\lambda \psi(t))^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}},$$

y

$$\left(\int_0^\infty \left(t^{1-\lambda} \int_t^\infty \psi(s) \frac{ds}{s} \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{1-\lambda} \left(\int_0^\infty (t^{1-\lambda} \psi(t))^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}},$$

(con los cambios adecuados en el caso $p = \infty$).

Demostración. Supongamos que $p < \infty$ (el caso $p = \infty$ es análogo). Para la primera desigualdad, descomponiendo $\psi(s) = s^{-\lambda/p'} s^{\lambda/p'} \psi(s)$ y aplicando la desigualdad de Hölder, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t \psi(s) ds &\leq \left(\frac{1}{t} \int_0^t s^{-\lambda} ds \right)^{1/p'} \left(\frac{1}{t} \int_0^t s^{\lambda p/p'} \psi(s)^p ds \right)^{1/p} \\ &= (1-\lambda)^{-1/p'} t^{-\lambda/p'-1/p} \left(\int_0^t s^{\lambda(p-1)} \psi(s)^p ds \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Por tanto, aplicando el Teorema de Fubini concluimos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(t^\lambda \frac{1}{t} \int_0^t \psi(s) ds \right)^p \frac{dt}{t} &\leq (1-\lambda)^{1-p} \int_0^\infty t^{\lambda-2} \int_0^t s^{\lambda(p-1)} \psi(s)^p ds dt \\ &= (1-\lambda)^{1-p} \int_0^\infty s^{\lambda(p-1)} \psi(s)^p \int_s^\infty t^{\lambda-2} dt ds \\ &= (1-\lambda)^{-p} \int_0^\infty s^{\lambda(p-1)} s^{\lambda-1} \psi(s)^p ds \\ &= (1-\lambda)^{-p} \int_0^\infty (s^\lambda \psi(s))^p \frac{ds}{s}. \end{aligned}$$

Tomando raíces p -ésimas concluimos el resultado.

De forma similar, aplicando la desigualdad de Hölder, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \psi(s) \frac{ds}{s} &= \int_t^\infty s^{(\lambda-2)/p'} s^{(2-\lambda)/p'-1} \psi(s) ds \\ &\leq \left(\int_t^\infty s^{\lambda-2} ds \right)^{1/p'} \left(\int_t^\infty s^{(2-\lambda)(p-1)-p} \psi(s)^p ds \right)^{1/p} \\ &= (1-\lambda)^{-1/p'} t^{(\lambda-1)/p'} \left(\int_t^\infty s^{(2-\lambda)(p-1)-p} \psi(s)^p ds \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Por tanto, aplicando el Teorema de Fubini concluimos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(t^{1-\lambda} \int_t^\infty \psi(s) \frac{ds}{s} \right)^p \frac{dt}{t} &\leq (1-\lambda)^{1-p} \int_0^\infty t^{-\lambda} \int_t^\infty s^{(2-\lambda)(p-1)-p} \psi(s)^p ds dt \\ &= (1-\lambda)^{1-p} \int_0^\infty s^{(2-\lambda)(p-1)-p} \psi(s)^p \int_0^s t^{-\lambda} dt ds \\ &= (1-\lambda)^{-p} \int_0^\infty (s^{1-\lambda} \psi(s))^p \frac{ds}{s}, \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado tomando raíces p -ésimas. □

Teorema 3.19 (Teorema maximal de Hardy-Littlewood). *Sea $1 < p \leq \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces $Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y existe una constante $C_{n,p} > 0$, que solo depende de n y p , tal que*

$$\|Mf\|_{L^p} \leq C_{n,p} \|f\|_{L^p}.$$

Demostración. Por un lado, como $p > 1$, podemos aplicar el Lema 3.18 para $\lambda = 1/p$. Entonces, por la Proposición 2.30 y el Teorema 3.17 concluimos que

$$\begin{aligned} \|Mf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_0^\infty (Mf)^*(t)^p dt \right)^{1/p} \leq C_n \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \right)^p dt \right)^{1/p} \\ &\leq C_n p' \left(\int_0^\infty f^*(t)^p dt \right)^{1/p} = C_{n,p} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

donde $C_{n,p} = C_n p'$, y $C_n > 0$ es la constante dada por el Teorema 3.17. \square

En realidad, este teorema puede verse como un teorema de interpolación alternativo para el operador maximal. Sin embargo, para entrar en detalle sobre este hecho debemos introducir los conocidos espacios de Lorentz.

3.2. Espacios de Lorentz

Los espacios de Lorentz $L^{p,q}$ surgen como una generalización natural de los espacios L^p . Además de poseer buenas propiedades funcionales, resultan ser cruciales en el entendimiento de diversos operadores clásicos, como puede ser el operador maximal de Hardy-Littlewood.

Definición 3.20. Sea (R, μ) un espacio de medida σ -finito y $0 < p, q \leq \infty$. El *espacio de Lorentz* $L^{p,q} = L^{p,q}(R, \mu)$ está formado por aquellas funciones $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$ verificando que

$$\|f\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}} f^*(t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 0 < q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t), & q = \infty, \end{cases}$$

es finito.

Observación 3.21. Por la Proposición 2.30 está claro que $L^{p,p} = L^p$, y

$$\|f\|_{p,p} = \|f\|_p, \quad \forall f \in L^p.$$

Además, $L^{\infty,q} = \{0\}$ para cada $0 < q < \infty$. En efecto, dado $0 < q < \infty$ y $0 \neq f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$, consideremos $s > 0$ tal que $f^*(s) > 0$. Entonces, como f^* es decreciente,

$$\int_0^\infty f^*(t)^q \frac{dt}{t} \geq \int_0^s f^*(t)^q \frac{dt}{t} \geq f^*(s)^q \int_0^s \frac{dt}{t} = \infty.$$

Por tanto, $f \notin L^{\infty,q}$, y dado que $0 \in L^{\infty,q}$ trivialmente, concluimos que $L^{\infty,q} = \{0\}$.

Veamos a continuación que la familia de los espacios de Lorentz es “creciente” en el segundo exponente.

Proposición 3.22. *Sea $0 < p \leq \infty$ y $0 < q \leq r \leq \infty$. Entonces*

$$\|f\|_{p,r} \leq c_{p,q,r} \|f\|_{p,q},$$

para cada $f \in L^{p,q}$. Por tanto, se tiene la inclusión,

$$L^{p,q} \hookrightarrow L^{p,r}.$$

Demostración. Por la Observación 3.21 podemos asumir que $p < \infty$ y $q < r$. Supongamos que $r = \infty$. Entonces dada $f \in L^{p,q}$, como f^* es decreciente,

$$t^{1/p} f^*(t) = \left(\frac{q}{p} \int_0^t [s^{1/p} f^*(s)]^q \frac{ds}{s} \right)^{1/q} \leq \left(\frac{q}{p} \int_0^t [s^{1/p} f^*(s)]^q \frac{ds}{s} \right)^{1/q} \leq \left(\frac{q}{p} \right)^{1/q} \|f\|_{p,q},$$

para cada $t > 0$. Por tanto,

$$\|f\|_{p,\infty} \leq \left(\frac{q}{p} \right)^{1/q} \|f\|_{p,q}.$$

Por otro lado, supongamos que $r < \infty$. Entonces, dada $f \in L^{p,q}$,

$$\begin{aligned} \|f\|_{p,r} &= \left(\int_0^\infty [t^{1/p} f^*(t)]^{r-q+q} \frac{dt}{t} \right)^{1/r} \leq \|f\|_{p,\infty}^{\frac{r-q}{r}} \left(\int_0^\infty [t^{1/p} f^*(t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/r} \\ &= \|f\|_{p,\infty}^{1-\frac{q}{r}} \|f\|_{p,q}^{\frac{q}{r}} \leq \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{q}(1-\frac{q}{r})} \|f\|_{p,q}^{1-\frac{q}{r}} \|f\|_{p,q}^{\frac{q}{r}} = \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \|f\|_{p,q}. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.23. *Sea $1 \leq q \leq p < \infty$ ó $p = q = \infty$. Entonces $(L^{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ es un espacio de Banach de funciones invariante por reordenamientos.*

Demostración. El caso $p = q = 1$ y $p = q = \infty$ es trivial, dado que $L^{p,q}$ se reduce a los espacios L^1 y L^∞ respectivamente, que por la Proposición 2.30 son espacios de Banach de funciones invariantes por reordenamientos. Por tanto, supongamos que $1 < p < \infty$ y $1 \leq q \leq p$. Por la Proposición 2.42, basta comprobar la desigualdad triangular para probar que $\|\cdot\|_{p,q}$ es una norma sobre $L^{p,q}$. Sean $f, g \in L^{p,q}$ cualesquiera. Como $q \leq p$, está claro que la función $t^{1/p-1/q}$ es decreciente, de modo que, como $L^q(0, \infty)$ es un espacio invariante por reordenamientos, se tiene por 2.48 que

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{p,q} &= \left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(f+g)^*(t)]^q dt \right)^{1/q} = \|t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(f+g)^*(t)\|_{L^q(0,\infty)} \\ &= \sup \left\{ \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(f+g)^*(t)h^*(t) dt : \|h\|_{L^{q'}(0,\infty)} \leq 1 \right\}. \end{aligned} \tag{30}$$

Sea $h \in L^{q'}(0, \infty)$ tal que $\|h\|_{L^{q'}(0,\infty)} \leq 1$. Entonces, $t^{1/p-1/q}h^*(t)$ es decreciente, y por la subaditividad de la segunda reordenada decreciente (Teorema 2.44),

$$\int_0^t (f+g)^*(s) ds \leq \int_0^t f^*(s) + g^*(s) ds,$$

para cada $t > 0$. Por tanto, por el Lema 2.32 y la desigualdad de Hölder llegamos a que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(f+g)^*(t)h^*(t) dt &\leq \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}f^*(t)h^*(t) dt + \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}g^*(t)h^*(t) dt \\ &\leq \left[\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1}f^*(t)^q dt \right]^{1/q} \|h\|_{L^{q'}(0,\infty)} \\ &\quad + \left[\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1}g^*(t)^q dt \right]^{1/q} \|h\|_{L^{q'}(0,\infty)} \\ &\leq \|f\|_{p,q} + \|g\|_{p,q}. \end{aligned}$$

Esto, junto con (3.2), prueba la desigualdad triangular para $\|\cdot\|_{p,q}$. El resto de propiedades que satisface una función norma (Definición 2.5) son fáciles de verificar, mientras que la invariancia por reordenamientos es trivial, dado que si f y g son equimedibles, entonces $f^* = g^*$. \square

Aunque la restricción $q \leq p$ del resultado anterior es necesaria, se puede salvar en el caso $p > 1$ reemplazando $\|\cdot\|_{p,q}$ por un funcional equivalente que es norma para todo $q \geq 1$. La idea es sencillamente reemplazar f^* por f^{**} en la Definición 3.20 de $\|\cdot\|_{p,q}$.

Definición 3.24. Sea (R, μ) un espacio de medida σ -finito, $1 < p \leq \infty$ y $0 < q \leq \infty$. Dada $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$, definimos

$$\|f\|_{p,q}^* = \begin{cases} \left(\int_0^\infty [t^{\frac{1}{p}}f^{**}(t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 0 < q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}f^{**}(t), & q = \infty. \end{cases}$$

Lema 3.25. Sea $1 < p \leq \infty$ y $1 < q \leq \infty$. Entonces,

$$\|f\|_{p,q} \leq \|f\|_{p,q}^* \leq p' \|f\|_{p,q},$$

para cada $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$. En particular,

$$L^{p,q} = \{f \in \mathcal{M}_0(R, \mu) : \|f\|_{p,q}^* < \infty\}.$$

Demostración. La primera desigualdad en 3.25 es consecuencia de las definiciones 3.20 y 3.24, junto con el hecho de que $f^* \leq f^{**}$. La segunda se sigue directamente de la desigualdad de Hardy (Proposición 3.18). \square

Por la subaditividad del operador $f \rightarrow f^{**}$ (Teorema 2.44), la desigualdad triangular para $\|\cdot\|_{p,q}^*$ se sigue de la desigualdad de Minkowski. Entonces, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.26. Sean $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ ó $p = q = \infty$. Entonces $(L^{p,q}, \|\cdot\|_{p,q}^*)$ es un espacio de Banach de funciones invariante por reordenamientos.

Estos espacios admiten una construcción natural a partir de la interpolación entre L^1 y L^∞ . Tal y como se comenta en la Observación 3.16, dados dos espacios de Banach X_0 y X_1 (inmersos en un espacio vectorial topológico Hausdorff) podemos construir el K -funcional asociado como

$$K(f, t; X_0, X_1) := \inf_{f=f_0+f_1} \{ \|f_0\|_{X_0} + t\|f_1\|_{X_1} \}, \quad f \in X_0 + X_1.$$

La idea es que dado $0 < \theta < 1$, $1 \leq q < \infty$ ó $0 \leq \theta \leq 1$, $q = \infty$, podemos definir el espacio $(X_0, X_1)_{\theta, q}$ como aquellas funciones $f \in X_0 + X_1$ verificando que

$$\|f\|_{\theta, q} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty [t^{-\theta} K(f, t; X_0, X_1)]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 0 < \theta < 1, 1 \leq q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{-\theta} K(f, t; X_0, X_1), & 0 \leq \theta \leq 1, q = \infty, \end{cases} \quad (31)$$

es finito.

En el caso particular $X_0 = L^1$ y $X_1 = L^\infty$, por el Lema 3.15 conocemos una expresión explícita del funcional de Peetre,

$$K(f, t; L^1, L^\infty) = t f^{**}(t), \quad t > 0, f \in L^1 + L^\infty,$$

y por tanto podemos expresar (3.2) en términos de f^{**} . De esta manera, dados $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ y $1/p = 1 - \theta$, los espacios de Lorentz $(L^{p, q}, \|\cdot\|_{p, q}^*)$ no son más que los espacios de interpolación

$$(L^1, L^\infty)_{\theta, q}.$$

Por último, veamos a continuación una noción que aparece de forma natural en los espacios de Lorentz, conocida como *estimación de tipo débil*.

Definición 3.27. Sean (R, μ) y (S, ν) espacios de medida σ -finitos y supongamos que $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Sea T un operador definido sobre $L^{p, 1}(R, \mu)$ y tomando valores en $\mathcal{M}_0(S, \nu)$. Diremos que T es un *operador de tipo débil* (p, q) si es un operador acotado de $L^{p, 1}(R, \mu)$ en $L^{q, \infty}(S, \nu)$, esto es, si existe una constante $M > 0$ de modo que

$$\|Tf\|_{q, \infty} \leq M \|f\|_{p, 1}, \quad (32)$$

para todo $f \in L^{p, 1}$. La menor constante M para la que se cumple (3.27) se conoce como *la norma débil* (p, q) de T .

Observación 3.28. Si reescribimos la desigualdad (3.27) en términos de la reordenada decreciente, llegamos a que

$$(Tf)^*(t) \leq M t^{-\frac{1}{q}} \|f\|_{p, 1}, \quad t > 0$$

Comparando esta expresión con la obtenida para el operador maximal de Hardy-Littlewood en el Teorema 3.9, deducimos que el operador maximal es de hecho de tipo débil $(1, 1)$ en \mathbb{R}^n , esto es,

$$M : L^1 \longrightarrow L^{1, \infty}$$

Capítulo 4

Espacios de Lorentz y desigualdades con pesos

En la década de los años 1950, G. G. Lorentz publicó una serie de artículos en los que presentaba algunas propiedades de una nueva clase de espacios de funciones [22], que más adelante se conocerían como los *espacios de Lorentz clásicos*. La teoría sobre estos espacios continuó desarrollándose de la mano de Ariño, Muckenhoupt y Sawyer (entre otros) a finales del siglo pasado, lo que permitió caracterizar algunas de sus propiedades funcionales.

En este capítulo estudiaremos la estrecha relación entre las desigualdades de clásicas de Hardy, en el cono de funciones positivas y decrecientes (que son equivalentes a la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood en los espacios clásicos de Lorentz), las propiedades de normabilidad de estos espacios y la caracterización de dichos pesos, así como las propiedades de estas clases (automejora, monotonía, etc.). En la sección 4.1 introduciremos los espacios de Lorentz clásicos, discutiremos algunas de sus propiedades elementales, y caracterizaremos su cuasinormabilidad a partir de la condición Δ_2 (Teorema 4.15). En la sección 4.2 estudiaremos la acotación (fuerte y débil) del operador de Hardy sobre el cono de funciones positivas y decrecientes de $L^p(w)$, lo que dará lugar a la caracterización de los pesos B_p (Teorema 4.23) y $B_{p,\infty}$ (Teorema 4.31). Además, estudiaremos la monotonía y automejora de estas clases de pesos, y su relación con los pesos Δ_2 . Por último, en las secciones 4.3 y 4.4 analizaremos cuando los funcionales $\|\cdot\|_{\Lambda^p(w)}$ y $\|\cdot\|_{\Lambda^{p,\infty}(w)}$ son efectivamente normas (Teoremas 4.35 y 4.49), y caracterizaremos la normabilidad de los espacios de Lorentz $\Lambda^p(w)$ y $\Lambda^{p,\infty}(w)$ a través de la acotación (débil y fuerte) del operador maximal de Hardy-Littlewood, y las clases $B_{p,\infty}$ y B_p respectivamente (Teoremas 4.39 y 4.52)

Los artículos de referencia en este capítulo serán [8] para las definiciones y propiedades básicas de los espacios de Lorentz, [2],[10] para las clases B_p y $B_{p,\infty}$, y [9], [23], [32], [34] para las cuestiones sobre normabilidad de los espacios de Lorentz.

4.1. Espacios de Lorentz clásicos

A lo largo de esta sección (X, μ) denotará, salvo que se especifique de otra manera, un espacio de medida general.

Definición 4.1. Decimos que una función w , definida sobre \mathbb{R}^+ , es un *peso* si es no negativa, localmente integrable y no es idénticamente nula (a.e.). Además, denotaremos por W al peso definido como

$$W(t) = \int_0^t w(s) ds, \quad t > 0.$$

En el caso de considerar el espacio de medida $(X, \mu) = (\mathbb{R}^+, w(t)dt)$, escribiremos μ_f^w y f_w^* para enfatizar la dependencia con el peso w . Además, dados $0 < p, q \leq \infty$, denotaremos $L^{p,q}(w) := L^{p,q}(\mathbb{R}^+, w(t)dt)$.

Observación 4.2. Sea w un peso y $0 < p, q \leq \infty$. Dada $f \in L^{p,q}(w)$ decreciente, se tiene que

$$\mu_f^w(f(t)) = \int_0^\infty \chi_{\{f > f(t)\}}(s)w(s) ds = \int_0^t w(s) ds = W(t),$$

para cada $t > 0$. Por tanto, por definición de f_w^* se tiene que $f(t) \leq f_w^*(W(t))$, mientras que por la Proposición 2.28, concluimos que $f_w^*(W(t)) \leq f(t)$. De esta forma, $f_w^*(W(t)) = f(t)$ para cada $t \geq 0$, por lo que realizando el cambio de variable $t = W(s)$, deducimos que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^{p,q}(w)} &= \left(\int_0^\infty f_w^*(t)^q t^{q/p-1} dt \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_0^\infty f_w^*(W(s))^q W(s)^{q/p-1} w(s) ds \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_0^\infty f(s)^q W(s)^{q/p-1} w(s) ds \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

En particular, si $f \in L^p(w)$ con $0 < p < \infty$,

$$\|f\|_{L^p(w)} = \left(\int_0^\infty f(t)^p w(t) dt \right)^{1/p}.$$

Definición 4.3. Sea w un peso y $0 < p < \infty$. El *espacio de Lorentz clásico* $\Lambda_X^p(w)$ está formado por aquellas funciones $f \in \mathcal{M}_0(X, \mu)$ verificando que

$$\|f\|_{\Lambda^p(w)} := \left(\int_0^\infty (f^*(t))^p w(t) dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Además, en el caso $(X, \mu) = (\mathbb{R}^n, m_n)$, escribiremos $\Lambda^p(w) = \Lambda_{\mathbb{R}^n}^p(w)$.

Por la Observación 4.2 está claro que $\|f\|_{\Lambda_X^p(w)} = \|f^*\|_{L^p(w)}$, para cada $f \in \Lambda_X^p(w)$. Esto nos permite extender la definición anterior. Dados $0 < p, q \leq \infty$, definimos

$$\Lambda_X^{p,q}(w) = \{f \in \mathcal{M}_0(X, \mu) : \|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} := \|f^*\|_{L^{p,q}(w)} < \infty\}.$$

En el caso $0 < q < \infty$, estas clases de funciones también pueden entenderse como espacios de Lorentz clásicos. En efecto, dada $f \in \Lambda_X^{p,q}(w)$ cualquiera, por la Observación 4.2 se tiene que

$$\|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} = \left(\int_0^\infty f^*(s)^q W(s)^{q/p-1} w(s) ds \right)^{1/q} = \|f\|_{\Lambda_X^q(\tilde{w})}, \quad (33)$$

donde $\tilde{w}(t) = W(t)^{q/p-1} w(t)$ para todo $t > 0$. El caso $q = \infty$ no se puede reducir a los espacios de Lorentz clásicos, lo que induce la siguiente definición.

Definición 4.4. Sea w un peso y $0 < p < \infty$. El espacio de Lorentz débil $\Lambda_X^{p,\infty}(w)$ está formado por aquellas funciones $f \in \mathcal{M}_0(X, \mu)$ verificando que

$$\|f\|_{\Lambda^{p,\infty}(w)} := \sup_{0 < t < \infty} f^*(t) W(t)^{1/p} < \infty.$$

Además, en el caso $(X, \mu) = (\mathbb{R}^n, m_n)$, escribiremos $\Lambda^{p,\infty}(w) = \Lambda_{\mathbb{R}^n}^{p,\infty}(w)$.

Observación 4.5. (i) Dada $f \in \mathcal{M}_0(X, \mu)$, sabemos que $f^*(t) = 0$ para cada $t \geq \mu(X)$. Por tanto, el comportamiento del peso w en $[\mu(X), \infty)$ es irrelevante, de modo que podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que w se anula en $[\mu(X), \infty)$, cuando $\mu(X) < \infty$. En estas condiciones, si $\mu(X) < \infty$, entonces $w \in L^1(\mathbb{R}^+)$.

(ii) Sea $w \notin L^1(\mathbb{R}^+)$ y $p < \infty$. Si $f \in \Lambda_X^{p,q}(w)$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} f^*(t) = 0$. En efecto, supongamos por reducción al absurdo que $\lim_{t \rightarrow \infty} f^*(t) = a > 0$. Entonces $f^*(t) \geq a$ para todo $t > 0$, y como $w \notin L^1(\mathbb{R}^+)$, se tiene que $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = \infty$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} &= \left(\int_0^\infty (f^*(s))^q W(s)^{q/p-1} w(s) ds \right)^{1/q} \geq a \left(\int_0^\infty W(s)^{q/p-1} w(s) ds \right)^{1/q} \\ &= a \left(\frac{p}{q} \int_0^\infty \left(W(s)^{q/p} \right)' ds \right)^{1/q} = a \left(\frac{p}{q} \right)^{1/q} \lim_{t \rightarrow \infty} W(t)^{1/p} = \infty. \end{aligned}$$

(iii) Las funciones simples cuyo soporte tiene medida finita se encuentran en $\Lambda_X^{p,q}(w)$. En efecto, si $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$ con $\mu(E_i) < \infty$ para cada $i = 1, \dots, n$, sabemos por el Ejemplo 2.26 que $f^* = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{[m_{j-1}, m_j]}$, donde $m_j = \sum_{i=1}^j \mu(E_i) < \infty$ para todo $j = 1, \dots, n$. Por tanto, aplicando (4.1) deducimos que

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} &= \left(\int_0^\infty (f^*(s))^q W(s)^{q/p-1} w(s) ds \right)^{1/q} \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_j^q \int_{m_{j-1}}^{m_j} W(s)^{q/p-1} w(s) ds \right)^{1/q} \\ &= \left(\frac{p}{q} \sum_{j=1}^n a_j^q \left[W(m_j)^{q/p} - W(m_{j-1})^{q/p} \right] \right)^{1/q} < \infty. \end{aligned}$$

Además, si $w \in L^1(\mathbb{R}^+)$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) < \infty$, por lo que $L^\infty(X, \mu) \subset \Lambda_X^{p,q}(w)$ y toda función simple está en $\Lambda_X^{p,q}(w)$.

(iv) Dado $0 < q < \infty$, se tiene que $\Lambda_X^{\infty,q}(w) = \{0\}$. En efecto, dada $0 \neq f \in \mathcal{M}_0(X, \mu)$, consideremos $s > 0$ tal que $f^*(s) > 0$. Entonces, como f^* es decreciente,

$$\int_0^\infty f^*(t)^q \frac{w(t)}{W(t)} dt \geq \int_0^s f^*(t)^q \frac{w(t)}{W(t)} dt \geq f^*(s)^q \int_0^s \frac{w(t)}{W(t)} dt = \infty.$$

Por tanto, $f \notin \Lambda_X^{\infty,q}(w)$, y dado que $0 \in \Lambda_X^{\infty,q}(w)$ trivialmente, concluimos que $\Lambda_X^{\infty,q}(w) = \{0\}$.

Ejemplo 4.6. (i) Sea $0 < p < \infty$ y $w(t) = 1$, $t > 0$. Claramente $W(t) = t$, y por la Proposición 2.30, redescubrimos los espacios L^p ,

$$\Lambda_X^p(1) = L^p(X), \quad \Lambda_X^{p,\infty}(1) = L^{p,\infty}(X).$$

(ii) Sea $0 < p, q < \infty$ y $w(t) = t^{\frac{q}{p}-1}$, $t > 0$. En este caso recuperamos los espacios de Lorentz vistos en el Capítulo 3,

$$\Lambda_X^q(t^{\frac{q}{p}-1}) = L^{p,q}(X).$$

El siguiente lema será de gran utilidad en los siguientes resultados.

Lema 4.7. *Sea $0 < p < \infty$ y w un peso. Entonces, para cualquier función decreciente y no negativa f definida sobre \mathbb{R}^+ , se tiene que*

$$\int_0^\infty (f(t))^p w(t) dt = \int_0^\infty p t^{p-1} W(m_f(t)) dt.$$

Demostración. Observemos que para cada $t > 0$,

$$W(m_f(t)) = \int_0^{m_f(t)} w(s) ds = \int_{\{f>t\}} w(s) ds = \mu_f^w(t).$$

Por tanto, el lema se sigue de la Proposición 2.30. \square

El siguiente resultado nos da expresiones alternativas para el funcional $\|\cdot\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}$. En particular, resulta que este solo depende de W .

Proposición 4.8. *Sea $0 < p, q < \infty$ y w un peso. Entonces, dada $f \in M_0(X, \mu)$,*

$$(i) \|f\|_{\Lambda_X^p(w)} = \left(\int_0^\infty p t^{p-1} W(\mu_f(t)) dt \right)^{1/p},$$

$$(ii) \|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} = \left(\int_0^\infty p t^{q-1} W(\mu_f(t))^{q/p} dt \right)^{1/q},$$

$$(iii) \|f\|_{\Lambda_X^{p,\infty}(w)} = \sup_{t>0} t W(\mu_f(t))^{1/p}.$$

Demostración. (i) Basta aplicar el Lema 4.7 para f^* y tener en cuenta que $\mu_f = m_{f^*}$ por la Proposición 2.28 (viii).

(ii) Definamos el peso $\tilde{w}(t) = W(t)^{q/p-1}w(t)$, $t > 0$, de modo que $\tilde{W}(t) = (p/q)W(t)^{q/p}$. Entonces, por (i) y la Observación 4.2, concluimos que

$$\|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} = \|f\|_{\Lambda_X^q(\tilde{w})} = \left(\int_0^\infty qt^{q-1}\tilde{W}(\mu_f(t)) dt \right)^{1/q} = \left(\int_0^\infty pt^{q-1}W(\mu_f(t))^{q/p} dt \right)^{1/q}.$$

(iii) Definamos el peso $\tilde{w}(t) = (1/p)W(t)^{-1/p'}w(t)$, $t > 0$, de modo que $\tilde{W}(t) = W(t)^{1/p}$. Observemos que para cada $t > 0$,

$$W(\mu_f(t))^{1/p} = \tilde{W}(m_{f^*}(t)) = \int_0^{m_{f^*}(t)} \tilde{w}(s) ds = \int_{\{f^*>t\}} \tilde{w}(s) ds = \mu_{f^*}^{\tilde{w}}(t).$$

Entonces, como \tilde{W} es continua y creciente, y $(f^*)_{\tilde{w}}^*(\tilde{W}(t)) = f^*(t)$ por la Observación 4.2, concluimos por el Lema 3.8 que

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Lambda_X^{p,\infty}(w)} &= \sup_{0<t<\infty} f^*(t)W(t)^{1/p} = \sup_{0<t<\infty} (f^*)_{\tilde{w}}^*(\tilde{W}(t))\tilde{W}(t) \\ &= \sup_{0<t<\infty} (f^*)_{\tilde{w}}^*(t)t = \sup_{0<t<\infty} t\mu_{f^*}^{\tilde{w}}(t) = \sup_{t>0} tW(\mu_f(t))^{1/p}. \end{aligned}$$

□

Veamos a continuación algunas propiedades elementales de estos espacios.

Proposición 4.9. Sean $0 < p, q \leq \infty$, w un peso y $f, g, \{f_k\}_{k \geq 1}$ funciones en $\mathcal{M}_0(X, \mu)$.

- (i) $|f| \leq |g| \implies \|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} \leq \|g\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}$.
- (ii) $\|tf\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} = |t|\|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}$, $t \in \mathbb{R}$.
- (iii) $0 \leq f_k \uparrow f$ a.e. $\implies \|f_k\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} \uparrow \|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}$.
- (iv) $\|\liminf_k |f_k|\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} \leq \liminf_k \|f_k\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}$.
- (v) $\chi_E \in \Lambda_X^{p,q}(w)$ si $\mu(E) < \infty$.
- (vi) La inclusión $\Lambda_X^{p,q_0}(w) \hookrightarrow \Lambda_X^{p,q_1}(w)$ es continua, $0 < q_0 \leq q_1 \leq \infty$.
- (vii) Si $W(\mu(X)) < \infty$, entonces la inclusión $\Lambda_X^{p_1,q}(w) \hookrightarrow \Lambda_X^{p_0,r}(w)$ es continua cuando $0 < r \leq \infty$, $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$.

Demostración. (i)-(iv) Estos se siguen de la Proposición 2.28, de la no negatividad del peso w y del teorema de la convergencia monótona.

(v) Sabemos que $\chi_E^* = \chi_{[0,\mu(E)]}$ con $\mu(E) < \infty$. Por tanto, como $[0, \mu(E)]$ es compacto y w es localmente integrable, entonces $\|\chi_E\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} < \infty$.

(vi) Consecuencia inmediata de la Proposición 3.22.

(vii) Supongamos que $r = \infty$ y $0 < p_0 \leq p_1 \leq \infty$. Entonces dada $f \in \Lambda_X^{p_0, \infty}(w)$, como f^* es decreciente y $W(t) \leq W(\mu(X))$ para cada $t > 0$ por la Observación 4.5, se tiene por (4.1) que

$$\begin{aligned} f^*(t)W(t)^{\frac{1}{p_0}} &= W(t)^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}} f^*(t)W(t)^{1/p_1} \leq W(\mu(X))^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}} f^*(t)W(t)^{1/p_1} \\ &= W(\mu(X))^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}} \left(\frac{q}{p_1} \int_0^t f^*(s)^q W(s)^{\frac{q}{p_1} - 1} w(s) ds \right)^{1/q} \\ &\leq W(\mu(X))^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}} \left(\frac{q}{p_1} \right)^{1/q} \left(\int_0^t f^*(s)^q W(s)^{\frac{q}{p_1} - 1} w(s) ds \right)^{1/q} \\ &\leq W(\mu(X))^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}} \left(\frac{q}{p_1} \right)^{1/q} \|f\|_{\Lambda_X^{p_1, q}(w)}, \end{aligned}$$

para cada $t > 0$. Por tanto,

$$\|f\|_{\Lambda_X^{p_0, \infty}(w)} \leq W(\mu(X))^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}} \left(\frac{q}{p_1} \right)^{1/q} \|f\|_{\Lambda_X^{p_1, q}(w)}.$$

Por otro lado, supongamos que $r < \infty$ y $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$. Entonces dada $f \in \Lambda_X^{p_0, r}(w)$, por la Observación 4.5 y (4.1),

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Lambda_X^{p_0, r}(w)} &= \left(\int_0^\infty f^*(s)^r W(s)^{\frac{r}{p_0} - 1} w(s) ds \right)^{1/r} \\ &= \left(\int_0^{\mu(X)} \left(f^*(s)W(s)^{\frac{1}{p_1}} \right)^r W(s)^{r\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right) - 1} w(s) ds \right)^{1/r} \\ &\leq \|f\|_{\Lambda_X^{p_1, \infty}(w)} \left(\int_0^{\mu(X)} W(s)^{r\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right) - 1} w(s) ds \right)^{1/r} \\ &= \|f\|_{\Lambda_X^{p_1, \infty}(w)} \left(\frac{W(\mu(X))^{r\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right)}}{r\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right)} \right)^{1/r} \\ &\leq \left(\frac{q}{p_1} \right)^{1/q} \left(\frac{r}{p_0} - \frac{r}{p_1} \right)^{-\frac{1}{r}} W(\mu(X))^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}} \|f\|_{\Lambda_X^{p_1, q}(w)}. \end{aligned}$$

□

La siguiente proposición relaciona la convergencia del funcional $\|\cdot\|_{\Lambda_X^{p, q}(w)}$ con la convergencia en medida, y aporta una condición suficiente para la completitud de $\Lambda_X^{p, q}(w)$.

Proposición 4.10. *Sea w un peso tal que $W > 0$ en $(0, \infty)$ y $0 < p, q \leq \infty$. Sea $(f_n)_n \in \Lambda_X^{p, q}(w)$.*

- (i) *Si $\lim_{m, n} \|f_n - f_m\|_{\Lambda_X^{p, q}(w)} = 0$, entonces $(f_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en medida y existe $f \in \Lambda_X^{p, q}(w)$ tal que $\lim_n \|f - f_n\|_{\Lambda_X^{p, q}(w)} = 0$.*
- (ii) *Si $f \in \mathcal{M}_0(X, \mu)$ y $\lim_n \|f - f_n\|_{\Lambda_X^{p, q}(w)} = 0$, entonces $(f_n)_n$ converge a f en medida y existe una parcial $(f_{n_k})_k$ convergente a f a.e.*

Demostración. El caso $q < p = \infty$ es trivial por la Observación 4.5 (iv). Si $p < \infty$, por la Proposición 4.8 se tiene que

$$\begin{aligned} W(\mu_f(r)) &= \frac{W(\mu_f(r))}{r^p} \left(q \int_0^r t^{q-1} dt \right)^{p/q} = \frac{1}{r^p} \left(q \int_0^r t^{q-1} W(\mu_f(r))^{q/p} dt \right)^{p/q} \\ &\leq \frac{1}{r^p} \left(q \int_0^r t^{q-1} W(\mu_f(t))^{q/p} dt \right)^{p/q} \leq \left(\frac{q}{p} \right)^{p/q} \frac{\|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}^p}{r^p}, \end{aligned}$$

para cada $r > 0$, $0 < q \leq \infty$ (el caso $q = \infty$ es análogo) y $f \in \Lambda_X^{p,q}(w)$. Por tanto, utilizando la hipótesis de (i) deducimos que $\lim_{m,n} W(\mu_{f_n-f_m}(r)) = 0$ para cada $r > 0$, lo que implica (dado que $W > 0$) que $\lim_{m,n} \mu_{f_n-f_m}(r) = 0$ para cada $r > 0$, o equivalentemente, $(f_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en medida. Esta convergencia implica la existencia de $f \in \mathcal{M}_0(X, \mu)$ tal que $(f_n)_n$ converge en medida a f , y de una parcial $(f_{n_k})_k$ convergiendo a f a.e. Finalmente, por la Proposición 4.9 (iv) se tiene que $\|f - f_n\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} \leq \liminf_k \|f_{n_k} - f_n\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}$, y entonces, $\lim_n \|f - f_n\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} = 0$.

La demostración de (ii) es análoga. \square

El funcional $\|\cdot\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}$ no es, en general, una cuasinorma, y de hecho, $\Lambda_X^{p,q}(w)$ puede no ser ni siquiera un espacio vectorial, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo [11].

Ejemplo 4.11. Consideremos $(X, \mu) = (\mathbb{R}, m)$ y el peso $w(t) = e^t$, $t > 0$. Veamos que, para cada $0 < p < \infty$, $\Lambda^p(w)$ no es un espacio vectorial. Observemos que $W(t) = e^t - 1$ para cada $t > 0$, y definamos la función medible $f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \chi_{(0,n)}$, donde

$$\lambda_n = \frac{1}{n^{p+1/p} W(n)^{1/p}}, \quad n \geq 1.$$

Como f es decreciente, $f^* = f$, luego si $p \leq 1$,

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Lambda_X^p(w)}^p &= \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \chi_{(0,n)}(t) \right)^p w(t) dt \\ &\leq \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^p \chi_{(0,n)}(t) \right) w(t) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^p W(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p^2+1}} < \infty, \end{aligned}$$

mientras que si $p > 1$, por la desigualdad integral de Minkowski,

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Lambda_X^p(w)} &= \left(\int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \chi_{(0,n)}(t) \right)^p w(t) dt \right)^{1/p} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \lambda_n^p \chi_{(0,n)}(t) w(t) dt \right)^{1/p} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n W(n)^{1/p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1/p}} < \infty. \end{aligned}$$

Por tanto, en ambos casos, $f \in \Lambda_X^p(w)$. Además, la función $g(x) = f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$, verifica que $g^* = f^*$, por lo que también está en $\Lambda_X^p(w)$. Veamos que $h = f + g \notin \Lambda_X^p(w)$. Para ello, observemos que $m_h(t) = 2m_f(t)$ para cada $t > 0$, y en consecuencia, $h^*(t) = f^*(t/2) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \chi_{(0,2n)}(t)$ para todo $t > 0$. Entonces, dado $m \in \mathbb{N}$ cualquiera, se tiene que

$$\begin{aligned} \|h\|_{\Lambda_X^p(w)}^p &= \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \chi_{(0,2n)}(t) \right)^p w(t) dt \\ &\geq \int_0^{\infty} \lambda_m^p \chi_{(0,2m)}(t) w(t) dt \\ &= \lambda_m^p W(2m) = \frac{1}{m^{p^2+1}} \frac{e^{2m} - 1}{e^m - 1}. \end{aligned}$$

Haciendo $m \rightarrow \infty$, concluimos que $h \notin \Lambda_X^p(w)$.

El siguiente lema [8, Lemma 2.2.10] caracteriza la cuasinormabilidad de los espacios de Lorentz, que solo dependerá del peso w y de nuestro espacio de medida (X, μ) .

Lema 4.12. *Sea $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ y w un peso. Entonces, el espacio $\Lambda_X^{p,q}(w)$ es cuasinormado si y solo si*

$$0 < W(\mu(A \cup B)) \leq C(W(\mu(A)) + W(\mu(B))), \quad (34)$$

para cada par de conjuntos medibles $A, B \subset X$ tal que $\mu(A \cup B) > 0$.

Demostración. (\Leftarrow) Supongamos que se verifica (4.12). En particular, $W(\mu(A)) > 0$ siempre que $\mu(A) > 0$. Si $\|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} = 0$, por la Proposición 4.8 sabemos que $W(\mu_f(t)) = 0$ para todo $t > 0$, y en consecuencia, $\mu_f(t) = 0$ para cada $t > 0$, por lo que $f = 0$ a.e. De esta manera, solo falta comprobar la “cuasi-desigualdad triangular”, la cual basta probar para funciones positivas. Sean $0 \leq f, g \in \Lambda_X^{p,q}(w)$ y $t > 0$. Entonces $\{f + g > t\} \subset \{f > t/2\} \cup \{g > t/2\}$, y por (4.12),

$$W(\mu_{f+g}(t)) \leq C(W(\mu_f(t/2)) + W(\mu_g(t/2))).$$

Claramente C no depende de t , y además sabemos (por argumentos de convexidad) que $(a + b)^\alpha \leq 2^{\alpha-1}(a^\alpha + b^\alpha)$, $a, b, \alpha > 0$. Por tanto, si $q < \infty$ (el caso $q = \infty$ es análogo), concluimos por la Proposición 4.8 que

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} &= \left(\int_0^{\infty} pt^{q-1} (W(\mu_{f+g}(t)))^{q/p} dt \right)^{1/q} \\ &\leq C^{1/q} \left(\int_0^{\infty} pt^{q-1} [W(\mu_f(t/2)) + W(\mu_g(t/2))]^{q/p} dt \right)^{1/q} \\ &\leq C^{1/q} 2^{1/p-1/q} \left(\int_0^{\infty} pt^{q-1} W(\mu_f(t/2))^{q/p} dt + \int_0^{\infty} pt^{q-1} W(\mu_g(t/2))^{q/p} dt \right)^{1/q} \\ &\leq C^{1/q} 2^{1/p-1/q} 2^{1-1/q} \left(\|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}^q + \|g\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}^q \right)^{1/q} \\ &\leq C_{p,q} (\|f\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} + \|g\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}). \end{aligned}$$

(\Rightarrow) Supongamos que $\Lambda_X^{p,q}(w)$ es cuasinormado con constante $C > 0$. Sean A, B dos conjuntos medibles con $\mu(A \cup B) > 0$. Observemos si $q < \infty$, por la Proposición 4.8,

$$\begin{aligned} \|\chi_{A \cup B}\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} &= \left(\int_0^\infty pt^{q-1} (W(\mu_{\chi_{A \cup B}}(t))^{q/p} dt \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_0^\infty pt^{q-1} (W(\mu(A \cup B)\chi_{[0,1]}(t))^{q/p} dt \right)^{1/q} \\ &= \left(\frac{p}{q} \right)^{1/q} W(\mu(A \cup B))^{1/p}. \end{aligned} \quad (35)$$

El caso $q = \infty$ se demuestra análogamente, obteniéndose la expresión (4.1) en el límite $q \rightarrow \infty$. Por tanto, si $W(\mu(A \cup B)) = 0$ entonces $\|\chi_{A \cup B}\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} = 0$, y dado que $\Lambda_X^{p,q}(w)$ es cuasinormado, $\mu(A \cup B) = 0$, lo que supone una contradicción. Por otro lado, está claro que $\chi_{A \cup B} \leq \chi_A + \chi_B$ y $\|\cdot\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}$ es un funcional monótono, de modo que por (4.1),

$$\begin{aligned} 0 < W(\mu(A \cup B)) &= \left(\frac{q}{p} \right)^{p/q} \|\chi_{A \cup B}\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}^p \leq \left(\frac{q}{p} \right)^{p/q} \|\chi_A + \chi_B\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}^p \\ &\leq \left(\frac{q}{p} \right)^{p/q} C^p \left(\|\chi_A\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} + \|\chi_B\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)} \right)^p \\ &\leq \left(\frac{q}{p} \right)^{p/q} C^p 2^{p-1} \left(\|\chi_A\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}^p + \|\chi_B\|_{\Lambda_X^{p,q}(w)}^p \right) \\ &= C'_{p,q} (W(\mu(A)) + W(\mu(B))). \end{aligned}$$

□

Este resultado motiva la siguiente definición.

Definición 4.13. Sea w un peso en \mathbb{R}^+ . Decimos que $W \in \Delta_2(X, \mu)$ si W satisface (4.12). Si $(X, \mu) = (\mathbb{R}^+, m)$ escribiremos simplemente $W \in \Delta_2$.

La siguiente proposición nos muestra que la condición $W \in \Delta_2$ es fácil de comprobar.

Proposición 4.14. *Sea w un peso. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) $W \in \Delta_2$.
- (ii) $W(2r) \leq CW(r)$, $r > 0$.
- (iii) $W(t+s) \leq C(W(t) + W(s))$, $t, s > 0$.

y en cualquiera de los casos, $W(t) > 0$, $t > 0$.

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Dado $r > 0$, como $W \in \Delta_2$,

$$W(2r) = W(|(0, r) \cup (r, 2r)|) \leq C(W(|(0, r)|) + W(|(r, 2r)|)) = 2CW(r).$$

(ii) \Rightarrow (iii) Sean $t, s > 0$ cualesquiera, y supongamos sin pérdida de generalidad que $t \geq s$. Entonces, como W es creciente,

$$W(t + s) \leq W(2t) \leq CW(t) \leq C(W(t) + W(s)).$$

(iii) \Rightarrow (i) Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ medibles tal que $|A \cup B| > 0$. Si $|A| = 0$ o $|B| = 0$ el resultado es trivial, mientras que si $|A|, |B| > 0$, como W es estrictamente positiva en $(0, \infty)$ y creciente,

$$0 < W(|A \cup B|) \leq W(|A| + |B|) \leq C(W(|A|) + W(|B|)).$$

□

Teorema 4.15. *Sea $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ y w un peso.*

(i) *Si $W \in \Delta_2$, entonces $\Lambda_X^{p,q}(w)$ es cuasinormado.*

(ii) *Si (X, μ) es no atómico, entonces $\Lambda_X^{p,q}(w)$ es cuasinormado si y solo si $W \in \Delta_2$.*

Esto es, $\Delta_2 \subset \Delta_2(X, \mu)$ para cada espacio de medida (X, μ) , y si (X, μ) es no atómico, entonces $\Delta_2 = \Delta_2(X, \mu)$.

Demostración. (i) Consecuencia inmediata de la Proposición 4.14 (iii).

(ii) Por el Lema 4.12 y el apartado (i), basta ver que $\Delta_2(X) \subset \Delta_2$. De esta manera, supongamos que $W \in \Delta_2(X)$ y tomemos $r > 0$ cualquiera. Si $2r \geq \mu(X)$, se tiene trivialmente que $W(2r) \leq W(r)$ y $0 < \mu(X) \leq W(r)$, dado que W es constante en $[\mu(X), \infty)$. Por tanto, supongamos que $2r < \mu(X)$. Como (X, μ) es no atómico, existe $A \subset X$ medible tal que $\mu(A) = r$, y dado que $(X \setminus A, \mu)$ también es no atómico y $\mu(X \setminus A) = \mu(X) - \mu(A) > r > 0$, existe $B \subset X \setminus A$ medible tal que $\mu(B) = r$. De esta manera,

$$0 < W(2r) = W(\mu(A) + \mu(B)) = W(\mu(A \cup B)) \leq C(W(\mu(A)) + W(\mu(B))) = 2CW(r).$$

El resultado se sigue de la Proposición 4.14. □

Sabemos que, cuando $\Lambda_X^p(w)$ es cuasinormado, es automáticamente un espacio vectorial, por lo que cabe preguntarse si el recíproco es cierto en los espacios de lorentz. El siguiente ejemplo muestra que esto es en general falso. Más aún, es posible caracterizar aquellos espacios de lorentz que son efectivamente espacios vectoriales (véase [11]).

Ejemplo 4.16. Consideremos $(X, \mu) = (\mathbb{R}^+, m)$ y el peso $w = \chi_{(1, \infty)}$. Observemos que $W(t) = \max\{0, t - 1\}$, $t > 0$, por lo que $W(3/4) = 0$ y $W(3/2) = 1/2 > 0$, de modo que $W \notin \Delta_2$. Por tanto, para cada $0 < p < \infty$, por el Teorema 4.15 se tiene que $\Lambda^p(w)$ no es cuasinormado. Veamos a continuación que, para cada $0 < p < \infty$, $\Lambda^p(w)$ es un espacio vectorial. Por la Proposición 4.9, basta comprobar que si $f, g \in \Lambda^p(w)$, entonces $f + g \in \Lambda^p(w)$. Además, como $|f|^* = f$, $|g|^* = g$ y $|f + g| \leq |f| + |g|$, es suficiente probarlo cuando f, g son no negativas. Definiendo $h = f + g$, para cada $\lambda > 0$ se tiene que

$$\min\{h^*, \lambda\} = (\min\{h, \lambda\})^*, \quad \min\{h, \lambda\} \leq 2(\min\{f, \lambda\} + \min\{g, \lambda\}).$$

En efecto, la primera es una mera comprobación, mientras que la segunda se sigue de que si $f(x) + g(x) > \lambda$ entonces, o bien $f(x) > \lambda/2$, o bien $g(x) > \lambda/2$. Por tanto, como h^* es decreciente, por la Proposición 2.30 se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty h^*(t)^p w(t) dt &= \int_1^\infty \min\{h^*(t), h^*(1)\}^p dt \\ &= \int_1^\infty (\min\{h, h^*(1)\})^*(t)^p dt \\ &\leq \|\min\{h, h^*(1)\}\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}^p \\ &\leq 2^p \|\min\{f, h^*(1)\} + \min\{g, h^*(1)\}\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}^p \\ &\leq 2^p \left(\|\min\{f, h^*(1)\}\|_{L^p(\mathbb{R}^+)} + \|\min\{g, h^*(1)\}\|_{L^p(\mathbb{R}^+)} \right)^p. \end{aligned}$$

Además, como $g, f \leq h$, se tiene que $f^*(1), g^*(1) \leq h^*(1)$, de modo que

$$\begin{aligned} \|\min\{f, h^*(1)\}\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}^p &= \int_0^\infty (\min\{f, h^*(1)\})^*(t)^p dt \\ &= \int_0^\infty \min\{f^*(t), h^*(1)\}^p dt \\ &\leq h^*(1)^p + \int_1^\infty \min\{f^*(t), h^*(1)\}^p dt \\ &= h^*(1)^p + \int_1^\infty f^*(t)^p dt < \infty, \end{aligned}$$

y análogamente, $\|\min\{g, h^*(1)\}\|_{L^p(\mathbb{R}^+)} < \infty$. Por tanto, $h = f + g \in \Lambda^p(w)$, y $\Lambda^p(w)$ es un espacio vectorial.

Si (X, μ) es no atómico, el Teorema 4.15 caracteriza cuándo $\Lambda^{p,q}(w)$ es cuasinormado. El siguiente resultado caracteriza la cuasinormabilidad de $\Lambda^{p,q}(w)$ en el caso de que (X, μ) sea completamente atómico y todos los átomos tengan la misma medida. Esto, por el Teorema 2.37, nos permite establecer la caracterización cuando (X, μ) es un espacio resonante.

Teorema 4.17. *Sea (X, μ) un espacio de medida completamente atómico cuyos átomos tienen todos la misma medida $b > 0$. Entonces $W \in \Delta_2(X)$ si y solo si*

$$W(2nb) \leq CW(nb), \quad n \geq 1. \tag{36}$$

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que $W \in \Delta_2(X)$ y tomemos $n \in \mathbb{N}$. Si $2nb \geq \mu(X)$, se cumple (4.17) trivialmente, por lo que asumamos que $2nb < \mu(X)$. Entonces, existen $A, B \subset X$ medibles y disjuntos tal que $\mu(A) = \mu(B) = nb$, de modo que

$$W(2nb) = W(\mu(A) + \mu(B)) = W(\mu(A \cup B)) \leq C(W(\mu(A)) + W(\mu(B))) = 2CW(nb).$$

(\Leftarrow) Supongamos que se verifica (4.17) para cada $n \geq 1$. Sean $A, B \subset X$ tal que $\mu(A \cup B) > 0$ y asumamos sin pérdida de generalidad que $\mu(A) \geq \mu(B)$. Si $\mu(A) = 0$ se verifica (4.12)

trivialmente, por lo que basta suponer que $\mu(A) > 0$. Entonces, como (X, μ) es completamente atómico y sus átomos tienen todos la misma medida $b > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A) = nb$. Por tanto, como W es creciente,

$$W(\mu(A \cup B)) \leq W(2\mu(A)) = W(2nb) \leq CW(nb) = CW(\mu(A)) \leq C(W(\mu(A)) + W(\mu(B))).$$

□

4.2. El operador de Hardy y las clases B_p

Desde que, en 1951, G. G. Lorentz [23] introdujo el espacio de Lorentz $\Lambda^p(w)$, la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood,

$$M : \Lambda^p(w) \longrightarrow \Lambda^p(w), \quad (37)$$

fue un tema central en esta teoría. En 1972, B. Muckenhoupt [27] ya caracterizó aquellos pesos para los cuales se daba la acotación,

$$M : L^p(w) \longrightarrow L^p(w),$$

los cuales se conocen ahora como pesos A_p . Más reciente es la caracterización de aquellos pesos para los cuales se satisface (4.2), que fue completamente resuelta por M. A. Ariño y B. Muckenhoupt [2] en 1991, aunque con técnicas radicalmente distintas de las utilizadas para los pesos A_p (lemas de recubrimiento y descomposiciones de Calderón-Zygmund). En este caso, la idea fundamental es que, por el Teorema 3.17, $(Mf)^*$ y $f^{**} = A(f^*)$ son puntualmente equivalentes, de modo que (4.2) es equivalente a la acotación del operador de Hardy A sobre el cono de funciones positivas y decrecientes de $L^p(w)$.

Definición 4.18. Sea $0 < p < \infty$ y w un peso. Denotaremos al cono de funciones positivas y decrecientes en $L^p(w)$ como

$$L_{\text{dec}}^p(w) = \{f \in L^p(w) : f \geq 0, f \downarrow\}.$$

De esta manera, estamos interesados en acotaciones de la forma

$$A : L_{\text{dec}}^p(w) \longrightarrow L^p(w),$$

y, también,

$$A : L_{\text{dec}}^p(w) \longrightarrow L^{p,\infty}(w).$$

Es fácil encontrar pesos para los cuales no se dan estas acotaciones (basta tomar $w = 1$ y $p = 1$), por lo que debemos caracterizar aquellos pesos para los cuales el operador de Hardy posee estas propiedades. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 4.19. Sea w un peso y $0 < p < \infty$. Decimos que $w \in B_p$ si

$$A : L_{\text{dec}}^p(w) \longrightarrow L^p(w),$$

y $w \in B_{p,\infty}$ si

$$A : L_{\text{dec}}^p(w) \longrightarrow L^{p,\infty}(w).$$

Observación 4.20. Es fácil comprobar que el operador de Hardy lleva funciones decrecientes en funciones decrecientes, de modo que si $w \in B_p$,

$$A : L_{\text{dec}}^p(w) \longrightarrow L_{\text{dec}}^p(w),$$

y si $w \in B_{p,\infty}$,

$$A : L_{\text{dec}}^p(w) \longrightarrow L_{\text{dec}}^{p,\infty}(w).$$

El Teorema 4.23 caracterizará completamente a los pesos B_p . En el caso $p > 1$, la demostración original de la equivalencia (i) \Leftrightarrow (ii) se debe a M. A. Ariño y B. Muckenhoupt [2], mientras que la equivalencia (ii) \Leftrightarrow (iii) fue establecida por J. Soria [34]. Por simplicidad, presentaremos una demostración alternativa del resultado de Ariño y Muckenhoupt (véase [10]), para la cual será necesario el siguiente lema previo [16, Theorem 2.1].

Lema 4.21. Sea $0 < p \leq 1$ y f una función positiva y decreciente. Entonces,

$$\left(\int_0^\infty f(t) dt \right)^p \leq p \int_0^\infty f(t)^p t^{p-1} dt. \quad (38)$$

Demostración. Definamos

$$h(x) = \left(\int_0^x f(t) dt \right)^p - p \int_0^x f(t)^p t^{p-1} dt,$$

para cada $x \geq 0$. Entonces, como $0 < p \leq 1$ y f es decreciente,

$$h'(x) = p \left(\int_0^x f(t) dt \right)^{p-1} f(x) - p f(x)^p x^{p-1} = p f(x) x^{p-1} \left[\left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^{p-1} - f(x)^{p-1} \right] \leq 0,$$

para todo $x \geq 0$. Por tanto, h es decreciente, luego $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) \leq h(0) = 0$, de donde se sigue (4.21). \square

Observación 4.22. Sea w un peso. Dado $n \geq 1$, como w es localmente integrable se tiene que $w \in L^1([0, n])$, de modo que $W|_{[0, n]}$ es absolutamente continua, y por ende diferenciable a.e. Por tanto W es una función creciente, continua y diferenciable a.e. en \mathbb{R} , por lo que, a través de la integral de Lebesgue-Stieltjes, es fácil comprobar que

$$\int_r^s f(s)w(s) ds = f(s)W(s) - f(r)W(r) - \int_r^s f'(s)W(s) ds,$$

para cada $r > s > 0$, y f absolutamente continua. Esto es, se verifica la fórmula de integración por partes.

Teorema 4.23 (M. A. Ariño, B. Muckenhoupt [2] [34]). *Sea w un peso y $0 < p < \infty$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $w \in B_p$.

$$(ii) \int_r^\infty \frac{w(t)}{t^p} dt \leq \frac{C}{r^p} \int_0^r w(t) dt, \quad r > 0.$$

$$(iii) \int_r^\infty \frac{W(t)}{t^{p+1}} dt \leq C \frac{W(r)}{r^p}, \quad r > 0.$$

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Supongamos que $w \in B_p$. Sea $r > 0$ cualquiera. Definiendo $f = \chi_{(0,r)}$, está claro que $Af(x) = \min\{1, r/x\}$ para cada $x > 0$, de modo que

$$\int_0^r w(x) dx + \int_r^\infty \left(\frac{r}{x}\right)^p w(x) dx = \|Af\|_{L^p(w)}^p \leq C^p \|f\|_{L^p(w)}^p = C^p \int_0^r w(x) dx, \quad (39)$$

o equivalentemente,

$$\int_r^\infty \frac{w(x)}{x^p} dx \leq \frac{C^p - 1}{r^p} \int_0^r w(x) dx.$$

(ii) \Rightarrow (i) Supongamos que se verifica (ii), y tomemos $f \in L^p_{\text{dec}}(w)$. Veamos en primer lugar el caso $0 < p \leq 1$. Observemos que, como f es decreciente,

$$\begin{aligned} Af(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \int_0^\infty \frac{\chi_{(0,x)}(t)}{x} f(t) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{x} \int_0^\infty \chi_{(0,x)}(t) \chi_{(0,f(t))}(s) ds dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{x} \int_0^x \chi_{(0,m_f(s))}(t) dt ds \\ &= \int_0^\infty A(\chi_{(0,m_f(s))})(x) ds, \end{aligned} \quad (40)$$

para cada $x > 0$. Por (4.2), está claro que (ii) es equivalente a la acotación del operador de Hardy sobre las funciones $\{\chi_{(0,r)}\}_{r>0} \subset L^p(w)$. Además, dado $x > 0$ cualquiera, $A(\chi_{(0,m_f(s))})(x)$ es decreciente en s , de modo que por los Lemas 4.7 y 4.21,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty Af(x)^p w(x) dx &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty A(\chi_{(0,m_f(s))})(x) ds \right)^p w(x) dx \\ &\leq p \int_0^\infty \int_0^\infty A(\chi_{(0,m_f(s))})(x)^p s^{p-1} ds w(x) dx \\ &= \int_0^\infty p s^{p-1} \int_0^\infty A(\chi_{(0,m_f(s))})(x)^p w(x) dx ds \\ &\leq \int_0^\infty p s^{p-1} (C+1) \int_0^\infty \chi_{(0,m_f(s))}(x)^p w(x) dx ds \\ &= (C+1) \int_0^\infty p s^{p-1} W(m_f(s)) ds \\ &= (C+1) \int_0^\infty f(x)^p w(x) dx. \end{aligned}$$

Por otro lado, supongamos que $p > 1$. Asumamos que f tiene soporte acotado, de modo que existe $a > 0$ tal que $Af(x)^p \simeq x^{-p}$ para $x > a$, y por (ii) se tiene que $\|Af\|_{L^p(w)} < \infty$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\left(\int_0^x f(t) dt \right)^p = p \int_0^x \left(\int_0^t f(s) ds \right)^{p-1} f(t) dt = p \int_0^x g(t)t^{p-1} dt,$$

para cada $x > 0$, donde

$$g(t) := \left(\frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds \right)^{p-1} f(t) = Af(t)^{p-1} f(t), \quad t > 0.$$

Además, como g es decreciente, se tiene por el Lema 4.7 que

$$\begin{aligned} Af(x)^p &= \frac{p}{x^p} \int_0^x g(t)t^{p-1} dt = \frac{p}{x^p} \int_0^\infty \chi_{(0,x)}(t)t^{p-1}g(t) dt \\ &= \frac{p}{x^p} \int_0^\infty \chi_{(0,x)}(t)t^{p-1} \int_0^\infty \chi_{(0,g(t))}(s) ds dt \\ &= \frac{p}{x^p} \int_0^\infty \int_0^\infty \chi_{(0,x)}(t)t^{p-1} \chi_{(0,m_g(s))}(t) dt ds \\ &= \frac{1}{x^p} \int_0^\infty \int_0^{\min\{x,m_g(s)\}} pt^{p-1} dt ds \\ &= \int_0^\infty \min \left\{ 1, \frac{m_g(s)}{x} \right\}^p ds, \end{aligned}$$

para todo $x > 0$. Por tanto, volviendo a aplicar el Lema 4.7,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty Af(x)^p w(x) dx &= \int_0^\infty \int_0^\infty \min \left\{ 1, \frac{m_g(s)}{x} \right\}^p w(x) dx ds \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^{m_g(s)} w(x) + \int_{m_g(s)}^\infty \frac{m_g(s)^p}{x^p} w(x) dx \right) ds \\ &\leq (C+1) \int_0^\infty \int_0^{m_g(s)} w(x) dx ds \\ &= (C+1) \int_0^\infty g(x)w(x) dx \\ &= (C+1) \int_0^\infty Af(t)^{p-1} f(t)w(x) dx \\ &\leq (C+1) \|(Af)^{p-1}\|_{L^{p'(w)}} \|f\|_{L^p(w)} \\ &= (C+1) \|Af\|_{L^p(w)}^{p-1} \|f\|_{L^p(w)}, \end{aligned}$$

de donde deducimos, como $\|Af\|_{L^p(w)} < \infty$, que $\|Af\|_{L^p(w)} \leq (C+1)\|f\|_{L^p(w)}$. En el caso de que f no tenga soporte compacto, basta considerar la sucesión $f_n = f\chi_{(0,n)}$, $n \geq 1$, y aplicar el Teorema de la Convergencia Monótona.

(ii) \Rightarrow (iii) Por la Observación 4.22, podemos integrar por partes para deducir que

$$\int_r^s \frac{w(t)}{t^p} dt = \frac{W(s)}{s^p} - \frac{W(r)}{r^p} + p \int_r^s \frac{W(t)}{t^{p+1}} dt, \quad (41)$$

para cada $s > r > 0$. Por tanto, como W es creciente,

$$p \int_r^s \frac{W(t)}{t^{p+1}} dt \leq \int_r^\infty \frac{w(t)}{t^p} dt + \frac{W(r)}{r^p} - \frac{W(s)}{s^p} \leq C \frac{W(r)}{r^p} + \frac{W(r)}{r^p} = (C+1) \frac{W(r)}{r^p},$$

para cada $s > r > 0$, lo que prueba (ii).

(iii) \Rightarrow (ii) De forma similar a la implicación anterior, por (4.2) y el hecho de que W es creciente, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_r^s \frac{w(t)}{t^p} dt &\leq \frac{W(s)}{s^p} + p \int_r^s \frac{W(t)}{t^{p+1}} dt \\ &= W(s)p \int_s^\infty \frac{1}{t^p} dt + p \int_r^s \frac{W(t)}{t^{p+1}} dt \\ &\leq p \int_s^\infty \frac{W(t)}{t^{p+1}} dt + p \int_r^s \frac{W(t)}{t^{p+1}} dt \\ &= p \int_r^\infty \frac{W(t)}{t^{p+1}} dt \leq pC \frac{W(r)}{r^p}, \end{aligned}$$

para cada $s > r > 0$, de donde se sigue (i). \square

Observación 4.24. En realidad, cuando $0 < p \leq 1$, lo que hemos probado en el resultado anterior es que

$$\sup_{f \in L_{\text{dec}}^p(w)} \frac{\|Af\|_{L^p(w)}}{\|f\|_{L^p(w)}} = \sup_{r>0} \frac{\|A\chi_{(0,r)}\|_{L^p(w)}}{\|\chi_{(0,r)}\|_{L^p(w)}}.$$

Este tipo de resultados se pueden generalizar a operadores $T : L \rightarrow \mathcal{M}_0(X)$ orden-continuos y sublineales, siempre que L sea una clase “regular” (véase [8, Theorem 1.2.11]).

Veamos algunas de las propiedades más relevantes de las clases B_p .

Proposición 4.25. Sean $0 < p, q < \infty$ y w un peso.

(i) $B_p \subset B_q$ para todo $p < q$.

(ii) La condición B_p es abierta en p . Esto es, si $w \in B_p$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $w \in B_{p-\epsilon}$.

(iii) $w \in \bigcup_{0 < p < \infty} B_p$ si y solo si $W \in \Delta_2$.

Demostración. (i) Supongamos que $p < q$ y tomemos $w \in B_p$. Dado $r > 0$, por el Teorema 4.23 se tiene que

$$\int_r^\infty \frac{w(t)}{t^q} dt = \int_r^\infty \frac{1}{t^{q-p}} \frac{w(t)}{t^p} dt \leq \frac{1}{r^{q-p}} \int_r^\infty \frac{w(t)}{t^p} dt \leq \frac{C}{r^p} \int_0^r w(t) dt,$$

de modo que $w \in B_q$ por el mismo resultado.

(ii) Supongamos que $w \in B_p$, y $C > 0$ es la constante dada por el Teorema 4.23. Definamos $S := (C + 2^{-p})(C + 1)^{-1} < 1$, y tomemos $\epsilon > 0$ tal que $2^\epsilon S < 1$. Veamos que $w \in B_{p-\epsilon}$.

Fijemos $r > 0$ cualquiera, y definamos $A_k = \int_0^{2^{kr}} w(x) dx$ para cada $k \geq 0$. Entonces, por el Teorema 4.23, para cada $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{A_k}{2^{kp}} &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^{kp}} \int_0^{2^{kr}} w(x) dx \\
 &= \int_0^{2^{nr}} w(x) \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^{kp}} \right) dx + \sum_{k=n}^{\infty} \int_{2^{nr}}^{2^{kr}} \frac{w(x)}{2^{kp}} dx \\
 &= \int_0^{2^{nr}} w(x) \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^{kp}} \right) dx + \int_{2^{nr}}^{\infty} w(x) \left(\sum_{2^{kr} \geq x} \frac{1}{2^{kp}} \right) dx \\
 &\leq \frac{1}{1-2^{-p}} \left[\int_0^{2^{nr}} \frac{w(x)}{2^{np}} dx + \int_{2^{nr}}^{\infty} w(x) \left(\frac{r}{x} \right)^p dx \right] \\
 &\leq \frac{C+1}{1-2^{-p}} 2^{-np} \int_0^{2^{nr}} \frac{w(x)}{2^{np}} dx = \frac{C+1}{1-2^{-p}} \frac{A_n}{2^{np}} \\
 &= \frac{C+1}{1-2^{-p}} \left[\sum_{k=n}^{\infty} \frac{A_k}{2^{kp}} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{A_k}{2^{kp}} \right].
 \end{aligned} \tag{42}$$

De esta manera,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{A_k}{2^{kp}} \leq \left(\frac{C+1}{1-2^{-p}} - 1 \right) \left(\frac{1-2^{-p}}{C+1} \right) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{A_k}{2^{kp}} = S \sum_{k=n}^{\infty} \frac{A_k}{2^{kp}},$$

y procediendo por inducción,

$$\frac{A_n}{2^{np}} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{A_k}{2^{kp}} \leq S^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{2^{kp}}, \tag{43}$$

para cada $n \geq 0$. Por tanto, por (4.2) y (4.2),

$$\begin{aligned}
 \int_r^{\infty} \frac{w(x)}{x^{p-\epsilon}} dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{2^{n-1}r}^{2^{nr}} \frac{w(x)}{x^{p-\epsilon}} dx \\
 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{n-1}r)^{p-\epsilon}} \int_{2^{n-1}r}^{2^{nr}} w(x) dx \\
 &\leq \left(\frac{2}{r} \right)^{p-\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2^{n(p-\epsilon)}} \\
 &\leq \left(\frac{2}{r} \right)^{p-\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} (2^\epsilon S)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{2^{kp}} \\
 &\leq \left(\frac{2}{r} \right)^{p-\epsilon} \frac{1}{1-2^\epsilon S} \frac{C+1}{1-2^{-p}} \int_0^r w(x) dx,
 \end{aligned}$$

lo que concluye el resultado.

(iii) Supongamos que $w \in B_p$ para algún $0 < p < \infty$. Dado $r > 0$, por el Teorema 4.23 se tiene que

$$W(2r) = p(2r)^p W(2r) \int_{2r}^{\infty} \frac{1}{t^{p+1}} dt \leq p(2r)^p \int_{2r}^{\infty} \frac{W(t)}{t^{p+1}} dt \leq p(2r)^p \int_r^{\infty} \frac{W(t)}{t^{p+1}} dt \leq p2^p W(r),$$

luego $W \in \Delta_2$.

Recíprocamente, supongamos que $W \in \Delta_2$, de modo que $W(2r) \leq CW(r)$ para cada $r > 0$. Consideremos $0 < p < \infty$ tal que $C2^{-p} < 1$, y veamos que $w \in B_p$. Dado $r > 0$, realizando el cambio de variable $t = 2u$, se tiene para cada $n \geq 1$,

$$\int_{2^{n-1}r}^{2^n r} \frac{W(t)}{t^{p+1}} dt = \frac{1}{2^p} \int_{2^{n-2}r}^{2^{n-1}r} \frac{W(2u)}{u^{p+1}} du \leq \frac{C}{2^p} \int_{2^{n-2}r}^{2^{n-1}r} \frac{W(u)}{u^{p+1}} du.$$

Entonces, procediendo por inducción y sabiendo que W es creciente, se tiene que

$$\int_{2^{n-1}r}^{2^n r} \frac{W(t)}{t^{p+1}} dt \leq \left(\frac{C}{2^p}\right)^n \int_{\frac{r}{2}}^r \frac{W(t)}{t^{p+1}} dt \leq \left(\frac{C}{2^p}\right)^n W(r) \int_{\frac{r}{2}}^r \frac{1}{t^{p+1}} dt = \frac{2^p - 1}{p2^p} \left(\frac{C}{2^p}\right)^n \frac{W(r)}{r^p},$$

para cada $n \geq 1$. Por tanto,

$$\int_r^{\infty} \frac{W(t)}{t^{p+1}} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{2^{n-1}r}^{2^n r} \frac{W(t)}{t^{p+1}} dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^p - 1}{p2^p} \left(\frac{C}{2^p}\right)^n \frac{W(r)}{r^p} = \frac{2^p - 1}{p(C - 2^p)} \frac{W(r)}{r^p},$$

luego, por el Teorema 4.23, $w \in B_p$. □

Observación 4.26. (i) Aunque por el resultado anterior $B_p \subset B_q$ para cada $p < q$, se tiene que $B_p \subsetneq \bigcap_{q>p} B_q$ para todo $0 < p < \infty$. Para verlo, dado $0 < p < \infty$ cualquiera, basta definir el peso $w(t) = t^{p-1}$, $t > 0$. Claramente, dado $q > p$,

$$\int_r^{\infty} \frac{w(t)}{t^q} dt = \int_r^{\infty} t^{p-q-1} dt = \left[\frac{t^{p-q}}{p-q} \right]_r^{\infty} = \frac{1}{q-p} \frac{r^p}{r^q} = \frac{C_{p,q}}{r^q} \int_0^r w(t) dt,$$

para cada $r > 0$, donde $C_{p,q} = p/(q-p)$. Por tanto, $w \in B_q$ para todo $q > p$, y sin embargo, $w \notin B_p$.

(ii) La demostración de la Proposición 4.25 (ii) es la original de Ariño y Muckenhoupt (véase [2, Lemma 2.1]). Aunque el $\epsilon > 0$ se halla de forma explícita en esta prueba, existen otras demostraciones más sencillas, y que además aportan más intuición sobre cuál es el $\epsilon > 0$ adecuado para un cierto peso w y $0 < p < \infty$ (véase [28, Theorem 2.5] para el caso $p > 1$).

Una vez hemos caracterizado los pesos B_p , estudiaremos la clase $B_{p,\infty}$. Para ello, utilizaremos el siguiente resultado, cuya demostración original se debe a E. Sawyer [32, Theorem 1], y parte de la que expondremos a continuación puede encontrarse en [10, Theorem 3.1].

Teorema 4.27 (Dualidad de Sawyer [32]). *Sea w un peso, $0 < p < \infty$ y g una función medible no negativa en \mathbb{R}^+ . Si $p > 1$, entonces,*

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq f \downarrow} \frac{\int_0^\infty f(x)g(x) dx}{\left(\int_0^\infty f(x)^p w(x) dx\right)^{1/p}} &\approx \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty \frac{g(t)}{W(t)} dt\right)^{p'-1} g(x) dx\right)^{1/p'} \\ &\approx \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x g(t) dt\right)^{p'-1} W(x)^{1-p'} g(x) dx\right)^{1/p'} \\ &\approx \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x g(t) dt\right)^{p'} W(x)^{-p'} w(x) dx\right)^{1/p'} + \frac{\int_0^\infty g(x) dx}{\left(\int_0^\infty w(x) dx\right)^{1/p}}. \end{aligned}$$

De forma similar, si $0 < p \leq 1$, entonces

$$\sup_{0 \leq f \downarrow} \frac{\int_0^\infty f(x)g(x) dx}{\left(\int_0^\infty f(x)^p w(x) dx\right)^{1/p}} = \sup_{r>0} \left(W(r)^{-1/p} \int_0^r g(x) dx\right).$$

Además, las constantes que aparecen en las desigualdades no dependen de w ni de g .

Demostración. Sea $p > 1$. Supongamos en primer lugar que g es una función acotada con soporte compacto tal que g/W está también acotada. Denotemos $G(\infty) = \int_0^\infty g(t) dt < \infty$, $W(\infty) = \int_0^\infty w(t) dt$, y veamos que cada expresión es mayor o igual que una constante por la siguiente.

Para la primera consideremos la función

$$\varphi(x) = \left(\int_x^\infty \frac{g(t)}{W(t)} dt\right)^{p'-1}, \quad x > 0,$$

que está bien definida, es no negativa y decreciente. Observemos que, integrando por partes (véase la Observación 4.22),

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varphi(x)^p w(x) dx &= \varphi(x)W(x)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty p\varphi(x)^{p-1}\varphi'(x)W(x) dx \\ &= p(p'-1) \int_0^\infty \varphi(x) \frac{g(x)}{W(x)} W(x) dx \\ &= p' \int_0^\infty \varphi(x)g(x) dx. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \sup_{0 \leq f \downarrow} \frac{\int_0^\infty f(x)g(x) dx}{\left(\int_0^\infty f(x)^p w(x) dx\right)^{1/p}} &\geq \frac{\int_0^\infty \varphi(x)g(x) dx}{\left(\int_0^\infty \varphi(x)^p w(x) dx\right)^{1/p}} \\
 &= \frac{1}{(p')^{1/p'}} \left(\int_0^\infty \varphi(x)g(x) dx\right)^{1/p'} \\
 &= \frac{1}{(p')^{1/p'}} \left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty \frac{g(t)}{W(t)} dt\right)^{p'-1} g(x) dx\right)^{1/p'}.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, como $0 \leq g \in L^1((0, \infty))$, G es continua y creciente. De esta manera, denotando $x_0 = \infty$, como $G(\infty) < \infty$ y $G(0) = 0$, podemos encontrar una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty \subset (0, \infty)$ verificando que $x_n \downarrow 0$, y $G(x_n) = G(\infty)/2^n$ para cada $n \geq 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \left(\int_x^\infty \frac{g(t)}{W(t)} dt\right)^{p'-1} g(x) dx &= \sum_{n=0}^\infty \int_{x_{n+1}}^{x_n} \left(\int_x^\infty \frac{g(t)}{W(t)} dt\right)^{p'-1} g(x) dx \\
 &\geq \sum_{n=2}^\infty \int_{x_{n+1}}^{x_n} \left(\int_{x_n}^{x_{n-1}} \frac{g(t)}{W(t)} dt\right)^{p'-1} g(x) dx \\
 &\geq \sum_{n=2}^\infty \left(G(x_n) - G(x_{n+1})\right) \left(G(x_{n-1}) - G(x_n)\right)^{p'-1} W(x_{n-1})^{1-p'} \\
 &= \frac{1}{2^{2p'+1}} \sum_{n=2}^\infty \left(G(x_{n-2}) - G(x_{n-1})\right) G(x_{n-2})^{p'-1} W(x_{n-1})^{1-p'} \\
 &= \frac{1}{2^{2p'+1}} \sum_{n=2}^\infty \int_{x_{n-1}}^{x_{n-2}} G(x_{n-2})^{p'-1} W(x_{n-1})^{1-p'} g(x) dx \\
 &\geq \frac{1}{2^{2p'+1}} \sum_{n=2}^\infty \int_{x_{n-1}}^{x_{n-2}} G(x)^{p'-1} W(x)^{1-p'} g(x) dx \\
 &= \frac{1}{2^{2p'+1}} \int_0^\infty G(x)^{p'-1} W(x)^{1-p'} g(x) dx,
 \end{aligned}$$

lo que implica la segunda desigualdad.

Para la tercera, basta integrar por partes y tener en cuenta que, como $p' > 1$, la función $\varphi(t) = t^{1/p'}$ es cóncava,

$$\begin{aligned}
 \left(\int_0^\infty G(x)^{p'-1} W(x)^{1-p'} g(x) dx \right)^{1/p'} &= \left(\frac{G(x)^{p'}}{p'} W(x)^{1-p'} \Big|_0^\infty \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{p} \int_0^\infty G(x)^{p'} W(x)^{-p'} w(x) dx \right)^{1/p'} \\
 &= \left(\frac{1}{p} \int_0^\infty G(x)^{p'} W(x)^{-p'} w(x) dx \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{p'} \frac{G(\infty)^{p'}}{W(\infty)^{p'-1}} \right)^{1/p'} \\
 &\geq \frac{1}{p} \left(\int_0^\infty G(x)^{p'} W(x)^{-p'} w(x) dx \right)^{1/p'} \\
 &\quad + \frac{1}{p'} \left(\frac{G(\infty)^{p'}}{W(\infty)^{p'-1}} \right)^{1/p'} \\
 &\geq \frac{1}{p+p'} \left[\left(\int_0^\infty G(x)^{p'} W(x)^{-p'} w(x) dx \right)^{1/p'} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{G(\infty)}{W(\infty)^{1/p}} \right].
 \end{aligned}$$

Finalmente, para la última desigualdad, consideremos la función

$$h(t) = \left(\int_t^\infty G(x)^{p'-1} W(x)^{-p'} w(x) dx + \frac{1}{p'-1} \left(\frac{G(\infty)}{W(\infty)} \right)^{p'-1} \right)^{1/p'}, \quad t > 0.$$

Observemos que, como G es creciente, para cada $t > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 \int_t^\infty G(x)^{p'-1} W(x)^{-p'} w(x) dx &\leq G(\infty)^{p'-1} \int_t^\infty W(x)^{-p'} w(x) dx \\
 &= \frac{G(\infty)^{p'-1}}{p'-1} \left(W(t)^{1-p'} - W(\infty)^{1-p'} \right),
 \end{aligned}$$

y análogamente,

$$\begin{aligned}
 \int_t^\infty G(x)^{p'-1} W(x)^{-p'} w(x) dx &\geq G(t)^{p'-1} \int_t^\infty W(x)^{-p'} w(x) dx \\
 &= \frac{G(t)^{p'-1}}{p'-1} \left(W(t)^{1-p'} - W(\infty)^{1-p'} \right).
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{1}{(p' - 1)^{1/p'}} \left(\frac{G(t)}{W(t)} \right)^{1/p} \leq h(t) \leq \frac{1}{(p' - 1)^{1/p'}} \left(\frac{G(\infty)}{W(t)} \right)^{1/p}, \quad (44)$$

para cada $t > 0$, luego h está bien definida, es estrictamente positiva y decreciente. Sea f una función medible no negativa y decreciente en $(0, \infty)$. Entonces, aplicando al desigualdad de Hölder para $d\mu(x) = g(x)dm(x)$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x)g(x) dx &= \int_0^\infty f(x)h(x)h(x)^{-1}g(x) dx \\ &\leq \left(\int_0^\infty f(x)^p h(x)^{-p} g(x) dx \right)^{1/p} \left(\int_0^\infty h(x)^{p'} g(x) dx \right)^{1/p'}. \end{aligned}$$

Por un lado, por el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty h(x)^{p'} g(x) dx &= \int_0^\infty \int_x^\infty G(t)^{p'-1} W(t)^{-p'} w(t) g(x) dt dx \\ &\quad + \frac{1}{p' - 1} \left(\frac{G(\infty)}{W(\infty)} \right)^{p'-1} \int_0^\infty g(x) dx \\ &= \int_0^\infty G(t)^{p'-1} W(t)^{-p'} w(t) \int_0^t g(x) dx dt + \frac{1}{p' - 1} \frac{G(\infty)^{p'}}{W(\infty)^{p'-1}} \\ &= \int_0^\infty G(t)^{p'} W(t)^{-p'} w(t) dt + \frac{1}{p' - 1} \frac{G(\infty)^{p'}}{W(\infty)^{p'-1}}, \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty h(x)^{p'} g(x) dx \right)^{1/p'} &\leq \left(\int_0^\infty G(t)^{p'} W(t)^{-p'} w(t) dt + \frac{1}{p' - 1} \frac{G(\infty)^{p'}}{W(\infty)^{p'-1}} \right)^{1/p'} \\ &\leq \left(\int_0^\infty G(t)^{p'} W(t)^{-p'} w(t) dt \right)^{1/p'} + \frac{1}{(p' - 1)^{1/p'}} \frac{G(\infty)}{W(\infty)^{1/p}} \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{(p' - 1)^{1/p'}} \right) \left[\left(\int_0^\infty G(t)^{p'} W(t)^{-p'} w(t) dt \right)^{1/p'} \right. \\ &\quad \left. + \frac{G(\infty)}{W(\infty)^{1/p}} \right]. \end{aligned} \quad (45)$$

Por otro lado, aplicando el Lema 4.7, (4.2), e integración por partes,

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty f(x)^p h(x)^{-p} g(x) dx &= \int_0^\infty px^{p-1} \int_0^{m_f(x)} h(t)^{-p} g(t) dt dx \\
 &= \int_0^\infty px^{p-1} \left(h(m_f(x))^{-p} G(m_f(x)) \right. \\
 &\quad \left. + p \int_0^{m_f(x)} h(t)^{-p-1} h'(t) G(t) dt \right) dx \\
 &\leq \int_0^\infty px^{p-1} h(m_f(x))^{-p} G(m_f(x)) dx \\
 &\leq (p' - 1)^{p-1} \int_0^\infty px^{p-1} W(m_f(x)) dx \\
 &= (p' - 1)^{p-1} \int_0^\infty f(x)^p w(x) dx.
 \end{aligned} \tag{46}$$

De esta manera, se sigue de (4.2) y (4.2) que

$$\sup_{0 \leq f \downarrow} \frac{\int_0^\infty f(x)g(x) dx}{\left(\int_0^\infty f(x)^p w(x) dx \right)^{1/p}} \leq \left(1 + (p' - 1)^{1/p'} \right) \left[\left(\int_0^\infty G(t)^{p'} W(t)^{-p'} w(t) dt \right)^{1/p'} + \frac{G(\infty)}{W(\infty)^{1/p}} \right],$$

lo que concluye el caso $p > 1$. En el caso de que g no esté en las hipótesis que hemos asumido al comienzo de la demostración, bastará definir la sucesión creciente de funciones medibles $g_n = g \chi_{\{1/n < g < n\}} \chi_{\{W > 1/n\}} \chi_{(0,n)}$, $n \geq 1$, que claramente verifican las propiedades deseadas. Entonces, el resultado se seguirá del Teorema de la Convergencia Monótona, y el hecho de que las constantes de las desigualdades no dependen de g_n .

Supongamos ahora el caso $0 < p \leq 1$. Para la desigualdad \geq , tomemos $r > 0$, y consideremos $f = \chi_{(0,r)}$. Entonces,

$$\sup_{0 \leq f \downarrow} \frac{\int_0^\infty f(x)g(x) dx}{\left(\int_0^\infty f(x)^p w(x) dx \right)^{1/p}} \geq \frac{\int_0^\infty \chi_{(0,r)}(x)g(x) dx}{\left(\int_0^\infty \chi_{(0,r)}(x)w(x) dx \right)^{1/p}} = W(r)^{-1/p} \int_0^r g(x) dx.$$

Por tanto, como $r > 0$ es arbitrario,

$$\sup_{0 \leq f \downarrow} \frac{\int_0^\infty f(x)g(x) dx}{\left(\int_0^\infty f(x)^p w(x) dx \right)^{1/p}} \geq \sup_{r > 0} \left(W(r)^{-1/p} \int_0^r g(x) dx \right). \tag{47}$$

Para probar la desigualdad \leq , denotemos

$$C := \sup_{r > 0} \left(W(r)^{-1/p} \int_0^r g(x) dx \right).$$

Si $C = \infty$, el resultado es trivial por (4.2), por lo que supongamos sin pérdida de generalidad que $C < \infty$. De esta manera, para cada $r > 0$ se tiene que $G(r) \leq CW(r)^{1/p}$. Consideremos

4.2. EL OPERADOR DE HARDY Y LAS CLASES B_p

una función f no negativa y decreciente. Entonces, como $G(m_f(t))$ es decreciente, por el Lema 4.21, y el Lema 4.7 aplicado a w y g , se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x)^p w(x) dx &= \int_0^\infty pt^{p-1} W(m_f(t)) dt \\ &\geq \frac{1}{C^p} \int_0^\infty pt^{p-1} G(m_f(t))^p dt \\ &\geq \frac{1}{C^p} \left(\int_0^\infty G(m_f(t)) dt \right)^p \\ &= \frac{1}{C^p} \left(\int_0^\infty f(x)g(x) dx \right)^p. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sup_{0 \leq f \downarrow} \frac{\int_0^\infty f(x)g(x) dx}{\left(\int_0^\infty f(x)^p w(x) dx \right)^{1/p}} \leq C = \sup_{r>0} \left(W(r)^{-1/p} \int_0^r g(x) dx \right).$$

□

Teorema 4.28. *Sea w un peso y $0 < p < \infty$. Entonces $w \in B_{p,\infty}$ si y solo si,*

(i) si $p > 1$,

$$W(r)^{1/p} \left(\int_0^r x^{p'-1} W(x)^{1-p'} dx \right)^{1/p'} \leq Cr, \quad r > 0. \quad (48)$$

(ii) si $p \leq 1$,

$$\sup_{r \geq s > 0} \left(W(r)^{1/p} W(s)^{-1/p} r/s \right) < \infty.$$

Demostración. Observemos que $w \in B_{p,\infty}$ es equivalente a que, para cada $f \in L_{\text{dec}}^p(w)$,

$$\sup_{y>0} y W(m_{Af}(y))^{1/p} \leq C \|f\|_{L^p(w)}.$$

Además, como Af es decreciente siempre que f lo es, por la Proposición 4.8 (iii), esto es equivalente a que, para cada $f \in L_{\text{dec}}^p(w)$,

$$\sup_{r>0} Af(r) W(r)^{1/p} \leq C \|f\|_{L^p(w)}.$$

Por tanto, $w \in B_{p,\infty}$ si y solo si,

$$\sup_{r>0} \left(\left(\sup_{f \in L_{\text{dec}}^p(w)} \frac{Af(r)}{\|f\|_{L^p(w)}} \right) W(r)^{1/p} \right) = \sup_{f \in L_{\text{dec}}^p(w)} \left(\sup_{r>0} \left(\frac{Af(r)}{\|f\|_{L^p(w)}} W(r)^{1/p} \right) \right) < \infty. \quad (49)$$

(i) Supongamos que $p > 1$. Sea $r > 0$. Definiendo $g_r(x) = \chi_{(0,r)}(x)/r$, $x > 0$, está claro que $Af(x) = \int_0^\infty f(x)g_r(x) dx$ para cada $x > 0$. Observemos además que, si f es una función decreciente tal que $f \notin L^p_{\text{dec}(w)}$, entonces $\|f\|_{L^p(w)} = \infty$. Por tanto, por el Lema 4.27,

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L^p_{\text{dec}(w)}} \frac{Af(r)}{\|f\|_{L^p(w)}} &= \sup_{0 \leq f \downarrow} \frac{Af(r)}{\|f\|_{L^p(w)}} = \sup_{0 \leq f \downarrow} \frac{\int_0^\infty f(x)g_r(x) dx}{\left(\int_0^\infty f(x)^p w(x) dx \right)^{1/p}} \\ &\approx \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x g_r(t) dt \right)^{p'-1} W(x)^{1-p'} g_r(x) dx \right)^{1/p'} \\ &= \left(\int_0^\infty \min \left\{ 1, \frac{x}{r} \right\}^{p'-1} W(x)^{1-p'} \frac{\chi_{(0,r)}(x)}{r} dx \right)^{1/p'} \\ &= \left(\frac{1}{r} \int_0^r \left(\frac{x}{r} \right)^{p'-1} W(x)^{1-p'} dx \right)^{1/p'} \\ &= \frac{1}{r} \left(\int_0^r x^{p'-1} W(x)^{1-p'} dx \right)^{1/p'}, \end{aligned}$$

donde las constantes en las desigualdades no dependen de $r > 0$. Entonces, por (4.2), $w \in B_{p,\infty}$ si y solo si

$$\sup_{r>0} \left(\frac{W(r)^{1/p}}{r} \left(\int_0^r x^{p'-1} W(x)^{1-p'} dx \right)^{1/p'} \right) < \infty,$$

que es equivalente a (i).

(ii) Supongamos que $0 < p \leq 1$. Sea $r > 0$. Al igual que antes, definiendo $g_r(x) = \chi_{(0,r)}/r$, $x > 0$, por el Lema 4.27 se tiene que

$$\begin{aligned} \sup_{f \in L^p_{\text{dec}(w)}} \frac{Af(r)}{\|f\|_{L^p(w)}} &= \sup_{0 \leq f \downarrow} \frac{Af(r)}{\|f\|_{L^p(w)}} = \sup_{0 \leq f \downarrow} \frac{\int_0^\infty f(x)g_r(x) dx}{\left(\int_0^\infty f(x)^p w(x) dx \right)^{1/p}} \\ &\approx \sup_{s>0} \left(W(s)^{-1/p} \int_0^s g_r(x) dx \right) \\ &= \sup_{s>0} \left(W(s)^{-1/p} \min\{1, s/r\} \right), \end{aligned}$$

donde las constantes en las desigualdades no dependen de $r > 0$. Entonces, por (4.2), $w \in B_{p,\infty}$ si y solo si

$$\sup_{r,s>0} \left(W(r)^{1/p} W(s)^{-1/p} \min\{1, s/r\} \right) < \infty.$$

Además, como W es creciente, $W(r) \leq W(s)$ siempre que $s > r$. Por tanto, $w \in B_{p,\infty}$ si y solo si

$$\sup_{r \geq s > 0} \left(W(r)^{1/p} W(s)^{-1/p} s/r \right) < \infty. \quad \square$$

Observación 4.29. Recordemos que, dado $0 < p < \infty$, decimos que una función medible ϕ , no negativa, creciente y definida sobre $[0, \infty)$, es p -cuasicóncava si $\phi(0) = 0$ y existe $C > 0$ de manera que, para todo $0 < s \leq r < \infty$,

$$\frac{\phi(r)}{r^p} \leq C \frac{\phi(s)}{s^p}.$$

Por tanto, el resultado anterior nos dice que, para $0 < p \leq 1$, $w \in B_{p,\infty}$ si y solo si W es p -cuasicóncava.

El resultado anterior nos caracteriza los pesos $B_{p,\infty}$ para $p > 1$, en términos de una desigualdad que, aparentemente, no tiene relación con las desigualdades que aparecen en el Teorema 4.23. Sin embargo, nada más lejos de la realidad, el siguiente resultado establece la equivalencia entre estas desigualdades, lo que implicará que $B_p = B_{p,\infty}$ para $p > 1$ (véase el Teorema 4.31).

Lema 4.30. *Sea w un peso y $p > 1$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

$$(i) \int_r^\infty \frac{W(t)}{t^{p+1}} dt \leq C \frac{W(r)}{r^p}, \quad r > 0.$$

$$(ii) W(r)^{1/p} \left(\int_0^r t^{p'-1} W(t)^{1-p'} dt \right)^{1/p'} \leq Cr, \quad r > 0.$$

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Observemos que, como W es creciente,

$$\int_r^\infty \frac{W(t)}{t^{p+1}} dt \geq W(r) \int_r^\infty \frac{1}{t^{p+1}} dt = \frac{1}{p} \frac{W(r)}{r^p},$$

para cada $r > 0$. Por tanto, definiendo la función

$$F(r) = \left(\int_r^\infty \frac{W(t)}{t^{p+1}} dt \right)^{-1}, \quad r > 0, \tag{50}$$

se verifica que

$$\frac{1}{C} \frac{r^p}{W(r)} \leq F(r) \leq p \frac{r^p}{W(r)}, \quad r > 0. \tag{51}$$

Además, como $W(t)/t^p$ es continua para todo $t > 0$, por el teorema fundamental del cálculo se tiene que $F'(r) = F(r)^2 W(r)/r^{p+1}$ para cada $r > 0$. Entonces, dado $r > 0$,

$$\begin{aligned}
 W(r)^{1/p} \left(\int_0^r t^{p'-1} W(t)^{1-p'} dt \right)^{1/p'} &= W(r)^{1/p} \left(\int_0^r \frac{t^{p+p'} W(t)}{W(t)^{p'} t^{p+1}} dt \right)^{1/p'} \\
 &= W(r)^{1/p} \left(\int_0^r \left(\frac{t^p}{W(t)} \right)^{p'} \frac{W(t)}{t^{p+1}} dt \right)^{1/p'} \\
 &\leq CW(r)^{1/p} \left(\int_0^r F(t)^{p'} \frac{W(t)}{t^{p+1}} dt \right)^{1/p'} \\
 &= CW(r)^{1/p} \left(\int_0^r F(t)^{p'} \frac{F'(t)}{F(t)^2} dt \right)^{1/p'} \\
 &= CW(r)^{1/p} \left(\frac{F(t)^{p'-1}}{p'-1} \Big|_0^r \right)^{1/p'} \\
 &\leq \frac{C}{(p'-1)^{1/p'}} W(r)^{1/p} F(r)^{1/p} \\
 &\leq \frac{Cp^{1/p}}{(p'-1)^{1/p'}} r.
 \end{aligned}$$

(ii) \Rightarrow (i) De forma similar a la implicación anterior, observemos que, como W es creciente,

$$W(r)^{1/p} \left(\int_0^r t^{p'-1} W(t)^{1-p'} dt \right)^{1/p'} \geq W(r)^{1/p} W(r)^{1-1/p'} \left(\int_0^r t^{p'-1} dt \right)^{1/p'} = \frac{1}{(p')^{1/p'}} r,$$

para cada $r > 0$. Por tanto, definiendo la función

$$G(r) = \int_0^r t^{p'-1} W(t)^{1-p'} dt, \quad r > 0,$$

se verifica que

$$\frac{1}{p'} \frac{r^{p'}}{W(r)^{p'-1}} \leq G(r) \leq Cp' \frac{r^{p'}}{W(r)^{p'-1}}, \quad r > 0.$$

Además, como $t^{p'-1}W(t)^{1-p'}$ es continua para todo $t > 0$, por el teorema fundamental del cálculo se tiene que $G'(r) = r^{p'-1}W(r)^{1-p'}$ para cada $r > 0$. Entonces, dado $r > 0$,

$$\begin{aligned}
 \int_r^\infty \frac{W(t)}{t^{p+1}} dt &= \int_r^\infty t^{p'-1} W(t)^{1-p'} \frac{W(t)^{p'}}{t^{p+p'}} dt \\
 &= \int_r^\infty G'(t) \left(\frac{W(t)^{p'-1}}{t^{p'}} \right)^p dt \\
 &\leq C^{pp'} \int_r^\infty G'(t) G(t)^{-p} dt \\
 &= C^{pp'} \left(\frac{1}{1-p} G(t)^{1-p'} \Big|_r^\infty \right) \\
 &\leq \frac{C^{pp'}}{p-1} \frac{1}{G(r)^{p-1}} \\
 &\leq \frac{C^{pp'}}{p-1} (p')^{p-1} \frac{W(r)^{(p'-1)(p-1)}}{r^{p'(p-1)}} \\
 &= \frac{C^{pp'} (p')^{p-1} W(r)}{p-1} \frac{1}{r^p}.
 \end{aligned}$$

□

Teorema 4.31. *Sea w un peso y $0 < p < \infty$.*

(i) *Si $p > 1$, $B_{p,\infty} = B_p$.*

(ii) *Si $0 < p \leq 1$, $w \in B_{p,\infty}$ si y solo si W es p -cuasicóncava.*

Demostración. (i) Supongamos que $p > 1$. Por el Teorema 4.23 de M. A. Ariño y B. Muckenhoupt caracterizamos la clase B_p en términos de la desigualdad (iii). Además, por el Lema 4.30 sabemos que esta desigualdad es equivalente a (ii), que a su vez caracteriza la clase $B_{p,\infty}$ por el Teorema 4.28. Esto concluye el resultado.

(ii) Supongamos que $p \leq 1$. La afirmación es consecuencia inmediata del Teorema 4.28 y la Observación 4.29. □

Observación 4.32. En el caso $0 < p \leq 1$, existen pesos de forma que $w \in B_{p,\infty} \setminus B_p$. En efecto, si consideramos el peso $w(t) = pt^{p-1}$, $t > 0$, se tiene que $W(t) = t^p$, $t > 0$. Claramente $w \in B_{p,\infty}$ por el Teorema 4.31, dado que W es p -cuasicóncava. Sin embargo, para cada $r > 0$,

$$\int_r^\infty \frac{w(t)}{t^p} dt = p \int_r^\infty \frac{1}{t} dt = \infty,$$

luego, por el Teorema 4.23, se tiene que $w \notin B_p$.

En la Observación 4.26 se probó que $B_p \subsetneq \bigcap_{q>p} B_q$ para todo $0 < p < \infty$, por lo que cabe preguntarse (dado que $B_p \subsetneq B_{p,\infty}$) si $B_{p,\infty} \subset \bigcap_{q>p} B_q$. El siguiente resultado responde a esta cuestión.

Proposición 4.33. *Sea $0 < p < \infty$. Entonces $B_{p,\infty} \subsetneq \bigcap_{q>p} B_q$.*

Demostración. Supongamos que $p > 1$. Por el Teorema 4.31, se tiene que $B_{p,\infty} = B_p$, mientras que por la Proposición 4.25 y la Observación 4.26, sabemos que $B_{p,\infty} = B_p \subsetneq \bigcap_{q>p} B_q$.

Supongamos ahora que $p \leq 1$. Dado $w \in B_{p,\infty}$, sabemos por el Teorema 4.31 que W es p -cuasicóncava. De este modo, para cada $q > p$ y $r > 0$ se tiene que

$$\int_r^\infty \frac{W(t)}{t^{q+1}} dt = \int_r^\infty \frac{W(t)}{t^p} \frac{1}{t^{q-p+1}} dt \leq C \frac{W(r)}{r^p} \int_r^\infty \frac{1}{t^{q-p+1}} dt = C \frac{W(r)}{r^p} \frac{r^{p-q}}{q-p} = C_{p,q} \frac{W(r)}{r^q}$$

Por tanto, por el Lema 4.30 y el Teorema 4.23, concluimos que $w \in B_q$ para cada $q > p$. Veamos a continuación que, de hecho, $B_{p,\infty} \subsetneq \bigcap_{q>p} B_q$. Para ello, consideremos una sucesión estrictamente decreciente $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\lim_n p_n = p$, y otra sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ decreciente tal que $\sum_{n=1}^\infty a_n = 1$. Definamos el peso

$$w(t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^\infty a_n p_n t^{p_n-1} & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

Claramente la serie converge uniformemente en $[0, 1]$, y además,

$$W(t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^\infty a_n t^{p_n} & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

De esta manera, $t^{-p}W(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow 0$, por lo que W no es p -cuasicóncava. Por tanto, por el Teorema 4.31, se tiene que $w \notin B_{p,\infty}$. Por otro lado, observemos que, como por la Proposición 4.25 la condición B_p es monótona, sabemos que $\bigcap_{q>p} B_q = \bigcap_{q>p, q \neq p_n} B_q$. Por tanto, dado $q > p$ con $q \neq p_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, basta ver que $w \in B_q$. Sea $0 < r < 1$ cualquiera. Entonces,

$$\int_r^\infty \frac{w(t)}{t^q} dt = \int_r^1 \frac{w(t)}{t^q} dt = \sum_{n=1}^\infty a_n p_n \int_r^1 t^{p_n-1-q} dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n p_n}{p_n - q} (1 - r^{p_n-q})$$

y,

$$\frac{1}{r^q} \int_0^r w(t) dt = r^{-p} \sum_{n=1}^\infty a_n p_n \int_0^r t^{p_n-1} dt = \sum_{n=1}^\infty a_n r^{p_n-q}$$

Denotemos $S_q = \sup_n p_n/(p_n - q) \in (0, \infty)$, $I_q = \inf_n p_n/(p_n - q) \in (-\infty, 0)$. Además, como $(p_n)_n$ es decreciente y converge a $p < q$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p_{n_0+1} < q$ y $p_{n_0} > q$. Por tanto,

4.3. NORMABILIDAD DE $\Lambda^p(w)$ Y ACOTACIÓN DÉBIL DEL OPERADOR MAXIMAL

$$\begin{aligned}
\int_r^\infty \frac{w(t)}{t^q} dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n p_n}{p_n - q} (1 - r^{p_n - q}) \\
&= \sum_{n=1}^{n_0} \frac{a_n p_n}{p_n - q} (1 - r^{p_n - q}) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a_n p_n}{p_n - q} (1 - r^{p_n - q}) \\
&\leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{a_n p_n}{p_n - q} - I_q \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n (r^{p_n - q} - 1) \\
&\leq S_q n_0 a_1 - I_q \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n r^{p_n - q} \\
&\leq \frac{S_q n_0 a_1}{a_{n_0+1}} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n - I_q \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n r^{p_n - q} \\
&\leq \frac{S_q n_0 a_1}{a_{n_0+1}} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n r^{p_n - q} - I_q \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n r^{p_n - q} \\
&= C_q \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n r^{p_n - q} \leq \frac{C_q}{r^q} \int_0^r w(t) dt,
\end{aligned}$$

donde $C_q = S_q n_0 a_1 / a_{n_0+1} - I_q$. Además, como $w(t) = 0$ para todo $t \geq 1$, la desigualdad sigue siendo válida para $r \geq 1$, por lo que por el Teorema 4.23 concluimos que $w \in B_q$. \square

4.3. Normabilidad de $\Lambda^p(w)$ y acotación débil del operador maximal

Una de las preguntas más naturales que surgen sobre los espacios de Lorentz clásicos es bajo qué condiciones el funcional $\|\cdot\|_{\Lambda^p(w)}$ es una norma. En 1951, G. G. Lorentz [23] probó que, para $p \geq 1$ y $(X, \mu) = ((0, l), m)$, esto era equivalente a que el peso w fuera equivalente a.e. (esto es, igual a.e. a una función decreciente). El resultado continúa siendo cierto si $(X, \mu) = (\mathbb{R}^n, m_n)$ (Teorema 4.35), y aunque no lo discutiremos en esta sección, gran parte de los resultados siguen siendo válidos siempre que (X, μ) sea un espacio de medida no atómico (véase [8, Theorem 2.5.8]). Más aún, veremos que es posible caracterizar aquellos espacios de Lorentz clásicos normables (Teoremas 3.23, 4.41), lo cual resultará ser equivalente a la acotación débil del operador maximal $M : \Lambda^p(w) \rightarrow \Lambda^{p, \infty}(w)$, y a $w \in B_{p, \infty}$ (siempre que $p \geq 1$).

Observación 4.34. Dado $n \in \mathbb{N}$ y una función f no negativa y decreciente a.e. sobre \mathbb{R}^+ , podemos encontrar una función $\tilde{f} \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n, m)$ verificando que $\tilde{f}^* = f$ a.e. En efecto, definamos $\tilde{f}(x) = f(\omega_n |x|^n)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$, donde $\omega_n = |B(0, 1)|$. Basta comprobar que $m_f = m_{\tilde{f}}$, ya que en tal caso $\tilde{f}^* = f^*$, y como f es no negativa y decreciente a.e. se tiene que $f^* = f$ a.e. Por tanto, tomemos $t > 0$ y definamos los conjuntos

$$E_t = \{y \in \mathbb{R} : |f(y)| > t\}, \quad \tilde{E}_t = \{x \in \mathbb{R}^n : |\tilde{f}(x)| > t\}.$$

Como f es decreciente sabemos que $E_t = [0, \mu_f(t))$, y además, $x \in \tilde{E}_t$ si y solo si $\omega_n |x|^n \in E_t$, o equivalentemente, $|x| < (m_f(t)/\omega_n)^{1/n}$. Por tanto, $\tilde{E}_t = B(0, (m_f(t)/\omega_n)^{1/n})$, de modo que

$$m_{\tilde{f}}(t) = |\tilde{E}_t| = |B(0, (m_f(t)/\omega_n)^{1/n})| = m_f(t).$$

El siguiente resultado caracteriza cuando $\|\cdot\|_{\Lambda^p(w)}$ es una norma. En el caso $p \geq 1$, la demostración es una adaptación de la que se encuentra en el artículo original de G. G. Lorentz [23], mientras que la necesidad de que $p \geq 1$, se puede encontrar en [6, Corollary 3.2].

Teorema 4.35 (G. G. Lorentz [23]). *Sea w un peso y $0 < p < \infty$. Entonces $\|\cdot\|_{\Lambda^p(w)}$ es una norma si y solo si $p \geq 1$, w decreciente a.e.*

Demostración. (\Leftarrow) Supongamos que $p \geq 1$ y w es decreciente a.e. Por el Teorema 4.9 basta comprobar que se verifica la desigualdad triangular, para lo cual consideramos $f, g \in \Lambda^p(w)$ cualesquiera. Por un lado, por la Observación 4.34 existe $\tilde{h} \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n, m)$ tal que $\tilde{h}^* = w$ a.e. Por otro lado, como (\mathbb{R}^n, m) es no atómico, se tiene por el Teorema 2.37 que (\mathbb{R}^n, m) es resonante, y además $((f+g)^*)^p = (|f+g|^p)^*$ por la Proposición 2.28. Por tanto,

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{\Lambda^p(w)} &= \left(\int_0^\infty (f+g)^*(t)^p w(t) dt \right)^{1/p} = \left(\int_0^\infty (|f+g|^p)^*(t) \tilde{h}^*(t) dt \right)^{1/p} \\ &= \left(\sup_{h^*=w} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)+g(x)|^p h(x) dx \right)^{1/p} = \sup_{h^*=w} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)+g(x)|^p h(x) dx \right)^{1/p} \\ &\leq \sup_{h^*=w} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p h(x) dx \right)^{1/p} + \sup_{h^*=w} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p h(x) dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^\infty (|f|^p)^*(t) \tilde{h}^*(t) dt \right)^{1/p} + \left(\int_0^\infty (|g|^p)^*(t) \tilde{h}^*(t) dt \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^\infty f^*(t)^p w(t) dt \right)^{1/p} + \left(\int_0^\infty g^*(t)^p w(t) dt \right)^{1/p} \\ &= \|f\|_{\Lambda^p(w)} + \|g\|_{\Lambda^p(w)}. \end{aligned}$$

(\Rightarrow) Supongamos que $\|\cdot\|_{\Lambda^p(w)}$ es una norma. Veamos en primer lugar que w es decreciente a.e. Sean $x > y > 0$ y $\epsilon > 0$ cualesquiera. Consideremos $r_1 > r_2 > r_3 > 0$ cumpliendo que $|B(0, r_1)| = x$, $|B(0, r_2)| = (x+y)/2$, $|B(0, r_3)| = (x-y)/2$, y definamos

$$f = (1+\epsilon)\chi_{B(0, r_2)} + \chi_{B(0, r_1) \setminus B(0, r_2)}, \quad g = \chi_{B(0, r_3)} + (1+\epsilon)\chi_{B(0, r_1) \setminus B(0, r_3)}.$$

A partir de (2.26) sabemos que

$$f^* = g^* = (1+\epsilon)\chi_{[0, (x+y)/2)} + \chi_{[(x+y)/2, x)},$$

de modo que

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Lambda^p(w)} = \|g\|_{\Lambda^p(w)} &= \left((1+\epsilon)^p \int_0^{(x+y)/2} w(t) dt + \int_{(x+y)/2}^x w(t) dt \right)^{1/p} \\ &= \left([(1+\epsilon)^p - 1]W\left(\frac{x+y}{2}\right) + W(x) \right)^{1/p}. \end{aligned} \tag{52}$$

4.3. NORMABILIDAD DE $\Lambda^p(w)$ Y ACOTACIÓN DÉBIL DEL OPERADOR MAXIMAL

Por otro lado, es fácil comprobar que

$$(f + g)^* = (2 + 2\epsilon)\chi_{[0,y]} + (2 + \epsilon)\chi_{[y,x]},$$

luego,

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{\Lambda^p(w)} &= \left((2 + 2\epsilon)^p \int_0^y w(t) dt + (2 + \epsilon)^p \int_y^x w(t) dt \right)^{1/p} \\ &= \left([(2 + 2\epsilon)^p - (2 + \epsilon)^p]W(y) + (2 + \epsilon)^pW(x) \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (53)$$

Entonces, como $\|f + g\|_{\Lambda^p(w)} \leq \|f\|_{\Lambda^p(w)} + \|g\|_{\Lambda^p(w)}$, se tiene por (4.3) y (4.3) que

$$[(2 + 2\epsilon)^p - (2 + \epsilon)^p]W(y) + (2 + \epsilon)^pW(x) \leq [(2 + 2\epsilon)^p - 2^p]W\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2^pW(x),$$

o equivalentemente,

$$W(y) + \frac{(2 + \epsilon)^p - 2^p}{(2 + 2\epsilon)^p - (2 + \epsilon)^p}W(x) \leq \frac{(2 + 2\epsilon)^p - 2^p}{(2 + 2\epsilon)^p - (2 + \epsilon)^p}W\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Tomando $\epsilon \rightarrow 0$, deducimos que

$$\frac{W(y) + W(x)}{2} \leq W\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

Por tanto, como W es continua, concluimos que W es cóncava, luego w es decreciente a.e. (véase [19, Theorem 1.1]).

Veamos ahora que $p \geq 1$. Supongamos por reducción al absurdo que $0 < p < 1$. Consideremos una sucesión decreciente de conjunto medibles $(A_n)_n$ tal que $W(|A_n|) = 2^{-pn}$, y definamos $f_n = 2^n \chi_{A_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\|f_n\|_{\Lambda^p(w)} = 2^n \left(\int_0^\infty (\chi_{A_n}^*(t))^p w(t) dt \right)^{1/p} = 2^n W(|A_n|)^{1/p} = 1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, dado $N \in \mathbb{N}$ cualquiera, si tomamos $A_{N+1} = \emptyset$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{N} \left\| \sum_{k=1}^N f_k \right\|_{\Lambda^p(w)} &= \frac{1}{N} \left\| \sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1}^k 2^j \right) \chi_{A_k \setminus A_{k+1}} \right\|_{\Lambda^p(w)} \\
 &= \frac{1}{N} \left[\int_0^\infty \left(\left[\sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1}^k 2^j \right) \chi_{A_k \setminus A_{k+1}} \right]^*(t) \right)^p w(t) dt \right]^{1/p} \\
 &= \frac{1}{N} \left[\int_0^\infty \left(\sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1}^k 2^j \right) \chi_{|A_{k+1}|, |A_k|}(t) \right)^p w(t) dt \right]^{1/p} \\
 &= \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1}^k 2^j \right)^p \int_{|A_{k+1}|}^{|A_k|} w(t) dt \right)^{1/p} \\
 &= \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^N (2^{k+1} - 2)^p (2^{-kp} - 2^{-(k+1)p}) \right)^{1/p} \\
 &\geq C_p \frac{1}{N} N^{1/p} = C_p N^{1/p-1},
 \end{aligned}$$

donde $C_p > 0$. Por tanto, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\| \sum_{k=1}^{N_0} f_k \right\|_{\Lambda^p(w)} > N_0$, pero como $\|\cdot\|_{\Lambda^p(w)}$ es una norma, sabemos que $\left\| \sum_{k=1}^{N_0} f_k \right\|_{\Lambda^p(w)} \leq \sum_{k=1}^{N_0} \|f_k\|_{\Lambda^p(w)} = N_0$, lo que supone una contradicción. \square

Una vez hemos caracterizado aquellos pesos para los cuales el espacio de Lorentz $\|\cdot\|_{\Lambda^p(w)}$ es normado, es natural preguntarse si podemos obtener una caracterización similar para su *normabilidad*. Recordamos que, dado un espacio vectorial topológico U , decimos que U es normable si su topología puede definirse a partir de una norma sobre U . En el caso del espacio de Lorentz $\Lambda^p(w)$, esto es equivalente a que exista una norma $\|\cdot\|$ sobre $\Lambda^p(w)$ y constantes $C_1, C_2 > 0$, verificando que

$$C_1 \|f\| \leq \|f\|_{\Lambda^p(w)} \leq C_2 \|f\|, \quad f \in \Lambda_X^p(w). \quad (54)$$

Con este objetivo en mente, la idea con la que abordaremos el problema es la misma que se utilizó para los espacios de Lorentz en el Teorema 3.26. En lugar de trabajar con $\|\cdot\|_{\Lambda^p(w)}$, que está definida a partir de la reordenada decreciente, trabajaremos con una aplicación muy similar definida a partir de la función maximal, la cual sabemos que posee propiedades más interesantes (como la subaditividad).

Definición 4.36. Sea w un peso y $0 < p < \infty$. El *espacio Gamma de Lorentz* $\Gamma^p(w)$ está formado por aquellas funciones $f \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n, m_n)$ verificando que

$$\|f\|_{\Gamma^p(w)} := \left(\int_0^\infty (f^{**}(t))^p w(t) dt \right)^{1/p} < \infty.$$

De forma similar, el *espacio Gamma de Lorentz débil* $\Gamma^{p,\infty}(w)$ está formado por aquellas funciones $f \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n, m_n)$ verificando que

$$\|f\|_{\Gamma^{p,\infty}(w)} := \sup_{0 < t < \infty} f^{**}(t) W(t)^{1/p} < \infty.$$

4.3. NORMABILIDAD DE $\Lambda^p(w)$ Y ACOTACIÓN DÉBIL DEL OPERADOR MAXIMAL

Observación 4.37. (i) $\Gamma^{p,\infty}(w)$ es un espacio normado para todo $0 < p < \infty$, mientras que $\Gamma^p(w)$ es un espacio normado si $p \geq 1$. Esto es inmediato a partir del Teorema 2.44, ya que $(f + g)^{**} \leq f^{**} + g^{**}$ para toda $f, g \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n, m_n)$.

(ii) Dado $0 < p < \infty$ y $f \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n, m_n)$, sabemos por la Proposición 2.42 que $f^* \leq f^{**}$, luego

$$\|f\|_{\Lambda^{p,\infty}(w)} \leq \|f\|_{\Gamma^{p,\infty}(w)}, \quad \text{y} \quad \|f\|_{\Lambda^p(w)} \leq \|f\|_{\Gamma^p(w)},$$

Por tanto,

$$\Gamma^{p,\infty}(w) \hookrightarrow \Lambda^{p,\infty}(w), \quad \text{y} \quad \Gamma^p(w) \hookrightarrow \Lambda^p(w).$$

(iii) Si $\Gamma^1(w) \neq \{0\}$, entonces $w(\infty) = 0$. En efecto, supongamos por reducción al absurdo que $w(\infty) > 0$ y existe $0 \neq f \in \Gamma^1(w)$. Entonces, existe $n \geq 1$ tal que $|\{|f| > 1/n\}| > 0$. Tomando $E := \{|f| > 1/n\} \cap B(0, 1)$, se tiene que $\chi_E \leq n|f|$ y $0 < |E| < \infty$, luego $\chi_E \in \Gamma^1(w)$. Por otro lado, está claro que $\chi_E^{**}(t) = \min\{1, |E|/t\}$ para cada $t > 0$, por lo que

$$|E| \int_{|E|}^{\infty} \frac{w(t)}{t} dt \leq \int_0^{|E|} w(t) dt + |E| \int_{|E|}^{\infty} \frac{w(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} \chi_E^{**}(t) w(t) dt < \infty.$$

Sin embargo, como $w(\infty) > 0$, existe $t_0 > |E| > 0$ tal que $w(t) \geq w(t_0)/2 > 0$ para cada $t \geq t_0$. Por tanto,

$$\int_{|E|}^{\infty} \frac{w(t)}{t} dt \geq \int_{t_0}^{\infty} \frac{w(t)}{t} dt \geq w(t_0)/2 \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{t} dt = \infty,$$

lo que supone una contradicción.

Observación 4.38. Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ μ -medible. Para la integral de Lebesgue, es fácil comprobar que

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

De forma similar, si consideramos un espacio de Banach $(B, \|\cdot\|)$, podemos construir una teoría de integración para funciones B -valuadas a partir de la conocida *integral de Bochner* [12]. Se dice que una función $f : X \rightarrow B$ es Bochner-integrable si es μ -medible y además existe una sucesión $(f_n)_n$ de funciones simples μ -medibles cumpliendo que

$$\lim_n \int_X \|f_n - f\| d\mu = 0.$$

En tal caso, se define la *integral de Bochner de f sobre X* como

$$\int_X f d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu.$$

Se puede comprobar [12, Theorem 2, Chapter II] que una función $f : X \rightarrow B$ es Bochner-integrable si y solo si $\int_X \|f\| d\mu < \infty$. Además, en estas condiciones se verifica la *desigualdad integral de Minkowski*, cuya demostración es elemental para funciones simples, y es fácil comprobar para una función $f : X \rightarrow B$ Bochner-integrable tomando el límite sobre funciones simples:

$$\left\| \int_X f d\mu \right\| \leq \int_X \|f\| d\mu. \quad (55)$$

El siguiente resultado clásico de E. Sawyer [32] caracteriza la normabilidad de $\Lambda^p(w)$ en el caso $p > 1$.

Teorema 4.39 (E. Sawyer [32]). *Sea w un peso y $p > 1$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) $\Lambda^p(w)$ es normable.
- (ii) $\Lambda^p(w) = \Gamma^p(w)$ y se cumple (4.3) con $\|\cdot\|_{\Gamma^p(w)}$.
- (iii) $w \in B_p$.
- (iv) $M : \Lambda^p(w) \longrightarrow \Lambda^p(w)$.

Demostración. (i) \Rightarrow (iii) Supongamos que $\Lambda^p(w)$ es normable, esto es, que existe una norma $\|\cdot\|$ sobre $\Lambda^p(w)$ y constantes $C_1, C_2 > 0$ verificando (4.3). Sea $f \in L_{\text{dec}}^p(w)$ y $r > 0$ cualquiera. Definamos $\omega_n = |B(0, 1)|$, $\tilde{r} = (\omega_n^{-1}r)^{1/n}$, $\tilde{g} = \chi_{B(0, \tilde{r})}$ y $\tilde{f}(y) = f(\omega_n|y|^n)$ para cada $y \in \mathbb{R}^n$, de modo que $\tilde{f}^* = f$ por la Observación 4.34. Veamos en primer lugar que existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $|y| \leq \tilde{r}$, se cumple que

$$(\tilde{f} * \tilde{g})(y) \geq C \int_0^r f(s) ds.$$

Sea $|y| \leq \tilde{r}$ cualquiera. Realizando el cambio a coordenadas polares se tiene que

$$\begin{aligned} (\tilde{f} * \tilde{g})(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{g}(x) \tilde{f}(y-x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \chi_{B(y, \tilde{r})}(z) dz \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \tilde{f}(r\theta) \chi_{B(y, \tilde{r})}(r\theta) r^{n-1} dr d\sigma(\theta) \\ &= \int_0^\infty r^{n-1} f(\omega_n r^n) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \chi_{B(y, \tilde{r})}(r\theta) d\sigma(\theta) dr \\ &= \int_0^\infty r^{n-1} f(\omega_n r^n) h_y(r) dr \\ &\geq \int_0^{\tilde{r}} r^{n-1} f(\omega_n r^n) h_y(r) dr, \end{aligned} \tag{56}$$

donde σ es la medida de superficie de la esfera \mathbb{S}^{n-1} , y

$$h_y(r) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \chi_{B(y, \tilde{r})}(r\theta) d\sigma(\theta) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \chi_{B(y/r, \tilde{r}/r)}(\theta) d\sigma(\theta).$$

Consideremos $\theta_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ cualquiera. Observemos que $\mathbb{S}^{n-1} \cap B(\theta_0, 1) \subset \mathbb{S}^{n-1} \cap B(\theta_0|y|/\tilde{r}, 1)$, dado que si $x \in \mathbb{S}^{n-1} \cap B(\theta_0, 1)$,

$$\left| x - \frac{|y|}{\tilde{r}} \theta_0 \right| \leq \left| x - \frac{|y|}{\tilde{r}} x \right| + \left| \frac{|y|}{\tilde{r}} x - \frac{|y|}{\tilde{r}} \theta_0 \right| < \left(1 - \frac{|y|}{\tilde{r}} \right) + \frac{|y|}{\tilde{r}} = 1.$$

4.3. NORMABILIDAD DE $\Lambda^p(w)$ Y ACOTACIÓN DÉBIL DEL OPERADOR MAXIMAL

Por otro lado, como $y/|y|, \theta_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$, sabemos que existe una rotación que lleva $y/|y|$ en θ_0 , o equivalentemente, que existe $A \in O(n)$ tal que $y = |y|A(\theta_0)$. De este modo, dado que σ es invariante bajo rotaciones, i.e. invariante bajo los elementos de $O(n)$, se tiene que

$$\begin{aligned} h_y(\tilde{r}) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \chi_{B(y/\tilde{r}, 1)}(\theta) d\sigma(\theta) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \chi_{B(A(\theta_0)|y|/\tilde{r}, 1)}(\theta) d\sigma(\theta) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \chi_{B(\theta_0|y|/\tilde{r}, 1)}(A^{-1}(\theta)) d\sigma(\theta) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \chi_{B(\theta_0|y|/\tilde{r}, 1)}(\theta) d\sigma(\theta) \\ &= \sigma\left(\mathbb{S}^{n-1} \cap B(\theta_0|y|/\tilde{r}, 1)\right) \geq \sigma\left(\mathbb{S}^{n-1} \cap B(\theta_0, 1)\right) > 0. \end{aligned} \quad (57)$$

Además, dado $r < r'$ y $x \in B(y/r', \tilde{r}/r')$,

$$\left|x - \frac{y}{r}\right| \leq \left|x - \frac{y}{r'}\right| + \left|\frac{y}{r'} - \frac{y}{r}\right| < \frac{\tilde{r}}{r'} + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)|y| \leq \frac{\tilde{r}}{r'} + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)\tilde{r} = \frac{\tilde{r}}{r},$$

luego $B(y/r', \tilde{r}/r') \subset B(y/r, \tilde{r}/r)$, y por tanto h_y es una función decreciente. Entonces, por (4.3), (4.3), y realizando el cambio de variable $s = \omega_n r^n$,

$$\begin{aligned} (\tilde{f} * \tilde{g})(y) &\geq \int_0^{\tilde{r}} r^{n-1} f(\omega_n r^n) h_y(r) dr \\ &\geq \int_0^{\tilde{r}} r^{n-1} f(\omega_n r^n) h_y(\tilde{r}) dr \\ &\geq Cn\omega_n \int_0^{\tilde{r}} r^{n-1} f(\omega_n r^n) dr \\ &= C \int_0^r f(s) ds, \end{aligned} \quad (58)$$

donde $C = \sigma(\mathbb{S}^{n-1} \cap B(\theta_0, 1))/(n\omega_n) > 0$. De esta manera, como (4.3) se cumple para todo $y \in B(0, \tilde{r})$, y $|B(0, \tilde{r})| = r$, por la Proposición 2.23 sabemos que

$$(\tilde{f} * \tilde{g})^*(t) \geq C \int_0^r f(s) ds,$$

para todo $0 < t \leq r$. Por tanto, definiendo $\tilde{f}_x(y) = f(y - x)$ para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} C_2 \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{g}(x) \tilde{f}_x(\cdot) dx \right\| &= C_2 \|\tilde{f} * \tilde{g}\| \geq \|\tilde{f} * \tilde{g}\|_{\Lambda^p(w)} \\ &= \left(\int_0^\infty (\tilde{f} * \tilde{g})^*(t)^p w(t) dt \right)^{1/p} \\ &\geq \left(\int_0^r (\tilde{f} * \tilde{g})^*(t)^p w(t) dt \right)^{1/p} \\ &\geq C \left(\int_0^r f(s) ds \right) \left(\int_0^r w(s) ds \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (59)$$

Observemos que, dado que $\|\cdot\|$ es equivalente a $\|\cdot\|_{\Lambda^p(w)}$, y por la Proposición 4.10 sabemos que $(\Lambda^p(w), \|\cdot\|_{\Lambda^p(w)})$ es completo, se tiene que $(\Lambda^p(w), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach. Por otro lado, la aplicación $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda^p(w)$ dada por $P(x) = \tilde{f}_x$, verifica que

$$\|P(x)\|_{\Lambda^p(w)} = \|\tilde{f}_x\|_{\Lambda^p(w)} = \|\tilde{f}_x^*\|_{L^p(w)} = \|\tilde{f}^*\|_{L^p(w)} = \|f\|_{L^p(w)} < \infty,$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$, luego tomando $d\mu(x) = \tilde{g}(x) dx$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \|P(x)\| d\mu(x) &\leq C_1^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{g}(x) \|P(x)\|_{\Lambda^p(w)} dx \\ &= C_1^{-1} \|f\|_{L^p(w)} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{g}(x) dx \\ &= C_1^{-1} \|f\|_{L^p(w)} |B(0, \tilde{r})| \\ &= C_1^{-1} \|f\|_{L^p(w)} r. \end{aligned} \tag{60}$$

De esta manera, sabemos por la Observación 4.38 que P es Bochner-integrable, por lo que por (4.3), (4.3) y la desigualdad integral de Minkowski (4.38), concluimos que

$$\begin{aligned} Af(r)W(r)^{1/p} &= \frac{1}{r} \left(\int_0^r f(s) ds \right) \left(\int_0^r w(s) ds \right)^{1/p} \\ &\leq \frac{C^{-1}C_2}{r} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{g}(x) \tilde{f}_x(\cdot) dx \right\| \\ &= \frac{C^{-1}C_2}{r} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} P(x) d\mu(x) \right\| \\ &\leq \frac{C^{-1}C_2}{r} \int_{\mathbb{R}^n} \|P(x)\| d\mu(x) \\ &\leq C^{-1}C_2C_1^{-1} \|f\|_{L^p(w)}. \end{aligned}$$

Por tanto $A : L_{\text{dec}}^p(w) \rightarrow L^{p,\infty}(w)$, luego $w \in B_{p,\infty}$. Finalmente, como $p > 1$, por el Teorema 4.31 concluimos que $w \in B_p$.

(iii) \Rightarrow (iv) Consideremos $f \in \Lambda^p(w)$ cualquiera. Por el Teorema 3.17, existe $\tilde{C} > 0$ tal que $(Mf)^*(t) \leq \tilde{C}f^{**}(t) = A(f^*)(t)$ para cada $t > 0$. Por tanto, como $w \in B_p$,

$$\begin{aligned} \|Mf\|_{\Lambda^p(w)} &= \left(\int_0^\infty (Mf)^*(x)^p w(x) dx \right)^{1/p} \leq \tilde{C} \left(\int_0^\infty f^{**}(x)^p w(x) dx \right)^{1/p} \\ &= \tilde{C} \|f^{**}\|_{L^p(w)} \leq \tilde{C}C \|f^*\|_{L^p(w)} = \tilde{C}C \|f\|_{\Lambda^p(w)}. \end{aligned}$$

(iv) \Rightarrow (iii) Consideremos $f \in L_{\text{dec}}^p(w)$ cualquiera. Por la Observación 2.25 sabemos que existe $\tilde{f} \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n, m)$ tal que $\tilde{f}^* = f$ a.e. Además, por el Teorema 3.17, existe $\tilde{C} > 0$ tal que $A(f)(t) = A(\tilde{f}^*)(t) = \tilde{f}^{**}(t) \leq \tilde{C}(M\tilde{f})^*(t)$ para cada $t > 0$. De esta manera, como $M : \Lambda^p(w) \rightarrow \Lambda^p(w)$,

$$\begin{aligned} \|A(f)\|_{L^p(w)} &= \left(\int_0^\infty \tilde{f}^{**}(x)^p w(x) dx \right)^{1/p} \leq \tilde{C} \left(\int_0^\infty (M\tilde{f})^*(x)^p w(x) dx \right)^{1/p} \\ &= \tilde{C} \|M\tilde{f}\|_{\Lambda^p(w)} \leq \tilde{C}C \|\tilde{f}\|_{\Lambda^p(w)} = \tilde{C}C \|\tilde{f}^*\|_{L^p(w)} = \tilde{C}C \|f\|_{L^p(w)}. \end{aligned}$$

4.3. NORMABILIDAD DE $\Lambda^p(w)$ Y ACOTACIÓN DÉBIL DEL OPERADOR MAXIMAL

Por tanto, $w \in B_p$.

(iii) \Rightarrow (ii) Basta ver que se verifica (4.3) con $\|\cdot\|_{\Gamma^p(w)}$. Por un lado, sabemos por la Proposición 2.42 que $f^* \leq f^{**}$ para cada $f \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n, m_n)$, luego $\|f\|_{\Lambda^p(w)} \leq \|f\|_{\Gamma^p(w)}$. Por otro lado dada $f \in \Lambda^p(w)$, como $w \in B_p$ y $A(f^*) = f^{**}$, existe $C > 0$ tal que

$$\|f\|_{\Gamma^p(w)} = \|A(f^*)\|_{L^p(w)} \leq C\|f^*\|_{L^p(w)} = C\|f\|_{\Lambda^p(w)}.$$

(ii) \Rightarrow (i) Por el Teorema 2.44, sabemos que $(f + g)^{**} \leq f^{**} + g^{**}$ para cualesquiera $f, g \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n, m_n)$. De esta manera, $\|\cdot\|_{\Gamma^p(w)}$ es una norma sobre $\Gamma^p(w) = \Lambda^p(w)$ verificando (4.3), luego $\Lambda^p(w)$ es normable. \square

En cuanto a la normabilidad de $\Lambda^1(w)$, también la podemos caracterizar en términos de w , aunque el resultado es ligeramente distinto al caso $p > 1$. Observemos que, argumentando de forma similar a la equivalencia (iii) \Leftrightarrow (iv) del Teorema 4.39, se puede comprobar que $w \in B_{p,\infty}$ si y solo si $M : \Lambda^p(w) \rightarrow \Lambda^{p,\infty}(w)$. De esta manera, en el caso $p > 1$, como $B_p = B_{p,\infty}$ por el Teorema 4.31, resulta que la normabilidad de $\Lambda^p(w)$ es también equivalente a $w \in B_{p,\infty}$ y a la acotación débil del operador maximal, $M : \Lambda^p(w) \rightarrow \Lambda^{p,\infty}(w)$. Estas equivalencias son las que se mantendrán para el caso $p = 1$, aunque antes de enunciar y probar el resultado necesitamos un lema previo [20, Theorem 1.1].

Lema 4.40. *Sea φ una función 1-cuasicóncava. Entonces existe una función $\tilde{\varphi}$ cóncava y $C > 0$ tal que*

$$C\tilde{\varphi}(t) \leq \varphi(t) \leq \tilde{\varphi}(t), \quad t > 0. \quad (61)$$

Demostración. Definamos la función

$$\tilde{\varphi}(t) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(t_i) : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \sum_{i=1}^n \lambda_i t_i = t, t_i, \lambda_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, n \right\},$$

para cada $t > 0$. Veamos en primer lugar que $\tilde{\varphi}$ está bien definida y cumple (4.40). Dado $t > 0$, por definición está claro que $\varphi(t) \leq \tilde{\varphi}(t)$. Además, como φ es 1-cuasicóncava, dados $\{\lambda_i\}_{i=1}^n, \{t_i\}_{i=1}^n \subset [0, \infty)$ cumpliendo que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ y $\sum_{i=1}^n \lambda_i t_i = t$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(t_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i C \max \left\{ 1, \frac{t_i}{t} \right\} \varphi(t) \leq C \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{t_i}{t} \right) \varphi(t) = 2C\varphi(t),$$

luego $\tilde{\varphi}(t) \leq 2C\varphi(t)$.

Veamos que $\tilde{\varphi}$ es cóncava. En efecto, si consideramos $t, s, \epsilon > 0$ y $0 \leq \alpha \leq 1$, sabemos que existen $\{\lambda_i\}_{i=1}^n, \{t_i\}_{i=1}^n, \{\mu_j\}_{j=1}^m, \{s_j\}_{j=1}^m \subset [0, \infty)$ verificando

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{j=1}^m \mu_j = 1, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i t_i = t, \quad \sum_{j=1}^m \mu_j s_j = s,$$

y

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(t_i) \geq \tilde{\varphi}(t) - \epsilon, \quad \sum_{j=1}^m \mu_j \varphi(s_j) \geq \tilde{\varphi}(s) - \epsilon.$$

Por tanto,

$$\alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(t_i) + (1 - \alpha) \sum_{j=1}^m \mu_j \varphi(s_j) \geq \alpha \tilde{\varphi}(t) + (1 - \alpha) \tilde{\varphi}(s) - \epsilon,$$

Además,

$$\alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i + (1 - \alpha) \sum_{j=1}^m \mu_j = 1,$$

y

$$\alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i t_i + (1 - \alpha) \sum_{j=1}^m \mu_j s_j = \alpha t + (1 - \alpha)s,$$

de donde se sigue que

$$\tilde{\varphi}(\alpha t + (1 - \alpha)s) \geq \alpha \tilde{\varphi}(t) + (1 - \alpha) \tilde{\varphi}(s) - \epsilon$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $\tilde{\varphi}$ es una función cóncava. \square

El siguiente resultado caracteriza la normabilidad de $\Lambda^1(w)$.

Teorema 4.41 (M. J. Carro, A. García del Amo, J. Soria [6]). *Sea w un peso. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Lambda^1(w)$ es normable.

(ii) $w \in B_{1,\infty}$.

(iii) $M : \Lambda^1(w) \longrightarrow \Lambda^{1,\infty}(w)$.

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Supongamos que $\Lambda^1(w)$ es normable. Observemos que en el argumento utilizado en la implicación (i) \Rightarrow (ii) del Teorema 4.39, solo se utiliza la hipótesis $p > 1$ para concluir que $B_{p,\infty} = B_p$ por el Teorema 4.31. Por tanto, argumentando de la misma manera para $p = 1$, concluimos que $w \in B_{1,\infty}$.

(ii) \Leftrightarrow (iii) La demostración es análoga a la equivalencia (iii) \Leftrightarrow (iv) del Teorema 4.39, consecuencia inmediata de que $(Mf)^* \approx f^{**}$ para toda $f \in \Lambda^p(w)$ (Teorema 3.17).

(ii) \Rightarrow (i) Supongamos que $w \in B_{1,\infty}$. Por el Teorema 4.31 se tiene que W es 1- cuasicóncava, de manera que por el Lema 4.40 existe una función V cóncava y $C_1, C_2 > 0$ tal que

$$C_1 V(t) \leq W(t) \leq C_2 V(t), \quad t > 0.$$

Entonces, sabemos (véase [19, Theorem 1.1]) que existe un peso v decreciente verificando que $V(x) = \int_0^x v(t) dt$ para todo $x > 0$. Observemos que, dada $f \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n, m_n)$, por la Proposición 4.8 se tiene que

$$\|f\|_{\Lambda_X^p(w)} = \left(\int_0^\infty pt^{p-1} W(\mu_f(t)) dt \right)^{1/p} \leq C_2 \left(\int_0^\infty pt^{p-1} V(\mu_f(t)) dt \right)^{1/p} = C_2 \|f\|_{\Lambda^p(v)},$$

y análogamente $C_1 \|f\|_{\Lambda^1(v)} \leq \|f\|_{\Lambda_X^p(w)}$. Por tanto, se tiene que $\Lambda^1(w) = \Lambda^1(v)$ y se cumple (4.3) con $\|\cdot\|_{\Lambda^1(v)}$. Finalmente, como v es decreciente, por el Teorema 4.35 concluimos que $(\Lambda^1(w), \|\cdot\|_{\Lambda^1(v)}) = (\Lambda^1(v), \|\cdot\|_{\Lambda^1(v)})$ es normado, luego $\Lambda^1(w)$ es normable. \square

4.3. NORMABILIDAD DE $\Lambda^p(w)$ Y ACOTACIÓN DÉBIL DEL OPERADOR MAXIMAL

Aunque el resultado anterior caracteriza completamente la normabilidad de $\Lambda^1(w)$, no dice nada acerca de la norma con la que lo podemos dotar. Si bien en el caso $p > 1$ esta es esencialmente $\|\cdot\|_{\Gamma^p(w)}$ y $\Lambda^p(w) = \Gamma^p(w)$, para $p = 1$ esto deja de ser cierto. Lo que sí se puede probar [26, Theorem 3.1] es que únicamente hay tres posibilidades para dicha norma: $\|\cdot\|_{L^1}$, $\|\cdot\|_{\Gamma^1(v)}$ y $\|\cdot\|_{L^1} + \|\cdot\|_{\Gamma^1(v)}$ para cierto peso v . Además, todas ellas pueden expresarse a través de la función maximal f^{**} . Antes de demostrar este resultado, debemos caracterizar algunas inclusiones entre espacios de Lorentz (Teorema 4.42) y probar un lema auxiliar (Lema 4.44).

Teorema 4.42. *Sean w, v pesos.*

(i) $\Lambda^1(w) \leftrightarrow \Gamma^1(v)$ si y solo si existe $C_1 > 0$ tal que

$$W(r) \geq C_1 \left(V(r) + r \int_r^\infty \frac{v(t)}{t} dt \right), \quad r > 0. \quad (62)$$

(ii) $\Gamma^1(v) \leftrightarrow \Lambda^1(w)$ si y solo si existe $C_2 > 0$ tal que

$$W(r) \leq C_2 \left(V(r) + r \int_r^\infty \frac{v(t)}{t} dt \right), \quad r > 0. \quad (63)$$

(iii) $\Lambda^1(v) \leftrightarrow \Lambda^1(w)$ si y solo si existe $C_3 > 0$ tal que

$$W(r) \leq C_3 V(r), \quad r > 0.$$

Demostración. (i) Para la necesidad basta, dado $r > 0$, considerar $E \subset \mathbb{R}^n$ con $|E| = r$ y $f = \chi_E \in \Lambda^1(w)$, ya que

$$\begin{aligned} W(r) &= \int_0^r w(t) = \int_0^\infty \chi_E^*(t) w(t) dt \geq C \int_0^\infty \chi_E^{**}(t) v(t) dt \\ &= C \int_0^\infty \min\{1, r/t\} v(t) dt = C \left(V(r) + r \int_r^\infty \frac{v(t)}{t} dt \right). \end{aligned} \quad (64)$$

Para la suficiencia, por (4.3) está claro que ((i)) es equivalente a la existencia de una constante $C > 0$ tal que, para cada $t > 0$ y $E \subset \mathbb{R}^n$ medible, se cumple que $\|\chi_E\|_{\Gamma^1(v)} \leq C \|\chi_E\|_{\Lambda^1(w)}$. Consideremos $f \in \Lambda^1(w)$ cualquiera y una familia de conjuntos medibles $\{A_t\}_{t \geq 0} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $|A_t| = m_f(t)$ para cada $t \geq 0$. Como f^* es decreciente y $m_f = m_{f^*}$ por la Proposición 2.28, se tiene por (4.2), la Proposición 4.8 y el teorema de Fubini que

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty f^{**}(t)v(t) dt &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty A(\chi_{(0,m_f(s))})(t) ds \right) v(t) dt \\
 &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty A(\chi_{E_s}^*)(t) ds \right) v(t) dt \\
 &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \chi_{E_s}^{**}(t) ds \right) v(t) dt \\
 &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \chi_{E_s}^{**}(t)v(t) dt \right) ds \\
 &\leq C \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \chi_{E_s}^*(t)w(t) dt \right) ds \\
 &= C \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \chi_{(0,m_f(s))}(t)w(t) dt \right) ds \\
 &= C \int_0^\infty W(m_f(s)) ds \\
 &= C \int_0^\infty f^*(t)w(t) dt.
 \end{aligned}$$

(ii) La demostración es análoga a la de (i).

(iii) Al igual que en (i), para la necesidad basta, dado $r > 0$, considerar $E \subset \mathbb{R}^n$ con $|E| = r$ y $f = \chi_E \in \Lambda^1(w)$, ya que

$$W(r) = \int_0^r w(t) dt = \int_0^\infty \chi_E^*(t)w(t) dt \leq C \int_0^\infty \chi_E^*(t)v(t) dt = C \int_0^r w(t) dt = CV(r).$$

Para la suficiencia, dado $f \in \Lambda^1(v)$ cualquiera, por la Proposición 4.8 se tiene que

$$\int_0^\infty f^*(t)w(t) dt = \int_0^\infty W(m_f(s)) ds \leq C \int_0^\infty V(m_f(s)) ds = \int_0^\infty f^*(t)v(t) dt.$$

□

Observación 4.43. Implícito en la demostración del Teorema 4.41 hemos probado que, si $\Lambda^1(w)$ es normable, entonces existe un peso \tilde{w} decreciente tal que $\Lambda^1(w) = \Lambda^1(\tilde{w})$ y se cumple (4.3) con $\|\cdot\|_{\Lambda^1(\tilde{w})}$. Por tanto, para estudiar con qué tipo de normas podemos dotar a $\Lambda^1(w)$, basta analizar cómo se comporta $\|\cdot\|_{\Lambda^1(w)}$ cuando el peso w es decreciente.

Lema 4.44. *Sea w un peso decreciente tal que $w(\infty) = 0$. Entonces existe un peso v y constantes $C_1, C_2 > 0$, de forma que se cumple ((i)) y ((ii)).*

Demostración. Observemos que, si existe una función $\phi \in C^2(\mathbb{R}^+)$ cóncava cumpliendo que

4.3. NORMABILIDAD DE $\Lambda^p(w)$ Y ACOTACIÓN DÉBIL DEL OPERADOR MAXIMAL

$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi'(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} t\phi'(t) = 0$ y $\phi(0) = 0$, entonces para cada $r > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \int_0^r \phi'(t) dt = r\phi'(r) - \lim_{t \rightarrow 0} t\phi'(t) - \int_0^r t\phi''(t) dt \\ &= r(\phi'(r) - \lim_{t \rightarrow \infty} \phi'(t)) - \int_0^r t\phi''(t) dt \\ &= -r \int_r^\infty \phi''(t) dt - \int_0^r t\phi''(t) dt \\ &= r \int_r^\infty \frac{v(t)}{t} dt + V(r), \end{aligned}$$

donde $v(t) = -t\phi''(t) \geq 0$ es un peso. Por tanto, basta encontrar una función ϕ en las condiciones anteriores, y constantes $C_1, C_2 > 0$ de manera que $C_1W(r) \leq \phi(r) \leq C_2W(r)$ para cada $r > 0$. Definamos

$$\phi(r) = \frac{1}{r} \int_r^{2r} \tilde{W}(t) dt = \int_1^2 \tilde{W}(rt) dt, \quad r > 0,$$

donde

$$\tilde{W}(r) = \frac{1}{r} \int_r^{2r} W(t) dt = \int_1^2 W(rt) dt, \quad r > 0,$$

Claramente $\phi \in C^2(\mathbb{R}^+)$, y además es cóncava. En efecto, dados $r, s > 0$ y $0 \leq \lambda \leq 1$, como w es decreciente sabemos que W es cóncava, luego

$$\begin{aligned} \lambda\tilde{W}(r) + (1-\lambda)\tilde{W}(s) &= \int_1^2 \lambda W(rt) + (1-\lambda)W(st) dt \\ &\leq \int_1^2 W((\lambda r + (1-\lambda)s)t) dt \\ &= \tilde{W}(\lambda r + (1-\lambda)s). \end{aligned}$$

Por tanto, \tilde{W} es cóncava, y repitiendo el mismo argumento para ϕ , deducimos que ϕ también es cóncava. Además, como W es creciente y w es decreciente,

$$W(r) \leq \tilde{W}(r) \leq W(2r) = W(r) + \int_r^{2r} w(t) dt \leq 2W(r),$$

para cada $r > 0$, luego

$$W(r) \leq \int_1^2 W(rt) dt \leq \phi(r) \leq \int_1^2 2W(rt) dt \leq 2W(2r) \leq 4W(r),$$

para cada $r > 0$. De esta manera, como $W(0) = 0$, sabemos que $\phi(0) = 0$. Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \frac{2\tilde{W}(2r) - \tilde{W}(r)}{r} - \frac{1}{r^2} \int_r^{2r} \tilde{W}(t) dt \\ &\geq \frac{2W(r) - 2W(r)}{r} - \frac{1}{r^2} \int_r^{2r} 2W(t) dt \\ &\geq -\frac{2\tilde{W}(r)}{r} \geq -\frac{4W(r)}{r}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \phi'(r) &= \frac{2\tilde{W}(2r) - \tilde{W}(r)}{r} - \frac{1}{r^2} \int_r^{2r} \tilde{W}(t) dt \\
 &\leq \frac{4W(2r) - W(r)}{r} - \frac{1}{r^2} \int_r^{2r} W(t) dt \\
 &\leq \frac{8W(r) - W(r) - \tilde{W}(r)}{r} \\
 &\leq \frac{6W(r)}{r},
 \end{aligned}$$

para cada $r > 0$. Por tanto, $\lim_{t \rightarrow 0} t\phi'(t) = \lim_{t \rightarrow 0} W(t) = 0$, y como w es decreciente, es fácil comprobar que $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t)/t = w(\infty) = 0$, luego $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi'(t) = 0$. Esto concluye el resultado. \square

Definición 4.45. Dada $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ integrable, se define el *adjunto del operador de Hardy* sobre f como

$$A^* f(t) = \int_t^\infty \frac{f(s)}{s} ds, \quad t > 0.$$

Observación 4.46. (i) Por el Teorema de Fubini, está claro que A^* es el adjunto del operador de Hardy en el sentido clásico, i.e. para cada $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ integrables se cumple que

$$\int_0^\infty Af(x)g(x) dx = \int_0^\infty \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt g(x) dx = \int_0^\infty f(t) \int_t^\infty \frac{g(x)}{x} dx dt = \int_0^\infty f(x)A^*g(x) dx.$$

(ii) El operador de Hardy cumple que $AA^* = A + A^*$. En efecto, dada $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ integrable, por el Teorema de Fubini se tiene que

$$\begin{aligned}
 A(A^*(f))(r) &= \frac{1}{r} \int_0^r \int_t^\infty \frac{f(s)}{s} ds dt \\
 &= \frac{1}{r} \int_0^\infty \int_0^\infty \chi_{(0,r)}(t)\chi_{(0,s)}(t) \frac{f(s)}{s} ds dt \\
 &= \frac{1}{r} \int_0^\infty \frac{f(s)}{s} \int_0^\infty \chi_{(0,r)}(t)\chi_{(0,s)}(t) dt ds \\
 &= \int_0^\infty f(s) \min\{1/r, 1/s\} ds \\
 &= \frac{1}{r} \int_0^r f(s) ds + \int_r^\infty \frac{f(t)}{t} dt \\
 &= Af(r) + A^*f(r).
 \end{aligned}$$

En particular, como A^*f es por definición decreciente, $Af + A^*f$ también lo será.

Una vez probado el lema, ya estamos en condiciones de dar una caracterización de las posibles normas sobre $\Lambda^1(w)$.

Teorema 4.47 (J. Martín, J. Soria [26]). *Sea w un peso decreciente.*

(i) *Existe un peso v tal que $\Lambda^1(w) = \Gamma^1(v)$ y se cumple (4.3) con $\|\cdot\|_{\Gamma^1(v)}$ si y solo si $w(\infty) = 0$.*

(ii) *$\Lambda^1(w) = L^1$ y se cumple (4.3) con $\|\cdot\|_{L^1}$ si y solo si $w(\infty) > 0$, $w \in L^\infty$.*

(iii) *Existe un peso v tal que $\Lambda^1(w) = \Gamma^1(v) \cap L^1$, $L^1 \not\hookrightarrow \Gamma^1(v)$, $\Gamma^1(v) \not\hookrightarrow L^1$ y se cumple (4.3) con $\|\cdot\|_{\Gamma^1(v)} + \|\cdot\|_{L^1}$ si y solo si $w(\infty) > 0$, $w \notin L^\infty$.*

Demostración. (i) Si existe un peso v tal que $\Lambda^1(w) = \Gamma^1(v)$ y se cumple (4.3) con $\|\cdot\|_{\Gamma^1(v)}$, entonces por el Teorema 4.42 se verifica ((i)) y ((ii)). Además, por la Observación 4.46,

$$A(A^*(v))(r) = Av(r) + A^*v(r) = \frac{V(r)}{r} + A^*v(r),$$

para cada $r > 0$. Por otro lado, está claro que $\lim_{r \rightarrow \infty} A^*v(r) = 0$, y como $A(A^*(v))$ es decreciente, existe el límite

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V(r)}{r} = \lim_{r \rightarrow \infty} A(v)(r) = \alpha \geq 0,$$

y además,

$$\alpha = \lim_{r \rightarrow \infty} A(v)(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} A(v)(r) + A^*(v)(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} A(A^*(v))(r).$$

Entonces, si $\alpha > 0$ y $0 < \epsilon < \alpha$, existe $r_0 > 0$ tal que $|A(v)(r) - \alpha| < \epsilon$ para cada $r > r_0$. Sin embargo, entonces

$$A(A^*(v))(r_0) = \int_{r_0}^{\infty} \frac{A(v)(t)}{t} dt = \int_{r_0}^{\infty} \frac{A(v)(t) - \alpha}{t} dt + \alpha \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{t} dt \geq (\alpha - \epsilon) \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{t} dt = \infty,$$

lo que supone una contradicción con ((i)). Por tanto, $\alpha = 0$. Finalmente, como w es decreciente, por ((ii)) se tiene que

$$0 \leq w(\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{W(r)}{r} \leq C_2 \lim_{r \rightarrow \infty} A(A^*(v))(r) = 0.$$

Recíprocamente, si $w(\infty) = 0$ sabemos por el Lema 4.44 que existe un peso v verificando ((i)) y ((ii)). Por tanto, por el Teorema 4.42 se tiene que $\Lambda^1(w) \hookrightarrow \Gamma^1(v)$ y $\Gamma^1(v) \hookrightarrow \Lambda^1(w)$, o equivalentemente, $\Lambda^1(w) = \Gamma^1(v)$ y se cumple (4.3) con $\|\cdot\|_{\Gamma^1(v)}$.

(ii) Observemos que $L^1 = \Lambda^1(1)$, y que se cumpla (4.3) con $\|\cdot\|_{L^1}$ es equivalente a que $L^1 \hookrightarrow \Lambda^1(w)$ y $\Lambda^1(w) \hookrightarrow L^1$. Por tanto, por el Teorema 4.42 sabemos que $L^1 \hookrightarrow \Lambda^1(w)$ si y solo si $W(r) \leq C_1 r$ para todo $r > 0$, mientras que $\Lambda^1(w) \hookrightarrow L^1(w)$ si y solo si $W(r) \geq C_2 r$ para todo $r > 0$. Además, como w es decreciente, está claro que $w \in L^\infty$ si y solo si $w(0) < \infty$. El resultado se sigue de que

$$w(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{W(r)}{r}, \quad \text{y} \quad w(\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{W(r)}{r}.$$

(iii) Supongamos que existe un peso v tal que $\Lambda^1(w) = \Gamma^1(v) \cap L^1$, $L^1 \not\leftrightarrow \Gamma^1(v)$, $\Gamma^1(v) \not\leftrightarrow L^1$ y se cumple (4.3) con $\|\cdot\|_{\Gamma^1(v)} + \|\cdot\|_{L^1}$. Entonces, $\Lambda^1(w) \hookrightarrow L^1$, luego por lo argumentado en (ii) sabemos que $w(\infty) > 0$. Además, si $w \in L^\infty$, por (ii) sabemos que $L^1 \hookrightarrow \Lambda^1(w)$, luego $L^1 \hookrightarrow \Gamma^1(v)$, lo que supone una contradicción. Por tanto, $w \notin L^\infty$.

Recíprocamente, supongamos que $w(\infty) > 0$ y $w \notin L^\infty$. Como $w(\infty) > 0$, por lo anterior sabemos que $\Lambda^1(w) \hookrightarrow L^1$. Entonces, definiendo $u(t) = w(t) - w(\infty)$, $t > 0$, se cumple que $u(\infty) = 0$, luego por (i) existe un peso v tal que $\Lambda^1(u) = \Gamma^1(v)$ y se cumple (4.3) con $\|\cdot\|_{\Gamma^1(v)}$. Por tanto, dado $f \in \Lambda^1(w)$, por la Proposición 4.8 se tiene que

$$\|f\|_{\Lambda^1(w)} = \int_0^\infty f^*(t)w(t) dt = \int_0^\infty f^*(t)u(t) dt + w(\infty) \int_0^\infty f^*(t) dt = \|f\|_{\Lambda^1(u)} + w(\infty)\|f\|_{L^1},$$

por lo que $\Lambda^1(w) = \Lambda^1(u) \cap L^1 = \Gamma^1(v) \cap L^1$, y se cumple (4.3) con $\|\cdot\|_{\Gamma^1(v)} + \|\cdot\|_{L^1}$. Además, si $L^1 \hookrightarrow \Gamma^1(v)$, entonces $\Lambda^1(w) = L^1$ y se cumple (4.3) con $\|\cdot\|_{L^1}$, pero por (ii) esto implica que $w \in L^\infty$, lo que supone una contradicción. De forma similar, si $\Gamma^1(v) \hookrightarrow L^1 = \Gamma^1(1)$, entonces $\Lambda^1(w) = \Gamma^1(v)$ y se cumple (4.3) con $\|\cdot\|_{\Gamma^1(v)}$, por lo que por el Teorema 4.42 sabemos que existe $C > 0$ tal que

$$\frac{V(t)}{t} + \int_t^\infty \frac{v(s)}{s} ds \geq C, \quad t > 0,$$

luego

$$0 < C \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{V(t)}{t} + \int_t^\infty \frac{v(s)}{s} ds \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V(t)}{t} = v(\infty),$$

Por tanto, por la Observación 4.37, $\Lambda^1(w) = \Gamma^1(v) = \{0\}$, lo que es una contradicción. \square

Por último, a modo de resumen, recojamos los resultados principales de esta sección en el siguiente corolario.

Corolario 4.48. *Sea w un peso y $0 < p < \infty$. Entonces, $\Lambda^p(w)$ es normable si y solo si $p \geq 1$, $w \in B_{p,\infty}$.*

Demostración. (\Leftarrow) Supongamos que $p \geq 1$ y $w \in B_{p,\infty}$. Si $p > 1$, por el Teorema 4.28 se tiene que $w \in B_p$, luego por el Teorema 4.39, $\Lambda^p(w)$ es normable. En el caso $p = 1$, el resultado se sigue del Teorema 4.41.

(\Rightarrow) Supongamos que $\Lambda^p(w)$ es normable y $0 < p < 1$. Si $\|\cdot\|$ es la norma equivalente a $\|\cdot\|_{\Lambda^p(w)}$, argumentando como en el Teorema 4.35, podemos encontrar $(f_n)_n \in S_{\Lambda^p(w)}$ y $C_p > 0$ tal que

$$\frac{1}{N} \left\| \sum_{k=1}^N f_k \right\| \geq \frac{C}{N} \left\| \sum_{k=1}^N f_k \right\|_{\Lambda^p(w)} \geq CC_p N^{1/p-1}.$$

para cada $N \in \mathbb{N}$. Sin embargo, entonces existe $N_0 \in \mathbb{N}$ verificando que $\|\sum_{k=1}^{N_0} f_k\| > N_0$, lo que supone una contradicción. Por tanto, $p \geq 1$. Además, si $p > 1$ sabemos por el Teorema 4.39 que $w \in B_p$, luego por el Teorema 4.31 se tiene que $w \in B_{p,\infty}$, mientras que si $p = 1$, se cumple que $w \in B_{1,\infty}$ por el Teorema 4.41. \square

4.4. Normabilidad de $\Lambda^{p,\infty}(w)$ y acotación fuerte del operador maximal

Al igual que hemos estudiado la normabilidad para los espacios de Lorentz $\Lambda^p(w)$, se puede caracterizar la normabilidad $\Lambda^{p,\infty}(w)$, y bajo qué condiciones el funcional $\|\cdot\|_{\Lambda^{p,\infty}(w)}$ define una norma [34]. Tal y como sucede para los espacios de Lorentz débiles estudiados en el Capítulo 2, resulta que para los espacios de Lorentz débiles $\Lambda^{p,\infty}(w)$, $\|\cdot\|_{\Lambda^{p,\infty}(w)}$ nunca puede ser una norma (Teorema 4.49). Por otro lado, veremos que la normabilidad de $\|\cdot\|_{\Lambda^{p,\infty}(w)}$ es equivalente a la acotación fuerte del operador maximal $M : \Lambda^p(w) \rightarrow \Lambda^p(w)$, y a $w \in B_p$ (Teorema 4.52). Además, para cualquier $0 < p < \infty$, la norma equivalente será $\|\cdot\|_{\Gamma^{p,\infty}(w)}$, y por tanto conocemos perfectamente cómo renormar este espacio (a diferencia del caso $\Lambda^1(w)$, analizado en el Teorema 4.47).

Teorema 4.49. *Sea w un peso y $0 < p < \infty$. Entonces $\|\cdot\|_{\Lambda^{p,\infty}(w)}$ no es una norma.*

Demostración. Supongamos que $\|\cdot\|_{\Lambda^{p,\infty}(w)}$ es una norma, y veamos que $w = 0$ a.e. Dado $x > 0$ cualquiera, está claro que existen $r_1 > r_2 > r_3 > 0$ cumpliendo que $|B(0, r_1)| = x$, $|B(0, r_2)| = 3x/4$, $|B(0, r_3)| = x/4$, luego podemos definir

$$f = W(x)^{1/p} \chi_{B(0,r_2)} + W(3x/4)^{1/p} \chi_{B(0,r_1) \setminus B(0,r_2)},$$

y

$$g = W(3x/4)^{1/p} \chi_{B(0,r_3)} + W(x)^{1/p} \chi_{B(0,r_1) \setminus B(0,r_3)}.$$

A partir de (2.26) sabemos que

$$f^* = g^* = W(x)^{1/p} \chi_{(0,3x/4)} + W(3x/4)^{1/p} \chi_{[3x/4,x)},$$

y como

$$f + g = 2W(x)^{1/p} \chi_{B(0,r_2) \setminus B(0,r_3)} + (W(x)^{1/p} + W(3x/4)^{1/p}) \chi_{B(0,r_3) \cup (B(0,r_1) \setminus B(0,r_2))},$$

se tiene que

$$(f + g)^* = 2W(x)^{1/p} \chi_{(0,x/2)} + (W(x)^{1/p} + W(3x/4)^{1/p}) \chi_{[x/2,x)}.$$

Por tanto, sabiendo que W es creciente,

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Lambda^p(w)} = \|g\|_{\Lambda^p(w)} &= \max \left\{ \sup_{0 < t < 3x/4} W(x)^{1/p} W(t)^{1/p}, \sup_{3x/4 \leq t < x} W(3x/4)^{1/p} W(t)^{1/p} \right\} \\ &= W(x)^{1/p} W(3x/4)^{1/p}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{\Lambda^p(w)} &= \max \left\{ \sup_{0 < t < x/2} 2W(x)^{1/p} W(t)^{1/p}, \sup_{x/2 \leq t < x} (W(x)^{1/p} + W(3x/4)^{1/p}) W(t)^{1/p} \right\} \\ &= \max \left\{ 2W(x)^{1/p} W(x/2)^{1/p}, (W(x)^{1/p} + W(3x/4)^{1/p}) W(x)^{1/p} \right\} \\ &= (W(x)^{1/p} + W(3x/4)^{1/p}) W(x)^{1/p}. \end{aligned}$$

De esta manera, como $\|\cdot\|_{\Lambda^{p,\infty}(w)}$ es una norma y W es creciente,

$$2W(x)^{1/p}W(3x/4)^{1/p} \leq (W(x)^{1/p} + W(3x/4)^{1/p})W(x)^{1/p} \leq 2W(x)^{1/p}W(3x/4)^{1/p},$$

luego,

$$W(x)^{1/p}(W(x)^{1/p} - W(3x/4)^{1/p}) = 0.$$

De este modo sabemos que, o bien $W(x) = 0$, o bien $W(x) = W(3x/4)$. Sin embargo, si $W(x) \neq 0$, procediendo recursivamente se tiene que $W(x) = W((3/4)^n x)$ para cada $n \geq 1$, y como $W(0) = 0$ y W es continua, concluimos que $W(x) = 0$, lo que supone una contradicción. Por tanto, hemos probado que $W = 0$, luego $w = 0$ a.e. \square

En cuanto al estudio de la normabilidad de $\Lambda^{p,\infty}(w)$, recordamos que esta es equivalente a la existencia de una norma $\|\cdot\|$ sobre $\Lambda_X^{p,\infty}(w)$ y constantes $C_1, C_2 > 0$, verificando que

$$C_1\|f\| \leq \|f\|_{\Lambda_X^{p,\infty}(w)} \leq C_2\|f\|, \quad f \in \Lambda_X^{p,\infty}(w). \quad (65)$$

La idea de la caracterización para $\Lambda^{p,\infty}(w)$ será similar a la de $\Lambda_X^p(w)$, aunque antes debemos introducir una clase de pesos (análoga a B_p) para la acotación débil-débil del operador de Hardy.

Definición 4.50. Sea w un peso y $0 < p < \infty$. Decimos que $w \in B_{p,\infty}^\infty$ si

$$A : L_{\text{dec}}^{p,\infty}(w) \longrightarrow L^{p,\infty}(w).$$

El siguiente resultado caracteriza cómo es la clase de pesos $B_{p,\infty}^\infty$.

Teorema 4.51 (J. Soria [34]). *Sea w un peso y $0 < p < \infty$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $w \in B_{p,\infty}^\infty$.

(ii) $\int_0^r \frac{1}{W(t)^{1/p}} dt \leq C \frac{r}{W(r)^{1/p}}, \quad r > 0$.

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) Supongamos que $w \in B_{p,\infty}^\infty$. Observemos que

$$\|W^{-1/p}\|_{L^{p,\infty}(w)} = \sup_{t>0} W(t)^{-1/p}W(t)^{1/p} = 1,$$

luego como W es creciente, $W^{-1/p} \in L^{p,\infty}(w)$. Por tanto, existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{r>0} A(W^{-1/p})(r)W(r)^{1/p} = \|A(W^{-1/p})\|_{L^{p,\infty}(w)} \leq C\|W^{-1/p}\|_{L^{p,\infty}(w)} = C,$$

o equivalentemente,

$$\int_0^r \frac{1}{W(t)^{1/p}} dt \leq C \frac{r}{W(r)^{1/p}},$$

para cada $r > 0$.

4.4. NORMABILIDAD DE $\Lambda^{p,\infty}(w)$ Y ACOTACIÓN FUERTE DEL OPERADOR MAXIMAL

(ii) \Rightarrow (i) Sea $f \in L^{p,\infty}(w)$ y $r > 0$ cualesquiera. Entonces,

$$\begin{aligned} Af(r)W(r)^{1/p} &= \frac{1}{r} \left(\int_0^r f(t) dt \right) W(r)^{1/p} \leq \frac{1}{r} \left(\int_0^r \frac{\|f\|_{L^{p,\infty}(w)}}{W(t)^{1/p}} dt \right) W(r)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^r \frac{1}{W(t)^{1/p}} dt \right) \frac{W(r)^{1/p}}{r} \|f\|_{L^{p,\infty}(w)} \leq C \|f\|_{L^{p,\infty}(w)}. \end{aligned}$$

□

Con este último resultado, ya estamos en condiciones de probar la caracterización de la normabilidad de $\Lambda^{p,\infty}(w)$.

Teorema 4.52 (J. Soria [34]). *Sea w un peso y $0 < p < \infty$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\Lambda^{p,\infty}(w)$ es normable.

(ii) $\Lambda^{p,\infty}(w) = \Gamma^{p,\infty}(w)$ y se cumple (4.3) con $\|\cdot\|_{\Gamma^{p,\infty}(w)}$.

(iii) $w \in B_p$.

(iv) $w \in B_{p,\infty}^\infty$.

(v) $M : \Lambda^p(w) \rightarrow \Lambda^p(w)$.

Demostración. (i) \Rightarrow (iv) Supongamos que $\Lambda^{p,\infty}(w)$ es normable, de modo que existe una norma $\|\cdot\|$ sobre $\Lambda^{p,\infty}(w)$ y constantes $C_1, C_2 > 0$ verificando (4.4). Sea $f \in L_{\text{dec}}^{p,\infty}(w)$ y $r > 0$ cualesquiera. Tomando $\tilde{r} > 0$ tal que $|B(0, \tilde{r})| = r$ y $\tilde{g} = \chi_{B(0, \tilde{r})}$, podemos argumentar como en el Teorema 3.23 para concluir que existe $\tilde{f} \in \Lambda^{p,\infty}(w)$ tal que $\tilde{f}^* = f$ y

$$(\tilde{f} * \tilde{g})^*(t) \geq C \int_0^r f(s) ds,$$

para todo $0 < t \leq r$. Por tanto, definiendo $\tilde{f}_x(y) = f(y - x)$ para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$, como W es creciente se tiene que

$$\begin{aligned} C_2 \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{g}(x) \tilde{f}_x(\cdot) dx \right\| &= C_2 \|\tilde{f} * \tilde{g}\| \geq \|\tilde{f} * \tilde{g}\|_{\Lambda^{p,\infty}(w)} \\ &= \sup_{t>0} (\tilde{f} * \tilde{g})^*(t) W(t)^{1/p} \\ &= \sup_{r \geq t > 0} (\tilde{f} * \tilde{g})^*(t) W(t)^{1/p} \\ &\geq C \left(\int_0^r f(s) ds \right) \sup_{r \geq t > 0} W(t)^{1/p} \\ &= C \left(\int_0^r f(s) ds \right) W(r)^{1/p}. \end{aligned} \tag{66}$$

Observemos que, dado que $\|\cdot\|$ es equivalente a $\|\cdot\|_{\Lambda^{p,\infty}(w)}$, y por la Proposición 4.10 sabemos que $(\Lambda^{p,\infty}(w), \|\cdot\|_{\Lambda^{p,\infty}(w)})$ es completo, se tiene que $(\Lambda^{p,\infty}(w), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach. Por otro lado, la aplicación $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda^{p,\infty}(w)$ dada por $P(x) = \tilde{f}_x$, verifica que

$$\|P(x)\|_{\Lambda^{p,\infty}(w)} = \|\tilde{f}_x\|_{\Lambda^{p,\infty}(w)} = \|\tilde{f}_x^*\|_{L^{p,\infty}(w)} = \|\tilde{f}^*\|_{L^{p,\infty}(w)} = \|f\|_{L^{p,\infty}(w)} < \infty,$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$, luego tomando $d\mu(x) = \tilde{g}(x) dx$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \|P(x)\| d\mu(x) &\leq C_1^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{g}(x) \|P(x)\|_{\Lambda^{p,\infty}(w)} dx \\ &= C_1^{-1} \|f\|_{L^{p,\infty}(w)} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{g}(x) dx \\ &= C_1^{-1} \|f\|_{L^{p,\infty}(w)} |B(0, \tilde{r})| \\ &= C_1^{-1} \|f\|_{L^{p,\infty}(w)} r. \end{aligned} \tag{67}$$

De esta manera, sabemos por la Observación 4.38 que P es Bochner-integrable, por lo que por (4.4), (4.4) y la desigualdad integral de Minkowski (4.38), concluimos que

$$\begin{aligned} Af(r)W(r)^{1/p} &= \frac{1}{r} \left(\int_0^r f(x) dx \right) W(r)^{1/p} \\ &\leq \frac{C^{-1}C_2}{r} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{g}(x) \tilde{f}_x(\cdot) dx \right\| \\ &= \frac{C^{-1}C_2}{r} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} P(x) d\mu(x) \right\| \\ &\leq \frac{C^{-1}C_2}{r} \int_{\mathbb{R}^n} \|P(x)\| d\mu(x) \\ &\leq C^{-1}C_2C_1^{-1} \|f\|_{L^{p,\infty}(w)}. \end{aligned}$$

Por tanto $A : L_{\text{dec}}^{p,\infty}(w) \rightarrow L^{p,\infty}(w)$, luego $w \in B_{p,\infty}^\infty$.

(iv) \Rightarrow (ii) Por la Proposición 2.42, sabemos que $f^* \leq f^{**}$ para cada $f \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n, m_n)$, luego $\|f\|_{\Lambda^{p,\infty}(w)} \leq \|f\|_{\Gamma^{p,\infty}(w)}$. Además, dada $f \in \Lambda^{p,\infty}(w)$, como $w \in B_{p,\infty}^\infty$ y $A(f^*) = f^{**}$, existe $C > 0$ tal que

$$\|f\|_{\Gamma^{p,\infty}(w)} = \|A(f^*)\|_{L^{p,\infty}(w)} \leq C \|f^*\|_{L^{p,\infty}(w)} = C \|f\|_{\Lambda^{p,\infty}(w)},$$

luego $\Lambda^{p,\infty}(w) = \Gamma^{p,\infty}(w)$ y se cumple (4.4) con $\|\cdot\|_{\Gamma^{p,\infty}(w)}$.

(ii) \Rightarrow (i) Por el Teorema 2.44, sabemos que $(f+g)^{**} \leq f^{**} + g^{**}$ para cualesquiera $f, g \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n, m_n)$. De esta manera, $\|\cdot\|_{\Gamma^{p,\infty}(w)}$ es una norma sobre $\Gamma^{p,\infty}(w) = \Lambda^{p,\infty}(w)$ verificando (4.4), luego $\Lambda^{p,\infty}(w)$ es normable.

(iv) \Rightarrow (iii) Supongamos que $w \in B_{p,\infty}^\infty$. Por el Teorema 4.51 existe $C > 0$ tal que

$$\int_0^r \frac{1}{W(t)^{1/p}} dt \leq C \frac{r}{W(r)^{1/p}},$$

4.4. NORMABILIDAD DE $\Lambda^{p,\infty}(w)$ Y ACOTACIÓN FUERTE DEL OPERADOR MAXIMAL

y además, como W es creciente,

$$\int_0^r \frac{1}{W(t)^{1/p}} dt \geq \int_0^r \frac{1}{W(r)^{1/p}} dt = \frac{r}{W(r)^{1/p}},$$

para cada $r > 0$. Por tanto, definiendo la función

$$G(r) = \int_0^r \frac{1}{W(t)^{1/p}} dt, \quad r > 0,$$

se tiene que

$$\frac{r}{W(r)^{1/p}} \leq G(r) \leq C \frac{r}{W(r)^{1/p}}, \quad r > 0,$$

y como $t/W(t)^{1/p}$ es continua para todo $t > 0$, se sigue del teorema fundamental del cálculo que $G'(r) = 1/W(r)^{1/p}$ para cada $r > 0$. Entonces, dado $r > 0$,

$$\begin{aligned} \int_r^\infty \frac{W(t)}{t^{p+1}} dt &= \int_r^\infty \frac{W(t)^{1+1/p}}{t^{p+1}} \frac{1}{W(t)^{1/p}} dt \\ &= \int_r^\infty \left(\frac{W(t)^{1/p}}{t} \right)^{p+1} G'(t) dt \\ &\leq C^{p+1} \int_r^\infty \frac{1}{G(t)^{p+1}} G'(t) dt \\ &= C^{p+1} \left(\frac{G(t)^{-p}}{p} \Big|_r^\infty \right) \\ &\leq C^{p+1} \frac{G(r)^{-p}}{p} \\ &\leq \frac{C^{p+1}}{p} \frac{W(r)}{r^p}, \end{aligned}$$

luego por el Teorema 4.23, $w \in B_p$.

(iii) \Rightarrow (iv) Supongamos que $w \in B_p$. Definiendo la función F como en (4.2), sabemos que existe $C > 0$ verificando (4.2) y además $F'(r) = F(r)^2 W(r)/r^{p+1}$ para cada $r > 0$. Por tanto, dado $r > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{1}{W(t)^{1/p}} dt &= \int_0^r \left(\frac{t}{W(t)^{1/p}} \right)^{p+1} \frac{W(t)}{t^{p+1}} dt \\ &\leq C^{1+1/p} \int_0^r F(t)^{1+1/p} \frac{F'(t)}{F(t)^2} dt \\ &= C^{1+1/p} \int_0^r F(t)^{-1+1/p} F'(t) dt \\ &= C^{1+1/p} \left(p F(t)^{1/p} \Big|_0^r \right) \\ &\leq C^{1+1/p} p F(r)^{1/p} \\ &\leq (pC)^{1+1/p} \frac{r}{W(r)^{1/p}}, \end{aligned}$$

luego por el Teorema 4.51, $w \in B_{p,\infty}^\infty$.

(iii) \Leftrightarrow (v) La demostración es análoga a la equivalencia (iii) \Leftrightarrow (iv) del Teorema 3.23. \square

Observación 4.53. Tal y como hemos probado en los Teoremas 3.23 y 4.52, la normabilidad de $\Lambda_X^p(w)$ y $\Lambda^{p,\infty}(w)$ queda totalmente caracterizada por el peso w , y por la acotación del operador maximal M . En particular:

- (i) Si $1 < p < \infty$, entonces $\Lambda^p(w)$ es normable si y solo si $\Lambda^{p,\infty}(w)$ es normable. Por tanto, las siguientes acotaciones del operador maximal son equivalentes: $M : \Lambda^p(w) \rightarrow \Lambda^p(w)$, $M : \Lambda^p(w) \rightarrow \Lambda^{p,\infty}(w)$ y $M : \Lambda^{p,\infty}(w) \rightarrow \Lambda^{p,\infty}(w)$. Además, sabemos por el Teorema de G. G. Lorentz y T. Shimogaki (Teorema 2.71), que esto es equivalente a que los índices de Boyd $\bar{\alpha}_{\Lambda^p(w)}, \bar{\alpha}_{\Lambda^{p,\infty}(w)} < 1$.
- (ii) Si $p = 1$, entonces si $\Lambda^{1,\infty}(w)$ es normable, $\Lambda^p(w)$ también lo es, pero el recíproco es falso (basta tomar $w = 1$).
- (iii) Si $p < 1$, entonces $\Lambda^p(w)$ nunca es normable, mientras que $\Lambda^{p,\infty}(w)$ lo será siempre que $M : \Lambda^p(w) \rightarrow \Lambda^p(w)$.

Finalmente, de los Teoremas 3.23, 4.52 y el Corolario 4.48, deducimos el siguiente resultado.

Corolario 4.54. *Sea w un peso y $0 < p < \infty$.*

- (i) $\Lambda^p(w)$ es normable si y solo si $p \geq 1$, $w \in B_{p,\infty}$.
- (ii) $\Lambda^{p,\infty}(w)$ es normable si y solo si $w \in B_p$.

De esta manera, la normabilidad del espacio “fuerte” $\Lambda^p(w)$ resulta ser, sorprendentemente, equivalente a la acotación débil del operador maximal M , mientras que la normabilidad del espacio “débil” $\Lambda^{p,\infty}(w)$ es equivalente a la acotación fuerte del operador maximal M .

Capítulo 5

La transformada de Hilbert sobre espacios de Lorentz

La transformada de Hilbert es el ejemplo más fundamental de operador singular en una variable, y ocupa un lugar central en el desarrollo de la teoría de integrales singulares de Calderón-Zygmund. Su influencia se extiende a diversas áreas del análisis matemático, incluyendo el análisis armónico o el análisis funcional, pero también trasciende hasta la óptica y el procesamiento de señales. Además, su estudio ha dado lugar a un conjunto de herramientas esenciales en el análisis armónico moderno: el uso del valor principal de Cauchy para tratar singularidades, la regularización por truncamientos, el control mediante operadores maximales o el análisis de los valores en la frontera de las partes imaginarias de funciones analíticas.

En este capítulo estudiaremos la existencia y acotación de la transformada de Hilbert sobre los espacios de Lorentz clásicos, así como su relación con la acotación del operador de Calderón y las clases B_p . En la sección 5.1 introduciremos la transformada de Hilbert, y estudiaremos su existencia y acotación sobre L^p a través del operador de Calderón (Teoremas 5.13 y 5.12). En la sección 5.2 estudiaremos, al igual que se hizo para el operador de Hardy en el Capítulo 4, la acotación (fuerte y débil) del adjunto del operador de Hardy sobre el cono de funciones positivas y decrecientes de $L^p(w)$ (Teoremas 5.20 y 5.23), lo que dará lugar a la aparición de las clases B_∞^* y C_p . Por último, en la sección 5.3 caracterizaremos la acotación fuerte y débil de la transformada de Hilbert sobre los espacios de Lorentz $\Lambda^p(w)$ a través de las clases B_p y B_∞^* (Teorema 5.28), e introduciremos los espacios de Calderón $C^p(w)$.

El libro de referencia para la primera sección será [3], mientras que para las dos secciones restantes nos guiaremos principalmente por [1, 29].

5.1. La transformada de Hilbert

El estudio de la transformada de Hilbert puede llevarse a cabo mediante diversos enfoques. Por un lado, podemos verla como una distribución temperada, y analizar sus propiedades como un operador invariante por traslaciones (véase [17]), lo que nos lleva a hablar de los

multiplicadores y sus propiedades. Sin embargo, en lo que a este trabajo concierne, bastará definir este operador a través de una integral de valor principal, dejando de lado el hecho de que viene dada por la convolución con la distribución temperada v.p. $\frac{1}{\pi x}$.

Definición 5.1. Se define la *transformada de Hilbert* como la aplicación que, a cada $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, le asocia la función $Hf : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por la integral de valor principal

$$Hf(x) = \text{v.p.} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|x-t| \geq \epsilon} \frac{f(t)}{x-t} dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (68)$$

siempre que el límite exista a.e.

Observación 5.2. Es interesante destacar que la transformada de Hilbert puede definirse también de forma implícita, esto es, sin hacer uso de una expresión explícita como (5.1). Veamos algunas de ellas:

(i) Tal y como veremos más adelante (Teorema 5.13) la transformada de Hilbert está bien definida sobre $L^2(\mathbb{R})$, y además se puede comprobar que

$$\widehat{Hf}(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi) \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}$$

para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$. Más aún, esta condición claramente caracteriza a H , i.e. la transformada de Hilbert (sobre $L^2(\mathbb{R})$) puede definirse como el operador cuyo multiplicador es la función $m(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi)$ (véase [17], [35])

(ii) Por otro lado, es fácil comprobar que la transformada de Hilbert conmuta con las traslaciones, con las dilataciones, y anticonmuta con las reflexiones. De hecho [35, Proposition 3.1], la transformada de Hilbert es el único operador sobre $L^2(\mathbb{R})$ en estas condiciones, lo que plantea otra definición alternativa.

Claramente, si existe la transformada de Hilbert, es un operador lineal. Sin embargo, incluso para funciones relativamente “suaves”, como las funciones continuas de soporte compacto, no es en absoluto trivial que la integral (5.1) exista a.e. Por tanto, el primer problema que abordaremos sobre la transformada de Hilbert será el de su existencia. Como punto de partida, observemos que si $a < b$ es fácil comprobar que

$$H\chi_{(a,b)} = \frac{1}{\pi} \log \left| \frac{x-a}{x-b} \right|, \quad (69)$$

para cada $x \neq a, b$. De esta manera, la transformada de Hilbert existe a.e. para funciones características de intervalos de longitud finita, y por tanto para funciones escalonadas, i.e. funciones que toman un número finito de valores, cada uno de estos sobre una unión finita de intervalos de longitud finita.

En este contexto, existe una analogía clara entre los problemas de existencia para la transformada de Hilbert y la existencia del límite en el teorema de diferenciación de Lebesgue (Teorema 3.10). En este último, la existencia a.e. del límite era bien conocida para un conjunto de funciones denso en L^1 (funciones continuas de soporte compacto), y el resultado se extendía a todo L^1 estableciendo control (Teorema 3.9) sobre el correspondiente operador maximal (el

operador maximal de Hardy-Littlewood M). Para la transformada de Hilbert, el conjunto denso de L^1 serán las funciones escalonadas, y para extender a todo L^1 la existencia a.e. del límite de

$$H_\epsilon f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{|x-t| \geq \epsilon} \frac{f(t)}{x-t} dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

cuando $\epsilon \rightarrow 0$, será necesario introducir el siguiente operador maximal.

Definición 5.3. Dada $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, se define el *operador maximal de Hilbert* $\mathcal{H}f$ de f como

$$\mathcal{H}f(x) = \sup_{\epsilon > 0} |H_\epsilon f(x)|, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (70)$$

Además, el operador $\mathcal{H} : f \rightarrow \mathcal{H}f$ se conoce como la *transformada maximal de Hilbert*.

Las estimaciones necesarias para el operador maximal de Hilbert serán consecuencia de los siguientes lemas, que nos darán información acerca de las funciones de distribución de funciones racionales.

Lema 5.4. Sean $a_1 < b_1 < \dots < a_n < b_n$ y la función racional

$$g(x) = \prod_{k=1}^n \frac{x - a_k}{x - b_k}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (71)$$

Si $\lambda \neq 1$, entonces la ecuación $g(x) = \lambda$ tiene n soluciones distintas r_1, \dots, r_n , las cuales verifican

$$\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n r_k + \frac{1}{1-\lambda} \sum_{k=1}^n (b_k - a_k). \quad (72)$$

Además, si $\lambda > 1$, entonces

$$(\lambda - 1)|\{g > \lambda\}| = (\lambda + 1)|\{g < -\lambda\}| = \sum_{k=1}^n (b_k - a_k).$$

Demostración. Observemos que g tiene un polo simple en b_k para cada $k = 1, \dots, n$ y $\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = 1$, luego como $\lambda \neq 1$, existen exactamente n soluciones distintas r_1, \dots, r_n de la ecuación $g(x) = \lambda$. Además, estas n soluciones serán las raíces del polinomio

$$p(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k = \prod_{k=1}^n (x - a_k) - \lambda \prod_{k=1}^n (x - b_k).$$

Por tanto, sabemos que

$$\sum_{k=1}^n r_k = -p_{n-1}/p_n = \frac{-1}{1-\lambda} \left(-\sum_{k=1}^n a_k + \lambda \sum_{k=1}^n b_k \right),$$

que es equivalente a (5.4).

En el caso $\lambda > 1$, es fácil ver que $\{g > \lambda\} = \bigcup_{k=1}^n (b_k, r_k)$, luego por lo anterior,

$$(\lambda - 1)|\{g > \lambda\}| = (\lambda - 1) \sum_{k=1}^n (r_k - b_k) = \sum_{k=1}^n (b_k - a_k).$$

La igualdad restante se prueba de forma análoga. \square

Lema 5.5. Sean $t_1 < \dots < t_n$, $m_1, \dots, m_n \geq 0$ y la función

$$h(x) = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{x - t_k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si $\lambda \neq 0$, entonces la ecuación $g(x) = \lambda$ tiene n soluciones distintas r_1, \dots, r_n , las cuales verifican

$$\sum_{k=1}^n r_k = \sum_{k=1}^n t_k + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n m_k.$$

Además, si $\lambda > 0$, entonces

$$|\{h > \lambda\}| = |\{h < -\lambda\}| = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n m_k.$$

Demostración. Observemos que h tiene un polo simple en t_k para cada $k = 1, \dots, n$ y $\lim_{|x| \rightarrow \infty} h(x) = 0$, luego como $\lambda \neq 0$, existen exactamente n soluciones distintas r_1, \dots, r_n de la ecuación $h(x) = \lambda$. Además, estas n soluciones serán las raíces del polinomio

$$p(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k = \sum_{k=1}^n m_k \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (x - t_j) \right) - \lambda \prod_{j=1}^n (x - t_j).$$

Por tanto, sabemos que

$$\sum_{k=1}^n r_k = -p_{n-1}/p_n = \sum_{k=1}^n t_k + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n m_k.$$

En el caso $\lambda > 0$, es fácil ver que $\{g > \lambda\} = \bigcup_{k=1}^n (t_k, r_k)$, luego por lo anterior,

$$|\{g > \lambda\}| = \sum_{k=1}^n (r_k - t_k) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n m_k.$$

La igualdad restante se prueba de forma análoga. \square

A partir de (5.1), sabemos que si E es unión finita de intervalos disjuntos de longitud finita, entonces H_{χ_E} existe. Con la ayuda de los lemas anteriores, podemos determinar con exactitud su función de distribución, que dependerá únicamente de $|E|$, y no de los intervalos que lo componen. Además, el resultado continúa siendo cierto si E es un conjunto de medida finita, para lo cual basta aproximar E por uniones finitas de intervalos disjuntos de longitud finita.

Lema 5.6 (E. M. Stein, G. Weiss [37]). *Sea $E \subset \mathbb{R}$ unión finita de intervalos disjuntos, cada uno de ellos de longitud finita. Entonces*

$$m_{H\chi_E}(\lambda) = \frac{2|E|}{\sinh(\pi\lambda)}, \quad \lambda > 0.$$

Demostración. Por hipótesis sabemos que $E = \bigcup_{k=1}^n (a_k, b_k)$, donde $a_1 < b_1 < \dots < a_n < b_n$. Además, por (5.1) se tiene que

$$H\chi_E(x) = \sum_{k=1}^n H\chi_{(a_k, b_k)}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \log \left| \frac{x - a_k}{x - b_k} \right| = \frac{1}{\pi} \log \left| \prod_{k=1}^n \frac{x - a_k}{x - b_k} \right| = \frac{1}{\pi} \log |g|,$$

donde g es la función racional dada por (5.4). Sea $\lambda > 0$ y $F = \{|H\chi_E| > \lambda\}$, de modo que $|F| = m_{H\chi_E}(\lambda)$. Podemos descomponer F como

$$F = \{|g| > e^{\pi\lambda}\} \cup \{|g| < e^{-\pi\lambda}\} = F_1 \cup F_2.$$

Aplicando el Lema 5.4 a g , llegamos a que

$$|F_1| = \{g > e^{\pi\lambda}\} + \{g < -e^{\pi\lambda}\} = \frac{\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)}{e^{\pi\lambda} - 1} + \frac{\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)}{e^{-\pi\lambda} + 1} = \frac{|E|}{\sinh(\pi\lambda)}.$$

De forma similar, aplicando el Lema 5.4 a $1/g$, llegamos a la misma conclusión para F_2 , de modo que

$$m_{H\chi_E}(\lambda) = |F| = |F_1| + |F_2| = \frac{2|E|}{\sinh(\pi\lambda)}.$$

□

En la demostración de la acotación en L^p ($1 < p \leq \infty$) del operador maximal de Hardy-Littlewood, la acotación en L^∞ juega un rol crucial. Sin embargo, en el caso de la transformada de Hilbert H o el operador maximal de Hilbert \mathcal{H} esto deja de ser cierto, para lo cual basta tener en cuenta (5.1). Alternativamente, la siguiente proposición nos dará por un lado una estimación de tipo débil (1, 1) sobre funciones simples, y además cierto control en el crecimiento en L^∞ para funciones escalonadas.

Proposición 5.7. (i) *Si f es una función simple con soporte acotado, entonces*

$$t(\mathcal{H}f)^*(t) \leq \frac{64}{\pi} \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}, \quad t > 0. \quad (73)$$

(ii) *Si F es unión finita de intervalos disjuntos, cada uno de longitud finita, y $f = \chi_F$, entonces*

$$(\mathcal{H}f)^*(t) \leq \frac{2}{\pi} \sinh^{-1} \left(\frac{64|F|}{t} \right), \quad t > 0. \quad (74)$$

Demostración. Sea $\lambda > 0$. Tanto en (i) como en (ii) podemos descomponer

$$E = \{\mathcal{H}f > \lambda\} = \left\{ \sup_{\epsilon > 0} H_\epsilon f > \lambda \right\} \cup \left\{ \sup_{\epsilon > 0} (-H_\epsilon f) > \lambda \right\} = E_+ \cup E_-$$

Consideremos $\Omega \subset E_+$ compacto cualquiera. Está claro que, para cada $x \in \Omega$, existe un intervalo abierto de longitud finita I_x , centrado en x , tal que

$$\int_{\mathbb{R} \setminus I_x} \frac{f(t)}{x-t} dt > \pi\lambda.$$

Observemos que, como $\Omega \subset \bigcup_{x \in \Omega} I_x$ y Ω es compacto, por el Lema 3.7 existe $\{x_j\}_{j=1}^n \subset \Omega$ de modo que, denotando $I_j := I_{x_j}$ para cada $j = 1, \dots, n$,

$$|\Omega| \leq 4 \sum_{j=1}^n |I_j|, \quad (75)$$

y

$$\int_{\mathbb{R} \setminus I_j} \frac{f(t)}{x-t} dt > \pi\lambda, \quad j = 1, \dots, n. \quad (76)$$

Volviendo ahora al caso (i), está claro que si $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0$ se verifica ((i)), por lo que podemos asumir que $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} > 0$. Además, como (5.1) involucra un número finito de desigualdades, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R} \setminus I_j} \frac{f(t)}{x-t} dt > \pi\lambda + \epsilon, \quad j = 1, \dots, n. \quad (77)$$

Sea $\delta := \min\{|I_k| : k = 1, \dots, n\}$ y $[-N, N]$ un intervalo conteniendo el soporte de f y los intervalos I_k . Entonces, podemos construir una partición $(t_k)_{k=1}^n$ de $[-N, N]$ que contiene los extremos de los intervalos I_j tal que

$$|t_{k+1} - t_k| < \frac{\epsilon\delta^2}{4\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}}, \quad k = 1, \dots, K-1. \quad (78)$$

Consideremos

$$m_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) dt, \quad \text{y} \quad A_j = \{k : (t_k, t_{k+1}) \not\subset I_j\},$$

para cada $k = 1, \dots, K-1$ y $j = 1, \dots, n$, y definamos las funciones

$$g_j(y) = \sum_{k \in A_j} \frac{m_k}{y - t_k}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Observemos que, dado $j = 1, \dots, n$ cualquiera, por definición se tiene que $(\mathbb{R} \setminus I_j) \cap [-N, N] =$

$\bigcup_{k \in A_j} [t_k, t_{k+1}]$, por lo que por (5.1),

$$\begin{aligned} \left| g_j(x) - \int_{\mathbb{R} \setminus I_j} \frac{f(t)}{x_j - t} dt \right| &= \left| \sum_{k \in A_j} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) \left(\frac{1}{x_j - t_k} - \frac{1}{x_j - t} \right) dt \right| \\ &\leq \sum_{k \in A_j} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t)| \left| \frac{t - t_k}{(x_j - t_k)(x_j - t)} \right| dt \\ &\leq \sum_{k \in A_j} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t)| \frac{|t_{k+1} - t_k|}{(|I_j|/2)^2} dt \\ &\leq \frac{\epsilon}{\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}} \sum_{k \in A_j} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t)| dt \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Esto, junto con (5.1), implica que $g_j(x_j) > \pi\lambda$, y como g_j es decreciente en I_j , $g_j(y) > \pi\lambda$ en la mitad izquierda de I_j . Por tanto, por (5.1),

$$\frac{|\Omega|}{8} \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |I_j| \leq \sum_{j=1}^n |\{g_j > \pi\lambda\} \cap I_j|. \quad (79)$$

Por otro lado, definiendo

$$h(y) = \sum_{k=1}^K \frac{m_k}{y - t_k}, \quad h_j(y) = \sum_{k \notin A_j} \frac{m_k}{y - t_k}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, n,$$

se tiene que $g_j = h - h_j$ para cada $j = 1, \dots, n$. De esta manera, si $g_j(y) > \pi\lambda$ entonces o bien $h(y) > \pi\lambda/2$, o bien $h_j(y) < -\pi\lambda/2$, luego

$$|\{g_j > \pi\lambda\} \cap I_j| \leq |\{h > \pi\lambda/2\} \cap I_j| + |\{h_j < -\pi\lambda/2\}|. \quad (80)$$

Por tanto, aplicando (5.1) y el Lema 5.6 para h y h_j ,

$$\begin{aligned} |\Omega| &\leq 8 \left(|\{h > \pi\lambda/2\}| + \sum_{j=1}^n |\{h_j < -\pi\lambda/2\}| \right) \\ &\leq 8 \left(\frac{2}{\pi\lambda} \sum_{k=1}^K m_k + \sum_{j=1}^n \frac{2}{\pi\lambda} \sum_{k \notin A_j} m_k \right) \\ &= \frac{32}{\pi\lambda} \sum_{k=1}^K m_k = \frac{32\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\pi\lambda}. \end{aligned} \quad (81)$$

Finalmente, como (5.1) se cumple para todo compacto $\Omega \subset E_+$, por la regularidad interior de la medida de Lebesgue m también se cumple para E_+ . Razonando de forma análoga se llega a la misma estimación para E_- , de modo que

$$m_{\mathcal{H}f}(\lambda) = |E| = |E_+| + |E_-| \leq \frac{64\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\pi\lambda},$$

para cada $\lambda > 0$, y por tanto,

$$(\mathcal{H}f)^*(t) \leq \frac{64\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}}{\pi t},$$

para cada $t > 0$.

La demostración de (ii) sigue la misma idea. Dado $\lambda > 0$, construyamos intervalos I_1, \dots, I_n verificando (5.1) y (5.1) y las funciones

$$g_j(y) = \int_{\mathbb{R} \setminus I_j} \frac{f(t)}{y-t} dt, \quad y \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Entonces, (5.1) implica que $g_j(x_j) > \pi\lambda$, por lo que como g_j decrece en I_j , se cumple (5.1) para g_j . Además, como $f = \chi_F$ con F unión finita de intervalos de longitud finita, podemos escribir

$$g_j = \pi H\chi_F - \pi H\chi_{F \cap I_j} = h - h_j,$$

luego se verifica (5.1). Además, por el Lema 5.6,

$$m_h(\pi\lambda/2) = \frac{2|F|}{\sinh(\pi\lambda/2)}, \quad m_{h_j}(\pi\lambda/2) = \frac{2|F \cap I_j|}{\sinh(\pi\lambda/2)},$$

de modo que por (5.1) y (5.1),

$$|\Omega| \leq \frac{32|F|}{\sinh(\pi\lambda/2)}.$$

Así, procediendo como en (i), concluimos que

$$m_{\mathcal{H}f}(\lambda) = |E| \leq \frac{64|F|}{\sinh(\pi\lambda/2)},$$

para cada $\lambda > 0$, o equivalentemente,

$$(\mathcal{H}f)^*(t) \leq \frac{2}{\pi} \sinh^{-1} \left(\frac{64|F|}{t} \right),$$

para cada $t > 0$. □

Al igual que el operador de Hardy apareció de forma natural en el estudio del operador maximal de Hardy-Littlewood, cuando trabajamos con la transformada de Hilbert aparece otro operador con un papel muy similar, conocido como el *operador de Calderón*.

Definición 5.8. Se define el *operador de Calderón* como la aplicación que, a cada función $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ integrable, le asocia la función Sf dada por la suma del operador de Hardy y su adjunto, i.e.

$$Sf(t) = Af(t) + A^*f(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds + \int_t^\infty \frac{f(s)}{s} ds, \quad t > 0.$$

Observación 5.9. Sea $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función integrable.

(i) Por la Observación 4.46, sabemos que se puede expresar el operador de Calderón como $S = A \circ A^* = A^* \circ A$, o de forma más explícita,

$$Sf(t) = \int_0^\infty f(s) \min \left\{ 1, \frac{s}{t} \right\} \frac{ds}{s}, \quad t > 0. \quad (82)$$

En particular, Sf es decreciente.

(ii) A partir de (5.9), está claro que

$$tSf(t) = \int_0^\infty f(s) \min \{ t, s \} \frac{ds}{s}, \quad t > 0.$$

Por tanto, $tSf(t)$ es una función creciente, y se verifica que

$$Sf^*(t) \leq \max \left\{ 1, \frac{t_0}{t} \right\} Sf^*(t_0), \quad t, t_0 > 0.$$

En particular, o bien $Sf^*(t) = \infty$ para todo $t > 0$, o bien $Sf^*(t) < \infty$ para todo $t > 0$.

(iii) Como $S(f^*)$ es decreciente, sabemos que $[S(f^*)]^* = S(f^*)$, por lo que por (i) se tiene que

$$S(f^*)^{**} = (A \circ S)(f^*) = (A \circ A^* \circ A)(f^*) = (S \circ A)(f^*) = S(f^{**}).$$

El siguiente resultado sigue la misma idea del Teorema 3.17, pero con el operador maximal de Hilbert y el operador de Calderón como protagonistas.

Teorema 5.10. Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Entonces existe una constante $c > 0$, independiente de f , cumpliendo que

$$(\mathcal{H}f)^*(t) \leq cSf^*(t), \quad t > 0. \quad (83)$$

Demostración. Supongamos en primer lugar que $f = \chi_F$, donde F es unión finita de intervalos disjuntos de longitud finita, de modo que por el Lema 5.7 se cumple ((ii)). Observemos que

$$\sinh^{-1}(x) = \log(x + (1 + x^2)^{1/2}) \leq \log(2x + 1), \quad x > 0.$$

Además, si $x \geq 1$, $2x + 1 \leq 3x \leq e^2x$, luego $\log(2x + 1) \leq 2(1 + \log x)$, mientras que si $0 < x < 1$, entonces $\log(2x + 1) \leq 2x$. Por tanto,

$$(\mathcal{H}\chi_F)^*(t) \leq \frac{2}{\pi} \sinh^{-1} \left(\frac{64|F|}{t} \right) \leq \frac{4}{\pi} \begin{cases} 1 + \log \left(\frac{64|F|}{t} \right), & 0 < t < 64|F| \\ \frac{64|F|}{t}, & 64|F| \leq t < \infty, \end{cases}$$

para cada $t > 0$, y podemos reescribir el lado derecho como

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi} \int_0^{64|F|} \min \left\{ 1, \frac{s}{t} \right\} \frac{ds}{s} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{|F|} \min \left\{ 1, \frac{64s}{t} \right\} \frac{ds}{s} \leq \frac{256}{\pi} \int_0^{|F|} \min \left\{ 1, \frac{s}{t} \right\} \frac{ds}{s} \\ &= \frac{256}{\pi} S(\chi_{(0,|F|)})(t) = \frac{256}{\pi} S(\chi_F^*)(t), \end{aligned}$$

luego tomando $c = 256/\pi$,

$$(\mathcal{H}\chi_F)^*(t) \leq cS(\chi_F^*)(t).$$

Ahora, supongamos que $f = \chi_F$, con F un conjunto medible y acotado de \mathbb{R} . Entonces, sabemos que existe una sucesión de conjuntos $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, cada uno unión finita de intervalos disjuntos, verificando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |F \Delta F_n| = 0. \quad (84)$$

Como F está acotado, existe un intervalo I acotado conteniendo a F , y como reemplazar F_n por $F_n \cap I$ no afecta a la convergencia de (5.1), podemos asumir sin pérdida de generalidad que $F_n \subset I$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Además,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |\chi_F - \chi_{F_n}| dm = \lim_{n \rightarrow \infty} |F \Delta F_n| = 0,$$

luego pasando a una subsucesión, podemos asumir que $\chi_{F_n} \rightarrow \chi_F$ a.e. Por otro lado, dado $\epsilon > 0$ y $x \in \mathbb{R}$, por el teorema de la convergencia dominada,

$$|H_\epsilon \chi_F(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |H_\epsilon \chi_{F_n}(x)| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}\chi_{F_n}(x).$$

Como esto es válido para todo $\epsilon > 0$, se tiene que

$$\mathcal{H}\chi_F \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}\chi_{F_n},$$

y por tanto, $(\mathcal{H}\chi_F)^* \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{H}\chi_{F_n})^*$. De esta manera, aplicando el caso anterior a cada χ_{F_n} , deducimos que

$$(\mathcal{H}\chi_F)^* \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{H}\chi_{F_n})^* \leq c \liminf_{n \rightarrow \infty} S(\chi_{F_n}^*). \quad (85)$$

Por último, observemos que

$$\begin{aligned} |S(\chi_F^*)(t) - S(\chi_{F_n}^*)(t)| &= \left| \int_0^{|I|} (\chi_F^* - \chi_{F_n}^*)(s) \min \left\{ 1, \frac{s}{t} \right\} \frac{ds}{s} \right| \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^{|I|} |\chi_F^* - \chi_{F_n}^*|(s) ds \\ &= |(0, |F|) \Delta (0, |F_n|)| \leq \frac{|F \Delta F_n|}{t}, \end{aligned}$$

para cada $t > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $S(\chi_{F_n}^*)(t) \rightarrow S(\chi_F^*)(t)$ para todo $t > 0$, luego por (5.1) concluimos que se verifica (5.10) siempre que $f = \chi_F$ con F un conjunto medible y acotado de \mathbb{R} .

Supongamos a continuación que f es una función simple no negativa con soporte acotado, i.e. $f = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{F_i}$ donde $a_i \geq 0$, cada F_i es un conjunto medible y acotado de \mathbb{R} y además $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_N$. Entonces, por el Ejemplo 2.26 sabemos que $f^* = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{(0, |F_i|)}$. De este

modo, por la subaditividad de \mathcal{H} y del operador $g \rightarrow g^{**}$ (Teorema 2.44), la linealidad de S y A , la Observación 5.9 y la estimación (5.10) para cada χ_{F_i} , obtenemos que

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{H}f)^{**}(t) &\leq \sum_{i=1}^N a_i (\mathcal{H}\chi_{F_i})^{**}(t) \leq c \sum_{i=1}^N a_i S(\chi_{F_i}^*)^{**}(t) \\
 &= c \sum_{i=1}^N a_i A(S(\chi_{F_i}^*))(t) = cA\left(S\left(\sum_{i=1}^N a_i \chi_{F_i}^*\right)\right)(t) \\
 &= c\left[S\left(\sum_{i=1}^N a_i \chi_{(0,|F_i|)}^*\right)\right]^{**}(t) = c[S(f^*)]^{**}(t) = cS(f^{**})(t),
 \end{aligned} \tag{86}$$

para cada $t > 0$. Por otro lado, dado $t > 0$ cualquiera y $E = \{f > f^*(t)\}$, si definimos

$$g = (f - f^*(t))\chi_E, \quad h = f^*(t)\chi_E + f\chi_{\mathbb{R}\setminus E},$$

entonces $f = g + h$, y para cada $s > 0$,

$$g^*(s) = [f^*(s) - f^*(t)]_+, \quad h^*(s) = \min\{f^*(s), f^*(t)\}.$$

Además, como f es una función simple no negativa con soporte acotado, también lo son g y h . Por tanto, aplicando la Proposición 5.7 a g , obtenemos que

$$(\mathcal{H}g)^*(t/2) \leq \frac{c}{t} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} = \frac{c}{t} \int_0^t (f^*(s) - f^*(t)) ds,$$

Por otro lado, sabemos que se verifica (5.1) para h , i.e. $(\mathcal{H}h)^{**}(t) \leq cS(h^{**})(t)$. Además, como f^* es decreciente, $h^*(s) = f^*(t)$ para cada $0 < s \leq t$, luego $h^{**}(s) = f^*(t)$ para cada $0 < s \leq t$. Entonces, por la Observación 5.9,

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{H}h)^{**}(t) &\leq cS(h^{**})(t) = c\left[\frac{1}{t} \int_0^t h^{**}(s) ds + A^*(h^{**})(t)\right] \\
 &= c\left[f^*(t) + A^*(A(h^*))(t)\right] \\
 &= c\left[f^*(t) + A(h^*)(t) + A^*(h^*)(t)\right] \\
 &= c\left[f^*(t) + \frac{1}{t} \int_0^t h^*(s) ds + \int_t^\infty \frac{h^*(s)}{s} ds\right] \\
 &\leq 2c\left[f^*(t) + \int_t^\infty \frac{f^*(s)}{s} ds\right].
 \end{aligned}$$

Finalmente, observando que $(\mathcal{H}h)^*(t/2) \leq (\mathcal{H}h)^{**}(t/2) \leq 2(\mathcal{H}h)^{**}(t)$ para cada $t > 0$, concluimos por la Proposición 2.28 que

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{H}f)^*(t) &\leq (\mathcal{H}g)^*(t/2) + (\mathcal{H}h)^*(t/2) \\
 &\leq 4c\left(\frac{1}{t} \int_0^t (f^*(s) - f^*(t)) ds + f^*(t) + \int_t^\infty \frac{f^*(s)}{s} ds\right) \\
 &= 4cS(f^*)(t),
 \end{aligned}$$

lo que demuestra (5.10) para todas las funciones simples no negativas y con soporte acotado.

Ahora, supongamos que f es una función medible no negativa. Si $Sf^*(t) = \infty$ para todo $t > 0$, entonces (5.10) es trivialmente cierto, por lo que por la Observación 5.9 podemos asumir que $Sf^*(t) < \infty$ para todo $t > 0$. Consideremos una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples no negativas con soporte acotado tal que $f_n \uparrow f$ a.e. Entonces, por la Proposición 2.28 sabemos que $f_n^* \uparrow f^*$, luego por el teorema de la convergencia monótona, $Sf_n^*(t) \uparrow Sf^*(t)$ para cada $t > 0$. Por otro lado, dados $\epsilon > 0$ y $x \in \mathbb{R}$, por la desigualdad de Hardy-Littlewood (Teorema 2.33), se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{|x-t| \geq \epsilon} \left| \frac{f(t)}{x-t} \right| dt &= \int_{\mathbb{R}} |f(t)| |g(x-t)| dt \leq \int_0^{\infty} f^*(t) g^*(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} f^*(s) 2 \min \left\{ \frac{1}{\epsilon}, \frac{1}{s} \right\} ds = 2Sf^*(\epsilon) < \infty, \end{aligned} \quad (87)$$

donde $g(t) = \chi_{\mathbb{R} \setminus (-\epsilon, \epsilon)}(t)/t$, y es fácil comprobar que $g^*(s) = 2 \min\{1/\epsilon, 1/s\}$. Por tanto, por el teorema de la convergencia dominada,

$$|H_{\epsilon}f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |H_{\epsilon}f_n(x)| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}f_n(x).$$

De esta manera, tomando el supremo sobre $\epsilon > 0$, pasando a las reordenadas decrecientes y aplicando (5.10) a cada f_n , concluimos que

$$(\mathcal{H}f)^*(t) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{H}f_n)^*(t) \leq 4c \liminf_{n \rightarrow \infty} Sf_n^*(t) = 4cSf^*(t)$$

para cada $t > 0$, luego (5.10) se mantiene si f es una función medible no negativa.

Finalmente, si f toma valores positivos y negativos, basta aplicar (5.10) a f_+ y f_- . Como $(f_+)^* \leq f^*$ y $(f_-)^* \leq f^*$, deducimos que

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}f)^*(t) &\leq (\mathcal{H}f_+)^*(t/2) + (\mathcal{H}f_-)^*(t/2) \\ &\leq 2 \left((\mathcal{H}f_+)^*(t) + (\mathcal{H}f_-)^*(t) \right) \\ &\leq 8c \left(Sf_+^*(t) + Sf_-^*(t) \right) \leq 16cSf^*(t), \end{aligned}$$

para cada $t > 0$, lo que concluye la demostración. \square

Observación 5.11. Es bien sabido que, tal y como sucede en un espacio de medida general, las funciones simples son densas en $L^1(\mathbb{R})$. Sin embargo, en este caso las funciones escalonadas también definen una clase densa en $L^1(\mathbb{R})$. Para verlo, basta considerar un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}$ acotado. Es fácil comprobar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se puede encontrar un conjunto E_n que es unión finita de intervalos tal que $|E_n \Delta E| < 1/n$. Por tanto, χ_{E_n} es una función escalonada tal que

$$\int_{\mathbb{R}} |\chi_E(t) - \chi_{E_n}(t)| dt = |E_n \Delta E| < 1/n.$$

De esta manera, podemos aproximar las funciones características de conjuntos medibles acotados mediante funciones escalonadas. Aplicando el argumento estándar en estas situaciones, deducimos que las funciones características de conjuntos medibles arbitrarios también se pueden aproximar por funciones escalonadas, y por linealidad, también es posible aproximar las funciones simples. Por tanto, la densidad de las funciones simples en $L^1(\mathbb{R})$ implica la densidad de las funciones escalonadas.

A partir del resultado anterior, podemos dar un criterio muy útil para la existencia de la transformada de Hilbert.

Teorema 5.12. *Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ tal que $Sf^*(t_0) < \infty$ para algún $t_0 > 0$. Entonces Hf existe a.e. y se cumple que*

$$(Hf)^*(t) \leq cSf^*(t), \quad t > 0. \quad (88)$$

Demostración. Dado $N \in \mathbb{N}$, sea $g = f\chi_{(-2N, 2N)}$ y $h = f - g$. Por la Observación 5.9, sabemos que $Sf^*(t) < \infty$ para todo $t > 0$. Además, para cada $0 < \epsilon < N$ y $x \in (-N, N)$, se tiene que $H_\epsilon h(x) = H_N h(x)$, y por (5.1),

$$|H_N h(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{|x-t| \geq N} \left| \frac{f(t)}{x-t} \right| dt \leq \frac{2}{\pi} Sf^*(N) < \infty.$$

Por tanto, $(Hf)(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon h(x)$ existe para cada $x \in (-N, N)$. Por otro lado, notemos que $g \in L^1$, ya que por la desigualdad de Hardy-Littlewood (Teorema 2.33),

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx = \int_{-2N}^{2N} |f(t)| dt \leq \int_0^{4N} f^*(t) dt \leq 4NSf^*(4N) < \infty.$$

Definamos ahora, para cada función k integrable,

$$\Omega k(x) = \left| \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon k(x) - \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon k(x) \right|.$$

Entonces, $\Omega k \leq 2\mathcal{H}k$ y $\Omega(g - \phi) = \Omega g$ para cualquier función escalonada ϕ , dado que por (5.1) la transformada de Hilbert existe a.e. para funciones escalonadas. Por tanto, por el Teorema 5.10, la Proposición 2.30 y la Observación 5.9,

$$(\Omega g)^*(t) \leq 2(\mathcal{H}(g - \phi))^*(t) \leq 2cS(g - \phi)^*(t) \leq \frac{2c}{t} \int_0^\infty (g - \phi)^*(s) ds = \frac{2c}{t} \|g - \phi\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Por la Observación 5.11 sabemos que las funciones escalonadas son densas en $L^1(\mathbb{R})$, por lo que el lado derecho puede hacerse tan pequeño como se quiera, luego $\Omega g(x) = 0$ a.e. y existe el límite $(Hg)(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon g(x)$ a.e. De esta manera, $Hf(x) = Hg(x) + Hh(x)$ existirá a.e. $x \in (-N, N)$, y como $N \in \mathbb{N}$ es arbitrario, existirá a.e. $x \in \mathbb{R}$. Por último, como $|Hf| \leq \mathcal{H}f$, (5.12) se sigue de (5.10). \square

En cierto modo, el hecho de que el operador de Calderón S domine a la transformada de Hilbert H es algo realmente natural. Sabiendo que S es la suma de Hardy y su conjugado, la

aparición del operador de Hardy provoca que la transformada de Hilbert no esté acotada en $L^1(\mathbb{R})$, mientras que su adjunto impide la acotación en $L^\infty(\mathbb{R})$. El siguiente resultado, obra conjunta de A. N. Kolmogorov en 1925 y M. Riesz en 1928, exhibe la acotación débil $(1, 1)$ de la transformada de Hilbert, y su acotación fuerte en $L^p(\mathbb{R})$ para $1 < p < \infty$ respectivamente.

Teorema 5.13. (i) (M. Riesz [31]) Si $1 < p < \infty$, entonces $H : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$.

(ii) (A. N. Kolmogorov [18]) $H : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^{1,\infty}(\mathbb{R})$.

Demostración. Observemos en primer lugar que, si $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{R})$, entonces por la desigualdad de Hölder y la Proposición 2.30,

$$Sf^*(1) = \int_0^\infty f^*(s) \min\left\{1, \frac{1}{s}\right\} ds \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \left\| \min\left\{1, \frac{1}{s}\right\} \right\|_{L^{p'}(0,\infty)} < \infty.$$

Por tanto, por el Teorema 5.12, la transformada de Hilbert está bien definida para $f \in L^p$, con $1 \leq p < \infty$.

(i) Supongamos que $1 < p < \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{R})$. Entonces, por la Proposición 2.30, el Teorema 5.12 y las desigualdades de Hardy (Lema 3.18),

$$\begin{aligned} \|Hf\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \|(Hf)^*\|_{L^p(0,\infty)} \leq c \|Sf^*\|_{L^p(0,\infty)} \leq c \left(\|Af^*\|_{L^p(0,\infty)} + \|A^*f^*\|_{L^p(0,\infty)} \right) \\ &= c \left[\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \right)^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty \frac{f^*(s)}{s} ds \right)^p dt \right)^{1/p} \right] \\ &\leq c(p' + p) \left(\int_0^\infty f^*(s)^p ds \right)^{1/p} = c(p' + p) \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

(ii) En el caso $p = 1$, si $f \in L^1(\mathbb{R})$ se tiene por la Proposición 2.30, el Teorema 5.12 y la Observación 5.9 que

$$\begin{aligned} \|Hf\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R})} &= \sup_{t>0} t(Hf)^*(t) \leq c \sup_{t>0} tSf^*(t) \\ &= c \sup_{t>0} \int_0^\infty f^*(s) \min\left\{1, \frac{t}{s}\right\} ds \\ &\leq c \int_0^\infty f^*(s) ds = c \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

□

Observación 5.14. (i) Obviamente, las estimaciones del Teorema 5.13 se mantienen si trabajamos con el operador maximal de Hilbert \mathcal{H} .

(ii) La transformada de Hilbert, aparte de no estar acotada en L^∞ , no está ni siquiera bien definida. Sin embargo, es posible regularizarla para que coincida con (5.3) sobre la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (densa en L^p para $1 \leq p < \infty$), y esté bien definida sobre L^∞ . Además, en tal caso se puede probar [13, Theorem 1] que $H : L^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \text{BMO}$, donde BMO es la clase de funciones con integral oscilatoria acotada en \mathbb{R} . Históricamente, esto junto al hecho de que $H : H^1 \rightarrow L^1(\mathbb{R})$, invitaba a pensar que el dual de H^1 era BMO, lo cual fue probado finalmente en [13, Theorem 2].

El Teorema 5.10 establece la dominación de la reordenada de la transformada de Hilbert por el operador de Calderón, pero no menciona ninguna relación en el otro sentido. Aunque la reordenada del operador maximal de Hardy-Littlewood también domina al operador de Hardy, la transformada de Hilbert necesita ser evaluada en una cierta función equimedible con f para cumplir la desigualdad análoga. Tal y como veremos en las siguientes secciones, esto no supondrá mayor problema, dado que los espacios de Lorentz $\Lambda^p(w)$ son invariantes por reordenamientos.

Proposición 5.15. *Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ tal que $Sf^*(t_0) < \infty$ para algún $t_0 > 0$. Entonces existe una función g equimedible con f verificando que*

$$Sf^*(t) \leq 2\pi(Hg)^*(t), \quad t > 0. \quad (89)$$

Demostración. Como por la Proposición 2.28 sabemos que f y f^* son equimedibles, está claro que la función

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ f^*(-x), & x < 0, \end{cases}$$

también será equimedible con f . En particular, $Sg^*(t_0) = Sf^*(t_0) < \infty$, por lo que por el Teorema 5.12 sabemos que Hg existe a.e. Además, si $x > 0$, se sigue de la Observación 5.9 que

$$Hg(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{f^*(t)}{x+t} dt \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f^*(t) \min\left\{\frac{1}{x}, \frac{1}{t}\right\} dt = \frac{1}{2\pi} Sf^*(t),$$

Por tanto,

$$|Hg(x)| \geq \begin{cases} \frac{1}{2\pi} Sf^*(t), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}$$

de donde se deduce (5.15) tomando reordenadas decrecientes.

Observación 5.16. En algunos lugares (véase [29], [32] entre otros), el Teorema 5.12 y la Proposición 5.15, pueden encontrarse bajo la afirmación de que

$$c(Hf)^*(t) \leq Sf(t) \leq C(Hf^*)^*(t), \quad t > 0, \quad (90)$$

donde se sobreentiende que Hf^* es la transformada de Hilbert de g (que viene a ser extender f^* por 0 a \mathbb{R}^- y realizar una reflexión).

□

5.2. El operador adjunto de Hardy y la clase B_∞^*

Desde que, en 1991, M. A. Ariño y B. Muckenhoupt [2] caracterizaron la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood,

$$M : \Lambda^p(w) \longrightarrow \Lambda^p(w),$$

5.2. EL OPERADOR ADJUNTO DE HARDY Y LA CLASE B_∞^*

se buscó reutilizar las técnicas empleadas en dicho resultado para caracterizar la acotación de otros operadores clásicos sobre los espacios de Lorentz $\Lambda^p(w)$. En 1992, C. J. Neugebauer y K. F. Andersen [29, 1] caracterizaron de forma independiente la acotación de la transformada de Hilbert sobre $\Lambda^p(w)$ partiendo de la desigualdad (5.16), que establece la equivalencia

$$H : \Lambda^p(w) \longrightarrow \Lambda^p(w) \iff S : L_{\text{dec}}^p(w) \longrightarrow L^p(w). \quad (91)$$

Sabiendo que $S = A + A^*$, y que la acotación del operador de Hardy A sobre el cono de funciones positivas y decrecientes de $L^p(w)$ está ya caracterizada por el Teorema 4.23, el problema (5.2) se reduce a estudiar la acotación del adjunto del operador de Hardy A^* sobre ese mismo cono.

Definición 5.17. Sea w un peso. Decimos que $w \in B_\infty^*$ si

$$\int_0^r \frac{W(t)}{t} dt \leq CW(r), \quad r > 0.$$

En el Capítulo 4 vimos que la acotación del operador de Hardy A sobre $L_{\text{dec}}^p(w)$ quedaba caracterizada por la clase de pesos B_p , y por la Observación 4.26 que $B_p \neq B_q$ para cada $p \neq q$. Sin embargo, en ese sentido la acotación del adjunto del operador de Hardy A^* sobre $L_{\text{dec}}^p(w)$ resulta ser sorprendente, dado que vendrá caracterizada por la clase de pesos B_∞^* (Teorema 5.20), que no depende de p . Antes de probar este teorema, veamos un lema previo.

Observación 5.18. Recordamos que la *función beta* [36] se define como la integral

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt, \quad \text{Re}(z), \text{Re}(w) > 0.$$

Además, es fácil comprobar que la función beta es simétrica, y se puede expresar en términos de la función gamma como

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad \text{Re}(z), \text{Re}(w) > 0.$$

Lema 5.19. Sea w un peso. Si se cumple que

$$\int_0^r \log^{p_0} \left(\frac{r}{x} \right) w(x) dx \leq CW(r), \quad r > 0, \quad (92)$$

para algún $0 < p_0 < \infty$, entonces se cumple para todo $0 < p < \infty$.

Demostración. En primer lugar observemos que, dados $0 < p < p_1$ arbitrarios, se tiene que $x^p \leq 1 + x^{p_1}$ para cada $x > 0$. De este modo,

$$\int_0^r \log^p \left(\frac{r}{x} \right) w(x) dx \leq \int_0^r \left[1 + \log^{p_1} \left(\frac{r}{x} \right) \right] w(x) dx = W(r) + \int_0^r \log^{p_1} \left(\frac{r}{x} \right) w(x) dx, \quad (93)$$

luego si se cumple (5.19) para $p = p_0$, también lo hará para todo $0 < p < p_0$. Por tanto, para probar (5.19) para todo $0 < p < \infty$, basta encontrar una sucesión $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que

$t_n \rightarrow \infty$ y se verifica (5.19) con $p = t_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que se verifica (5.19) para algún $0 < p_0 < \infty$. Entonces, realizando el cambio de variable $s = \log(r/t)/\log(r/x)$ deducimos que

$$\begin{aligned} \int_x^r \log^{p_0-1}\left(\frac{r}{t}\right) \log^{p_0}\left(\frac{t}{x}\right) \frac{dt}{t} &= \int_x^r \log^{p_0-1}\left(\frac{r}{t}\right) \left[\log\left(\frac{r}{x}\right) - \log\left(\frac{r}{t}\right) \right]^{p_0} \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^1 \log^{p_0-1}\left(\frac{r}{x}\right) s^{p_0-1} \log^{p_0}\left(\frac{r}{x}\right) (1-s)^{p_0} \log\left(\frac{r}{x}\right) ds \\ &= \log^{2p_0}\left(\frac{r}{x}\right) \int_0^1 s^{p_0-1} (1-s)^{p_0} ds \\ &= B(p_0, p_0 + 1) \log^{2p_0}\left(\frac{r}{x}\right), \end{aligned}$$

para cada $0 < x < r$. Por tanto, por (5.2) y el Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_0^r \log^{2p_0}\left(\frac{r}{x}\right) w(x) dx &= \frac{1}{B(p_0, p_0 + 1)} \int_0^r w(x) \int_x^r \log^{p_0-1}\left(\frac{r}{t}\right) \log^{p_0}\left(\frac{t}{x}\right) \frac{dt}{t} dx \\ &= \frac{1}{B(p_0, p_0 + 1)} \int_0^r \log^{p_0-1}\left(\frac{r}{t}\right) \frac{1}{t} \int_0^t \log^{p_0}\left(\frac{t}{x}\right) w(x) dx dt \\ &\leq \frac{C}{B(p_0, p_0 + 1)} \int_0^r \log^{p_0-1}\left(\frac{r}{t}\right) \frac{1}{t} \int_0^t w(x) dx dt \\ &= \frac{C}{B(p_0, p_0 + 1)} \int_0^r w(x) \int_x^r \log^{p_0-1}\left(\frac{r}{t}\right) \frac{1}{t} dt dx \\ &= \frac{C}{B(p_0, p_0 + 1)} \int_0^r w(x) \left[-\frac{1}{p_0} \log^{p_0}\left(\frac{r}{t}\right) \right]_x^r dx \\ &= \frac{C}{p_0 B(p_0, p_0 + 1)} \int_0^r \log^{p_0}\left(\frac{r}{x}\right) w(x) dx \\ &\leq \frac{C^2}{p_0 B(p_0, p_0 + 1)} W(r), \end{aligned}$$

para cada $r > 0$, luego se verifica (5.19) con $p = 2p_0$. Reiterando el argumento, deducimos que se cumple (5.19) con $p = 2^n p_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y como $2^n p_0 \rightarrow \infty$, concluimos que se cumple (5.19) para todo $0 < p < \infty$. \square

El siguiente resultado caracteriza la acotación del adjunto del operador de Hardy A^* sobre $L_{\text{dec}}^p(w)$ a través de la condición B_∞^* . Originalmente, C. J. Neugebauer [29, Theorem 3.3] probó la equivalencia para $p > 1$, mientras que K. F. Andersen [1, Theorem 4] lo hizo para $0 < p < \infty$ a partir del Lema 5.19.

Teorema 5.20 (C. J. Neugebauer [29], K. F. Andersen [1]). *Sea w un peso. Si para algún $0 < p < \infty$, se cumple una de las siguientes condiciones, entonces todas son equivalentes y se verifican para todo $0 < p < \infty$:*

(i) $w \in B_\infty^*$.

(ii) $A^* : L_{\text{dec}}^p(w) \longrightarrow L^p(w)$.

(iii) $\int_0^r \log^p\left(\frac{r}{x}\right)w(x) dx \leq CW(r), \quad r > 0$.

Demostración. (i) \Rightarrow (iii). Observemos que, como $w \in B_\infty^*$, por el Teorema de Fubini sabemos que

$$\begin{aligned} \int_0^r \log\left(\frac{r}{x}\right)w(x) dx &= \int_0^r w(x) \int_x^r \frac{1}{t} dt dx \\ &= \int_0^r \frac{1}{t} \int_0^t w(x) dx dt \\ &= \int_0^r \frac{W(t)}{t} dt \leq CW(r), \end{aligned} \tag{94}$$

para cada $r > 0$, luego se verifica (5.19) para $p = 1$. Por tanto, por el Lema 5.19, concluimos que se verifica (5.19) para todo $0 < p < \infty$.

(iii) \Rightarrow (ii). Supongamos que se verifica (5.19) para algún $0 < p_0 < \infty$. Entonces, por el Lema 5.19 se cumple para todo $0 < p < \infty$. Por otro lado, observemos que para cada $r > 0$,

$$A^*(\chi_{(0,r)})(x) = \int_x^\infty \frac{\chi_{(0,r)}(t)}{t} dt = \chi_{(0,r)}(x) \int_x^r \frac{1}{t} dt = \chi_{(0,r)}(x) \log\left(\frac{r}{x}\right), \quad x > 0. \tag{95}$$

Por tanto, para cada $0 < p < \infty$ y $r > 0$, se tiene que

$$\int_0^\infty A^*(\chi_{(0,r)})(x)^p w(x) dx = \int_0^r \log^p\left(\frac{r}{x}\right)w(x) dx \leq C_p W(r). \tag{96}$$

Sea $0 < p \leq 1$ cualquiera y $f \in L_{\text{dec}}^p(w)$. Como f es decreciente, por el Teorema de Fubini se tiene que

$$\begin{aligned} A^*f(x) &= \int_x^\infty \frac{f(t)}{t} dt = \int_x^\infty \frac{1}{t} \int_0^\infty \chi_{(0,f(t))}(s) ds dt \\ &= \int_0^\infty \int_x^\infty \frac{\chi_{(0,m_f(s))}(t)}{t} dt ds \\ &= \int_0^\infty A^*(\chi_{(0,m_f(s))})(x) ds. \end{aligned}$$

Además, dado $x > 0$ cualquiera, $A^*(\chi_{(0,m_f(s))})(x)$ es decreciente en s , luego por los Lemas 4.7

y 4.21, el Teorema de Fubini y (5.2), obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty A^* f(x)^p w(x) dx &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty A^*(\chi_{(0,m_f(s))})(x) ds \right)^p w(x) dx \\
 &\leq p \int_0^\infty \int_0^\infty A^*(\chi_{(0,m_f(s))})(x)^p s^{p-1} ds w(x) dx \\
 &= \int_0^\infty p s^{p-1} \int_0^\infty A^*(\chi_{(0,m_f(s))})(x)^p w(x) dx \\
 &\leq C_p \int_0^\infty p s^{p-1} W(m_f(s)) ds \\
 &= C_p \int_0^\infty f(x)^p w(x) dx.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, sean $1 < p < \infty$ y $f \in L_{\text{dec}}^p(w)$ cualesquiera. Supongamos en primer lugar que f tiene soporte acotado, de modo que existe $a > 0$ tal que $A^* f(x) = 0$ para cada $x > a$, y por tanto $\|A^* f\|_{L^p(w)} < \infty$. Definamos la función

$$g(x) = p \left(\int_x^\infty \frac{f(t)}{t} dt \right)^{p-1} f(x), \quad x > 0.$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$A^* f(x)^p = \left(\int_x^\infty \frac{f(t)}{t} dt \right)^p = \int_x^\infty p \left(\int_t^\infty \frac{f(s)}{s} ds \right)^{p-1} \frac{f(t)}{t} dt = \int_x^\infty \frac{g(t)}{t} dt,$$

para cada $x > 0$. Además, como hemos probado que $A^* : L_{\text{dec}}^1(w) \rightarrow L^1(w)$ y g es decreciente, por la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty A^* f(x)^p w(x) dx &= \int_0^\infty A^* g(x) w(x) dx \leq C \int_0^\infty g(x) w(x) dx \\
 &= pC \int_0^\infty A^* f(x)^{p-1} f(x) w(x) dx \\
 &\leq pC \left(\int_0^\infty A^* f(x)^{(p-1)p'} w(x) dx \right)^{1/p'} \left(\int_0^\infty f(x)^p w(x) dx \right)^{1/p} \\
 &= pC \left(\int_0^\infty A^* f(x)^p w(x) dx \right)^{1-1/p} \left(\int_0^\infty f(x)^p w(x) dx \right)^{1/p},
 \end{aligned}$$

de donde deducimos, como $\|A^* f\|_{L^p(w)} < \infty$, que $\|A^* f\|_{L^p(w)} \leq pC \|f\|_{L^p(w)}$. En el caso de que f no tenga soporte acotado, basta considerar la sucesión $f_n = f \chi_{(0,n)}$, $n \geq 1$, y aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada.

(ii) \Rightarrow (i). Supongamos que $A^* : L_{\text{dec}}^{p_0}(w) \rightarrow L^{p_0}(w)$ para algún $0 < p_0 < \infty$. En particular, sabemos por (5.2) que

$$\begin{aligned}
 \int_0^r \log^{p_0} \left(\frac{r}{x} \right) w(x) dx &= \int_0^\infty A^*(\chi_{(0,r)})(x)^{p_0} w(x) dx \\
 &\leq C \int_0^\infty \chi_{(0,r)}(x)^{p_0} w(x) dx = CW(r),
 \end{aligned}$$

5.2. EL OPERADOR ADJUNTO DE HARDY Y LA CLASE B_∞^*

para cada $r > 0$. Por tanto, por el Lema 5.19 se cumple (5.19) para cada $0 < p < \infty$, en concreto para $p = 1$. Finalmente, por (5.2) sabemos que $w \in B_\infty^*$ es equivalente a que se cumpla (5.19) para $p = 1$, lo que concluye la demostración. \square

Ejemplo 5.21. En el caso de los pesos potencia $w(t) = t^{\alpha-1}$, $t > 0$, sabemos por la Observación 4.26 que $t^{\alpha-1} \in B_p$ si y solo si $p > \alpha > 0$. Sin embargo,

$$\int_0^r \frac{W(t)}{t} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^r t^{\alpha-1} = \frac{W(r)}{\alpha},$$

para cada $r > 0$, luego $t^{\alpha-1} \in B_\infty^*$ para cada $\alpha > 0$.

En cuanto a la acotación débil $A^* : L_{\text{dec}}^p(w) \rightarrow L^{p,\infty}(w)$, K. F. Andersen [1, Theorem 4] probó que para $0 < p < \infty$ esta también es equivalente a la condición B_∞^* (Teorema 5.23), luego tampoco depende de p . Más aún, esto implica que

$$A^* : L_{\text{dec}}^{p_0}(w) \rightarrow L^{p_0,\infty}(w) \iff A^* : L_{\text{dec}}^{p_1}(w) \rightarrow L^{p_1}(w)$$

para cualesquiera $0 < p_0, p_1 < \infty$. La demostración de este resultado recae en gran parte en el teorema anterior y en el siguiente lema elemental, a partir de los cuales el resultado se sigue de forma inmediata.

Lema 5.22. *Sea w un peso. Si se cumple que*

$$W(s) \log^{p_0} \left(\frac{r}{s} \right) \leq CW(r), \quad 0 < s \leq r < \infty \quad (97)$$

para algún $0 < p_0 < \infty$, entonces se cumple para cada $0 < p < \infty$. Además, en tal caso se cumple (5.19) para cada $0 < p < \infty$.

Demostración. Sea $0 < p < p_0$ cualquiera. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^r \log^p \left(\frac{r}{x} \right) w(x) dx &\leq C^{p/p_0} \int_0^r \left(\frac{W(r)}{W(x)} \right)^{p/p_0} w(x) dx \\ &= C^{p/p_0} W(r)^{p/p_0} \left[\frac{p_0}{p-p_0} W(x)^{1-p/p_0} \right]_0^r \\ &= \frac{p_0 C^{p/p_0}}{p-p_0} W(r), \end{aligned}$$

para cada $r > 0$, luego se cumple (5.19) para cada $0 < p < p_0$. Por tanto, concluimos por el Lema 5.19 que se verifica para todo $0 < p < \infty$. Para finalizar la demostración basta observar que, dado $0 < p < \infty$, la desigualdad (5.19) implica (5.22). En efecto, si se satisface (5.19) para $0 < p < \infty$, entonces

$$W(s) \log^p \left(\frac{r}{s} \right) = \log^p \left(\frac{r}{s} \right) \int_0^s w(x) dx \leq \int_0^s \log^p \left(\frac{r}{x} \right) w(x) dx \leq CW(s) \leq CW(r),$$

para cada $0 < s \leq r < \infty$. \square

Teorema 5.23 (K. F. Andersen [1]). *Sea w un peso. Si para algún $0 < p < \infty$, se cumple una de las siguientes condiciones, entonces todas son equivalentes y se verifican para todo $0 < p < \infty$:*

(i) $w \in B_{\infty}^*$.

(ii) $A^* : L_{\text{dec}}^p(w) \rightarrow L^{p,\infty}(w)$.

(iii) $W(s) \log^p \left(\frac{r}{s} \right) \leq CW(r), \quad 0 < s \leq r < \infty$.

Demostración. (i) \Rightarrow (ii). Si $w \in B_{\infty}^*$, sabemos por el Teorema 5.20 que $A^* : L_{\text{dec}}^p(w) \rightarrow L^p(w)$ para cada $0 < p < \infty$. Por otro lado, por la Proposición 3.22 se cumple que $L^p(w) \hookrightarrow L^{p,\infty}(w)$ para cada $0 < p < \infty$, y por tanto $A^* : L_{\text{dec}}^p(w) \rightarrow L^{p,\infty}(w)$ para cada $0 < p < \infty$

(ii) \Rightarrow (iii). Supongamos que $A^* : L_{\text{dec}}^{p_0}(w) \rightarrow L^{p_0,\infty}(w)$ para algún $0 < p_0 < \infty$. Entonces, para cada $r > 0$ sabemos por (5.2) que

$$\sup_{s>0} \chi_{(0,r)}(s) \log \left(\frac{r}{s} \right) W(s)^{1/p_0} = \sup_{s>0} A^*(\chi_{(0,r)})(s) W(s)^{1/p_0} \leq C \int_0^r w(x) dx = CW(r),$$

o equivalentemente,

$$W(s) \log^{p_0} \left(\frac{r}{s} \right) \leq CW(r),$$

para cada $0 < s \leq r$. Por tanto, por el Lema 5.22 concluimos que se cumple (5.22) para todo $0 < p < \infty$.

(iii) \Rightarrow (i). Si se cumple (5.22) para algún $0 < p_0 < \infty$, sabemos por el Lema 5.22 que se cumple (5.19) para cada $0 < p < \infty$, y por tanto por el Teorema 5.20 concluimos que $w \in B_{\infty}^*$. \square

Una vez hemos caracterizado la acotación del adjunto del operador de Hardy sobre el cono de funciones positivas y decrecientes en $L^p(w)$, sabemos exactamente cuándo el operador de Calderón S está acotado sobre el mismo cono. Sin embargo, antes de hablar de la transformada de Hilbert sobre los espacios de Lorentz $\Lambda^p(w)$, es interesante introducir la siguiente clase de pesos.

Definición 5.24. Sea w un peso y $0 < p < \infty$. Decimos que $w \in C_p$ si

$$\int_0^r \frac{W(t)}{t} dx \leq C \left[W(r) + r^p \int_r^\infty \frac{w(t)}{t^p} dt \right], \quad r > 0.$$

Tal y como veremos en el Teorema 5.26, esta clase surge del estudio de una condición más débil que la acotación de A^* sobre $L_{\text{dec}}^p(w)$. Sin embargo, veamos antes algunas de sus propiedades, y su estrecha relación con la clase B_{∞}^* .

Proposición 5.25. Sean $0 < p \leq q < \infty$.

(i) $C_q \subset C_p$.

(ii) $B_\infty^* \subset C_p$.

(iii) $B_\infty^* \cap B_p = C_p \cap B_p$.

Demostración. (i) Si $w \in C_q$, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{W(t)}{t} dx &\leq C \left[W(r) + r^q \int_r^\infty \frac{w(t)}{t^q} dt \right] \\ &= C \left[W(r) + \int_r^\infty \frac{w(t)}{(t/r)^q} dt \right] \\ &\leq C \left[W(r) + \int_r^\infty \frac{w(t)}{(t/r)^p} dt \right] \\ &= C \left[W(r) + r^p \int_r^\infty \frac{w(t)}{t^p} dt \right], \end{aligned}$$

para cada $r > 0$, luego $w \in C_p$.

(ii) Si $w \in B_\infty^*$,

$$\int_0^r \frac{W(t)}{t} dx \leq CW(r) \leq C \left[W(r) + r^p \int_r^\infty \frac{w(t)}{t^p} dt \right],$$

para cada $r > 0$, luego $w \in C_p$.

(iii) Sabemos por (ii) que $B_\infty^* \cap B_p \subset C_p \cap B_p$. Por otro lado, si $w \in C_p \cap B_p$, entonces

$$\int_0^r \frac{W(t)}{t} dx \leq C \left[W(r) + r^p \int_r^\infty \frac{w(t)}{t^p} dt \right] \leq C \left[W(r) + W(r) \right] = 2CW(r),$$

para cada $r > 0$, luego $w \in B_\infty^*$. □

Veamos ahora sí la estimación que caracteriza a la clase C_p .

Teorema 5.26. Sean w un peso y $1 \leq p < \infty$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) $\int_0^\infty Sf(x)^p w(x) dx \leq C \int_0^\infty Af(x)^p w(x) dx, \quad 0 \leq f \downarrow.$

(ii) $\int_0^r \log^p \left(\frac{r}{x} \right) w(x) dx \leq C \left[W(r) + r^p \int_r^\infty \frac{w(t)}{t^p} dt \right], \quad r > 0.$

(iii) $\int_0^r \frac{W(t)}{t} dx \leq C \left[W(r) + r^p \int_r^\infty \frac{w(t)}{t^p} dt \right], \quad r > 0.$

Demostración. (i) \Rightarrow (ii). Supongamos que se cumple (i). En particular, dado $r > 0$, sabemos que

$$A(\chi_{(0,r)})(x) = \min \left\{ 1, \frac{r}{x} \right\}, \quad \text{y} \quad A^*(\chi_{(0,r)})(x) = \chi_{(0,r)}(x) \log \left(\frac{r}{x} \right) \quad (98)$$

para cada $x > 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_0^r \log^p \left(\frac{r}{x} \right) w(x) dx &= \int_0^\infty A^*(\chi_{(0,r)})(x)^p w(x) dx \\ &\leq \int_0^\infty S(\chi_{(0,r)})(x)^p w(x) dx \\ &\leq C \int_0^\infty A(\chi_{(0,r)})(x)^p w(x) dx \\ &= C \left[W(r) + r^p \int_r^\infty \frac{w(t)}{t^p} dt \right], \end{aligned}$$

para cada $r > 0$.

(ii) \Rightarrow (iii). Dado $r > 0$, por (5.2) y (5.2) concluimos que

$$\begin{aligned} \int_0^r \log \left(\frac{r}{x} \right) w(x) dx &\leq \int_0^r \left[1 + \log^p \left(\frac{r}{x} \right) \right] w(x) dx \\ &= W(r) + \int_0^r \log^p \left(\frac{r}{x} \right) w(x) dx \\ &\leq W(r) + C \left[W(r) + r^p \int_r^\infty \frac{w(t)}{t^p} dt \right] \\ &\leq (C+1) \left[W(r) + r^p \int_r^\infty \frac{w(t)}{t^p} dt \right]. \end{aligned}$$

(iii) \Rightarrow (i). Supongamos en primer lugar que $p = 1$. Como S es autoadjunto,

$$\int_0^\infty S f(x) w(x) dx = \int_0^\infty f(x) S w(x) dx,$$

luego (i) es equivalente a $\Gamma^1(w) \leftrightarrow \Lambda^1(Sw)$. Además, sabemos por el Teorema 4.42 que esto es equivalente a

$$\int_0^r S w(t) dt \leq C \left[W(r) + r \int_r^\infty \frac{w(t)}{t} dt \right], \quad r > 0,$$

que podemos reescribir como

$$ASw(r) \leq CSw(r), \quad r > 0$$

De esta manera, si se cumple (iii), entonces

$$ASw(r) = A^2w(r) + AA^*w(r) = A^2w(r) + Sw(r) \leq (C+1)Sw(r),$$

para cada $r > 0$, lo que concluye el resultado.

5.2. EL OPERADOR ADJUNTO DE HARDY Y LA CLASE B_∞^*

Supongamos ahora que $p > 1$. En primer lugar, está claro a partir de (5.2) que (iii) es equivalente a

$$\int_0^\infty A^*(\chi_{(0,r)})(x)w(x) dx \leq C \int_0^\infty A(\chi_{(0,r)})(x)^p w(x) dx, \quad r > 0. \quad (99)$$

Por otro lado, dada una función h positiva y decreciente,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty A^*(\chi_{(0,m_h(s))})(x) ds &= \int_0^\infty \int_x^\infty \frac{\chi_{(0,m_h(s))}(t)}{t} dt ds \\ &= \int_x^\infty \frac{1}{t} \int_0^\infty \chi_{(0,h(t))}(s) ds dt \\ &= \int_x^\infty \frac{h(t)}{t} dt = A^*h(x), \end{aligned} \quad (100)$$

y además,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty A(\chi_{(0,m_h(s))})(x)^p ds &= \int_0^\infty \min\left\{1, \frac{m_h(s)}{x}\right\}^p ds \\ &= \frac{1}{x^p} \int_0^\infty \int_0^{\min\{x, m_h(s)\}} pt^{p-1} dt ds \\ &= \frac{p}{x^p} \int_0^\infty \int_0^\infty \chi_{(0,x)}(t)t^{p-1} \chi_{(0,m_h(s))}(t) dt ds \\ &= \frac{p}{x^p} \int_0^\infty \chi_{(0,x)}(t)t^{p-1} \int_0^\infty \chi_{(0,h(t))}(s) ds dt \\ &= \frac{p}{x^p} \int_0^\infty \chi_{(0,x)}(t)t^{p-1} h(t) dt \\ &= \frac{p}{x^p} \int_0^x h(t)t^{p-1} dt. \end{aligned} \quad (101)$$

Consideremos una función positiva y decreciente f cualquiera, y asumamos en principio que tiene soporte acotado, de modo que $\|Sf\|_{L_{\text{dec}}^p(w)} < \infty$. Definamos las funciones

$$g(x) = Af(x)^{p-1}f(x), \quad \tilde{g}(x) = pA^*f(x)^{p-1}f(x), \quad x > 0.$$

Claramente g y g^* son positivas y decrecientes, y por el teorema fundamental del cálculo se tiene que

$$Af(x)^p = \frac{1}{x^p} \left(\int_0^x f(t) dt \right)^p = \frac{p}{x^p} \int_0^x \left(\int_0^t f(s) ds \right)^{p-1} f(t) dt = \frac{p}{x^p} \int_0^x g(t)t^{p-1} dt,$$

y

$$A^*f(x)^p = \left(\int_x^\infty \frac{f(t)}{t} dt \right)^p = \int_x^\infty p \left(\int_t^\infty \frac{f(s)}{s} ds \right)^{p-1} \frac{f(t)}{t} dt = \int_x^\infty \frac{\tilde{g}(t)}{t} dt = A^*\tilde{g}(x),$$

para cada $x > 0$. Por tanto, por (5.2), (5.2) y (5.2) sabemos que

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty A^* f(x)^p w(x) dx &= \int_0^\infty A^* \tilde{g}(x) w(x) dx \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty A^*(\chi_{(0, m_{\tilde{g}}(s))})(x) ds w(x) dx \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty A^*(\chi_{(0, m_{\tilde{g}}(s))})(x) w(x) dx ds \\
 &\leq C \int_0^\infty \int_0^\infty A(\chi_{(0, m_{\tilde{g}}(s))})(x)^p w(x) dx ds \\
 &= C \int_0^\infty \int_0^\infty A(\chi_{(0, m_{\tilde{g}}(s))})(x)^p ds w(x) dx \\
 &= pC \int_0^\infty \frac{w(x)}{x^p} \int_0^x \tilde{g}(t) t^{p-1} dt dx
 \end{aligned}$$

Finalmente, como $tSf(t)$ es creciente y $x^q + y^q \leq (x+y)^q \leq 2^{q-1}(x^q + y^q)$ para cada $x, y, q > 0$, concluimos por (5.2) y la desigualdad de Hölder que

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty Sf(x)^p w(x) dx &\leq 2^{p-1} \left[\int_0^\infty Af(x)^p w(x) dx + \int_0^\infty A^* f(x)^p w(x) dx \right] \\
 &\leq p2^{p-1}C \left[\int_0^\infty \frac{w(x)}{x^p} \int_0^x g(t) t^{p-1} dt dx + \int_0^\infty \frac{w(x)}{x^p} \int_0^x \tilde{g}(t) t^{p-1} dt dx \right] \\
 &= p2^{p-1}C \int_0^\infty \frac{w(x)}{x^p} \int_0^x [g(t) + \tilde{g}(t)] t^{p-1} dt dx \\
 &= p2^{p-1}C \int_0^\infty \frac{w(x)}{x^p} \int_0^x [Af(t)^{p-1} + pA^* f(t)^{p-1}] f(t) t^{p-1} dt dx \\
 &\leq p^2 2^{p-1}C \int_0^\infty \frac{w(x)}{x^p} \int_0^x Sf(t)^{p-1} t^{p-1} f(t) dt dx \\
 &= p^2 2^{p-1}C \int_0^\infty \frac{w(x)}{x^p} \int_0^x [tSf(t)]^{p-1} f(t) dt dx \\
 &\leq p^2 2^{p-1}C \int_0^\infty \frac{w(x)}{x^p} [xSf(x)]^{p-1} \int_0^x f(t) dt dx \\
 &= p^2 2^{p-1}C \int_0^\infty Sf(x)^{p-1} Af(x) w(x) dx \\
 &\leq p^2 2^{p-1}C \left(\int_0^\infty Sf(x)^{p'(p-1)} w(x) dx \right)^{1/p'} \left(\int_0^\infty Af(x)^p w(x) dx \right)^{1/p} \\
 &= p^2 2^{p-1}C \left(\int_0^\infty Sf(x)^p w(x) dx \right)^{(p-1)/p} \left(\int_0^\infty Af(x)^p w(x) dx \right)^{1/p},
 \end{aligned}$$

de donde deducimos, como $\|Sf\|_{L_{\text{dec}}^p(w)} < \infty$, la desigualdad (i). En el caso de que f no tenga soporte acotado, basta considerar la sucesión $f_n = f\chi_{(0,n)}$, $n \geq 1$, y aplicar el Teorema de la Convergencia Monótona. \square

5.3. La transformada de Hilbert en los espacios de Lorentz $\Lambda^p(w)$

Tras haber caracterizado la acotación del operador de Calderón, la existencia y acotación de la transformada de Hilbert sobre los espacios de Lorentz $\Lambda^p(w)$ se deduce fácilmente, tal y como se prueba en el siguiente resultado.

Observación 5.27. Es importante destacar que en este capítulo estamos considerando los espacios de Lorentz sobre \mathbb{R} en lugar de \mathbb{R}^n , esto es, $\Lambda^p(w) = \Lambda_{\mathbb{R}}^p(w)$.

Teorema 5.28. *Sea w un peso y $0 < p < \infty$.*

(i) $H : \Lambda^p(w) \rightarrow \Lambda^p(w)$ si y solo si $w \in B_p \cap B_{\infty}^*$.

(ii) $H : \Lambda^p(w) \rightarrow \Lambda^{p,\infty}(w)$ si y solo si $w \in B_{p,\infty} \cap B_{\infty}^*$.

Demostración. (i) Supongamos en primer lugar que $H : \Lambda^p(w) \rightarrow \Lambda^p(w)$. Dado $f \in L_{\text{dec}}^p(w)$ cualquiera, está claro que la función g definida como

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ f^*(-x), & x < 0, \end{cases} \quad (102)$$

es equimedible con f , y por tanto $g^* = f$ a.e. De este modo, se tiene que $g \in \Lambda^p(w)$, luego por hipótesis Hg existe a.e. y argumentando como en la Proposición 5.15 concluimos que

$$Sf(t) \leq 2\pi(Hg)^*(t), \quad t > 0. \quad (103)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \|Sf\|_{L^p(w)} &= \left(\int_0^{\infty} Sf(x)^p w(x) dx \right)^{1/p} \\ &\leq 2\pi \left(\int_0^{\infty} (Hg)^*(x)^p w(x) dx \right)^{1/p} \\ &\leq 2\pi C \left(\int_0^{\infty} g^*(x)^p w(x) dx \right)^{1/p} \\ &= 2\pi C \|f\|_{L^p(w)}, \end{aligned}$$

luego $S : L_{\text{dec}}^p(w) \rightarrow L^p(w)$. Además, observemos que como $S = A + A^*$, se cumple que $Af, A^*f \leq Sf$ para cada $f \in L_{\text{dec}}^p(w)$, y por tanto $A, A^* : L_{\text{dec}}^p(w) \rightarrow L^p(w)$. El resultado se sigue del Teorema 5.20.

Recíprocamente, supongamos que $w \in B_p \cap B_{\infty}^*$. Entonces, por el Teorema 5.20 sabemos que $A, A^* : L_{\text{dec}}^p(w) \rightarrow L^p(w)$ y por tanto,

$$S = A + A^* : L_{\text{dec}}^p(w) \rightarrow L^p(w). \quad (104)$$

Por otro lado, dada $f \in \Lambda^p(w)$, está claro que debe existir $t_0 > 0$ tal que $Sf^*(t) < \infty$, ya que en caso contrario entraríamos en contradicción con (5.3). De este modo, por el Teorema 5.12 sabemos que Hf existe a.e. y se cumple que

$$(Hf)^*(t) \leq cSf^*(t), \quad t > 0, \quad (105)$$

para cierta constante $c > 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \|Hf\|_{\Lambda^p(w)} &= \left(\int_0^\infty (Hf)^*(x)^p w(x) dx \right)^{1/p} \\ &\leq c \left(\int_0^\infty Sf^*(x)^p w(x) dx \right)^{1/p} \\ &\leq cC \left(\int_0^\infty f^*(x)^p w(x) dx \right)^{1/p} \\ &= cC \|f\|_{\Lambda^p(w)}. \end{aligned}$$

(ii) Supongamos que $H : \Lambda^p(w) \rightarrow \Lambda^{p,\infty}(w)$. Dado $f \in L^p_{\text{dec}}(w)$ cualquiera y definiendo g como en (5.3), se tiene análogamente que Hg existe a.e. y se cumple (5.3). Por tanto,

$$\begin{aligned} \|Sf\|_{L^{p,\infty}(w)} &= \sup_{t>0} Sf(t)W(t)^{1/p} \\ &\leq 2\pi \sup_{t>0} (Hf)^*(t)W(t)^{1/p} \\ &\leq 2\pi C \left(\int_0^\infty g^*(x)^p w(x) dx \right)^{1/p} \\ &= 2\pi C \|f\|_{L^p(w)}, \end{aligned}$$

luego $S : L^p_{\text{dec}}(w) \rightarrow L^{p,\infty}(w)$. Esto implica que $A, A^* : L^p_{\text{dec}}(w) \rightarrow L^{p,\infty}(w)$, de modo que $w \in B_{p,\infty} \cap B_\infty^*$ por el Teorema 5.23.

Recíprocamente, supongamos que $w \in B_{p,\infty} \cap B_\infty^*$. Al igual que antes, por el Teorema 5.20 sabemos que

$$A : L^p_{\text{dec}}(w) \rightarrow L^{p,\infty}(w), \quad \text{y} \quad A^* : L^p_{\text{dec}}(w) \rightarrow L^{p,\infty}(w),$$

y por tanto,

$$S = A + A^* : L^p_{\text{dec}}(w) \rightarrow L^{p,\infty}(w).$$

Además, al igual que se argumentó en (i), sabemos que para cada $f \in \Lambda^p(w)$ existe Hf a.e. y se cumple (5.3), por lo que

$$\begin{aligned} \|Hf\|_{\Lambda^{p,\infty}(w)} &= \sup_{t>0} (Hf)^*(t)W(t)^{1/p} \\ &\leq c \sup_{t>0} Sf^*(t)W(t)^{1/p} \\ &\leq cC \left(\int_0^\infty f^*(x)^p w(x) dx \right)^{1/p} \\ &= cC \|f\|_{\Lambda^p(w)}. \end{aligned}$$

□

5.3. LA TRANSFORMADA DE HILBERT EN LOS ESPACIOS DE LORENTZ $\Lambda^p(w)$

Observación 5.29. (i) En virtud del resultado anterior, la acotación de la transformada de Hilbert en los espacios de Lorentz $\Lambda^p(w)$ queda totalmente caracterizada. En particular, si $1 < p < \infty$, entonces $H : \Lambda^p(w) \rightarrow \Lambda^p(w)$ si y solo si $H : \Lambda^p(w) \rightarrow \Lambda^{p,\infty}(w)$, mientras que $H : \Lambda^1(w) \rightarrow \Lambda^{1,\infty}(w)$ no implica en general que $H : \Lambda^1(w) \rightarrow \Lambda^1(w)$ (basta tomar $w(t) = 1$).

(ii) En el caso de los pesos potencias $w(t) = t^{\alpha-1}$, $\alpha > 0$, sabemos por el Ejemplo 5.21 que $w \in B_p \cap B_\infty^*$ si y solo si $p > \alpha$. Por tanto, por el resultado anterior,

$$H : \Lambda^p(t^{\alpha-1}) \rightarrow \Lambda^p(t^{\alpha-1}) \iff p > \alpha.$$

De este modo, como $\Lambda^p(1) = L^p$, en el caso $\alpha = 1$ recuperamos el resultado clásico de M. Riesz (Teorema 5.13).

Observación 5.30. Las condiciones B_p y B_∞^* son independientes entre sí, en el sentido de que ninguna de las dos implica la otra.

(i) La condición B_p no implica B_∞^* . Si $w = \chi_{(0,1)}$, entonces $W(t) = \min\{1, t\}$ para cada $t > 0$, luego

$$\int_0^r \frac{W(t)}{t} dt = \int_0^r \frac{\max\{1, t\}}{t} dt = 1 + \log r,$$

para cada $r > 1$. Por tanto, $w \notin B_\infty^*$. Sin embargo, $w \in B_p$ para cada $p > 1$, i.e.

$$\int_r^\infty \frac{w(x)}{x^p} dx \leq C_p \frac{W(r)}{r}, \quad r > 0.$$

En efecto, si $r > 1$ la desigualdad es trivial, mientras que si $r < 1$,

$$\int_r^\infty \frac{w(x)}{x^p} dx = \int_r^1 \frac{1}{x^p} dx = \frac{r^{-p+1} - 1}{p-1} \leq \frac{1}{p-1} \frac{r}{r^p} = \frac{1}{p-1} \frac{W(r)}{r^p}.$$

(ii) La condición B_∞^* no implica B_p . Si $w(t) = e^t$, entonces $W(t) = e^t - 1$. Además, dado $t > 0$, por el teorema del valor medio existe $\xi \in (0, t)$ tal que

$$\frac{e^t - 1}{t} = e^\xi \leq e^t,$$

luego

$$\int_0^r \frac{W(t)}{t} dt = \int_0^r \frac{e^t - 1}{t} dt \leq \int_0^r e^t dt = W(r),$$

para cada $r > 0$. Por tanto $w \in B_\infty^*$. Sin embargo,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{W(2r)}{W(r)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{e^{2r} - 1}{e^r - 1} = \infty,$$

por lo que $W \notin \Delta_2$. Entonces, por la Proposición 4.25 concluimos que $w \notin \cup_{0 < p < \infty} B_p$.

Si bien vimos en el Capítulo 4 que la acotación del operador maximal M sobre los espacios de Lorentz $\Lambda^p(w)$ y $\Lambda^{p,\infty}(w)$ se puede caracterizar en términos de su normabilidad (Teoremas 3.23 y 4.52), no se conoce una caracterización de la transformada de Hilbert H en términos de una propiedad puramente funcional de estos espacios. Sin embargo, algunas de las ideas utilizadas para el operador maximal M , como los espacios Gamma de Lorentz $\Gamma^p(w)$ y $\Gamma^{p,\infty}(w)$, sí que se pueden trasladar de forma similar a la transformada de Hilbert H .

Definición 5.31. Sea w un peso y $0 < p < \infty$. El espacio de Calderón $C^p(w)$ está formado por aquellas funciones $f \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}, m)$ verificando que

$$\|f\|_{C^p(w)} = \left(\int_0^\infty Sf^*(x)^p w(x) dx \right)^{1/p} < \infty.$$

De forma similar, el espacio de Calderón débil $C^{p,\infty}(w)$ está formado por aquellas funciones $f \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}, m)$ verificando que

$$\|f\|_{C^{p,\infty}(w)} = \sup_{x>0} Sf^*(x)W(x)^{1/p} < \infty.$$

Observación 5.32. Sea $0 < p < \infty$ y w un peso.

(i) Como $f^* \leq Af^* \leq Sf^*$ para cada $f \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n, m_n)$, se cumple que

$$\|f\|_{\Lambda^p(w)} \leq \|f\|_{\Gamma^p(w)} \leq \|f\|_{C^p(w)},$$

y en consecuencia,

$$C^p(w) \hookrightarrow \Gamma^p(w) \hookrightarrow \Lambda^p(w).$$

(ii) Por otro lado, por los Teoremas 4.23 y 5.20, sabemos que

$$\Lambda^p(w) \hookrightarrow \Gamma^p(w) \iff A : L^p_{\text{dec}}(w) \longrightarrow L^p(w) \iff w \in B_p,$$

y

$$\Lambda^p(w) \hookrightarrow C^p(w) \iff S : L^p_{\text{dec}}(w) \longrightarrow L^p(w) \iff w \in B_p \cap B_\infty^*.$$

Además, si $p \geq 1$, el Teorema 5.26 afirma que

$$\Gamma^p(w) \hookrightarrow C^p(w) \iff S : L^p_{\text{dec}}(w) \longrightarrow L^p(w) \iff w \in C_p.$$

Al igual que sucede con los espacios Gamma de Lorentz, los espacios de Calderón también tienen buenas propiedades funcionales.

Proposición 5.33. Sea w un peso y $p \geq 1$. Entonces $\|\cdot\|_{C^p(w)}$ es una norma.

Demostración. Observemos que $\|f\|_{C^p(w)} = \|Sf^*\|_{L^p(w)}$ para cada $f \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}, m)$. Además, $L^p(w)$ es un espacio normado si $p \geq 1$, de modo que basta comprobar la desigualdad triangular (dado que el resto de propiedades son triviales a partir de la linealidad de S y la Proposición 2.28). Veamos primero que la aplicación $f \mapsto Sf^*$ es subaditiva. Sean $f, g \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n, m_n)$ y $t > 0$ cualesquiera. Entonces, como el peso $w_t(s) = \min\{1/t, 1/s\}$ es decreciente, sabemos por el Teorema 4.35 que

$$\begin{aligned} S(f+g)^*(t) &= \int_0^\infty (f+g)^*(s) \min\left\{\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right\} ds = \int_0^\infty (f+g)^*(s) w_t(s) ds \\ &= \|f+g\|_{\Lambda^1(w_t)} \leq \|f\|_{\Lambda^1(w_t)} + \|g\|_{\Lambda^1(w_t)} \\ &= \int_0^\infty f^*(s) \min\left\{\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right\} ds + \int_0^\infty g^*(s) \min\left\{\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right\} ds \\ &= Sf^*(t) + Sg^*(t), \end{aligned}$$

5.3. LA TRANSFORMADA DE HILBERT EN LOS ESPACIOS DE LORENTZ $\Lambda^p(w)$

luego la aplicación $f \mapsto Sf^*$ es subaditiva. En consecuencia, si $p \geq 1$,

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{C^p(w)} &= \|S(f + g)^*\|_{L^p(w)} \leq \|Sf^* + Sg^*\|_{L^p(w)} \\ &\leq \|Sf^*\|_{L^p(w)} + \|Sg^*\|_{L^p(w)} = \|f\|_{C^p(w)} + \|g\|_{C^p(w)}, \end{aligned}$$

lo que concluye el resultado. □

Finalmente, como corolario del Teorema 5.28, obtenemos trivialmente el análogo del Teorema 3.23 para la transformada de Hilbert H .

Corolario 5.34. *Sea w un peso y $0 < p < \infty$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) $H : \Lambda^p(w) \longrightarrow \Lambda^p(w)$.
- (ii) $\Lambda^p(w) = C^p(w)$ y se cumple (4.3) con $\|\cdot\|_{C^p(w)}$.
- (iii) $w \in B_p \cap B_\infty^*$.

Bibliografía

- [1] K. F. Andersen, *Weighted generalized hardy inequalities for nonincreasing functions*, Can. J. Math. **43** (1991), 1121–1135.
- [2] M. A. Ariño y B. Muckenhoupt, *Maximal functions on classical Lorentz spaces and Hardy's inequality with weights for nonincreasing functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **320** (1990), 727–735.
- [3] C. Bennett y R. C. Sharpley, *Interpolation of operators*, Pure and Applied Mathematics, **129**, Academic press, New York, 1988.
- [4] W. D. Boyd, *The Hilbert transform on rearrangement-invariant spaces*, Can. J. Math. **19** (1967), 599–616.
- [5] W. D. Boyd, *Indices of function spaces and their relationship to interpolation*, Can. J. Math. **21** (1969), 1245–1254.
- [6] M. J. Carro, A. García del Amo y J. Soria, *Weak-type weights and normable Lorentz spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 849–857.
- [7] M. J. Carro, L. Pick, J. Soria y V. D. Stepanov, *On embeddings between classical Lorentz spaces*, Math. Inequal. Appl. **4** (2001), 397–428.
- [8] M. J. Carro, J. A. Raposo y J. Soria, *Recent developments in the theory of Lorentz spaces and weighted inequalities*, Mem. Amer. Math. Soc. **187** (2007), no. 877.
- [9] M. J. Carro y J. Soria, *Weighted Lorentz spaces and the Hardy operator*, J. Funct. Anal. **112** (1993), 480–494.
- [10] M. J. Carro y J. Soria, *Boundedness of some integral operators*, Can. J. Math. **45** (1993), 1155–1166.
- [11] M. Cwikel, A. Kaminska, L. Maligranda y L. Pick, *Are generalized Lorentz “spaces” really spaces?*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 3615–3625.
- [12] J. Diestel y J. J. Uhl, *Vector measures*, Math. Surv. **15**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1977.
- [13] C. Fefferman y E. M. Stein, *H^p spaces of several variables*, Acta Math. **129** (1972), 137–193

- [14] M. de Guzmán, *Differentiation of Integrals in \mathbb{R}^n* , Lecture notes in Mathematics, **481**, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [15] G. H. Hardy y J. E. Littlewood, *A maximal theorem with function-theoretic applications*, Acta Math. **54** (1930), 81–116
- [16] H. Heinig y L. Maligranda, *Weighted inequalities for monotone and concave functions*, Studia Math. **116** (1995), 133–165
- [17] L. Hörmander, *Estimates for translation invariant operators in L^p spaces*, Acta Math. **104** (1960), 93–140
- [18] A. N. Kolmogorov, *Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier*, Fundamenta Math. **7** (1925), 23–28
- [19] M. A. Krasnosel'skiĭ y Ya. B. Rutickiĭ, *Convex functions and Orlicz spaces*, Pure and Applied Mathematics, **4311**, US Atomic Energy Commission, 1960.
- [20] S. G. Kreĭn, Ju. I. Petunin y E. Semenov, *Interpolation of Linear Operators*, Transl. Math. Monographs, **54**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1982.
- [21] A. Kufner, L. Maligranda y L. Persson, *The Hardy inequality: About its history and some related results*, Vydavatelský Servis, Pilsen, 2007.
- [22] G. G. Lorentz, *Some new functional spaces*, Ann. of Math. **51** (1950), 37–55.
- [23] G. G. Lorentz, *On the theory of spaces Λ* , Pacific J. Math. **1** (1951), 411–429.
- [24] G. G. Lorentz, *Majorants in spaces of integrable functions*, Amer J. Math. **77** (1955), 484–492.
- [25] W. A. J. Luxemburg, *Rearrangement-invariant Banach function spaces*, Proc. Sympos. in Analysis, Queen's Papers in Pure and Appl. Math. **10** (1967), 83–144.
- [26] J. Martín y J. Soria, *New Lorentz spaces for the restricted weak-type Hardy's inequalities*, J. Math. Anal. Appl. **281** (2003), 138–152.
- [27] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207–227.
- [28] C. J. Neugebauer, *Weighted norm inequalities for averaging operators of monotone functions*, Publ. Mat. **35** (1991), 429–447.
- [29] C. J. Neugebauer, *Some classical operators on Lorentz space*, Forum. Math **4** (1992), 135–146.
- [30] L. Pick, A. Kufner, O. John y S. Fucík, *Function spaces*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, **14**, De Gruyter, Berlin, 2013.

BIBLIOGRAFÍA

- [31] M. Riesz, *Sur les fonctions conjuguées*, Math. Z. **27** (1928), 218–244.
- [32] E. Sawyer, *Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces*, Studia Math. **96** (1990), 145–158.
- [33] T. Shimogaki, *Hardy-Littlewood majorants in function spaces*, J. Math. Soc. Japan **17** (1965), 365–373.
- [34] J. Soria, *Lorentz spaces of weak-type*, Quart. J. Math. **49** (1998), 93–103.
- [35] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton mathematical series, Princeton University Press, Princeton, 1970.
- [36] E. M. Stein y R. Shakarchi, *Complex analysis*, Princeton Lectures in Analysis, Princeton University Press, Princeton, 1970.
- [37] E. M. Stein y G. Weiss, *An extension of a theorem of Marcinkiewicz and some of its applications*, J. Math. Mech. **8** (1959), 263–284.