UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER DE MATEMÁTICAS AVANZADAS

Espacios Invariantes por Reordenamientos

Achraf Ben Said

Trabajo dirigido por
el Profesor F. Javier Soria de Diego

Julio, 2021

Por tu amor infinito, por tu corazón noble, por tu sonrisa bella, por la vida que me diste, gracias padre.

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD DEL TFM

D. *Achraf Ben Said*, con NIE *X-9889311-R*, estudiante del Máster en *Matemáticas Avanzadas* de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid,

DECLARO:

Que he realizado el Trabajo Fin de Máster titulado "*Espacios Invariantes por Reordenamientos*" y que lo presento para su evaluación. Dicho trabajo es original y todas las fuentes bibliográficas utilizadas para su realización han sido debidamente citadas en el mismo.

Para que así conste, firmo la presente en Madrid, el *28 de junio de 2021*.

Achraf
Said Ben

Índice general

Resumen

En base de las similitudes existentes entre los espacios de Lebesgue, de Lorentz o de Orlicz se desarrolla una teoría general de espacios de Banach de funciones medibles definidas sobre un espacio de medida. El objetivo de este trabajo es introducir dicha teoría y estudiar esos espacios con todo lujo de detalle para después centrarse en una subfamilia llamada espacios de Banach de funciones invariantes por reordenamientos, que son, esencialmente, espacios funcionales donde la norma de una función depende únicamente de sus conjuntos de nivel. Luego se analiza la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood sobre los espacios de Lebesgue, y en general, sobre los espacios invariantes por reordenamientos. El trabajo finaliza con una aplicación en el estudio del dominio óptimo del operador integral de Hardy, que es un operador de gran relevancia y interés en el desarrollo de estos espacios.

Palabras clave:

Espacios de Banach de funciones, Espacios invariantes por reordenamientos, reordenada decreciente, Operador maximal de Hardy-Littlewood, operador de Hardy.

Abstract

On the basis of the similarities between Lebesgue, Lorentz or Orlicz spaces, a general theory of Banach spaces of measurable functions defined on a measure space is developed. The aim of this work is to introduce this theory and to study these spaces in detail and then to focus on a subfamily called rearrangement invariant spaces, which are, essentially, function spaces where the norm of a function depends only on its level sets. Then the Hardy-Littlewood maximal operator boundedness on Lebesgue spaces, and in general, on rearrangement invariant spaces, is analyzed. The work ends with an application to the study of the optimal domain for the Hardy integral operator, which is of great relevance and interest in the development of these spaces.

Key words:

Banach function spaces, rearrangement invariant spaces, decreasing rearrangement function, Hardy-Littlewood Maximal Operator, Hardy operator.

Capítulo 1

Introducción

El objetivo principal de este trabajo, como su título indica, es dar una introducción básica y de la forma más autocontenida posible, de los espacios de Banach de funciones invariantes por reordenamientos. Dichos espacios tienen la propiedad de que la norma de una función, que puede ser de expresión compleja y estar definida en un espacio de medida de difícil manejo, depende únicamente de su función de distribución, que es una función real de variable real, a priori más sencilla de estudiar. Esta propiedad les dota de una riqueza que los hace muy especiales frente a otros a espacios funcionales.

El trabajo consiste principalmente en cinco capítulos que resumimos a continuación:

En el primer capítulo se recogen algunos teoremas que nos serán útiles para demostrar resultados propios de la teoría de espacios invariantes por reordenamientos. Los resultados que se enunciarán en este capítulo son, en su mayoría, de Análisis Funcional, mientras que otros son Análisis Real y de la teoría de la medida en general.

En el segundo capítulo se definen los espacios de Banach de funciones (Definición 3.7), así como el espacio asociado a un espacio de Banach de funciones (Definición 3.16) y se estudian sus principales propiedades (Teorema 3.20). En lo que resta de este capítulo se analiza la dualidad y reflexividad de estos espacios, como por ejemplo el espacio dual y su relación con el espacio asociado (Corolario 3.41), y también se ve la separabilidad, que se caracteriza en el Corolario 3.48.

En el tercer capítulo se introducen los espacios invariantes por reordenamientos. Antes de definirlos, se presentan las herramientas principales necesarias para el desarrollo de nuestro trabajo como la función de distribución, la reordenada decreciente y una función maximal elemental. Durante el desarrollo de este capítulo se enuncia el Teorema de representación de Luxemburg (Teorema 4.34) que nos dice que dado un espacio invariante por reordenamiento existe un único espacio que corresponde al espacio inicial, también invariante por reordenamiento, definido sobre $(\mathbb{R}^+, \mathrm{m})$, lo que nos permite trabajar siempre en éste último que es más cómodo, sea cual sea el espacio invariante por reordenamiento con el que estamos trabajando. Luego se introduce la función fundamental de un espacio invariante por reordenamiento que es otra herramienta útil que nos da pie para definir los espacios de Lorentz. Finalmente, se estudian los espacios $L^1 \cap L^\infty$ y $L^1 + L^\infty$, ambos de gran importancia en teoría de interpolación pero también dentro de la teoría de este trabajo, pues el Teorema 4.54 nos dice que cualquier espacio invariante por reordenamiento es un espacio intermedio entre $L^1 \cap L^\infty$ y $L^1 + L^\infty$.

El cuarto capítulo es dedica exclusivamente al estudio del operador maximal de Hardy-Littlewood, una herramienta de gran importancia dentro del Análisis Matemático (por ejemplo, en el estudio de las integrales singulares). Se estudian las desigualdades (p, p)-fuerte de dicho operador (Teorema 5.20) y la $(1, 1)$-débil (desigualdad (5.33)). El capítulo finaliza con un resultado elegante (Teorema 5.31) que se debe a G. G. Lorentz y T. Shimogaki sobre la acotación de ese operador sobre espacios invariantes por reordenamientos en general.

En el quinto capítulo, como aplicación de lo visto anteriormente, se estudia el dominio óptimo del operador integral de Hardy. Es decir, se busca el espacio de Banach de funciones con propiedad de retículo más grande posible de manera que dicho operador, con rango un espacio funcional fijado, sea continuo. Durante la exposición del capítulo se ven algunos ejemplos de dominios óptimos (véase la Proposición 6.1), y se concluye con un resultado interesante donde se afirma que si el rango de dicho operador es un espacio invariante por reordenamiento, entonces el dominio óptimo nunca puede ser un espacio invariante por reordenamiento (Teorema 6.5).

Capítulo 2

Preliminares

Durante este capítulo se anuncian resultados fundamentales que son útiles para el desarrollo de la teoría de espacios invariantes por reordenamientos pero que en sí, son ajenos a la teoría.

Empezamos viendo una clásica caracterización de los espacios de Banach.

Teorema 2.1. *(Propiedad de Riesz-Fischer)*
Sea $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado. Entonces* $(X, \|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach si y solo si para cualquier sucesión* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de elementos de* X *con*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| < \infty,$$

se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge en* X.

Demostración. Referencia [6]. □

El siguiente teorema es una de las versiones geométricas del teorema clásico de extensión de funcionales de Hahn y Banach.

Teorema 2.2. *(Hahn-Banach)*
Sean $x_0 \in X$ *y* C *un conjunto cerrado y convexo de un espacio normado* X. *Si* $x_0 \notin C$ *entonces existe* $f \in X^*$ *tal que*

$$\Re(f(x_0)) > \sup\{\Re(f(x)) : x \in C\}.$$

Demostración. Referencia [6]. □

Los siguientes resultados son clásicos dentro de la Teoría de la Medida.

Teorema 2.3. *Sea $f : R \to [0, \infty]$ una función medible. Entonces existe una sucesión creciente de funciones simples medibles $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ verificando que $s_n(x) \to f(x)$ para cada $x \in R$.*

Demostración. Referencia [7]. □

Teorema 2.4. *(Lebesgue-Radon-Nikodym)*

Sean $(R, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito con μ una medida positiva y λ una medida compleja definida sobre $\mathcal{A}$.

(a) Existe un único par de medidas complejas λ_a y λ_s definidas sobre $\mathcal{A}$ tal que

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \lambda_a << \mu, \quad \lambda_s \perp \mu.$$

Si λ es positiva y finita, entonces lo son también λ_a y λ_s.

(b) Existe una única $h \in L^1(\mu)$ tal que

$$\lambda_a(E) = \int_E h d\mu,$$

para cada conjunto $E \in \mathcal{A}$.

Demostración. Referencia [7]. □

Al par (λ_a, λ_s) se conoce como la descomposición de Lebesgue de λ respecto de μ. La afirmación (b) se conoce como el Teorema de Radon-Nikodym.

Otro resultado a tener en cuenta, es el Teorema de Alaoglu, resultado de gran importancia en el Análisis Funcional.

Teorema 2.5. *(Alaoglu)*

Sea X un espacio normado. Entonces La bola unidad cerrada de X^* es compacta con respecto a la topología débil *.

Demostración. Referencia [6]. □

Otro resultado que debemos mencionar es el conocido principio de acotación uniforme.

Teorema 2.6. *(Principio de acotación uniforme de Banach-Steinhauss)*

Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\mathcal{A} \subset B(X, Y)$ una familia de aplicaciones lineales y continuas. Si que para cada $x \in X$ se tiene que

$$\sup\{\|T(x)\|_Y : T \in A\} < \infty,$$

entonces

$$\sup\{\|T\| : T \in A\} < \infty.$$

Demostración. Referencia [6]. □

Procedemos ahora a definir que una sucesión de medidas uniformemente absolutamente continuas y enunciaremos un resultado que posteriormente nos hará falta.

Vamos a centrarnos en sucesión de medidas $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ finitas definidas en un espacio de medida finita $(R, \mathcal{A}, \nu)$.

Definición 2.7. Sea $(R, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita. Una sucesión $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de medidas finitas definidas en $\mathcal{A}$, siendo cada ν_n absolutamente continua con respecto μ, se dice que es uniformemente absolutamente continua o (equi-absolutamente continua) con respecto de μ si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $E \in \mathcal{A}$ con $\mu(E) < \delta$ se tiene que,

$$\nu_n(E) < \epsilon,$$

para cada cada $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.8. *(Vitali-Hahn-Saks)*
Sean $(R, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita y $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas finitas definidas en $\mathcal{A}$, siendo cada ν_n absolutamente continua respecto de μ. Si $\{\nu_n(R)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado y

$$\nu(E) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(E)$$

existe y es finito para cada $E \in \mathcal{A}$, entonces la sucesión $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente absolutamente continua respecto de μ. Además, ν es una medida finita sobre $\mathcal{A}$ que es absolutamente continua respecto de μ.

Demostración. Referencia [4]. □

Recordemos que sobre un espacio de medida (R, μ), una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones μ-medibles, es convergente respecto de la convergencia en μ-medida si existe f función μ-medible tal que para cada $\epsilon > 0$ existe $N \geq 1$ tal que si $n \geq N$, se tiene que

$$\mu(\{x \in R : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\} < \epsilon.$$

y una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones μ-medibles se dice que es de Cauchy con respecto a la convergencia en μ-medida si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geq N$ se tiene que

$$\mu(\{x \in R : |f_n(x) - f_m(x)| > \epsilon\} < \epsilon.$$

Proposición 2.9. *Sea* (R, μ) *un espacio de medida y sea* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones* μ*-medibles que es de Cauchy con respecto a la convergencia en* μ*-medida. Entonces existe una subsucesión de* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *que converge en* μ*-casi todo punto hacia una función medible que notaremos por* f.

Demostración. Referencia [3]. □

Capítulo 3

Espacios de Banach de funciones

Aunque los espacios de Lebesgue L^p con $0 \leq p \leq \infty$ juegan un papel primordial en varias áreas de análisis matemático, existen otros espacios de Banach de funciones medibles que también son interesantes, como son por ejemplo los espacios de Lorentz o las clases de Orlicz. En este capítulo nos centraremos en las similitudes entre este tipo de espacios, y ese punto común nos permite fundar la teoría abstracta de los *espacios de Banach de funciones.*

Los espacios de Banach de funciones son espacios de Banach de funciones medibles en que su norma esta relacionada de una manera apropiada con el espacio de medida subyacente, con lo que surge una interacción entre el análisis funcional y teoría de la medida. La teoría es además enriquecida con la presencia de una estructura de orden natural entre las funciones.

En la sección 1 presentamos los axiomas de los espacios de Banach de funciones, de los cuales obtenemos algunas propiedades elementales. En la sección 2 definimos el *espacio asociado*, el cual nos permite hablar sobre la dualidad, reflexividad y separabilidad, en las secciones 3, 4 y 5, respectivamente.

El libro de referencia para este capítulo ha sido, "Interpolation of Operators" de C. Bennett y R. Sharpley [1].

3.1. El concepto de espacio de Banach de funciones

Empezamos viendo algunas definiciones que nos suenan de la teoría de los espacios de Lebesgue L^p, y es que vamos a tener como modelo estándar a estos espacios para el desarrollo de la teoría de espacios de Banach de funciones.

La siguiente definición es importante pues va a ser el contexto en que se va a desarrollar toda la teoría de espacios de Banach de funciones.

Definición 3.1. Decimos que un espacio de medida (R, Σ, μ) es σ-finito si existe una sucesión de conjuntos medibles $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de modo que $\mu(R_n) < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\cup_{n=1}^{\infty} R_n = R$.

Definición 3.2. Sea (R, Σ, μ) un espacio de medida. Decimos que una función $f : R \to \overline{\mathbb{R}}$ (o $\mathbb{C}$) es una función simple si es medible, toma un número finito de valores y $\mu(\mathrm{sop}(f)) < \infty$.

Al conjunto de funciones simples definidas en R lo denotamos por S.

Notación 3.3. Si (R, Σ, μ) un espacio de medida, denotemos por $\mathcal{M}$ al conjunto de funciones μ-medibles definidas en R y que toman valores en $\overline{\mathbb{R}}$ o en $\mathbb{C}$. El conjunto de las funciones contenidas en $\mathcal{M}$ cuya imagen está contenida en $[0, \infty]$ las denotamos por $\mathcal{M}^+$. Escribimos $\mathcal{M}_0$ cuando queremos referirnos al subconjunto de funciones de $\mathcal{M}$ que son finitas en casi todo punto. Como siempre, dos funciones que coinciden en casi todo punto, las identificamos. La función característica de un conjunto medible E se denotará por χ_E.

Observación 3.4. Las operaciones naturales de espacio vectorial están bien definidas en $\mathcal{M}_0$ (y no lo están en todo $\mathcal{M}$).

Cuando se dota a $\mathcal{M}_0$ con la topología de la convergencia en medida en conjuntos de medida finita, $\mathcal{M}_0$ se convierte en un espacio vectorial topológico metrizable.

Definición 3.5. Una aplicación $\rho : \mathcal{M}^+ \to [0, \infty]$ se dice que es una *función norma* si se verifican las siguientes propiedades

(P1) $\rho(f) = 0 \iff f = 0$ en c.t.p.
$\rho(af) = a\rho(f)$ para cada $a \geq 0$ y para cada $f \in \mathcal{M}^+$.
$\rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g)$ para cada $f, g \in \mathcal{M}^+$.

(P2) $\rho(g) \leq \rho(f)$ para cada $f, g \in \mathcal{M}^+$ con $0 \leq g \leq f$ c.t.p.

(P3) $\rho(f_n) \uparrow \rho(f)$ para cada $f, f_n \in \mathcal{M}^+$ con $f_n \uparrow f$ en c.t.p.

(P4) $\rho(\chi_E) < \infty$ para cada $E \in \Sigma$ con $\mu(E) < \infty$.

(P5) $\int_E f d\mu \leq C_E \rho(f)$ para cada $E \in \Sigma$ con $\mu(E) < \infty$ y $f \in \mathcal{M}^+$,

para alguna constante C_E, con $0 < C_E < \infty$, dependiendo de E y de ρ pero independiente de f.

Como ejemplo de funciones norma tenemos las conocidas normas de los espacios de Lebesgue L^p, con $1 \leq p \leq \infty$,

$$\rho_p(f) = \left(\int_R f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad si \quad 1 \leq p < \infty. \tag{3.1}$$
$$\rho_\infty(f) = \sup_{x \in R} \operatorname{ess} |f(x)|$$

Teorema 3.6. *Las normas de L^p, con $1 \leq p \leq \infty$, son funciones norma.*

Demostración. La desigualdad triangular para ρ_p es la conocida desigualdad de Minkowski. El resto de propiedades de (P1) es obvio, como sucede con (P2) y (P4). La propiedad (P3) se sigue del Teorema de Convergencia Monótona, y (P5) se sigue de la desigualdad de Hölder, pues si $1 < p < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces

$$\int_E f d\mu = \int_R f \chi_E d\mu \leq \left(\int_R f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_R \chi_E^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = C_E \rho(f)$$

con $C_E = \mu(E)^{\frac{1}{q}}$. Los casos $p = 1$ y $p = \infty$ son más fáciles todavía por lo que se omite sus pruebas. $\square$

Definición 3.7. Sea ρ una función norma. El conjunto $X = X(\rho)$ de todas las funciones f en $\mathcal{M}$ con $\rho(|f|) < \infty$ se denomina *espacio de Banach de funciones*. Para cada $f \in X$, se define

$$\|f\|_X = \rho(|f|) \tag{3.2}$$

Teorema 3.8. *Sea ρ una función norma, $X = X(\rho)$ y $\| \cdot \|_X$ como en la Definición 3.7. Entonces bajo las operaciones naturales, $(X, \| \cdot \|_X)$ es un espacio vectorial para el cual se cumplen las siguientes inclusiones*

$$S \subset X \hookrightarrow \mathcal{M}_0. \tag{3.3}$$

En particular si $f_n \to f$ en X, entonces $f_n \to f$ en medida en conjuntos de medida finita, y por tanto existe una subsucesión de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge en casi todo punto a f.

Demostración. Se sigue de la Definición 3.7 y la propiedad (P5) de la Definición 3.5 que cualquier función en X es localmente integrable y por tanto es finita en casi todo punto, pues X es σ-finito. El conjunto X hereda las operaciones de espacio vectorial de $\mathcal{M}_0$ y por tanto no supone ninguna dificultad usar (P1) y (3.2) para verificar que $(X, \| \cdot \|_X)$ es un espacio vectorial normado. La propiedad (P4) muestra que X contiene a las funciones características de cualquier conjunto medible de medida finita, y por linealidad, X contiene cualquier función simple. Esto establece las inclusiones (como conjuntos) de (3.3).

Nos queda probar que la aplicación inclusión de X en $\mathcal{M}_0$ es continua. Dado que ambos espacios son metrizables, será suficiente mostrar que cualquier sucesión convergente en X es también converge en $\mathcal{M}_0$ (evidentemente al mismo límite). Pero si $f_n \to f$ en X, entonces (3.2) nos dice que $\rho(|f - f_n|) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Sea $\epsilon > 0$ e E un subconjunto medible de X de medida finita. Por la propiedad (P5) tenemos que,

$$\mu(\{x \in E : \ |f(x) - f_n(x)| > \epsilon\}) \leq \int_E \frac{1}{\epsilon}|f - f_n| d\mu \leq \frac{1}{\epsilon} C_E \rho(|f - f_n|)$$

que converge a 0 cuando $n \to \infty$ dado que C_E es independiente de n. Esto muestra que $f_n \to f$ en medida en cualquier conjunto de medida finita, o lo que es lo mismo, $f_n \to f$ en $\mathcal{M}_0$. Un resultado conocido de la teoría de la medida nos asegura la existencia de una subsucesión que converge en casi todo punto a f. $\square$

Los espacios de Banach de funciones que se obtienen de las funciones normas ρ_p en (3.1) son efectivamente la familia de espacios de Lebesgue $L^p = L^p(X, \Sigma, \mu)$:

(1) $\|f\|_{L^p} = (\int_X f^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$ si $1 \leq p < \infty$.

(2) $\|f\|_{L^\infty} = \operatorname{sup\,ess}_{x \in X} |f(x)|$.

El siguiente resultado muestra que una de las piedras angulares de la teoría de los espacios de Lebesgue L^p, conocido como *lema de Fatou*, tiene su analogía natural en cualquier espacio de Banach de funciones.

Lema 3.9. *Sea $X = X(\rho)$ un espacio de Banach de funciones y sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X.*

(i) Si $0 \leq f_n \uparrow f$ en c.t.p. Entonces o $f \notin X$ y $\|f_n\|_X \uparrow \infty$ o $f \in X$ y $\|f_n\|_X \uparrow \|f\|_X$.

(ii) Lema de Fatou
Si $f_n \to f$ en c.t.p. y $\liminf_{n \to \infty} \|f_n\|_X < \infty$, entonces $f \in X$ y

$$\|f\|_X \leq \liminf_{n \to \infty} \|f_n\|_X.$$

Demostración. La primera afirmación es una consecuencia inmediata de la Definición (3.2) y de la propiedad (P3) de la Definición 3.5. Para la parte (ii), sea $h_n(x) = \text{ínf}_{m\geq n} |f_m(x)|$ entonces $0 \leq h \uparrow |f|$ en c.t.p. Por la propiedad de monotonía (P2) y la propiedad (P4) de la Definición 3.5, tenemos que

$$\rho(|f|) = \lim_{n\to\infty} \rho(h_n) \leq \lim_{n\to\infty} \left(inf_{m\geq n} \rho(|f_m|) \right) = \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X < \infty.$$

Dado que f es medible por ser límite de funciones medibles, lo anterior nos muestra que $f \in X$ y $\|f\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X$. $\square$

El *lema de Fatou* es la clave de la completitud de los espacios de Banach de funciones, que es lo que se establece en el siguiente resultado.

Teorema 3.10. *Sea X un espacio de Banach de funciones. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{B}}$ una sucesión en X con*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X < \infty.$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge en X a una función f de X y

$$\|f\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X.$$

En particular, X es completo.

Demostración. Sea $g = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ y $g_N = \sum_{n=1}^{N} |f_n|$ con $N = 1, 2, \cdots$. Entonces $0 \leq g_N \uparrow g$. Dado que

$$\|g_N\|_X \leq \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X < \infty \quad \forall N = 1, 2, \cdots$$

Por el Lema 3.9 tenemos que que $g \in X$. Por (3.3) tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ converge puntualmente en c.t.p. y por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ también lo hace. Esto es, si

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n, \quad s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n, \quad N = 1, 2, \cdots$$

Entonces $s_N \to f$ en c.t.p. Por tanto, para cada M, tenemos que $s_N - s_M \to f - s_M$ en c.t.p. cuando $n \to \infty$. Además,

$$\liminf_{N\to\infty} \|s_N - s_M\|_X \leq \lim_{N\to\infty} \text{ínf} \sum_{n=M+1}^{N} \|f_n\|_X = \sum_{n=M+1}^{\infty} \|f_n\|_X,$$

lo cual tiende a 0 cuando $M \to \infty$ teniendo en cuenta las hipótesis. Del punto (ii) del Lema de Fatou (3.9) se sigue que $f - s_M \in X$ dado que $f \in X$ y $\|f - s_M\|_X \to 0$ cuando $n \to \infty$. Pero entonces, para cada $M = 1, 2, \cdots$

$$\|f\|_X \leq \|f - s_M\|_X + \|s_M\|_X \leq \|f - s_M\|_X + \sum_{n=1}^{M} \|f_n\|_X.$$

Tomando límite cuando $M \to \infty$, obtenemos la desigualdad del enunciado. □

El siguiente teorema resume para futuras referencias las propiedades básicas de los espacios de Banach de funciones que hemos establecido hasta ahora.

Teorema 3.11. *Sea ρ una función norma y sea*

$$X = \{f \in \mathcal{M} : \rho(|f|) < \infty\}.$$

Para cada $f \in X$, sea $\|f\|_X = \rho(|f|)$. Entonces $(X, \|\cdot\|_X)$ es un espacio de Banach, y para cada $f, g \in \mathcal{M}$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ y cualquier E subconjunto medible de X se cumplen las siguientes propiedades:

(i) Propiedad de monotonía
Si $|g| \leq |f|$ en c.t.p. y $f \in X$, entonces $g \in X$ y $\|g\|_X \leq \|f\|_X$. En particular, una función medible f pertenece a X si y solo si $|f|$ pertenece a X, y en ese caso f y $|f|$ tienen la misma norma en X.

(ii) La propiedad de Fatou
Supongamos que $f_n \in X$ con $f_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y $f_n \uparrow f$ en c.t.p. Si $f \in X$, entonces $\|f_n\|_X \uparrow \|f\|_X$ y si $f \notin X$, entonces $\|f_n\|_X \uparrow \infty$.

(iii) Lema de Fatou
Si $f_n \in X$, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n \to f$ en c.t.p. y $\lim_{n\to\infty} \inf \|f_n\|_X < \infty$, entonces $f \in X$ y

$$\|f\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X.$$

(iv) Cualquier función simple pertenece a X.

(v) Para cada conjunto medible E con medida finita existe una constante C_E con $0 < C_E < \infty$ satisfaciendo

$$\int_E |f| d\mu \leq C_E \|f\|_X,$$

para cada $f \in X$.

(vi) Si $f_n \to f$ en X, entonces $f_n \to f$ en medida en cualquier conjunto de medida finita. En particular $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión que converge a f en c.t.p.

Concluimos esta sección con una simple, pero útil, observación sobre las topologías de los espacios de Banach de funciones.

Teorema 3.12. *Sean X e Y dos espacios de Banach de funciones sobre el mismo espacio de medida. Si $X \subset Y$, entonces $X \hookrightarrow Y$; equivalentemente, existe $C > 0$ tal que*

$$\|f\|_Y \leq C\|f\|_X, \tag{3.4}$$

para cada $f \in X$.

Demostración. Por reducción al absurdo supongamos que $X \subset Y$ pero no se cumple la desigualdad (1.4). Luego para $C_1 = 1$ existe $f_1 \in X$ tal que

$$\|f_1\|_Y > 1\|f_1\|_X.$$

Para $C_2 = 8$ existe existe $f_1 \in X$ tal que

$$\|f_2\|_Y > 8\|f_2\|_X.$$

En general, para $C_n = n^3$ existe $f_n \in X$ tal que

$$\|f_n\|_Y > n^3\|f_n\|_X.$$

Dado que $f_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, si consideramos la sucesión $g_n = \frac{1}{\|f_n\|_X} f_n$, tenemos que esta sucesión verifica que

$$\|g_n\|_Y > n^3\|g_n\|_X = n^3 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cambiando cada g_n por su valor absoluto, podemos suponer que $g_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{1}{n^2} g_n \right\|_X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

y X es un espacio completo, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} g_n$ converge en X a alguna función $g \in X$. Dado que $X \subset Y$, tenemos que $g \in Y$. Dado que $0 \leq \frac{1}{n^2} g_n \leq g$, tenemos que

$$n = \frac{n^3}{n^2} < \frac{1}{n^2} \frac{1}{\|f_n\|_X} \|f_n\|_Y \leq \|g\|_Y < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

lo que supone una contradicción pues $\mathbb{N}$ no es un conjunto acotado. Esto muestra que la inclusión $X \hookrightarrow Y$ es un aplicación continua. $\square$

Corolario 3.13. *Sean $(X, \|\cdot\|_1)$ e $(X, \|\cdot\|_2)$ dos espacios de Banach de funciones. Entonces $(X, \|\cdot\|_1)$ e $(X, \|\cdot\|_2)$ son homeomorfos.*

3.2. El espacio asociado

La clásica desigualdad de Hölder afirma que si $1 \leq p, q \leq \infty$ son dos exponentes conjugados, esto es $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entones se verifica que

$$\int_R |fg| d\mu \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q},$$

para cada $f \in L^p$ y para cada $g \in L^q$.

De la desigualdad anterior se obtiene que

$$\|g\|_{L^q} = \sup \left\{ \int_R |fg| d\mu : \ f \in L^p, \ \|f\|_{L^p} \leq 1 \right\}, \tag{3.5}$$

para cada $g \in L^q$, con p y q exponentes conjugados.

Obsérvese que el espacio L^q asociado a L^p en la desigualdad de Hölder se describe explícitamente en términos de L^p a través de (3.5). Procedemos ahora a definir el espacio asociado X' de un espacio de Banach de funciones usando una adecuada igualdad análoga la que se tiene en (3.5).

Definición 3.14. Norma asociada Si ρ es una función norma, se define la *norma asociada* a ρ, que denotamos por ρ', sobre $\mathcal{M}^+$ como

$$\rho'(g) = \sup \left\{ \int_R fg d\mu : f \in \mathcal{M}^+, \rho(f) \leq 1 \right\}, \tag{3.6}$$

para cada $g \in \mathcal{M}^+$.

Teorema 3.15. *Sea ρ una función norma. Entonces su norma asociada ρ' es también una función norma.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{M}^+$ con $\rho(f) \leq 1$, en particular $\rho(f) < \infty$ por lo que f es finita en c.t.p. Luego si $g = 0$ en c.t.p., tenemos que $fg = 0$ en c.t.p., y por tanto $\int_R fg d\mu = 0$, y por tanto $\rho'(g) = 0$ teniendo en cuenta la definición de ρ'. Recíprocamente, supongamos que $\rho'(g) = 0$, luego $\int_R fg d\mu = 0$ para cada $f \in \mathcal{M}^+$ con $\rho(f) \leq 1$. Sea E un conjunto medible con $0 < \mu(E) < \infty$, entonces por ser ρ una función norma y teniendo en cuenta las propiedades (P1) y (P4) de la Definición 3.5, tenemos que $0 < \rho(\chi_E) < \infty$. Tomando $f = \frac{\chi_E}{\rho(\chi_E)}$, entonces $\rho(f) = 1$, y obtenemos que

$$0 = \int_R fg d\mu = \rho(\chi_E)^{-1} \int_E g d\mu$$

dado que E es arbitrario, tenemos que $g = 0$ en c.t.p. Las propiedades que quedan en (P1) y la propiedad (P2) de la Definición 3.5 son inmediatas.

Para la propiedad de Fatou (P3) de la Definición 3.5, tomamos $g_n, g \in \mathcal{M}^+$, $n \in \mathbb{N}$, con $0 \leq g_n \uparrow g$ en c.t.p. Por la propiedad de monotonía de ρ' que hemos establecido anteriormente, tenemos que $\rho'(g_n) \leq \rho'(g_{n+1})$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\rho'(g_n) \leq \rho'(g)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, si $\rho'(g_n)$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces no hay nada que probar. Supongamos entonces que $\rho'(g_n) < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda < \rho'(g)$. Entonces por definición de ρ' existe $f \in \mathcal{M}^+$ con $\rho(f) \leq 1$ tal que $\lambda < \int_R fg$. Dado que $0 \leq fg_n \uparrow fg$ en c.t.p. el Teorema de Convergencia Monótona nos dice que $\int_R fg_n d\mu \uparrow \int_R fg d\mu$. Luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda < \int_R fg_n d\mu$ para cada $n \geq N$. Teniendo en cuenta la definición de ρ', tenemos que $\rho'(g_n) > \lambda$ para cada $n \geq N$. Esto nos dice que $\rho'(g_n) \uparrow \rho'(g)$ que era lo que queríamos probar.

Sea ahora E un conjunto medible con $\mu(E) < \infty$. La propiedad (P5) de la Definición 3.5 para ρ nos dice que existe $C_E < \infty$ tal que

$$\int_R \chi_E f du \leq C_E \rho(f)$$

para cada $f \in \mathcal{M}^+$. Teniendo en cuenta la definición de ρ', tenemos que $\rho'(\chi_E) \leq C_E < \infty$, verificándose de este modo la propiedad (P4) de la Definición 3.5.

Nos queda probar la propiedad (P5) de la Definición 3.5. Para ello fijamos un conjunto medible E con $\mu(E) < \infty$. Si $\mu(E) = 0$ no hay nada que probar. Por tanto supongamos que $0 < \mu(E) < \infty$. En ese caso, las propiedad (P1) y (P4) de la Definición 3.5 para ρ muestran que la constante $C_E^{'} = \rho(\chi_E)$ satisface $0 < C_E^{'} < \infty$. Entonces la función $f = \frac{1}{\rho(\chi_E})\chi_E$ tiene ρ-norma igual a 1. Por tanto, para cualquier $g \in \mathcal{M}^+$ se tiene que

$$\int_E g d\mu = C_E^{'} \int_R fg d\mu \leq C_E^{'} \rho'(g),$$

cumpliéndose de este modo la propiedad (P5) para la norma ρ'. □

Definición 3.16. Espacio asociado Sea ρ una función norma y sea $X = X(\rho)$ el espacio de Banach de funciones como en la Definición 3.7. Sea ρ' la norma asociada a ρ. El espacio de Banach de funciones $X(\rho')$ determinado por ρ' se denomina espacio asociado de X y se denota por X'.

Se sigue de (3.2) y de (3.6) que la norma de una función g en el espacio asociado X' viene dada por

$$\|g\|_{X'} = \sup\left\{ \int_R |fg| d\mu : f \in X, \|f\|_X \leq 1 \right\}. \tag{3.7}$$

Teorema 3.17. *Desigualdad de Hölder*

Sea X un espacio de Banach de funciones con espacio asociado X'. Si $f \in X$ y $g \in X'$, entonces fg es integrable y

$$\int_R |fg| \leq \|f\|_X \|g\|_{X'}. \tag{3.8}$$

Demostración. En el caso en que $\|f\|_X = 0$, entonces $f = 0$ en c.t.p. por tanto ambos miembros de la desigualdad (1.8) son nulos. Si $\|f\|_X > 0$, entonces la función $f/\|f\|_X$ tiene norma 1, entonces de(3.7) obtenemos que

$$\int_R \frac{f}{\|f\|_X} g d\mu \leq \|g\|_{X'}$$

multiplicando ambos miembros por $\|f\|_X$ obtenemos la desigualdad deseada. □

Teorema 3.18. *Si $1 \leq p, q \leq \infty$ son exponentes conjugados, entonces L^q es el espacio asociado de L^p.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de (3.5) y de la definición de norma asociada (3.14). □

El siguiente Lema es una herramienta útil para ver cuando una función g pertenece al espacio asociado X' de un espacio de Banach de funciones X.

Lema 3.19. *Sean X un espacio de Banach de funciones y g una función medible. Entonces $g \in X'$ si y solo si fg es integrable para cualquier función $f \in X$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $g \in X'$ y sea $f \in X$. Entonces la desigualdad de Hölder nos dice que

$$\int_R |fg| \leq \|f\|_X \|g\|_{X'} < \infty$$

con lo que fg es integrable.

($\Leftarrow$) Por reducción al absurdo, supongamos que $\rho'(|g|) = \infty$ pero que fg es integrable para cualquier función $f \in X$. Dado que

$$\rho'(g) = \sup\left\{ \int_R fg d\mu : f \in \mathcal{M}^+, \rho(f) \leq 1 \right\}$$

tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n \in X$ tal que

$$\|f_n\|_X \leq 1, \qquad \int_R |f_n g| d\mu > n^3$$

como $f_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos consideremos la sucesión de funciones medibles $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $h_n = \frac{1}{n^2} f_n$. Cambiando las funciones h_n por su valor absoluto, podemos suponer que $h_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|_X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \|f_n\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Dado que X es un espacio de Banach, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f_n$ converge en X a una función $f \in X$. Sin embargo, el producto fg no puede ser integrable pues

$$n < n^{-2} \int_R |f_n g| d\mu \leq \int_R |fg| d\mu, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

lo que supone una contradicción pues el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ no esta acotado superiormente. La contradicción viene de suponer que $\rho'(|g|) = \infty$ y fg es integrable para cualquier función $f \in X$

□

Teorema 3.20. *(Lorentz-Luxemburg)*

Cualquier espacio de Banach de funciones X coincide con su segundo espacio asociado X''. En otras palabras, una función f pertenece a X si y solo si f pertenece a X'', y en ese caso

$$\|f\|_X = \|f\|_{X''}. \tag{3.9}$$

Demostración. Si $f \in X$, la desigualdad de Hölder (3.8) muestra que fg es integrable para cualquier $g \in X'$. Luego se sigue del Lema 3.19 aplicado a X'' que $f \in X''$. Por tanto $X \subset X''$. Obtenemos también de (3.7) y de (3.8),

$$\|f\|_{X''} = \sup\left\{ \int_R |fg| d\mu : \|g\|_{X'} \leq 1 \right\} \leq \|f\|_{X'}.$$

Por tanto, para terminar la prueba nos hace falta probar que $X'' \subset X$ y

$$\|f\|_X \leq \|f\|_{X''}, \quad f \in X''. \tag{3.10}$$

En primer lugar, tomamos una sucesión creciente de conjuntos medibles $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de medida finita de modo que su unión sea el conjunto total R (esto es posible porque estamos siempre suponiendo que (R, Σ, μ) es σ-finito). Para cada $N \in \mathbb{N}$ y para cada $f \in X''$, definimos

$$f_N(x) = \text{mín}(|f(x)|, N)\chi_{R_N}(x). \tag{3.11}$$

Dado que $0 \leq f_N \leq N\chi_{R_N}$, tenemos que f_N esta dominada por una función simple, se sigue de los puntos (i) y (iv) del Teorema 3.11 que f_N pertenece a X y a X''. Además, dado que $0 \leq f_N \uparrow |f|$, se sigue de la propiedad de Fatou aplicado a X y a X'' (Teorema 3.11) que para obtener la desigualdad 3.11 es suficiente probar que

$$\|f_N\|_X \leq \|f_N\|_{X''}, \quad (N = 1, 2, \cdots) \tag{3.12}$$

Por tanto supondremos que f y N están fijos en lo que queda de la prueba. Supondremos también que $\|f_N\|_X > 0$ dado que en el caso contrario no habría nada que probar.

Sea L^1_N el espacio de las funciones μ-integrables definidas en R con soporte en R_N. Con la norma $g \mapsto \int_{R_N} |g| d\mu$ es claro que L^1_N es un espacio de Banach. Si S denota la bola unidad cerrada de X, entonces el conjunto $U = S \cap L^1_N$ es evidentemente un conjunto convexo y cerrado de L^1_N. Sea $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ una sucesión de funciones de modo que $h_n \to h$ con $h \in L^1_N$. Luego existe una subsucesión $\{h_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge puntualmente h en c.t.p. en R. Dado que cualquier $h_{n_k} \in S$, el Lema de Fatou (Teorema 3.11) muestra que $h \in S$. Luego $h \in U$, por lo que U es un conjunto convexo y cerrado de L^1.

Sea $\lambda > 1$, entonces la función $g = \lambda \frac{f_N}{\|f_N\|_X}$ pertenece a L^1_N pero no pertenece a U. Por el Teorema de Hahn-Banach 2.2 existe un hiperplano cerrado que separa g de U, esto es, existe una función no nula $\phi \in L^\infty(R, \Sigma, \mu)$, que puede ser elegida con soporte en R_N, tal que

$$\Re\left(\int_{R_N} \phi h d\mu\right) < \gamma < \Re\left(\int_{R_N} \phi g d\mu\right)$$

para algún número real γ y cualquier $h \in U$. De hecho, escribiendo en forma polar $\phi = |\phi|\varphi$ y observando que $\varphi|h|$ pertenece a U si y solo si h pertenece a U, obtenemos

$$\sup_{h\in U} \int_{R_N} |\phi h| d\mu \leq \gamma < \Re\left(\int_{R_N} \phi g d\mu\right) \leq \int_{R_N} |\phi g| d\mu. \tag{3.13}$$

Ahora bien, cualquier función $h \in S$, cuando se restringe a R_N, es el límite puntual de una sucesión creciente $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$h_n(x) = \text{mín}(h(x), n)\chi_{R_N}(x),$$

y cada $h_n \in L^1_N$ y por tanto pertenece a U. Se sigue del teorema de la convergencia dominada que el supremo en U en la desigualdad (3.13) se puede remplazarse por el supremo en S. Luego de (3.7) y de (3.13) se tiene que,

$$\|\phi\|_{X'} = \sup_{h\in S} \int_{R_N} |\phi h| d\mu \leq \gamma < \frac{\lambda}{\|f_N\|_X} \int_{R_N} |\phi f_N| d\mu;$$

equivalentemente,

$$\|f_N\|_X < \lambda \int_R \left| f_N \frac{\phi}{\|\phi\|_{X'}} \right| d\mu \leq \lambda \|f_N\|_{X''},$$

donde la última desigualdad resulta de la desigualdad de Hölder (3.8). Tomando límite cuando $\lambda \to 1$, obtenemos la desigualdad (3.10) que queríamos. □

Con el siguiente resultado empezamos a explorar la relación entre el espacio asociado y el espacio dual.

Lema 3.21. *La norma de una función $g \in X'$ viene dada por*

$$\|g\|_{X'} = \sup \left\{ \left| \int_R fgd\mu \right| : f \in X, \|f\|_X \leq 1 \right\}. \tag{3.14}$$

Demostración. Dado que $|\int fgd\mu| \leq \int |fg|d\mu$, es claro de (3.7) que la cantidad en la derecha de (3.14) no excede $\|g\|'_X$. Por tanto, solo necesitamos establecer la desigualdad opuesta, que con (3.7) podemos escribirla

$$\sup_{f \in S} \int_R |fg|d\mu \leq \sup_{f \in S} \left| \int_R fgd\mu \right|, \tag{3.15}$$

donde ambos supremos se toman sobre la bola unidad S de X.

En el conjunto $E = \{x \in R : g(x) \neq 0\}$ podemos escribir g en forma polar $g(x) = |g(x)|\phi(x)$, con $|\phi(x)| = 1$. Por tanto, $|g(x)| = g(x)\overline{\phi}(x)$ en E. Luego, para cualquier $f \in S$ tenemos que,

$$\int_R |fg|d\mu = \int_E |fg|d\mu = \int_E f\overline{\phi}gd\mu.$$

si $h = |f|\overline{\phi}$ en E, y $h = 0$ en E^c, entonces $|h| \leq |f|$ en R y por tanto $h \in S$. Por tanto de (3.15) tenemos

$$\int |fg|d\mu = \int hgd\mu \leq \left| \int_R hgd\mu \right| \leq \sup_{f \in S} \left| \int_R fgd\mu \right|.$$

Tomando supremo en todo S en el lado izquierdo de esta última desigualdad, obtenemos (3.15). □

Definición 3.22. Un subespacio vectorial cerrado B del espacio dual X^* de un espacio de Banach X se dice que es *norm-fundamental* si

$$\|f\|_X = \sup\{|L(f)| : L \in B, \|L\|_{X^*} \leq 1\},$$

para cada $f \in X$. Esto es, B es *norm-fundamental* si contiene suficientes funcionales para reproducir la norma de cualquier elemento de X.

Teorema 3.23. *El espacio asociado X' de un espacio de Banach de funciones X es isométricamente isomorfo a un subespacio cerrado norm-fundamental del espacio dual X^* de X.*

Demostración. Para cada $g \in X'$, el funcional L_g definido en X por

$$L_g(f) = \int_R fg d\mu, \quad f \in X, \tag{3.16}$$

es acotado en virtud de la desigualdad de Hölder (3.8). Además, si $L_g(f) = 0$ para cada $f \in X$, entonces (3.7) muestra que $g = 0$. luego, $g \mapsto L_g$ es un isomorfismo de X' en un subespacio de X^*. Es isométrico gracias (3.14):

$$\|L_g\|_{X^*} = \sup\{|Lg(f)| : \|f\|_X \leq 1\} = \|g\|_{X'}. \tag{3.17}$$

Dado que X' es completo, esto implica que ese isomorfismo tiene el rango cerrado en X^*. Finalmente, si $f \in X$, entonces (3.9) y (3.14) nos dan que

$$\|f\|_X = \|f\|_{X''} = \sup\left\{\left|\int_R fg d\mu\right| : g \in X', \|g\|_{X'} \leq 1\right\}.$$

Usando (3.16) y (3.17), obtenemos que

$$\|f\|_X = \sup\{|L_g(f)| : g \in X', \|L_g\|_{X^*} \leq 1\},$$

lo que muestra que la imagen de X' es *norm-fundamental* en X^*. □

Recordemos que un espacio normado X esta continuamente inyectado en otro espacio normado Y, y escribimos $X \hookrightarrow Y$, si, además de $X \subset Y$, el operador inclusión es un operador acotado.

Proposición 3.24. *Si X e Y son dos espacios de Banach de funciones y $X \hookrightarrow Y$, entonces $Y' \hookrightarrow X'$. De hecho, si $\|f\|_Y \leq c\|f\|_X$ para cada $f \in X$, entonces $\|g\|_{X'} \leq c\|g\|_{Y'}$ para cada $g \in Y'$.*

Demostración. Se sigue de (3.7) y de las hipótesis sobre X e Y que

$$\begin{aligned}\|g\|_{X'} &\leq \sup\left\{\int_R |fg| d\mu : \|f\|_Y \leq c\right\}\\ &= c\sup\left\{\int_R |fg| d\mu : \|f\|_Y \leq 1\right\}\\ &= c\|g\|_{Y'}\end{aligned}$$

para cualquier $g \in Y'$. □

3.3. Continuidad absoluta de la norma

En vista del Teorema 3.23, es natural intentar caracterizar el espacio de Banach de funciones X cuyo espacio asociado X' coincide con su espacio dual X^*. En esta sección se ven resultados que necesitaremos para responder a dicha cuestión y otras en relación con la dualidad. El análisis depende de una interacción de dos subespacios distinguidos X_a y X_b de X. Estos espacios son el subespacio de las funciones de norma absolutamente continua y el subespacio que consiste en la clausura del conjunto de las funciones simples respectivamente.

Notación 3.25. Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos medibles, escribiremos $E_n \to \emptyset$ en c.t.p. si la sucesión de funciones características $\{\chi_{E_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a la función nula en c.t.p. Si además la sucesión $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, escribiremos $E_n \downarrow \emptyset$ en c.t.p. Observemos que los E_n no es necesario que tengan medida finita.

Definición 3.26. Una función f en un espacio de Banach de funciones X se dice que tiene norma absolutamente continua en X si $\|f\chi_{E_n}\|_X \to 0$ para cualquier sucesión $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaciendo $E_n \to \emptyset$ en c.t.p. El conjunto de todas las funciones en X que tienen norma absolutamente continua lo denotaremos por X_a. Si $X_a = X$ diremos que X tiene norma absolutamente continua.

El siguiente resultado muestra que en la definición anterior podemos restringirnos solo a las sucesiones $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que sean decrecientes.

Proposición 3.27. *Una función f en un espacio de Banach de funciones X tiene norma absolutamente continua si y solo si $\|f\chi_{E_n}\| \downarrow 0$ para cada sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $E_n \downarrow \emptyset$ en c.t.p.*

Demostración. La condición necesaria es inmediato. Veamos ahora la otra implicación, y supongamos que f verifica que $\|f\chi_{E_n}\| \downarrow 0$ para cada sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $E_n \downarrow \emptyset$ en c.t.p. Sea $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos medibles arbitraria y consideremos la sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por $E_n = \cup_{m\geq n} F_m$. Se tiene que $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente y tiene el mismo límite superior que $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, que es un conjunto de medida cero. La hipótesis sobre f implica que $\|f\chi_{E_n}\| \downarrow 0$. Dado que $F_n \subset E_n$ para cada n, y de lo que se sigue $\|f\chi_{F_n}\| \to 0$, y por tanto f tiene norma absolutamente continua. $\square$

Si $1 \leq p < \infty$, el espacio de Lebesgue $L^p(R,\mu)$ tiene norma absolutamente continua. Esto es consecuencia inmediata de la proposición anterior y el Teorema de la Convergencia Dominada. En el caso de $p = \infty$, la situación es diferente ya que la continuidad absoluta de la norma depende del espacio de medida (R,μ) subyacente. Por ejemplo, si (R,μ) no es atómico, entonces la parte de norma absolutamente continua $L^\infty(R,\mu)_a$ contiene únicamente a la función nula.

En efecto, sea $f \in L^\infty(R,\mu)$ una función con norma absolutamente continua, donde (R,μ) es un espacio de medida no atómico. Por reducción al absurdo supongamos que $\|f\|_\infty > 0$, y consideremos la sucesión de conjuntos medibles $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de medida positiva, dada por

$$A_n = \left\{ x \in R : \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|f\|_\infty < |f(x)| \right\}.$$

Observemos que $A_{n+1} \subset A_n$ pues

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\|f\|_\infty < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\|f\|_\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Además se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \chi_{A_n}(x) = 0, \quad c.t.p.\ x \in R.$$

Sin embargo, tenemos que

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)\|f\|_\infty < \|f\chi_{A_n}\|_\infty \leq \|f\|_\infty,$$

con lo que $\lim_{n\to\infty}\|f\chi_{A_n}\|_\infty = \|f\|_\infty > 0$, lo que contradice el hecho de que f tenga norma absolutamente continua. La contradicción viene de suponer que $\|f\|_\infty > 0$, por tanto, necesariamente $f \equiv 0$.

Sin embargo si (R,μ) es completamente atómico, como en el caso de los números naturales, entonces la parte de norma absolutamente continua de ℓ^∞ es el subespacio c_0, que consiste en las sucesiones que convergen a cero. En efecto, sea $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión con $\lim a_n = 0$. Veamos que a tiene norma absolutamente continua. Por reducción al absurdo supongamos que a no tiene norma absolutamente continua. Por tanto, existe una sucesión de conjuntos medibles $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y un $\epsilon_0 > 0$ tales que $E_n \to \emptyset$ y sin embargo $\|a\chi_{E_n}\|_\infty \geq \epsilon_0$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, si $k \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\|a\chi_{E_k}\|_\infty = \sup_{n\in E_k} |a_n| \geq \epsilon_0.$$

Por tanto existe $n(k) \in E_k$ tal que $|a_{n(k)}| \geq \epsilon_0$. Tenemos así una subsucesión $\{a_{n(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de a que no converge a 0, pues $|a_{n(k)}| \geq \epsilon_0$ para cada $k \in \mathbb{N}$, lo que supone una contradicción.

Recíprocamente, supongamos que $a = \{a_n\}$ tiene norma absolutamente continua. Veamos que $\lim a_n = 0$. Consideremos la sucesión $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$E_n = \{n, n+1, n+2, \cdots\}$$

Se tiene que $E_n \downarrow \emptyset$. Ahora bien,

$$0 \leq |a_n| = |a_n \chi_{E_n}(n)| \leq \|a\chi_{E_n}\|_\infty.$$

Dado que $a = \{a_n\}$ tiene norma absolutamente continua, tenemos que $\|a\chi_{E_n}\|_\infty \downarrow 0$, de donde se sigue que

$$\lim a_n = 0.$$

Lo siguiente que vamos a ver son dos caracterizaciones de las funciones de norma absolutamente continua que son útiles, y para ello necesitaremos el siguiente lema.

Lema 3.28. *Si f tiene norma absolutamente continua, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cada $E \in \Sigma$ con $\mu(E) < \delta$, se tiene que*

$$\|f\chi_E\| < \epsilon.$$

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que no se verifica la tesis del lema, luego existe un $\epsilon_0 > 0$, y una sucesión de conjuntos medibles $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaciendo

$$\mu(E_n) < 2^{-n}, \qquad \|f\chi_{E_n}\| \geq \epsilon_0.$$

Ahora bien,

$$\mu(\cup_{n=m}^\infty E_n) \leq \sum_{n=m}^\infty \mu(E_n) < 2^{-m+1}, \quad m = 1, 2, \cdots$$

esto muestra que $E_n \to \emptyset$ en c.t.p., y por tanto la estimación de la norma anterior contradice el hecho de que f tenga norma absolutamente continua. □

Proposición 3.29. *Una función f en un espacio de Banach de funciones X tiene norma absolutamente continua si y solo si $\|f_n\|_X \downarrow 0$ para cualquier sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones medibles satisfaciendo $|f| \geq f_n \downarrow 0$ en c.t.p.*

Demostración. La condición suficiente es consecuencia inmediata de la Proposición 3.27 tomando $f_n = f\chi_{E_n}$. Para la condición necesaria, supongamos que f tiene norma absolutamente continua y $|f| \geq f_n \downarrow 0$ en c.t.p. Sean $\epsilon > 0$ y $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de conjuntos de medida $0 < \mu(R_n) < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$, cuya unión es R. Dado que $Q_n = R - R_n \downarrow \emptyset$, la continuidad absoluta de la norma f muestra que $\|f\chi_{Q_N}\|_X < \frac{\epsilon}{2}$, para un N suficientemente grande. Si $\alpha = \frac{\epsilon}{4\|\chi_{R_N}\|}$, sea $E_n = \{x \in R_N : f_n(x) > \alpha\}$, $n = 1, 2, \cdots$. Dado que $f_n \downarrow 0$ en c.t.p. y R_N tiene medida finita, obtenemos que $\mu(E_n) \downarrow 0$. Por tanto el Lema 3.28 nos asegura que $\|f\chi_{E_n}\|_X < \frac{\epsilon}{4}$ para un n suficientemente grande. Entonces para ese valor de n tenemos que

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_X &\leq \|f_n\chi_{Q_N}\|_X + \|f_n\chi_{R_N}\|_X \\
&\leq \|f_n\chi_{Q_N}\|_X + \|f_n\chi_{E_n}\|_X + \|f_n\chi_{R_N-E_n}\|_X \\
&\leq \|f\chi_{Q_N}\|_X + \|f\chi_{E_n}\|_X + \alpha\|\chi_{R_N-E_n}\|_X \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto $\|f_n\|_X \downarrow 0$ como queríamos probar. □

El Teorema de la Convergencia Monótona esta en nuestra disposición en cualquier espacio de Banach de funciones X en la forma de la propiedad de Fatou. El siguiente resulta muestra que X_a es el mayor subespacio de X donde se cumple el Teorema de la Convergencia Monótona.

Proposición 3.30. *Una función f en un espacio de Banach de funciones X tiene norma absolutamente continua si y solo si se cumple la siguiente condición: si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, g son funciones medibles tales que $|f_n| \leq |f|$ en c.t.p. y $f_n \to g$ en c.t.p. Entonces*

$$\|f_n - g\|_X \to 0.$$

Demostración. La condición suficiente se sigue del resultado previo tomando $f_n = g\chi_{E_n}$ y $g = 0$. Para la condición necesaria, supongamos que f tiene norma absolutamente continua y sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, y g funciones satisfaciendo $|f_n| \leq |f|$ en c.t.p. y $f_n \to g$ en c.t.p. Sea $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión dada por

$$h_n(x) = \sup_{m\geq n} |f_m(x) - g(x)|,$$

entonces claramente $2|f| \geq h_n \downarrow 0$ en c.t.p. Por la Proposición 3.29, tenemos que $\|h_n\|_X \downarrow 0$ y por tanto $\|f_n - g\|_X \leq \|h_n\|_X \downarrow 0$. □

Definición 3.31. Un subespacio vectorial cerrado Y de un espacio de Banach de funciones X decimos que es un ideal ordenado de X si tiene la propiedad:

$$f \in Y \;\; y \;\; |g| \leq |f| \text{ en c.t.p.} \implies g \in Y. \tag{3.18}$$

Claramente el subespacio nulo y el propio subespacio X son ideales ordenados de X.

Teorema 3.32. *El subespacio X_a de las funciones con norma absolutamente continua es un ideal ordenado del espacio de Banach de funciones X. Además, si $0 \leq f_n \uparrow f$ en c.t.p. y $f \in X_a$, entonces $\|f - f_n\|_X \downarrow 0$.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de la definición que X_a es un subespacio de X y satisface (3.18). Si demostramos que X_a es cerrado, entonces tendremos que X_a es un ideal ordenado de X. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en X_a tal que $f_n \to f$ en X. Sea $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\|f - f_N\|_X < \frac{\epsilon}{2}$. Supongamos que $\{E_m\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos medibles tal que $E_m \downarrow \emptyset$ en c.t.p. Dado que f_N tiene norma absolutamente continua, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m \geq M$ se tiene que

$$\|f_N \chi_{E_m}\|_X < \frac{\epsilon}{2},$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\|f\chi_{E_m}\|_X &\leq \|(f - f_N)\chi_{E_m}\|_X + \|f_N\chi_{E_m}\|_X \\
&\leq \|f - f_N\|_X + \|f_N\chi_{E_m}\|_X \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad \forall m \geq M.
\end{aligned}$$

Esto muestra que $\|f\chi_{E_m}\|_X \downarrow 0$ y por tanto $f \in X_a$. Luego X_a es cerrado en X. El resto de la tesis sobre la convergencia de la norma de una sucesión creciente en X_a es consecuencia directa de la Proposición 3.30. □

Del Teorema 3.11 obtenemos que las funciones simples están contenidas en cualquier espacio de Banach de funciones X. Consideremos el subespacio vectorial cerrado de X generado por las funciones simples y vamos a explorar su relación con el subespacio de las funciones de norma absolutamente continua X_a.

Definición 3.33. Sea X un espacio de Banach de funciones. Denotaremos por X_b a la clausura en X del conjunto de las funciones simples.

Proposición 3.34. *El subespacio X_b es la clausura en X del conjunto de las funciones acotadas con soporte en conjuntos medibles de medida finita.*

Demostración. Únicamente necesitamos probar que cualquier función acotada con soporte en un conjunto de medida finita pertenece a X_b. Sea entonces una función f acotada con $E = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ tiene medida finita.

Si $f \geq 0$, no es difícil construir una sucesión de funciones simples no negativas $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con soporte en E tal que $f_n \to f$ uniformemente en E. Pero entonces

$$\|f - f_n\|_X \leq \|(f - f_n)\chi_E\|_X \leq \|f - f_n\|_{L^\infty}\|\chi_E\|_X,$$

lo cual tiende a 0 cuando $n \to \infty$, ya que E tiene medida finita y por tanto $\|\chi_E\|_X < \infty$. El caso general se sigue de separar f en su parte real y su parte imaginaria, y cada una de éstas separarlas en su parte positiva y su parte negativa, y luego aplicar lo probado anteriormente a cada una de esas cuatro funciones. $\square$

Teorema 3.35. *El subespacio X_b es un ideal ordenado de X y*

$$X_a \subset X_b \subset X. \tag{3.19}$$

Demostración. Dado que X_b es cerrado de X por definición, para probar que X_b es un ideal ordenado de X necesitamos probar que se verifica (3.18). Supongamos que $f \in X_b$ y sea $g \in X$ tal que $|g| \leq |f|$ en c.t.p. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones simples tal que $f_n \to f$ en X (Teorema 2.3). Entonces cada una de las funciones

$$g_n(x) = \operatorname{sgn}(g(x)) \cdot \text{mín}\{|f_n(x)|, |g(x)|\}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

es acotada y tiene soporte en un conjunto de medida finita. Además,

$$|g - g_n| = \text{máx}\{|g| - |f_n|, 0\} \leq ||f| - |f_n|| \leq |f - f_n|,$$

entonces,

$$\|g - g_n\|_X \leq \|f - f_n\|_X \to 0.$$

Usando la Proposición 3.34, obtenemos que $g \in X_b$, y por tanto X_b es un ideal ordenado de X. Supongamos ahora que f tiene norma absolutamente continua. Si $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de conjuntos de medida finita cuya unión es R, entonces por la Proposición 3.34, cada una de las funciones

$$f_n(x) = \operatorname{sgn}(f(x)) \cdot \text{mín}\{|f(x)|, n\chi_{R_n}(x)\}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

pertenece a X_b. Dado que $|f_n| \leq |f|$ y $f_n \to f$ en c.t.p. Se sigue de la Proposición 3.30 que $f_n \to f$ en X. Pero X es cerrado, con lo que $f \in X_b$. Por tanto $X_a \subset X_b$. $\square$

El subespacio X_b es siempre relativamente grande en el sentido en que es un subespacio *norm-fundamental* de $(X')^*$. Por el contrario, el subespacio X_a puede contener únicamente a la función nula y la inclusión $X_a \subset X_b$ es propia. Estamos interesados en el extremo opuesto, cuándo X_a y X_b coinciden. Veremos que esto ocurre si y solo si todas las funciones características de conjuntos medibles de medida finita tienen norma absolutamente continua.

Teorema 3.36. *El subespacio X_b de X es isomorfo isométricamente a un subespacio norm-fundamental de $(X')^*$.*

Demostración. Por los Teoremas 3.20 y 3.23 podemos identificar X, y por tanto X_b, con un subespacio cerrado de $(X')^*$. Tenemos que probar que X_b es *norm-fundamental*. Sea $g \in X'$ y sea $\epsilon > 0$. Por (3.7), existe una función f la bola unidad de X de manera que

$$\|g\|_{X'} \leq \int_R |fg| d\mu + \epsilon. \tag{3.20}$$

Sea $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de conjuntos medibles de medida finita de manera que su unión es R. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión dada por

$$f_N = \min\{|f|, N\} \cdot \chi_{R_n}.$$

Por la Proposición 3.34, cada f_N pertenece $B = \{h \in X_b : \|h\|_X \leq 1\}$, la bola unidad de X_b. Dado que $0 \leq f_N \uparrow |f|$, del Teorema de Convergencia Dominada y (3.20) obtenemos que

$$\|g\|_{X'} \leq \sup_N \int_R |f_N g| d\mu + \epsilon \leq \sup_{h\in B} \int_R |hg| d\mu + \epsilon.$$

Tomando $\epsilon \to 0$ y observando que la desigualdad opuesta es una consecuencia inmediata de la desigualdad de Hölder, obtenemos que

$$\|g\|_{X'} = \sup_{h\in B} \int_R |hg| d\mu. \tag{3.21}$$

Finalmente, observemos que (3.21) permanece válida cuando el valor absoluto se escribe fuera de la integral como en el Lema 3.21. En efecto, la única propiedad que necesitábamos para probar ese lema era la propiedad de retículo de X, pero esa propiedad sigue cumpliéndola X_b ya que X_b es un ideal ordenado de X. Con esta modificación, la identidad (3.21) muestra que X_b es *norm-fundamental* en $(X')^*$. □

Teorema 3.37. *Los subespacios X_a y X_b coinciden si y solo si la función característica χ_E tiene norma absolutamente continua para cada conjunto medible E de medida finita.*

Demostración. La condición necesaria es obvia dado que χ_E pertenece a X_b para cualquier conjunto medible E de medida finita. Recíprocamente, si χ_E con $\mu(E) < \infty$ tiene norma absolutamente continua, entonces cualquier función simple tiene norma absolutamente continua. Dado que X_a es cerrado, se tiene que $X_b \subset X_a$. La inclusión opuesta se tiene de (3.19), con lo que $X_a = X_b$. □

3.4. Dualidad y reflexividad

Sea Y un subespacio cerrado de un espacio de Banach de funciones X y supongamos que Y contiene a la funciones simples. Cada función g en el espacio asociado X' induce un funcional lineal y acotado $L_g : X \to \mathbb{R}$ definido $L_g(f) = \int fgd\mu$, y por tanto en Y. La aplicación $g \mapsto L_g$ es inyectiva (porque Y contiene a las funciones características con soporte en conjuntos medibles de medida finita) y una isometría (por el Teorema 3.36 y el hecho de que $X_b \subset Y$). Por tanto X' puede considerarse como un subespacio cerrado de Y^*. Cuando Y es un ideal ordenado, existe una condición necesaria y suficiente para que X' coincida con Y^*. Mediante una serie de corolarios este resultado proporciona respuestas a muchas cuestiones planteadas en la sección anterior en relación con la dualidad.

Teorema 3.38. *Sea Y un ideal ordenado de un espacio de Banach de funciones X y supongamos que Y contiene a las funciones simples. Entonces $Y^* = X'$ si y solo si $Y \subset X_a$. En ese caso,*

$$Y = X_a = X_b \tag{3.22}$$

Demostración. La última afirmación es clara. Si Y contiene al conjunto de las funciones simples, entonces contiene la clausura de dicho conjunto, que hemos definido como X_b. Por tanto, si $Y \subset X_a$, entonces (3.19) nos dice que $Y \subset X_a \subset X_b \subset Y$, de donde se sigue (4.9).

Volviendo a la afirmación fundamental del teorema, supongamos primero que $Y \subset X_a$, por tanto (4.9) se verifica. Por las consideraciones previas a este teorema, necesitamos probar que $Y^* \subset X'$. Supongamos que L pertenece a Y^*, tenemos que probar que existe una función $g \in X'$ tal que para cada $f \in Y$, tenemos

$$L(f) = \int_R fgd\mu \tag{3.23}$$

Dado que (R, μ) es σ-finito, existe una sucesión disjunta de conjuntos medibles de medida finita $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ cuya unión es R. Para cada $N \in \mathbb{N}$, denotaremos por $\mathcal{A}_N$ la σ-álgebra de todos los subconjuntos de S_N que sean medibles, y consideramos la aplicación λ_N definida sobre $\mathcal{A}_N$ dada por

$$\lambda_N(A) = L(\chi_A)$$

Observemos que $\lambda_N(A)$ esta bien definida para cada $A \in \mathcal{A}_N$ porque χ_A pertenece a X_b y por tanto, por (4.9), pertenece a Y.

Se tiene que λ_N es numerablemente aditiva en $\mathcal{A}_N$. En efecto, sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión disjunta de elementos de $\mathcal{A}_N$ y sea $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión dada por

$$B_n = \cup_{i=1}^n A_i, \quad A = \cup_{i=1}^\infty A_i = \cup_{n=1}^\infty B_n.$$

Dado que $A \in \mathcal{A}_N$ tenemos que $\chi_A \in X_b = X_a$, por (4.9). Además es claro que $\chi_A \geq \chi_{A-B_n} \downarrow 0$, por la Proposición 3.29 muestra que $\|\chi_A - \chi_{B_n}\|_X \downarrow 0$ cuando $n \to \infty$. La continuidad y la linealidad de L en Y nos proporciona

$$\lambda_N(A) = L(\chi_A) = \lim_{n\to\infty} L(\chi_{B_n}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n L(\chi_{A_i}) = \sum_{i=1}^\infty \lambda_N(A_i),$$

lo que establece la σ-aditividad de λ_N.

Es fácil obtener una cota para la medida estimando

$$|\lambda_N(A)| = |L(\chi_A)| \leq \|L\|_{Y^*}\|\chi_A\|_X \leq \|L\|_{Y^*}\|\chi_{S_N}\|_X, \ A \in \mathcal{A}_N$$

y observando que $\|\chi_{S_N}\|_X$ es finito porque S_N tiene medida finita (Teorema 3.11). La estimación

$$|\lambda_N(A)| \leq \|L\|_{Y^*}\|\chi_A\|_X, \quad A \in \mathcal{A}_N$$

muestra también que λ es absolutamente continua con respecto de μ (restringida a $\mathcal{A}_N$) porque $\mu(A) = 0$ implica $\|\chi_A\|_X = 0$. Por tanto, por el Teorema de Radon-Nikodym 2.4, existe una única función g_N tal que

$$L(\chi_A) = \lambda_N(A) = \int_R \chi_A g_N d\mu, \quad A \in \mathcal{A}_N.$$

Dado que los conjuntos S_N son disjuntos, podemos definir la función g en R como $g = g_N$ en cada S_N. Claramente,

$$L(\chi_A) = \int_R \chi_A g d\mu, \tag{3.24}$$

para cada conjunto A en $\cup_{N=1}^\infty \mathcal{A}_N$.

Esto establece (3.23) en un caso especial. Antes de pasar al caso general, tenemos que probar que g pertenece a X'. Sea h una función simple no negativa con soporte en algún $R_n = \cup_{m=1}^n S_m$. Si suponemos por un momento que g es una función real, es claro que $h \cdot \text{sgn}(g)$ es también una función simple con soporte en R_n. En particular, esta función es una combinación lineal finita de funciones características de conjuntos $\cup_{N=1}^\infty \mathcal{A}_N$. Por tanto, podemos aplicar (3.24) y usar la linealidad para obtener

$$\int |hg| d\mu = \int h \cdot \text{sgn}(g) g d\mu = L(h \cdot \text{sgn}(g)),$$

pero L es acotado en Y, entonces

$$\int |hg|d\mu \leq \|L\|_{Y^*}\|h \cdot \mathrm{sgn}(g)\|_Y \leq \|L\|_{Y^*}\|h\|_X. \tag{3.25}$$

Si tomamos ahora una función arbitraria f en X, entonces podemos construir una sucesión $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples, cada h_n con soporte en R_n, tal que $0 \leq h_n \uparrow |f|$ en c.t.p. (Teorema 2.3). Aplicando (4.12) a cada h_n, vemos por el Teorema de la Convergencia Dominada que el lado izquierdo converge a $\int |fg|d\mu$ y por la propiedad de Fatou, el lado derecho converge a $\|L\|_{Y^*}\|f\|_X$. Por tanto,

$$\int_R |fg|d\mu \leq \|L\|_{Y^*}\|f\|_X, \quad f \in X.$$

Esto, junto al Lema 3.19, implica que g pertenece a X'. Si g es una función con valores en $\mathbb{C}$, entonces el mismo argumento aplicado separadamente a la parte real e imaginaria de g muestra que cada una de esas funciones pertenece a X' y por tanto g pertenece a X'.

Como en las observaciones previas a este resultado, podemos considerar el funcional lineal L_g inducido por g como elemento de Y^*. En ese caso, podemos interpretar (3.24) como la afirmación de que los dos funcionales L y L_g de Y^* coinciden sobre el conjunto de las funciones simples con soporte en algún R_n. Ahora es fácil mostrar que L y L_g coinciden en todo Y. Si f es una función real, del mismo modo que hemos hecho anteriormente, existe una sucesión de funciones simples $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con soporte de cada h_n en R_n, tal que $0 \leq h_n \uparrow |f|$ en c.t.p. (Teorema 2.3). Las funciones $f_n = h_n \cdot \mathrm{sgn}(f)$ son también funciones simples con soporte R_n, y $f_n \to f$ en c.t.p. Pero f tiene norma absolutamente continua (por (4.9)), entonces la Proposición 3.30 muestra que $f_n \to f$ en Y. Dado que $L(f_n) = L_g(f_n)$, y ambos funcionales son continuos en Y, concluimos que $L(f) = L_g(f)$. Finalmente, si f es una función compleja, entonces su parte real y su parte imaginaria ambas pertenecen a Y (porque Y es un ideal ordenado). Por tanto tenemos que L y L_g coinciden en Y, con lo que tenemos que $X' = Y^*$.

Recíprocamente, supongamos que $X' = Y^*$, tenemos que demostrar que $Y \subset X_a$. Por reducción al absurdo, supongamos que existe $f \in Y$ de manera que f no tiene norma absolutamente continua. Dado que Y es un ideal ordenado, podemos suponer que $f \geq 0$. En ese caso, existe una sucesión $E_n \downarrow \emptyset$ en c.t.p. y un número positivo ϵ tal que

$$\|f\chi_{E_n}\|_X \geq \epsilon, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{3.26}$$

Una consecuencia inmediata del Teorema de la Convergencia Dominada y la desigualdad de Hölder (3.8) es que los conjuntos

$$G_n = \left\{ g \in X' : \left| \int f\chi_{E_n} g d\mu \right| < \frac{\epsilon}{2} \right\}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

cubren a X'. Pero $X' = Y^*$, luego podemos considerar $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ como un recubrimiento de Y^*. Ahora $f\chi_{E_n}$ pertenece a Y (porque Y es un ideal ordenado) entonces cada G_n es un débil*-abierto de Y^*. Por tanto, por el Teorema de Alaoglu 2.5, existe un número finito de índices $n(1), n(2), \cdots, n(k)$ tal que $\{G_{n(i)}\}_{i=1}^{k}$ cubre a la bola unidad de Y^*. Luego cualquier $g \in X'$ con $\|g\|_{X'} \leq 1$ pertenece a algún $G_{n(i)}$, dado que $f \geq 0$ y $E_n \downarrow \emptyset$, tenemos que

$$\int |f\chi_{E_n} g| d\mu \leq \int |f\chi_{E_{n(i)}} g| d\mu < \frac{\epsilon}{2},$$

para cada $n \geq N = \max\{n(1), \cdots, n(k)\}$. Esto, junto al Teorema 3.20 y el Lema 3.21, nos proporcionan

$$\|f\chi_{E_n}\|_X = \sup_{\|g\|_{X'} \leq 1} \left| \int f\chi_E g d\mu \right| \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad n \geq N,$$

lo que contradice (4.13). Por tanto $Y \subset X_a$. □

Corolario 3.39. *Sea X un espacio de Banach de funciones. Si X_a contiene a las funciones simples, entonces $(X_a)^* = X'$.*

Demostración. Si $Y = X_a$, entonces Y es un ideal ordenado por el Teorema 3.32 que contiene a las funciones simples. Entonces el resultado se sigue de aplicar el Teorema 3.38 a Y. □

El espacio X tiene norma absolutamente continua si y solo si $X = X_a$. Por tanto, aplicando el Teorema 3.38 (a $Y = X$), obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.40. *El espacio dual X^* de un espacio de Banach de funciones es isomorfo isométricamente al espacio asociado X' si y solo si X tiene norma absolutamente continua.*

Corolario 3.41. *El espacio de Banach de funciones X es reflexivo si y solo si X y su espacio asociado X' tienen norma absolutamente continua.*

Demostración. Si X y X' ambos tienen norma absolutamente continua, obtenemos aplicando sucesivamente el Teorema 3.38

$$X^{**} = (X^*)^* = (X')^* = (X')' = X''.$$

Sin embargo, el Teorema 3.20 muestra que $X'' = X$, entonces tenemos que $X^{**} = X$. Dado que las identificaciones son canónicas, concluimos que X es reflexivo.

Recíprocamente, supongamos que X es reflexivo. Teniendo en cuenta el Teorema 3.23 tenemos que X' es un subespacio cerrado *norm-fundamental* de X^*. Si X' es un subespacio propio de X^*, entonces por el Teorema de Hahn-Banach 2.2 existe un funcional no nulo $F \in X^{**}$ que se anula sobre X'. Por ser X reflexivo, tenemos que existe $f \in X$ de manera que

$$F(g) = \int fg d\mu = 0,$$

para cada $g \in X'$. Dado que X' es *norm-fundamental* en X^*, esto implica que $f = 0$ en c.t.p. y F es idénticamente cero. De esta contradicción concluimos que $X' = X^*$ y por del Corolario 3.40 tenemos que X tiene norma absolutamente continua. Este dato, junto al Teorema 3.20 y el hecho de que X es reflexivo, tenemos que

$$(X')^* = (X^*)^* = X = X'' = (X')'.$$

Aplicando el Corolario 3.24 una vez más, deducimos que X' también norma absolutamente continua. $\square$

Un criterio suficiente para la reflexividad es que el espacio de Banach de funciones tenga espacio dual separable. Esto surgirá de una discusión general sobre la separabilidad en la siguiente sección.

3.5. Separabilidad

Las pruebas de los resultados fundamentales de separabilidad requieren algunos hechos elementales sobre la topología débil. Sea X un espacio de Banach de funciones y supongamos que Z es un ideal ordenado de X' que contiene a las funciones simples. Entonces Z contiene a $(X')_b$ y por tanto es un subespacio *norm-fundamental* de X^* (Teoremas 3.20 y 3.36). La colección de seminormas

$$f \mapsto \left| \int fg d\mu \right|, \quad g \in Z, \tag{3.27}$$

en X es por tanto una familia separadora que dota a X de estructura de un espacio vectorial topológico Hausdorff localmente convexo. La topología en cuestión es la llamada topología débil en X generada por Z y se denota por $\sigma(X, Z)$. Obsérvese que $f_n \to f$ en la topología $\sigma(X, Z)$ si y solo si

$$\int f_n g d\mu \to \int fg d\mu,$$

para cada $g \in Z$.

Un subconjunto A de X es $\sigma(X,Z)$-acotado si es acotado en cualquier de las seminormas (3.27), esto es, si

$$\sup\left\{\left|\int fg d\mu\right| : f \in A\right\} < \infty \tag{3.28}$$

para cada g en Z.

Lema 3.42. *Sea X un espacio de Banach de funciones y supongamos que Z es un ideal ordenado de X' que contiene a las funciones simples. Entonces un subconjunto A de X es $\sigma(X,Z)$-acotado si y solo si es acotado en norma en X.*

Demostración. La desigualdad de Hölder (3.8) muestra que la acotación en norma implica $\sigma(X,Z)$-acotación. Recíprocamente, supongamos que A es $\sigma(X,Z)$-acotado. Entonces (3.28) se cumple para cada $g \in Z$. Ahora bien, cada f en A define un funcional lineal

$$F(g) = \int fg d\mu, \quad g \in Z,$$

en Z^* (desigualdad de Hölder), y $\|F\|_{Z^*} = \|f\|_X$ porque Z es *norm-fundamental* en X^* (Teorema 3.36). Pero (3.28) afirma

$$\sup_{f\in A} |F(g)| \leq C_g < \infty$$

para cada g en Z. Por tanto, por el principio de la acotación uniforme (Teorema 2.6),

$$\sup_{f\in A} \|f\|_X = \sup_{f\in A} \|F\|_{Z^*} < \infty,$$

lo que muestra que A es acotado en norma. □

Teorema 3.43. *Sea X un espacio de Banach de funciones y sea Z un ideal ordenado de X' que contiene a las funciones simples. Entonces X es completo con la topología $\sigma(X,Z)$.*

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión $\sigma(X,Z)$-Cauchy en X, esto es, $\{\int f_n g d\mu\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy de escalares para cada g en Z, se sigue de esto que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es $\sigma(X,Z)$-acotada. Por tanto, por el Lema 3.42, existe una constante $M > 0$ tal que

$$\|f_n\|_X \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Consideremos la sucesión de medidas $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas por

$$v_n(E) = \int_E f_n d\mu.$$

Tenemos que cada v_n es absolutamente continua respecto de μ. Sea $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de conjuntos medibles de medida finita cuya unión es todo R, y fijamos $N \in \mathbb{N}$. Por hipótesis, $\{v_n(E)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, y por tanto

$$v(E) = \lim_{n\to\infty} v_n(E)$$

existe y es finito para cualquier subconjunto medible E de R_N. Por el Teorema de Vitali-Hahn-Saks 2.8, la sucesión $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ restringida a R_N es uniformemente absolutamente continua con respecto de μ, y en R_N, la aplicación v es una medida que es absolutamente continua con respecto de μ. Tomando límite cuando $N \to \infty$, existe una función f_0 localmente integrable (definida en c.t.p. de R) tal que

$$\lim_{n\to\infty} v_n(E) = v(E) = \int_R f_0 \chi_E d\mu,$$

para cada medible E con $\mu(E) < \infty$.

Si g es una función simple con soporte de medida finita, tenemos en ese caso que

$$\lim_{n\to\infty} \int_R f_n g d\mu = \int_R f_0 g d\mu. \tag{3.29}$$

Sea ahora $g \in X'$ con $\|g\|_{X'} \leq 1$, por el Teorema 2.3 existe $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de funciones simples con soporte de medida finito en X' tal que

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) \text{ en c.t.p. } x \in R.$$

Fijado $m \in \mathbb{N}$ tenemos por (3.29), por la desigualdad de Hölder (3.8) y el hecho de que $|g_m| \uparrow |g|$ obtenemos que

$$\left| \int_R f_0 g_m d\mu \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \int_R f_n g_m d\mu \right| \leq \limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_X \|g_m\|_{X'} \leq$$

$$\limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_X \|g\|_{X'} \leq \limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_X \leq \sup \|f_n\|_X \leq M.$$

Como lo anterior es cierto para cada $m \in \mathbb{N}$, tenemos por el Teorema de la Convergencia Monótona que

$$\left| \int_R f_0 g d\mu \right| = \lim_{m\to\infty} \left| \int_R f_0 g_m d\mu \right| \leq M.$$

Dado que la elección de g ha sido arbitraria,obtenemos del Teorema 3.20 que f_0 pertenece a X y $\|f_0\|_X \leq M$.

Ahora bien, si g es una función acotada con soporte de medida finita, entonces aproximando uniformemente la función g por funciones simples obtenemos que (3.29) se cumple también para todas las funciones como g.

Necesitamos probar que (3.29) se cumple para cualquier $g \in Z$. Sea g una función de Z y consideremos la sucesión de medidas $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$\omega_n(E) = \int_E f_n g d\mu,$$

estas medidas $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ son finitas y cada una de ellas es absolutamente continua con respecto de μ. Dado que $g\chi_E$ pertenece a Z para cada conjunto medible E, la hipótesis implica que la sucesión $\{\omega_n(E)\}_{n=1}^{\infty}$ converge. Nuevamente por el Teorema de Vitali-Hahn-Saks 2.8, la sucesión $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente absolutamente continua con respecto de μ, esto es, $\omega_n(E) \to 0$ uniformemente en n cuando $\mu(E) \to 0$. La medida ω_0 definida por $\omega_0(E) = \int_E f_0 g d\mu$ también satisface que $\omega_0 << \mu$. Por tanto, si consideramos la sucesión decreciente de conjuntos medibles $\{E_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ dada por,

$$E_m = \{|g| > m\} \cup R_m^c, \quad m = 1, 2, \cdots,$$

dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\omega_n(E_N)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Si F_N denota el complementario de E_N, entonces $g\chi_{F_N}$ es acotada y tiene soporte de medida finita. Dado que (3.29) se cumple para esta clase de funciones, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \int_{F_N} f_n g d\mu - \int_{F_N} f_0 g d\mu \right| < \frac{\epsilon}{3}, \quad n \geq n_0.$$

Separando el dominio de integración R en $R = E_N \cup F_N$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\left| \int_R f_n g d\mu - \int_R f_0 g d\mu \right| = \left| \int_{E_N \cup F_N} f_n g d\mu - \int_{E_N \cup F_N} f_0 g d\mu \right| \\
&= \left| \int_{E_N} f_n g d\mu - \int_{E_N} f_0 g d\mu + \int_{F_N} f_n g d\mu - \int_{F_N} f_0 g d\mu \right| \\
&\leq \left| \int_{E_N} f_n g d\mu \right| + \left| \int_{E_N} f_0 g d\mu \right| + \left| \int_{F_N} f_n g d\mu - \int_{F_N} f_0 g d\mu \right| \\
&< |\omega_n(E_N)| + |\omega_0(E_N)| + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon,
\end{aligned}$$

si $n \geq n_0$. Esto establece (3.29) para cualquier función g en Z. Por tanto $f_n \to f_0$ en la topología $\sigma(X, Z)$, con lo que $(X, \sigma(X, Z))$ es completo. $\square$

Corolario 3.44. *Todo espacio de Banach de funciones X es completo con la topología $\sigma(X, X')$.*

Antes de enunciar el resultado más importante de esta sección, vamos a probar un lema previo. Sea $\mathcal{A}$ la familia de subconjuntos medibles de R que tienen medida finita, e identificaremos dos subconjuntos medibles que se difieren en un conjunto de medida cero. Si

$$d(E, F) = \int_R |\chi_E - \chi_F| d\mu, \quad E, F \in \mathcal{A}. \tag{3.30}$$

Lema 3.45. *$(\mathcal{A}, d)$ es un espacio métrico completo.*

Demostración. Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{A}, d)$. Esto es, para cada $\epsilon > 0$ tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m \geq n \geq N$, entonces

$$d(E_m, E_n) = \int_R |\chi_{E_m} - \chi_{E_n}| d\mu < \epsilon.$$

Observemos que lo anterior nos dice que la sucesión $\{\chi_{E_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^1(R)$. Dado que $L^1(R)$ es completo, tenemos que existe una función $f \in L^1(R)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|f - \chi_{E_n}\|_{L^1(R)} = 0$. Como $\lim_{n\to\infty} \|f - \chi_{E_n}\|_{L^1(R)} = 0$ tenemos que existe una subsucesión $\{\chi_{E_{n(k)}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\chi_{E_{n(k)}}(x) \to f(x)$ en c.t.p. $x \in R$. Dado que $\chi_{E_{n(k)}}$ toma valores 1 o 0, tenemos que a partir de un $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $\chi_{E_{n(k)}}(x) = 0$, con lo que $f(x) = 0$, o tenemos que a partir de un $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $\chi_{E_{n(k)}}(x) = 1$, con lo que $f(x) = 1$. Sea G el conjunto de puntos dado por $G = \{x \in R : \lim_{n\to\infty} \chi_{E_{n(k)}}(x) \neq f(x)\} = 0$. G tiene medida nula. Sea g la función dada por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si, } \quad x \in G^c \\ 0 & \text{si, } \quad x \in G \end{cases}$$

Tenemos que $f = g$ en $L^1(R)$ con lo que $\lim_{n\to\infty} \|g - \chi_{E_n}\|_{L^1(R)} = 0$, y además g es una función característica. Sea E el conjunto medible dado por

$$E = \{x \in R : g(x) = 1\}.$$

Si probamos que E tiene medida finita habremos terminado la prueba, pues g es la función característica que buscamos. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|g - \chi_{E_N}\|_{L^1(R)} = \int_R |g - \chi_{E_N}| d\mu \leq 1$$

Tenemos entonces que

$$\mu(E) = \int_E g d\mu \leq \int_R |g - \chi_{E_N}| d\mu + \int_R \chi_{E_N} d\mu \leq 1 + \mu(E_N) < \infty.$$

□

Definición 3.46. Una medida μ se dice que es separable si el correspondiente espacio métrico $(\mathcal{A}, d)$ es separable.

Teorema 3.47. *Sea X un espacio de Banach de funciones definidas en un espacio de medida (R, μ). Supongamos que Y es un ideal ordenado de X que contiene las funciones simples. Entonces Y es separable si y solo si Y tiene norma absolutamente continua y μ es una medida separable.*

Demostración. Supongamos primero que Y es separable y sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ un conjunto denso en Y. Supongamos que Y contiene a una función f_0 que no tiene norma absolutamente continua, entonces por la Proposición 3.27 existe una sucesión $E_n \downarrow \emptyset$ en c.t.p. y $\epsilon > 0$ tal que

$$\|f_0 \chi_{E_n}\|_X \geq \epsilon, \quad n = 1, 2, \cdots .$$

Consecuentemente, dado que X' es *norm-fundamental* en X^* (Teorema 3.23), existe una sucesión de funciones $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ en la bola unidad de X' tal que

$$\int |f_0 g_n \chi_{E_n}| d\mu \geq \frac{\epsilon}{2}, \quad n = 1, 2, \cdots . \tag{3.31}$$

Las funciones

$$h_n = \operatorname{sgn}(\overline{f}_0) |g_n| \chi_{E_n}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

son también funciones de la bola unidad X' y de la desigualdad de Hölder (3.8) obtenemos

$$\left| \int f_m h_n d\mu \right| \leq \|f_m\|_X, \quad m, n = 1, 2, \cdots .$$

En particular, la sucesión $\{\int f_m h_n d\mu\}_{n=1}^{\infty}$, $(m = 1, 2, \cdots)$, es acotada. Usando diagonalización obtenemos una subsucesión $\{h_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ con la propiedad de que $\int f_m h_{n(k)} d\mu$ converge cuando $k \to \infty$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Dado que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ un conjunto denso en Y, usando la desigualdad de Hölder deducimos que $\lim_{k\to\infty} \int f h_{n(k)} d\mu$ existe para cada f en Y. Cuando Y es considerado como subconjunto de $X'' = X$, esto afirma que la sucesión $\{h_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ es

$\sigma(X', Y)$-Cauchy en X'. Por tanto, por el Teorema 3.43 (con X' remplazando X e Y remplazando Z), existe una función h en X' tal que

$$\lim_{k\to\infty} \int f h_{n(k)} d\mu = \int f h d\mu, \quad f \in Y. \tag{3.32}$$

Recordemos que las funciones $h_{n(k)}$ tienen soporte en la sucesión decreciente de conjuntos $E_{n(k)}$. Así, si E es un conjunto de medida finita (por tanto $f = \chi_E$ pertenece a Y, por hipótesis) y E es disjunto con algún $E_{n(k)}$, entonces (3.29) muestra que $\int_E h d\mu = 0$. Manteniendo el valor de k fijo y permitiendo que E varíe, obtenemos que $h = 0$ en c.t.p. en el complementario de $E_{n(k)}$, e incrementando k, concluimos que h se anula en c.t.p. porque $E_{n(k)} \downarrow \emptyset$ en c.t.p. Por tanto (3.29), aplicado a f_0, obtenemos

$$0 = \lim_{k\to\infty} \int f_0 h_{n(k)} d\mu = \lim_{k\to\infty} \int |f_0 g_{n(k)}| \chi_{E_{n(k)}} d\mu.$$

Eso contradice (3.31), con lo que concluimos que Y tiene norma absolutamente continua.

Lo siguiente será mostrar que μ es separable. Sea $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de conjuntos medibles de medida finita cuya unión es todo R, y sea $\mathcal{A}_N$ la σ-álgebra de todos los conjuntos medibles contenidos en R_N, $(N = 1, 2, \cdots)$. Por hipótesis, la función característica de un conjunto en cualquier $\mathcal{A}_N$ pertenece a Y. Ahora bien, Y es separable, entonces cualquier subconjunto de Y es también separable. Por tanto, para cada $N = 1, 2, \cdots$, existe una familia numerable $\{\chi_{E_{N,m}}\}_{m=1}^{\infty}$ de funciones características de conjuntos $E_{N,m} \in \mathcal{A}_N$ que es densa en norma el conjunto de todas las funciones características de conjuntos de $\mathcal{A}_N$. Deberíamos de demostrar que la familia numerable $\mathcal{F}$ que consiste en todos los conjuntos $E_{n,M}$, $(N, m = 1, 2, \cdots)$ es densa en el espacio métrico $(\mathcal{A}, d)$. Esto establece la separabilidad de μ.

Sea $F \in \mathcal{A}$, esto es, E es un conjunto medible de medida finita. El Teorema de Convergencia Dominada implica que $\mu(F \setminus R_N) \to 0$ cuando $N \to \infty$ dado que $\mu(F) < \infty$ y $F \cap R_N \uparrow F$. Para un $\epsilon > 0$ arbitrario, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(F \setminus R_N) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ahora, por el Teorema 3.11, existe una constante C_N tal que

$$\int_{R_N} |f| d\mu \leq C_N \|f\|_X, \quad f \in X. \tag{3.33}$$

Por definición de la familia $\mathcal{F}$, podemos elegir $E \in \mathcal{F}$, $E \subset R_N$, tal que

$$\|\chi_E - \chi_{F\cap R_N}\| X < \frac{\epsilon}{2C_N}. \tag{3.34}$$

Combinando (3.33) y (3.34), observamos que

$$\begin{aligned} d(E, E) &= \int |\chi_F - \chi_E| d\mu \\ &= \mu(F \setminus R_N) + \int_{R_N} |\chi_E - \chi_{F\cap R_N}| d\mu \\ &< \frac{\epsilon}{2} + C_N \|\chi_E - \chi_{F\cap R_N}\|_X < \epsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathcal{F}$ es densa en $(\mathcal{A}, d)$ y consecuentemente μ es una medida separable.

Recíprocamente, supongamos que μ es separable y que Y tiene norma absolutamente continua. Entonces $Y = X_a = X_b$, por el Teorema 3.38. Sea $\mathcal{F}_1 = \{E_1, E_2, \cdots\}$ un conjunto numerable y denso en $(\mathcal{A}, d)$. Sea $\{R_N\}_{N=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de conjuntos medibles de medida finita cuya unión es todo R, y sea $\mathcal{F} = \{E_j \cap R_N\}_{j,N=1}^{\infty}$. Por último, sea $\mathcal{D}$ la clase de funciones simples con forma

$$f = \sum_{k=1}^{k} r_k \chi_{F_k},$$

donde los coeficientes r_k son racionales (la parte real e imaginaria son racionales en el caso en que r_k sean complejos) y los conjuntos F_k pertenecen a $\mathcal{F}$. Claramente $\mathcal{D}$ es numerable. Tenemos que demostrar que $\mathcal{D}$ es denso en X_b y por tanto $Y (= X_b)$ es separable.

Ahora bien, X_b es la clausura del conjunto de las funciones simples

$$g = \sum_{n=1}^{m} c_n \chi_{G_n},$$

donde los coeficientes c_n son escalares arbitrarios y G_n son conjuntos medibles arbitrarios de medida finita. Dado que cualquier c_n se puede aproximar tanto como uno quiera por racionales, es claro que para probar que $\mathcal{D}$ es denso en X_b es suficiente mostrar que la función característica de un conjunto medible de medida finita arbitrario se puede aproximar en norma de X por funciones características de conjuntos de $\mathcal{F}$.

Supongamos que G tiene medida finita y sea $\epsilon > 0$. Ahora bien, X_G pertenece a $X_b = X_a$ y $\chi_{G\cap R_N} \uparrow \chi_G$, entonces por la Proposición 3.30, podemos elegir N tal que

$$\|\chi_G - \chi_{G\cap R_N}\|_X < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por tanto, es suficiente aproximar $\chi_{G\cap R_N}$ por funciones características de conjuntos de $\mathcal{F}$. Para cada n, podemos tomar $F_n \in \mathcal{F}$ con $F_n \subset R_N$ y

$$\lim_{n\to\infty} d(G \cap R_N, F_n) = 0. \tag{3.35}$$

Esto afirma que $\chi_{F_N} \to \chi_{G\cap R_N}$ en $L^1(R)$, con lo que podemos tomar una subsucesión $\chi_{F_{n(j)}} \to \chi_{G\cap R_N}$ en c.t.p. cuando $j \to \infty$. Pero todas estas funciones están dominadas por χ_{R_N}, que pertenece a X_a. Por tanto, por el Teorema de la Convergencia Dominada (Proposición 3.30) muestra que

$$\|\chi_{F_{n(j)}} - \chi_{G\cap R_N}\|_X \to 0.$$

Como habíamos comentado anteriormente, esto es suficiente para probar la separabilidad de Y. □

Corolario 3.48. *Un espacio de Banach de funciones X es separable si y solo si tiene norma absolutamente continua y subyace sobre un espacio de medida (R, μ) con μ una medida separable.*

Corolario 3.49. *Supongamos que $X_a = X_b$. Entonces X_a es separable si y solo si μ es separable.*

Corolario 3.50. *Si el espacio dual X^* de un espacio de Banach de funciones X es separable, entonces X es reflexivo.*

Demostración. Cualquier espacio de Banach con dual separable, el propio espacio es separable. Por tanto X es separable. Además, cualquier subconjunto de X^* tiene que ser separable. Por tanto, el espacio asociado $X^{'}$ es separable. Pero ambos espacios X y X' tienen norma absolutamente continua, por el Teorema 3.47. En ese caso, el Corolario 3.41 muestra que X es reflexivo. □

Capítulo 4

Espacios invariantes por reordenamientos

Si $v = (v_1, \cdots, v_n), u = (u_1, \cdots, u_n)$ son dos vectores con componentes no negativas, es natural decir que u es un reordenamiento de v si existe una permutación σ del conjunto $\{1, \cdots, n\}$ tal que $u_i = v_{\sigma(i)}$ para cada $i = 1, \cdots, n$. En un espacio de medida más general, es tentador remplazar la noción de permutación por una transformación que preserva la medida, con lo que tendríamos que para dos funciones medibles no negativas f y g, entonces g es "reordenada" de f si $g = f \circ \sigma$ para una transformación que preserva la medida σ. Este concepto, aunque válido, no es lo suficientemente amplio para nuestros propósitos. Por ejemplo, la simetría falla, pues g puede ser una reordenada de f en este sentido y f no ser una reordenada de g.

Nosotros vamos a considerar una definición más amplia: dos funciones f y g serán una la reordenada de otra si sus funciones de distribución coinciden. Este concepto y el de la reordenada decreciente se introducirán en la sección 4.1. La sección 4.2 describe los tipos de espacios de medida que admiten una teoría razonable de reordenamiento. La función maximal f^{**} y la relación de Hardy-Littlewood-Pólya son introducidas en la sección 4.3, lo que nos llevará a introducir los espacios invariantes por reordenamientos que se estudiarán en la sección 4.4. En la sección 4.5 se describirán dos familias especiales de espacios invariantes por reordenamientos, mientras que en la sección 4.6 se estudiarán los espacios de Lorentz $L^1 \cap L^\infty$ y $L^1 + L^\infty$, dos espacios de gran importancia en la teoría de interpolación.

4.1. Función de distribución y la reordenada decreciente

En esta sección estudiaremos primero el concepto de función de distribución y luego la reordenada decreciente, ambas nociones de gran importancia en esta teoría. Como en el capítulo anterior, denotamos por (R,μ) a un espacio de medida σ-finito.

Definición 4.1. Se define la función de distribución de una función $f \in \mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0(R,\mu)$ como la función $\mu_f : [0,\infty) \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$\mu_f(\lambda) = \mu(\{x \in R : |f(x)| > \lambda\}). \tag{4.1}$$

Obsérvese que la función μ_f depende únicamente del valor absoluto de f, $|f|$, y que μ_f puede tomar el valor $+\infty$.

Definición 4.2. Dos funciones $f \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$ y $g \in \mathcal{M}_0(S,\nu)$ se dice que son equimedibles si tienen la misma función de distribución. Esto es, si

$$\mu_f(\lambda) = \nu_g(\lambda), \quad \forall \lambda \geq 0.$$

Proposición 4.3. *Sean f, g y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de $\mathcal{M}_0(R,\mu)$. Sea $a \in \mathbb{R}$ no nulo. Entonces la función de distribución μ_f es no negativa, decreciente y continua por la derecha en $[0,\infty)$. Además,*

(i) *Si $|g| \leq |f|$ en c.t.p., entonces $\mu_g \leq \mu_f$.*

(ii) $\mu_{af}(\lambda) = \mu_f(\frac{\lambda}{|a|})$, $\forall \lambda \geq 0$.

(iii) $\mu_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2)$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$.

(iv) *Si $|f| \leq \liminf_{n\to\infty} |f_n|$ en c.t.p. entonces $\mu_f \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_{f_n}$.*

En particular, si $|f_n| \uparrow |f|$, entonces $\mu_{f_n} \uparrow \mu_f$.

Demostración. Es claro que μ_f no es negativa al ser μ una medida positiva. Sean ahora $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$. Entonces

$$\{x \in R : |f(x)| > \lambda_2\} \subset \{x \in R : |f(x)| > \lambda_1\},$$

luego por ser μ una medida positiva, en particular es monótona, con lo que

$$\mu(\{x \in R : |f(x)| > \lambda_2\}) \leq \mu(\{x \in R : |f(x)| > \lambda_1\}),$$

es decir, $u_f(\lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1)$. Veamos ahora que μ_f es continua por la derecha, para ello tomemos $\lambda \geq 0$ y sea $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión con $\lambda_n \downarrow \lambda$. Tenemos entonces que la sucesión $\{E_{\lambda_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$E_{\lambda_n} = \{x \in R : |f(x)| > \lambda_n\},$$

es una sucesión creciente. Por una de las propiedades que verifica una medida positiva, tenemos que

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_{\lambda_n}) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_{\lambda_n}),$$

lo que es equivalente a

$$\mu_f(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \mu_f(\lambda_n).$$

Las propiedades (i) y (ii) son consecuencia inmediata de la definición de función de distribución. Veamos ahora la propiedad (iii), para ello tomemos $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. Entonces, se verifica la siguiente cadena de inclusiones

$$\begin{aligned}\{x \in R : |f(x) + g(x)| \geq \lambda_1 + \lambda_2\} &\subset \{x \in R : |f(x)| + |g(x)| \geq \lambda_1 + \lambda_2\} \\ &\subset \{x \in R : |f(x)| \geq \lambda_1\} \cup \{x \in R : |g(x)| \geq \lambda_2\},\end{aligned}$$

tomando medida, obtenemos que $\mu_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2)$.

Procedemos ahora a probar la propiedad (iv). Para ello fijamos un $\lambda \geq 0$, y sean $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ los conjuntos dados por

$$E_n = \{x \in R : |f_n(x)| > \lambda\}, \quad E = \{x \in R : |f(x)| > \lambda\}.$$

Observemos que $E \subset \cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n>m} E_n$. En efecto, sea $x \in R$ con $|f(x)| > \lambda$. Pero $|f(x)| \leq \liminf_{n\to\infty} |f_n(x)|$. Por tanto, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq m$ se verifica $|f(x)| \leq \inf |f_n(x)|$. Es decir,

$$\lambda < |f(x)| \leq |f_n(x)|, \quad \forall n \geq m.$$

Por tanto $x \in \cap_{n>m} E_n$ con lo que $x \in \cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n>m} E_n$. Por tanto,

$$\mu(\cap_{n>m} E_n) \leq \inf_{n>m} \mu(E_n) \leq \sup_{m} \inf_{n>m} \mu(E_n) = \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n),$$

para cada $m = 1, 2, \cdots$. Pero $\cap_{n>m} E_n$ crece con m, aplicando el Teorema de la Convergencia Monótona obtenemos que

$$\mu(E) \leq \mu(\cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n>m} E_n) = \lim_{m\to\infty} \mu(\cap_{n>m} E_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Esto prueba la primera afirmación del punto (iv). Para la segunda afirmación, observemos que por ser $|f_n| \uparrow |f|$ tenemos que $\mu_{f_n} \leq \mu_{f_{n+1}} \leq \mu_f$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por la propiedad (i). Luego, $\lim_{n\to\infty} \sup \mu_{f_n} \leq \mu_f$. Por otra parte, por la primera afirmación del punto (iv), tenemos que $\mu_f \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_{f_n}$, con lo que $\mu_f = \lim_{n\to\infty} \mu_{f_n}$. $\square$

Ejemplo 4.4. Procedemos a calcular la función de distribución de una función simple no negativa f. Supongamos que

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x), \tag{4.2}$$

donde E_j son conjuntos medibles de medida finita disjuntos dos a dos y $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$.

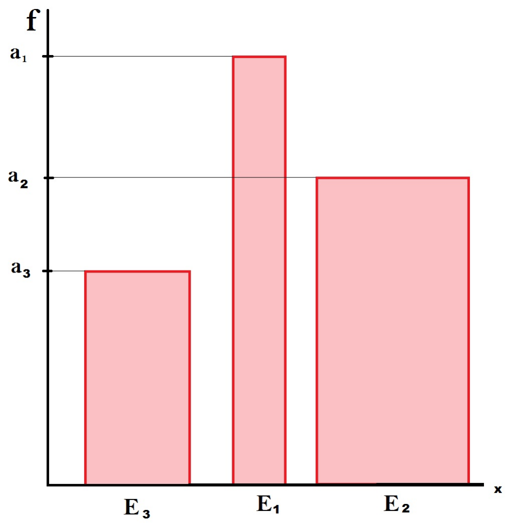

Figura 4.1: Gráfica de f.

Sea $\lambda \in [0, \infty)$. Entonces,

- si $\lambda > a_1$, tenemos que $\{x \in R : |f(x)| > \lambda\} = \emptyset$, con lo que

$$\mu_f(\lambda) = 0;$$

- si $a_1 \geq \lambda \geq a_2$, tenemos que $\{x \in R : |f(x)| > \lambda\} = E_1$, con lo que

$$\mu_f(\lambda) = \mu(E_1);$$

- si $a_2 \geq \lambda \geq a_3$, tenemos que $\{x \in R : |f(x)| > \lambda\} = E_1 \cup E_2$, luego

$$\mu_f(\lambda) = \mu(E_1) + \mu(E_2);$$

- en general, tenemos que $\mu_f(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} m_j \chi_{[a_{j+1},a_j)}(\lambda)$, donde

$$m_j = \sum_{i=1}^{j} \mu(E_i), \quad j = 1, \cdots, n,$$

y $a_{n+1} = 0$.

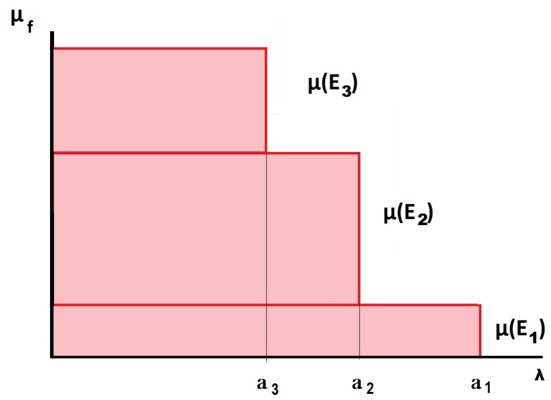

Figura 4.2: Gráfica de μ_f.

Lema 4.5. *Sea (R, μ) un espacio de medida y sea F un subconjunto medible de R de medida $\mu(F) = t$. Sea $g = \chi_F$. Entonces una función $\overline{g}$ es equimedible con g si y solo si $|\overline{g}|$ es igual en c.t.p. a la función característica de un conjunto medible E, de medida $\mu(E) = \mu(F) = t$.*

Demostración. Supongamos que $|\overline{g}|$ es igual en c.t.p. a la función característica de un conjunto medible E, de medida $\mu(E) = t$. Tenemos entonces que;

-si $0 \leq \lambda < 1$, entonces $\mu_{|\overline{g}|}(\lambda) = \mu(E) = t$.

-si $1 \leq \lambda$, entonces $\mu_{|\overline{g}|}(\lambda) = \mu(\emptyset) = 0$.

Por tanto, tenemos que $\mu_{\overline{g}} = \mu_{|\overline{g}|} = t\chi_{[0,1)}$, que coincide con la función de distribución de g. Luego g y $\overline{g}$ son equimedibles.

Supongamos ahora que $\overline{g}$ y g son equimedibles y veamos que $|\overline{g}|$ es igual en c.t.p. a la función característica de un conjunto medible E, de medida justamente $\mu(E) = \mu(F) = t$. Por reducción al absurdo supongamos que existe un subconjunto medible A de R de medida positiva y $\alpha > 1$ tal que

$$|\overline{g}(x)| \geq \alpha, \quad \forall x \in A.$$

Por tanto, tenemos que si $1 \leq \lambda < \alpha$, entonces $\mu_{|\overline{g}|}(\lambda) = \mu(A)$, lo cual es una contradicción porque $\mu_g(\lambda) = 0$, y g era equimedible con $\overline{g}$. Razonando de manera análoga, se ve que $|\overline{g}|$ no puede tomar valores en $(0, 1)$ en un conjunto de medida positiva. Luego tenemos que $|\overline{g}|$ es una función característica. Sea $E = \{x \in R : |\overline{g}(x)| = 1\}$, que es un medible por ser la función $|\overline{g}|$ una función medible. Tenemos que $\mu_{|\overline{g}|} = \mu(E)\chi_{[0,1)}$ y dado que $\overline{g}$ y g son equimedibles, tenemos que $t\chi_{[0,1)} = \mu_g(t) = \mu_{|\overline{g}|} = \mu(E)\chi_{[0,1)}$, luego necesariamente $\mu(E) = t$, que era justamente lo que queríamos probar. □

Definición 4.6. Sea $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$. Se define la reordenada decreciente de f como la función f^* definida en $[0, \infty)$ dada por

$$f^*(t) = \operatorname{ínf}\{\lambda : \mu_f(\lambda) \leq t\}, \tag{4.3}$$

Usaremos el convenio de que $\operatorname{ínf} \emptyset = \infty$. Por lo tanto, si $\mu_f(\lambda) > t$ para cada $\lambda \geq 0$, entonces $f^*(t) = \infty$. Si (R, μ) es un espacio de medida finita, entonces la función de distribución μ_f es acotada por $\mu(R)$ y por tanto, $f^*(t) = 0$ para cada $t \geq \mu(R)$. En este caso, podemos considerar a f^* como una función definida en el intervalo $[0, \mu(R))$. Observemos también que si μ_f es una función continua y estrictamente decreciente, entonces f^* es simplemente la inversa de μ_f en el intervalo apropiado. De hecho, para una función genérica, si primero calculamos su función de distribución μ_f y luego calculamos la función de distribución m_{μ_f} de μ_f respecto de la medida de Lebesgue m en $[0, \infty)$, obtenemos justo la función reordenada decreciente f^*. Esto es consecuencia inmediata de la identidad

$$f^*(t) = \sup\{\lambda : \mu_f(\lambda) > t\} = m_{\mu_f}(t), \quad t \geq 0,$$

lo cual se sigue de (4.3), el hecho de que μ_f sea decreciente y la definición de función de distribución.

Ejemplo 4.7. (a) Procedemos a calcular la reordenada decreciente de la función simple f dada en (4.2). Teniendo en cuenta (4.3) y la gráfica de μ_f en la Figura 4.2, vemos que $f^*(t) = 0$ si $t \geq m_3$. También vemos que si $m_3 > t \geq m_2$, entonces $f^*(t) = a_3$ y si $m_2 > t \geq m_1$, entonces $f^*(t) = a_2$ y así sucesivamente. Por tanto,

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{[m_{j-1}, m_j)}(t), \quad t \geq 0,$$

donde hemos tomado $m_0 = 0$.

Geométricamente, simplemente estamos reordenando los bloques verticales en la gráfica de f en un orden decreciente para obtener la reordenada decreciente f^* (véase la Figura 4.3).

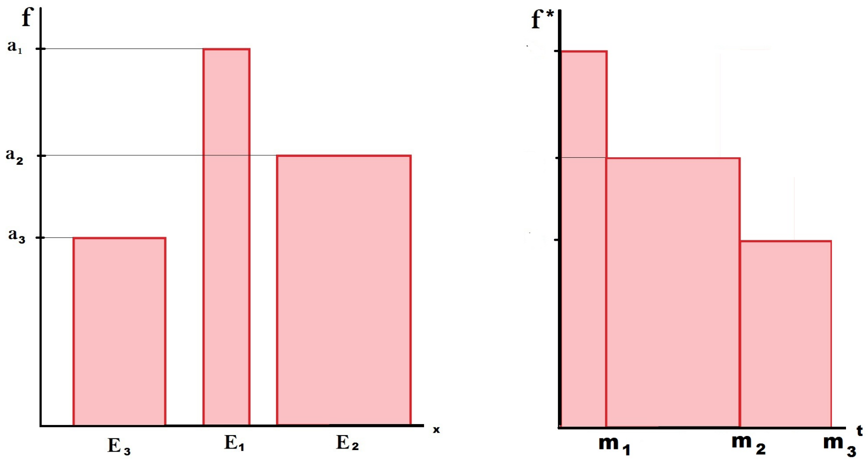

Figura 4.3: Gráficas de f y de f^*.

(b) A veces es más útil dividir la función f en bloques horizontales más que en bloques verticales. Por lo tanto, la función simple f en (4.2) también se puede escribir como :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{F_k}(x),$$

donde los coeficientes b_k son positivos y los conjuntos F_k forman una sucesión creciente $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n$ y cada uno de ellos tiene medida finita. En comparación con (4.2) obtenemos que

$$b_k = a_k - a_{k+1}, \quad F_k = \cup_{j=1}^{k} E_j, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

En este caso, la reordenada decreciente se ve que se forma deslizando los bloques en cada capa horizontal para formar un solo bloque más grande posicionado con su extremo izquierdo contra el eje vertical (véase la Figura 4.4). Por lo tanto,

$$f^* = \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{[0,\mu(F_k))}. \tag{4.4}$$

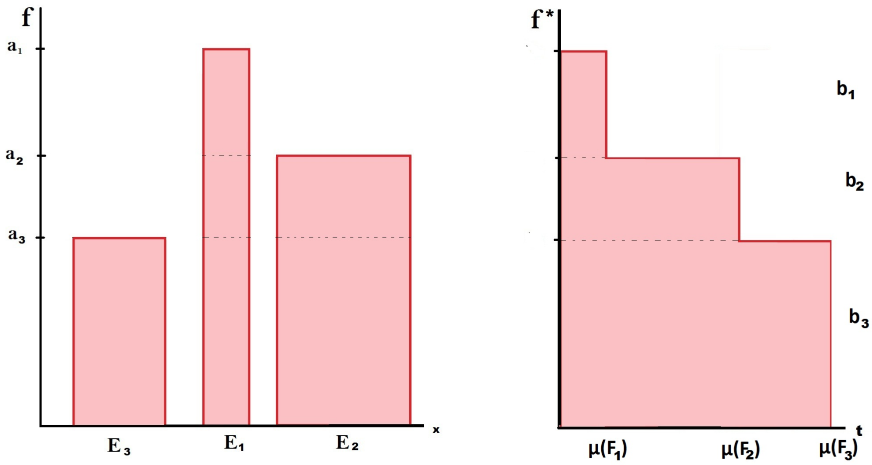

Figura 4.4: Gráficas de f y de f^*.

(c) Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = 1 - e^{-x}$. La función de distribución m_f respecto de la medida de Lebesgue m de $(0, \infty)$ es infinito para $0 \leq \lambda < 1$, e igual a cero para cada $\lambda \geq 1$. Por tanto $f^*(t) = 1$ para cada $t \geq 0$. Este ejemplo muestra que se pierde mucha información al pasar a la función reordenada decreciente. Sin embargo, esa información es irrelevante para la norma L^p (o cualquier norma invariante por reordenamiento). Esto es, la norma L^p de f y f^* es infinito si $1 \leq p < \infty$, y la norma de L^∞ de ambas funciones es igual a 1.

Proposición 4.8. *Sean f, g, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funciones de $\mathcal{M}_0(R, \mu)$ y sea a un escalar. La función reordenada decreciente f^* es no negativa, decreciente y continua por la derecha en $[0, \infty)$. Además,*

(i) *si $|g| \leq |f|$ en c.t.p., entonces $g^* \leq f^*$.*

(ii) $(af)^* = |a|f^*$.

(iii) $(f + g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2), \quad t_1, t_2 \geq 0.$

(iv) $|f| \leq \liminf_{n\to\infty} |f_n|$ *en c.t.p., entonces* $f^* \leq \liminf_{n\to\infty} f_n^*$.

En particular,

$$\textit{si } |f_n| \uparrow |f| \textit{ en c.t.p., entonces } f_n^* \uparrow f^*.$$

(v) $f^*(\mu_f(\lambda)) \leq \lambda$, *si* $\mu_f(\lambda) < \infty$ *y* $\mu_f(f^*(t)) \leq t$, *si* $f^*(t) < \infty$.

(vi) *f y f^* son equimedibles.*

(vii) $(|f|^p)^* = (f^*)^p$, *si* $0 < p < \infty$.

(viii) Si $t, s \geq 0$, *entonces* $f^*(t) \leq s$ *si y solo si* $\mu_f(s) \leq t$.

Demostración. El hecho de que f^* sea no negativa, decreciente y continua por la derecha se sigue de la Proposición 4.3 y el hecho de que f^* es en si misma sea una función de distribución. Las propiedades (i), (ii) y (iv) son consecuencia inmediata de respectivos (i), (ii) y (iv) de la Proposición 4.3 y de la definición de reordenada decreciente.

Para la propiedad (v), fijamos $\lambda \geq 0$ y supongamos que $t = \mu_f(\lambda)$ es finito. Entonces (4.3) nos da que

$$f^*(\mu_f(\lambda)) = f^*(t) = \inf\{\lambda^{'} : \mu_f(\lambda^{'})\} \leq \lambda,$$

lo que prueba la primera parte de (5). Para la segunda parte, fijamos $t \geq 0$ y supongamos que $\lambda = f^*(t)$ es finito. Entonces por (4.3), existe una sucesión $\lambda_n \downarrow \lambda$ con $\mu_f(\lambda_n) \leq t$, y por la Proposición 4.3, tenemos que μ_f es continua por la derecha, y nuevamente por la Proposición 4.3, tenemos que

$$\mu_f(f^*(t)) = \mu_f(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \mu_f(\lambda_n) \leq t.$$

Procedemos ahora a probar la propiedad (iii). Supongamos que $\lambda = f^*(t_1) + g^*(t_2)$ es finito ya que en otro caso no hay nada que probar. Sea $t = \mu_{f+g}(\lambda)$. Entonces por la desigualdad triangular en (v) obtenemos

$$\begin{aligned} t &= \mu(\{x : |f(x) + g(x)| > f^*(t_1) + g^*(t_2)\}) \\ &\leq \mu(\{x : |f(x)| > f^*(t_1)\}) + \mu(\{x : |g(x)| > g^*(t_2)\}) \\ &= \mu_f(f^*(t_1)) + \mu_g(g^*(t_2)) \\ &\leq t_1 + t_2. \end{aligned}$$

Esto muestra en particular que t es finito. Por tanto, usando la primera desigualdad en (v) y el hecho de que $(f+g)^*$ es decreciente, obtenemos

$$\begin{aligned} (f+g)^*(t_1+t_2) &\leq (f+g)^*(t) = (f+g)^*(\mu_{f+g}(\lambda)) \\ &\leq \lambda = f^*(t_1) + g^*(t_2), \end{aligned}$$

lo que establece la propiedad (iii).

Para una función arbitraria $f \in \mathcal{M}_0$, podemos encontrar una sucesión no negativa de funciones simples $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f_n \uparrow |f|$ (Teorema 2.3). Es claro que para cada n, las funciones f_n y f_n^* son equimedibles (Ejemplo 4.7 (a)), esto es,

$$\mu_{f_n}(\lambda) = m_{f_n^*}(\lambda), \quad \lambda \geq 0. \tag{4.5}$$

Pero $f_n \uparrow |f|$ y $f_n^* \uparrow f^*$ por la propiedad (iv), y la propiedad (iv) de la Proposición 4.3 aplicado a cada función de distribución en (4.5) muestra que

$$\mu_f(\lambda) = m_{f^*}(\lambda), \quad \lambda \geq 0. \tag{4.6}$$

Por tanto f y f^* son equimedibles, que es la afirmación (vi).

Finalmente, de (4.6) obtenemos que

$$\mu_{|f|^p}(\lambda) = \mu_f(\lambda^{\frac{1}{p}}) = m_{f^*}(\lambda^{\frac{1}{p}}) = m_{(f^*)^p}(\lambda), \quad \lambda \geq 0.$$

Pasando a la reordenada decreciente mediante la propiedad (vi) obtenemos la propiedad (vii).

Por último, procedemos a probar la propiedad (viii). Sean $t, s \geq 0$. Supongamos que $f^*(t) < s$. En particular, tenemos que $f^*(t) < \infty$. Aplicando la propiedad (v) tenemos que $\mu_f(f^*(t)) \leq t$. Por otra parte, por hipótesis, tenemos que $f^*(t) < s$ y por ser μ_f una función decreciente, tenemos que $\mu_f(s) \leq \mu_f(f^*(t))$. Combinando esta última desigualdad con el hecho de que $\mu_f(f^*(t)) \leq t$, tenemos que $\mu_f(s) \leq t$. Razonando de forma análoga se obtiene la otra implicación. $\square$

El siguiente resultado muestra una alternativa descripción de la norma L^p en términos de la función de distribución y la reordenada decreciente.

Proposición 4.9. *Sea $f \in \mathcal{M}_0$. Si $0 < p < \infty$, entonces*

$$\int_R |f|^p d\mu = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu_f(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty f^*(t)^p dt. \tag{4.7}$$

Además, en el caso $p = \infty$,

$$\sup_{x \in R} \operatorname{ess} |f(x)| = \operatorname{ínf}\{\lambda : \mu_f(\lambda) = 0\} = f^*(0). \tag{4.8}$$

Demostración. Sean $f \in \mathcal{M}_0$ y $0 < p < \infty$. Tenemos que

$$p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu_f(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty p\lambda^{p-1} \mu(\{x \in R : |f(x)| > \lambda\}) d\lambda.$$

Llamando $E_\lambda = \{x \in R : |f(x)| > \lambda\}$, tenemos que

$$\int_0^\infty p\lambda^{p-1}\mu(E_\lambda)d\lambda = \int_0^\infty \int_R p\lambda^{p-1}\chi_{E_\lambda} d\mu d\lambda = \int_R \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\chi_{E_\lambda} d\lambda d\mu,$$

donde hemos aplicado el Teorema de Tonelli. Ahora bien, fijado $x \in R$, tenemos que $\chi_{E_\lambda}(\lambda) = 1$ si y solo si $\lambda \in E_\lambda$, es decir, $|f(x)| > \lambda$. Por tanto

$$\int_R \int_0^\infty p\lambda^{p-1}\chi_{E_\lambda} d\lambda d\mu = \int_R \int_0^{|f(x)|} p\lambda^{p-1} d\lambda d\mu = \int_R |f(x)|^p d\mu.$$

Por otra parte, sabemos que f y f^* son equimedibles. Por lo que

$$\mu(\{x \in R : |f(x)| > \lambda\} = m(\{t \in (0, \infty) : f^*(t) > \lambda\}), \quad \forall \lambda \geq 0.$$

donde m denota la medida de Lebesgue de $(0, \infty)$. Repitiendo el mismo argumento que hemos usado anteriormente, llegamos a que

$$p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu_f(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty f^*(t)^p dt.$$

En el caso en que $p = \infty$, por la definición de la norma $\|\cdot\|_{L^\infty}$, tenemos que para cualquier $\lambda \geq \|f\|_{L^\infty}$,

$$\mu(\{x \in R : |f(x)| \geq \lambda\}) = 0,$$

de aquí se sigue que,

$$\|f\|_{L^\infty} = \text{ínf}\{\lambda : \mu_f(\lambda) = 0\}.$$

Por definición de f^*, se tiene que

$$f^*(0) = \text{ínf}\{\lambda : \mu_f(\lambda) = 0\}.$$

□

4.2. Una desigualdad de Hardy-Littlewood

Mientras que la reordenada decreciente no necesariamente preserva la suma o el producto, sin embargo, existen algunas desigualdades básicas en relación con esas operaciones como se verá en esta sección y la próxima.

El punto inicial es una desigualdad elemental que se debe a G. H. Hardy y J. E. Littlewood. Dicha desigualdad afirma que si $(a_i)_{i=1}^n$ y $(b_i)_{i=1}^n$ son dos sucesiones finitas de números no negativos, entonces

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sum_{i=1}^n a_i^* b_i^*, \tag{4.9}$$

donde $(a_i^*)_{i=1}^n$ denota la sucesión de elementos de $(a_i)_{i=1}^n$ ordenados en orden decreciente, y de forma similar se definen los $(b_i^*)_{i=1}^n$. En efecto, procedemos a probar la desigualdad (4.9) usando el método de inducción. Tenemos que para el caso $n = 1$, los vectores realmente son escalares y la desigualdad es trivial (ciertamente se da igualdad). Supongamos ahora que el resultado es cierto para n y veamos que es cierto para $n + 1$. Sean $a = (a_1, a_2, \cdots, a_{n+1})$

y $b = (b_1, b_2, \cdots, b_{n+1})$ dos vectores de $\mathbb{R}^{n+1}$ de componentes no negativas. Sean $a^*_{n+1} = \text{máx}\{a_1, \cdots, a_{n+1}\}$ y $b^*_{n+1} = \text{máx}\{b_1, b_2, \cdots, b_{n+1}\}$. Tenemos que $a^*_{n+1} = a_i$ para algún $i \in \{1, 2, \cdots, n+1\}$. Supongamos también que $b^*_{n+1} = b_i$, pues en el caso en que $b^*_{n+1} = b_j$ para algún $j \neq i$, entonces mediante una transposición $(j \mapsto i)$ en el conjunto de los índices $\{1, 2, \cdots, n+1\}$, obtenemos un nuevo vector $\bar{b}$ que es equimedible con b. Luego obtenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k =& a_i b_i + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n+1} a_k b_k = a^*_{n+1} b^*_{n+1} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n+1} a_k b_k \\ &\leq a^*_{n+1} b^*_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} a^*_k b^*_k = \sum_{k=1}^{n+1} a^*_k b^*_k,\end{aligned}$$

donde $(a^*_1, \cdots, a^*_n)$ es la reordenada decreciente de $(a_1, \cdots, \overset{\wedge}{a_i}, \cdots, a_{n+1})$ y de forma similar se definen los $(b^*_1, \cdots, b^*_n)$, y para obtenerlos hemos aplicado la hipótesis de inducción.

En otras palabras, la suma alcanza su valor máximo cuando los términos de cada sucesión están ordenados en orden decreciente.

A menudo será conveniente considerar una sucesión $(a_i)_{i=1}^n$ como una función simple $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{[i-1,i)}$ definida en el intervalo $[0, \infty)$. En ese caso, como el Ejemplo 4.7 (a) muestra, la reordenada decreciente f^* de f es justo la función simple $f^* = \sum_{i=1}^n a^*_i \chi_{[i-1,i)}$ correspondiente a la sucesión reordenada $(a^*_i)_{i=1}^n$. Visto de esta manera, la desigualdad (4.9) es un caso particular de una desigualdad integral más general (4.11) que se enuncia en el Teorema 4.11 de abajo.

Lema 4.10. *Sean g una función simple no negativa en (R, μ) y E un subconjunto medible de R. Entonces*

$$\int_E g\, d\mu \leq \int_0^{\mu(E)} g^*(s)\, ds. \tag{4.10}$$

Demostración. Podemos expresar g en la forma

$$g = \sum_{i=1}^n b_i \chi_{F_i},$$

donde $F_1 \subset \cdots \subset F_n$ y los coeficientes b_i son todos positivos (véase Ejemplo (4.7) (b)). Usando la formulación (4.4) para la reordenada decreciente obtenemos

$$\begin{aligned}\int_E g d\mu &= \sum_{i=1}^{n} b_i \mu(E \cap F_i) \leq \sum_{i=1}^{n} b_i \min\{\mu(E), \mu(F_i)\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_i \int_0^{\mu(E)} \chi_{[0,\mu(F_i))}(s) ds = \int_0^{\mu(E)} g^*(s) ds.\end{aligned}$$

□

Teorema 4.11. *(G. H. Hardy y J. E. Littlewood)*
Si $f, g \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$, entonces

$$\int_R |fg| d\mu \leq \int_0^\infty f^*(s) g^*(s) ds. \tag{4.11}$$

Demostración. Dado que f^* y g^* dependen únicamente del valor absoluto de f y g respectivamente, es suficiente probar la desigualdad (4.11) para funciones f y g no negativas.

En primer lugar, supongamos que f y g son funciones simples. En ese caso, podemos escribir,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{E_j}(x),$$

donde $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_m$ y $a_j > 0$, $j = 1, \cdots, m$. Entonces,

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{[0,\mu(E_j))}(t).$$

Por tanto, por el Lema 4.10, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_R |fg| d\mu &= \sum_{j=1}^{M} a_j \int_{E_j} g d\mu \leq \sum_{j=1}^{m} a_j \int_0^{\mu(E_j)} g^*(s) ds \\ &= \int_0^\infty \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{[0,\mu(E_j))}(s) g^*(s) ds \\ &= \int_0^\infty f^*(s) g^*(s) ds.\end{aligned}$$

Sean ahora f y g funciones medibles no negativas arbitrarias. Tenemos que existen dos sucesiones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples medibles no negativas tales que $f_n \uparrow f$ y $g_n \uparrow g$ (Teorema 2.3). Teniendo en cuenta la propiedad (iv) de la Proposición 4.8, tenemos que $f_n^* \uparrow f^*$ y $g_n^* \uparrow g^*$.

Observemos que fijado $m \in \mathbb{N}$, tenemos por el Teorema de la Convergencia Monótona y por lo probado anteriormente, que

$$\begin{aligned}\int_R |fg_m|d\mu = \int_R fg_m d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_R f_n g_m d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n^*(s) g_m^*(s) ds \\ = \int_0^\infty f^*(s) g_m^*(s) ds.\end{aligned}$$

Como lo anterior es cierto para cada $m \in \mathbb{N}$, tomando límite cuando $m \to \infty$ tenemos que

$$\begin{aligned}\int_R |fg|d\mu = \int_R fg d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_R f g_m d\mu \leq \lim_{m\to\infty} \int_0^\infty f^*(s) g_m^*(s) ds \\ = \int_0^\infty f^*(s) g^*(s) ds.\end{aligned}$$

$\square$

Una consecuencia inmediata de la Desigualdad de Hardy-Littlewood (4.11) es que

$$\int_R |f\overline{g}|d\mu \leq \int_0^\infty f^*(s) g^*(s) ds, \tag{4.12}$$

para cualquier función $\overline{g}$ definida en R equimedible con g. En el caso en que f y g son sucesiones finitas, como en (4.9), es claro que la igualdad se da en (4.12) para una $\overline{g}$ adecuada. En efecto, esa $\overline{g}$ evidentemente se obtiene de g mediante una apropiada permutación del conjunto $\{1, \cdots, n\}$. Sin embargo, esto no suele ocurrir en espacios de medida más generales y se hace necesario aislar aquellas clases de espacios de medida que verifican propiedades semejantes.

Se puede desarrollar la teoría bajo una condición más débil que la de alcanzar la igualdad en (4.12). Lo que hace falta es que el supremo de las integrales en la izquierda de (4.12) coincida con el valor en la derecha de (4.12); esos espacios de medida se definirán como *resonante*. En el caso en que el supremo se alcanza, entonces el espacio de medida en cuestión se llamará *fuertemente resonante*.

Naturalmente, necesitamos conocer qué espacios de medida tienen estas propiedades de resonancia. Veremos que un espacio de medida σ-finito es resonante si y solo si es no atómico o es completamente atómico con los átomos teniendo la misma medida, como también veremos que los espacios fuertemente resonantes son justamente aquellos resonantes de medida finita.

Definición 4.12. Un espacio de medida σ-finito (R,μ) se dice que es resonante si para cada f y g en $\mathcal{M}_0(R,\mu)$ se cumple la identidad

$$\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt = \sup \int_R |f\overline{g}|d\mu, \tag{4.13}$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones $\overline{g}$ definidas sobre R equimedibles con g.

De forma similar, se dice que (R,μ) es fuertemente resonante si para cada par de funciones f y g en $\mathcal{M}_0(R,\mu)$, existe una función $\overline{g}$ definida en R equimedible con g tal que

$$\int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt = \int_R |f\overline{g}|d\mu \tag{4.14}$$

Ejemplo 4.13. (a) Es claro de (4.12) que cualquier espacio de medida fuertemente resonante es resonante. Sin embargo, el recíproco es falso. En efecto, veremos en el Teorema 4.16 que el intervalo $[0,\infty)$ con la medida de Lebesgue es resonante, pero el siguiente ejemplo muestra que no es fuertemente resonante. Sea f la función descrita, en el Ejemplo 4.7 (c), $f(x) = 1 - e^{-x}$. Vimos que $f^* \equiv 1$. Sea $g = g^* = \chi_{[0,1)}$. Si $\overline{g}$ es equimedible con g, entonces $|\overline{g}|$ es la función característica de algún subconjunto E de $(0,\infty)$ de medida 1 (Lema 4.5). Pero entonces

$$\int_R |f\overline{g}|d\mu = \int_E (1-e^{-x})dx < 1 = \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt,$$

con lo que la igualdad nunca se alcanza.

(b) Vamos a ver ahora un ejemplo de un espacio que no es resonante. Sea (R,μ) con $R = \{a,b\}$ y $\mu(a) = 1$ y $\mu(b) = 2$. Sea $f = \chi_b$ y $g = \chi_a$. Entonces $f^* = \chi_{[0,2)}$ y $g^* = \chi_{[0,1)}$, entonces $\int f^*g^* = 1$. Pero $\int |f\overline{g}| = 0$ para cualquier $\overline{g}$ equimedible con g porque f y $\overline{g}$ tienen que tener suporte disjunto. Este argumento muestra el hecho de que ningún espacio de medida que contiene dos átomos con medida positiva pero no igual puede ser resonante.

Lema 4.14. *Sea (R,μ) un espacio de medida finito no atómico. Sean una función $f \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$ y $t \in \mathbb{R}$ con $0 \le t \le \mu(R)$. Entonces existe un conjunto medible E_t, con $\mu(E_t) = t$, tal que*

$$\int_{E_t} |f|d\mu = \int_0^t f^*(s)ds. \tag{4.15}$$

Además, los conjuntos E_t pueden construirse que sean crecientes con t. Es decir, si $0 \le s \le t \le \mu(R)$, entonces $E_s \subset E_t$.

Demostración. Vamos a considerar dos casos dependiendo de si t pertenece o no al rango de la función de distribución μ_f de t.

Supongamos en primer lugar que existe $\alpha > 0$ tal que $\mu_f(\alpha) = t$. En ese caso, se sigue de (4.3) que

$$f^*(t) = \text{ínf}\{\lambda : \mu_f(\lambda) = t\},$$

y por la continuidad por la derecha de μ_f (Proposición 4.3) tenemos que $\mu_f(f^*(t)) = t$. Equivalentemente, el conjunto $E_t = \{x : |f(x)| > f^*(t)\}$ tiene medida $\mu(E_t) = t$, y esto muestra que la función de distribución de la función $f\chi_{E_t}$ viene dada por

$$\mu(\{x \in E_t : |f(x)| > \lambda\}) = \begin{cases} \mu_f(\lambda), & \text{si} \quad \lambda > f^*(t) \\ \\ t, & \text{si} \quad 0 \leq \lambda \leq f^*(t). \end{cases}$$

Pero f y f^* son equimedibles, con lo que $\mu_f = m_{f^*}$. Por tanto, $f\chi_{E_t}$ y $f^*\chi_{[0,t)}$ son equimedibles. En particular, por la Proposición 4.9, tenemos que

$$\int_{E_t} |f| d\mu = \int_R |f\chi_{E_t}| d\mu = \int_0^\infty f^*(s)\chi_{[0,t)}(s) ds = \int_0^t f^*(s) ds.$$

Por tanto, se cumple (4.15). Observemos que E_t crece con t.

Ahora vamos a considerar el caso en que t no esta en el rango de μ_f. Observemos que al ser $\mu(R)$ finito y $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$, por el Teorema de la Convergencia Dominada, tenemos que

$$0 = \mu(\{x : |f(x)| = \infty\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(\{x : |f(x)| > n\}) = \lim_{n\to\infty} \mu_f(n),$$

dado que μ_f es decreciente, tenemos que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mu_f(\lambda) = 0. \tag{4.16}$$

Sea $\lambda_0 = f^*(t)$ y supongamos que $\lambda_0 > 0$. Como $t > 0$, se sigue de (4.3) y (4.16) que λ_0 es finito. Dado que t no está en el rango de μ_f, tenemos de la propiedad (v) de la Proposición 4.8 y de (4.3) que $\mu_f(\lambda_0) < t < \mu_f(\lambda)$ para $0 < \lambda < \lambda_0$. Por tanto, si t_1 denota el límite por la izquierda $\mu_f(\lambda_0-)$ que sabemos que existe por ser μ_f decreciente, entonces

$$t_0 \equiv \mu_f(\lambda_0) < t \leq \mu_f(\lambda_0-) = t_1. \tag{4.17}$$

Esto, junto (4.3), muestra el hecho de que

$$f^*(s) = \lambda_0, \qquad t_0 \leq s < t_1, \tag{4.18}$$

Además,

$$t_1 = \{x : |f(x)| > \lambda_0\}, \tag{4.19}$$

Para ver esto, necesitamos expresar el conjunto de la derecha como intersección de la sucesión decreciente de los conjuntos

$$F_n = \left\{x : |f(x)| > \lambda_0 - \frac{1}{n}\right\}, \quad n = 1, 2, \cdots ,$$

observemos que al ser $\mu(R)$ finito, y usando el Teorema de la Convergencia Dominada, tenemos que

$$\mu(\{x : |f(x)| \geq \lambda_0\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(\lambda_0 - \frac{1}{n}) = \mu_f(\lambda_0).$$

Se sigue de (4.17) y (4.19) que el conjunto $G = \{x : |f(x)| = \lambda_0\}$ tiene medida $t_1 - t_0$. Dado que (R, μ) no es atómico, podemos elegir subconjuntos F_t de G con medida $t - t_0$ (obsérvese que hay libertad de elegir $t < t_1$). Los conjuntos E_t definidos por la unión disjunta

$$E_t = \{x : |f(x)| > \lambda_0\} \cup F_t, \tag{4.20}$$

tienen medida $\mu_f(\lambda_0) + (t - t_0) = t$, como queríamos. Es más,

$$\int_{E_t} |f|d\mu = \int_{|f|>\lambda_0} |f|d\mu + \int_{F_t} |f|d\mu. \tag{4.21}$$

Ahora, por (4.17), el valor t_0 pertenece al rango de μ_f. La primera parte de la prueba muestra por tanto que la primera integral en la parte derecha de (4.21) tiene valor $\int_0^{t_0} f^*(s)ds$. También, como $|f| = \lambda_0$ en F_t, la segunda integral tiene valor

$$\lambda_0\mu(F_t) = \lambda_0(t - t_0) = \int_{t_0}^{t} f^*(s)ds,$$

por (4.18). Combinando estos resultados con (4.21), obtenemos (4.15).

En caso en que λ_0, obtenemos la desigualdad $\mu(\{x : |f(x)| > 0\} \equiv t_0 < t$ en el lugar de (4.17). En ese caso, podemos tomar F_t disjuntos con el soporte de f con medida $\mu(F_t) = t - t_0$. Definiendo nuevamente E_t por (4.20), y observando que $f^*(s) = 0$ para $s \geq t_0$, obtenemos (4.15) como antes:

$$\int_{E_t} |f|d\mu = \int_0^{t_0} f^*(s)ds = \int_0^{t} f^*(s)ds.$$

Observemos que en la primera parte de la prueba, los conjuntos E_t son crecientes con t para todos los t en el rango de μ_f. Para los otros valores de t, es elemental mostrar que los conjuntos F_t en la segunda parte de la prueba se pueden tomar de manera que sean crecientes con t (en cada intervalo $(t_0, t_1]$ en el complementario del rango de μ_f) obteniendo de este modo lo que queríamos. □

Ahora estamos en condiciones para caracterizar los espacios de medida que son resonantes y fuertemente resonantes.

Teorema 4.15. *Un espacio de medida σ-finito (R, μ) es fuertemente resonante si y solo si tiene medida finita y es uno de los siguientes tipos:*

(i) no es atómico;

(ii) completamente atómico y todos los átomos tienen la misma medida.

Demostración. En primer lugar veamos la suficiencia. Por lo tanto, dadas $f, g \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$, tenemos que encontrar una función $\overline{g}$ equimedible con g tal que

$$\int_R |f\overline{g}d\mu = \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt. \tag{4.22}$$

Es claro que podemos suponer que f y g son no negativas.

Si (R, μ) tienen medida finita y es del tipo (ii), entonces una $\overline{g}$ adecuada se puede construir a partir de g simplemente mediante una permutación de los átomos. En efecto, la permutación que buscamos es la composición de la inversa de la permutación que lleva f en f^* con la permutación que lleva g a g^*. Por tanto solo necesitamos considerar el caso en que (R, μ) no es atómico y tiene medida finita.

Sea $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de funciones simples no negativas tal que $g_n \uparrow g$ en c.t.p. (Teorema 2.3). Vamos a construir un sucesión creciente $\{\overline{g}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples no negativas tal que $\overline{g}$ es equimedible con g_n y

$$\int_R |f\overline{g}|d\mu = \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{4.23}$$

Por la propiedad (iv) de la Proposición 4.3, la función $\overline{g}(x) = \lim_{n\to\infty} \overline{g}_n(x)$ es equimedible con g, y por (4.22) se sigue de (4.23), de la propiedad (iv) de la Proposición 4.8 y del Teorema de la Convergencia Monótona. Nos queda entonces construir la sucesión de funciones simples $\{\overline{g}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con las propiedades deseadas.

Fijamos $n = 1, 2, \cdots$ y, para ahorrar en notación, sea $h = g_n$. Como en el Ejemplo 4.7 (b), podemos escribir,

$$h = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{F_j},$$

donde $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n$ y $b_j > 0$ para cada $j = 1, \cdots, m$. Entonces, por el Lema 4.14, existe una sucesión $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_m$ con $\mu(E_j) = \mu(F_j)$ y

$$\int_{E_j} f d\mu = \int_0^{\mu(F_j)} f^*(t)dt, \quad j = 1, \cdots, m. \tag{4.24}$$

Si definimos

$$\overline{h} = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{E_j},$$

entonces, como en (4.4), las reordenadas decrecientes de h y $\overline{h}$ vienen dadas por

$$h^* = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{[0,\mu(F_j))} = (\overline{h})^*,$$

Por tanto, h y $\overline{h}$ son equimedibles. Es más, de (4.24), tenemos que

$$\begin{aligned}\int f\overline{g}d\mu &= \sum_{j=1}^{m} b_j \int_{E_j} f d\mu = \sum_{m=1}^{m} b_j \int_0^{\mu(F_j)} f^*(t)dt \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{[0,\mu(F_j))}(t) f^*(t)dt \\ &= \int_0^{\infty} f^*(t)h^*(t)dt,\end{aligned}$$

Así que si vemos que $\overline{g_n} = \overline{h}$, entonces $\overline{g}$ sería equimedible con g_n,y la última igualdad por tanto muestra que se cumple (4.23). Finalmente, dado que g_n crece con n, es claro de la última afirmación del Lema 4.14 que los conjuntos E_j en (4.24) pueden ser construidos de manera que sean crecientes con n, y por tanto la sucesión de funciones $\overline{g}_n$ sería creciente. Como dijimos anteriormente, esto muestra que (R, μ) es fuertemente resonante.

Obsérvese que si (R, μ) es un espacio de medida resonante, entonces el argumento en el Ejemplo 4.13 (b) muestra que los átomos, si existen, todos tienen la misma medida. Esencialmente el mismo argumento muestra que (R, μ) no puede ser una mezcla de una parte atómica no trivial con una completamente no atómica. Por tanto, un espacio de medida resonante tiene que ser del tipo (i) o (ii). Pero si (R, μ) es fuertemente resonante, entonces $\mu(R)$ tiene que ser finito, en otro caso podríamos construir un ejemplo siguiendo la misma idea que en el Ejemplo 4.13 (a). $\square$

Teorema 4.16. *Un espacio de medida σ-finito (R, μ) es resonante si y solo si es uno de los siguientes tipos:*

(i) es no atómico;

(ii) es completamente atómico y todos los átomos tienen la misma medida.

Demostración. la condición necesaria se estableció en la prueba del teorema anterior. Para la suficiencia, dadas f y g en $\mathcal{M}_0(R,\mu)$, tenemos que ver (4.13). Claramente, podemos suponer que f y g son no negativas. También podemos suponer en el lado izquierdo de la igualdad (4.13) es positivo, pues en otro caso no hay nada que probar. Por tanto es suficiente mostrar que para cada α que cumple

$$0 < \alpha < \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt, \tag{4.25}$$

existe una función $\overline{g}$ no negativa equimedible con g tal que

$$\alpha < \int_R f\overline{g}d\mu. \tag{4.26}$$

Dado que (R,μ) es σ-finito, existe una sucesión creciente de conjuntos medibles $\{R_n\}_{n\mathbb{N}}$ tal que su unión es R. Sean $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de funciones simples con f_n y g_n con soporte en R_n , y tales que $f_n \uparrow f$ y $g_n \uparrow g$ (Teorema 2.3). Por la propiedad (v) de la Proposición 4.8, el Teorema de la Convergencia Monótona y (4.25), existe N tal que

$$\alpha < \int_0^\infty f_N^*(t)g_N^*(t)dt. \tag{4.27}$$

Ahora el espacio de medida (R_N,μ) es del tipo considerado en el teorema anterior, y por tanto es fuertemente resonante. Por tanto podemos encontrar una función no negativa h definida en R_N, equimedible con $g\chi_{R_N}$, tal que

$$\int_{R_N} fhd\mu = \int_0^{\mu(R_N)} (f\chi_{R_n})^*(t)(g\chi_{R_n})^*(t)dt.$$

Pero $f\chi_{R_N} \geq f_N$ y $g\chi_{R_N} \geq g_N$, entonces la última identidad combinada junto (4.27) nos dan

$$\alpha < \int_R fhd\mu, \tag{4.28}$$

donde hemos extendido h a todo R anulándola fuera de R_N. Entonces si consideramos

$$\overline{g} = h\chi_{R_N} + g\chi_{R\setminus R_N},$$

entonces $\overline{g}$ es equimedible con g y $\overline{g} \geq h$. Por tanto, por (4.28),

$$\alpha < \int_R fhd\mu \leq \int_R f\overline{g}d\mu.$$

Esto establece (4.26) y por tanto completa la prueba. $\square$

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Teorema 4.15 y del Teorema 4.16.

Corolario 4.17. *Un espacio de medida σ-finito (R, μ) es fuertemente resonante si y solo si es resonante y $\mu(R)$ es finito.*

4.3. Una función maximal elemental

Cuando g es la función característica de un conjunto medible E de medida positiva t, entonces por la Desigualdad de Hardy-Littlewood (4.11) tenemos que

$$\int_E |f| d\mu \leq \int_0^t f^*(s) ds, \quad f \in \mathcal{M}_0.$$

Equivalentemente,

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E |f| d\mu \leq \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds, \quad f \in \mathcal{M}_0. \tag{4.29}$$

Lo anterior nos dice que el promedio de $|f|$ sobre cualquier conjunto medible de medida t esta dominado por el correspondiente promedio de f^* en el intervalo $(0, t)$. Obsérvese que el último promedio es también maximal entre todos los promedios de f^* sobre cualquier medida de conjunto de medida t (esto se sigue directamente del hecho de que la función f^* es decreciente o del caso especial de (4.29) en que (R, μ) es tal que $R = [0, \infty)$ y μ es la medida de Lebesgue y $f = f^*$). Por esta razón, a la función de la derecha en la desigualdad (4.29) se conoce como función maximal. Dado que figurará de manera prominente en el análisis posterior, introducimos una notación separada de la siguiente manera.

Definición 4.18. Sea $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$. Se define la función maximal de f, y se denota f^{**}, como

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds, \quad t > 0. \tag{4.30}$$

Algunas propiedades de la función f^{**} vienen recogidas en la siguiente proposición.

Proposición 4.19. *Sean $f, g, \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ funciones de $\mathcal{M}_0(R, \mu)$, y sea a un escalar cualquiera. Entonces f^{**} es una función no negativa, decreciente y continua en $(0, \infty)$. Además, se verifican las siguientes propiedades;*

(i) $f^{**} \equiv 0$ si y solo si $f = 0$ en c.t.p.;

(ii) $f^* \leq f^{**}$*;*

(iii) si $|g| \leq |f|$ *en c.t.p., entonces* $g^{**} \leq f^{**}$*;*

(iv) $(af)^{**} = |a| f^{**}$*;*

(v) si $|f_n| \uparrow |f|$ *en c.t.p., entonces* $f_n^{**} \uparrow f^{**}$*.*

Demostración. Observemos que al ser f^* una función decreciente, entonces sucede que f^{**} es finita en algún $t > 0$ si y solo si es finita para cualquier $t > 0$. En efecto, supongamos que f^{**} es finita para algún $t > 0$, y sea $s > 0$ con $s \leq t$. Entonces

$$f^{**}(s) = \frac{1}{s}\int_0^s f^*(u)du \leq \frac{1}{s}\int_0^t f^*(u)du = \frac{t}{s}\frac{1}{t}\int_0^t f^*(u)du = \frac{t}{s} f^{**}(t) < \infty.$$

En el caso en que $t < s$, tenemos que

$$\begin{aligned} f^{**}(s) =& \frac{1}{s}\int_0^s f^*(u)du = \frac{1}{s}\int_0^t f^*(u)du + \frac{1}{s}\int_t^s f^*(u)du \\ \leq& \frac{1}{t}\int_0^t f^*(u)du + \frac{1}{s}\int_t^s f^*(t)du = f^{**}(t) + \frac{s-t}{s} f^*(t). \end{aligned}$$

La otra implicación es trivial. Luego esto nos dice que f^{**} es finita en cualquier $t > 0$ o es infinita en cualquier $t > 0$. En ambos casos, la función f^{**} es no negativa y continua.

Sean ahora $0 < t_1 \leq t_2$. Tenemos que $f^*(s) \leq f^*(\frac{st_1}{t_2})$ para cada $s \geq 0$, por ser f^* decreciente. Luego

$$f^{**}(t_2) = \frac{1}{t_2}\int_0^{t_2} f^*(s)ds \leq \frac{1}{t_2}\int_0^{t_2} f^*\left(\frac{st_1}{t_2}\right)ds. \tag{4.31}$$

Mediante un cambio de variable $u = \frac{st_1}{t_2}$, tenemos que $du = \frac{t_1}{t_2}ds$, es decir, $ds = \frac{t_2}{t_1}du$. Luego

$$\frac{1}{t_2}\int_0^{t_2} f^*\left(\frac{st_1}{t_2}\right)ds = \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} f^*(u)du = f^{**}(t_1). \tag{4.32}$$

Combinando (4.31) con (4.32), obtenemos justamente que $f^{**}(t_2) \leq f^{**}(t_1)$.

La propiedad (ii) sigue del hecho de que f^* es una función decreciente. En efecto, sea $t > 0$. Entonces

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds \geq \frac{1}{t}\int_0^t f^*(t)ds = f^*(t).$$

Las propiedades (i), (iii), (iv) y (v) son más o menos consecuencia inmediata de esas mismas propiedades pero para la reordenada decreciente f^* en la Proposición 4.8. □

Volvamos ahora la Desigualdad de Hardy-Littlewood (4.11). Cuando E varía en todos los conjuntos medibles de medida t, necesitaremos saber si el valor de las integrales en la izquierda se aproxima, o se alcanza, el valor fijo $f^{**}(t)$ en la derecha.

Proposición 4.20. *Sea (R, μ) un espacio de medida σ-finito y sea t un número positivo cualquiera en el rango de μ. Sea $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$.*

(a) Si (R, μ) es resonante, entonces

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \sup \left\{ \int_E |f| d\mu : \mu(E) = t \right\}. \tag{4.33}$$

(b) Si (R, μ) es fuertemente resonante, entonces existe un subconjunto medible E de R, con $\mu(E) = t$ tal que

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_E |f| d\mu. \tag{4.34}$$

Demostración. Dado que t está en el rango de μ, tenemos que existe un subconjunto medible F de R con medida $\mu(F) = t$. Sea $g = \chi_F$, entonces $g^* = \chi_{[0,t)}$. Pero una función $\overline{g}$ es equimedible con g si y solo si $|\overline{g}|$ es igual en c.t.p. a la función característica de un conjunto medible E, de medida $\mu(E) = \mu(F) = t$ (Lema 4.5). Con esta observación, es claro que (4.33) y (4.33) son consecuencia inmediata de (4.13) y (4.14) respectivamente. $\square$

Obsérvese que (4.33) implica una cierta propiedad de subaditividad del operador maximal $f \mapsto f^{**}$. Esto es,

$$(f + g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t), \tag{4.35}$$

en el caso en que t está en el rango de μ y (R, μ) es resonante.

Ahora si (R, μ) no es atómico, el Teorema 4.16 nos dice que (R, μ) es resonante. Si además el espacio tiene medida finita, entonces el rango de μ es todo el intervalo $[0, \infty)$ y por tanto (4.35) se cumple para cualquier $t > 0$. No es difícil llegar a la misma conclusión para espacios de medida no atómicos de medida finita. En efecto, si $t_0 = \mu(R)$ es finito, entonces (4.35) se cumple para cualquier $0 < t \leq t_0$. En ese caso, f^* se anula fuera del intervalo $[0, t_0)$, entonces si $t > t_0$, entonces

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^{t_0} f^*(s) ds = \frac{t_0}{t} f^{**}(t_0).$$

Por tanto, $f^{**}(t)$, satisface (4.35) porque $f^{**}(t_0)$ lo hace. Con lo que acabamos de probar que (4.35) se cumple para cualquier $t > 0$ cuando (R, μ) no es atómico.

La subaditividad del operador maximal para un espacio de medida arbitrario puede derivarse del resultado anterior para espacios de medida no atómicos aplicando el llamado *método de retractos*. Este procedimiento nos permite incluir un espacio de medida σ-finito (R, μ) arbitrario dentro de un espacio de medida no atómico $(\overline{R}, \overline{\mu})$. Como veremos en el Teorema 4.21, la subaditividad del operador maximal en (R, μ) será consecuencia inmediata de la subaditividad del operador maximal en $(\overline{R}, \overline{\mu})$.

La construcción de $(\overline{R}, \overline{\mu})$ es como sigue. Si (R, μ) es un espacio de medida σ-finito arbitrario, entonces R se puede expresar como una unión disjunta

$$R = R_0 \cup (\cup_j A_j),$$

donde R_0 no tiene átomos, y A_j es un átomo de medida positiva finita (de los cuales hay una cantidad a lo sumo numerable porque (R, μ) es σ-finito). Sea

$$\overline{R} = R_0 \cup (\cup_j I_j),$$

donde I_j son subintervalos disjuntos de $\mathbb{R}$ satisfaciendo $m(I_j) = \mu(A_j)$ para cada j (en el caso en que R_0 sea un subintervalo de $\mathbb{R}$, vamos a suponer que los intervalos I_j pertenecen a diferentes copias de la recta real. Lo importante es que los intervalos I_j deben ser disjuntos dos a dos, y también disjuntos con R_0).

Un subconjunto de $\overline{R}$ se considerará medible si su intersección con R_0 es un conjunto μ-medible y su intersección con cada uno de los I_j es un medible Lebesgue. Claramente, la colección de todos esos conjuntos medibles forman una σ-álgebra, entonces si definimos $\overline{\mu}$ sobre esta σ-álgebra en la manera obvia

$$\overline{\mu}(E) = \mu(E \cap R_0) + \sum_j m(E \cap I_j),$$

así $(\overline{R}, \overline{\mu})$ es evidentemente un espacio de medida σ-finito no atómico.

Para cada $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$, sea $\zeta_1 f$ la función en $\mathcal{M}_0(\overline{R}, \overline{\mu})$ que coincide con f en R_0 y supongamos que es constante en cada I_j y el valor de la constante coincide con el valor de f en A_j. Entonces f y $\zeta_1 f$ son equimedibles, y por tanto

$$(\zeta_1 f)^* = f^*, \quad (\zeta_1 f)^{**} = f^{**}. \tag{4.36}$$

Teorema 4.21. *Sea (R, μ) un espacio de medida σ-finito y sean f y g funciones de $\mathcal{M}_0(R, \mu)$. Entonces*

$$(f + g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t), \qquad 0 < t < \infty. \tag{4.37}$$

Demostración. La aplicación ζ_1 es lineal, entonces $\zeta_1(f+g)=\zeta_1 f+\zeta_1 g$. Pero $(\overline{R},\overline{\mu})$ es no atómico, entonces

$$[\zeta_1(f+g)]^{**}(t)=[\zeta_1 f+\zeta_1 g]^{**}(t)\leq[\zeta_1 f]^{**}(t)+[\zeta_1 g]^{**}(t),$$

por la observación hecha anteriormente de que (4.35) es cierta para cada $t>0$ en el caso en que el espacio de medida es no atómico. Se tiene que la desigualdad (4.37) se sigue inmediatamente de lo anterior y teniendo en cuenta la segunda igualdad de(4.36). □

Aunque el operador $f\mapsto f^*$ satisface una relación más débil, la propiedad (iii) de la Proposición 4.8, dicho operador no es subaditivo. En efecto, si consideramos por ejemplo las funciones $f=\chi_{[0,1)}$ y $g=\chi_{[1,2)}$ tenemos que f y g son equimedibles, por lo que tienen la misma reordenada decreciente, $f^*(t)=g^*(t)=\chi_{[0,1)}$. Sin embargo, tenemos que $f+g=\chi_{[0,2)}$, y su reordenada decreciente es $(f+g)^*=\chi_{[0,2)}$. Por tanto se tiene que

$$(f+g)^*\left(\frac{3}{2}\right)=1\geq 0+0=f^*\left(\frac{3}{2}\right)+g^*\left(\frac{3}{2}\right),$$

con lo que el operador $f\mapsto f^*$ no es subaditivo.

En cambio, la función maximal desempeñara un papel decisivo. Esto es particularmente cierto en conexión con la estructura de orden de los espacios invariantes por reordenamientos que serán introducidos en la siguiente sección. Ahí, el orden puntual $f_1^*\leq f_2^*$ no es tan crucial como lo es la débil relación $f_1^{**}\leq f_2^{**}$ entre las funciones maximales.

Definición 4.22. Sean f_1 y f_2 funciones de $\mathcal{M}_0(R,\mu)$. Escribimos $f_1\prec f_2$ si $f_1^{**}\leq f_2^{**}$, esto es, si

$$\int_0^t f_1^*(s)ds\leq\int_0^t f_2^*(s)ds, \tag{4.38}$$

para cada $t>0$.

La relación $\prec$, que se conoce como la relación de Hardy-Littlewood-Pólya, será a menudo explotada en conjunto con los siguientes resultados.

Proposición 4.23. *(Lema de Hardy)*

Sean f_1 y f_2 funciones medibles no negativas definidas en $(0,\infty)$ y supongamos que

$$\int_0^t f_1(s)ds\leq\int_0^t f_2(s)ds, \tag{4.39}$$

para cada $t>0$. Sea g una función decreciente no negativa en $(0,\infty)$. Entonces,

$$\int_0^\infty f_1(s)g(s)ds\leq\int_0^\infty f_2(s)g(s)ds. \tag{4.40}$$

Demostración. Un simple argumento usando el Teorema de la Convergencia Monótona muestra que es suficiente probar el resultado para una función simple medible no negativa g. En ese caso, g se puede expresar en la forma

$$g(s) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{(0,t_j)}(s),$$

donde los coeficientes a_j son positivos y $0 < t_1 < \cdots < t_n$. Usando (4.39), obtenemos que

$$\int_0^\infty f_1(s)g(s)ds = \sum_{j=1}^{n} a_j \int_0^{t_j} f_1(s)ds \leq \sum_{j=1}^{n} a_j \int_0^{t_j} f_2(s)ds = \int_0^\infty f_2(s)g(s)ds,$$

lo que establece (4.40). □

Recordemos nuestra discusión sobre el método de los retractos donde habíamos definido un aplicación ζ_1 de $\mathcal{M}_0(R,\mu)$ en $\mathcal{M}_0(\overline{R},\overline{\mu})$. Ahora vamos a definir el operador "inverso" de $\mathcal{M}_0(\overline{R},\overline{\mu})$ en las funciones medibles de (R,μ) de la siguiente forma

$$\zeta_2(\overline{f}) = \overline{f}\chi_{R_0} + \sum_j \left[\frac{1}{m(I_j)}\int_j \overline{f}dm\right]\chi_{A_j}, \tag{4.41}$$

para cada $\overline{f}$ en $\mathcal{M}_0(\overline{R},\overline{\mu})$. Observemos que $\zeta_2(\overline{f})$ no pertenece a $\mathcal{M}_0(R,\mu)$ al menos que $\overline{f}$ sea integrable en cualquier intervalo I_j. Sin embargo, es claro que

$$\zeta_2\zeta_1 f = f, \tag{4.42}$$

para cada $f \in \mathcal{M}(R,\mu)$.

En la otra dirección, no es cierto en general que $\zeta_1\zeta_2\overline{f}$ coincida con $\overline{f}$ dado que $\overline{f}$ no tiene por qué ser constante en los intervalos I_j. Por la misma razón, no hay una relación de orden puntual entre estas funciones o entre sus reordenadas decrecientes. Sin embargo, podemos afirmar que

$$\zeta_1\zeta_2\overline{f} \prec \overline{f}, \tag{4.43}$$

para cualquier $\overline{f}$ en $\mathcal{M}_0(\overline{R},\overline{\mu})$ (dado que $\overline{f}$ es integrable en cualquier I_j). Esto se sigue del siguiente resultado porque $\zeta_1\zeta_2$ es un operador promedio del tipo descrito debajo y $\mathcal{M}_0(\overline{R},\overline{\mu})$ es no atómico, por tanto, resonante por el Teorema 4.16.

Proposición 4.24. *Sean (R,μ) un espacio de medida resonante y $\{E_j\}_{j\in J}$ una familia numerable de subconjuntos de R disjuntos dos a dos y cada uno* *de ellos con medida positiva y finita. Sean $E = R \setminus \cup_j E_j$ y $f \in \mathcal{M}_0(R,\mu)$ siendo f integrable en cada E_j. Sea*

$$Af = f\chi_E + \sum_{j\in J}\left(\frac{1}{\mu(E_j)}\int_{E_j} f d\mu\right)\chi_{E_j}. \tag{4.44}$$

Entonces $Af \prec f$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que J solo tiene un elemento. En ese caso, Af es de la forma

$$Af = f\chi_E + \left(\frac{1}{\mu(E_1)}\int_{E_1} f d\mu\right)\chi_{E_1},$$

donde $0 < \mu(E_1) < \infty$ y $E = R \setminus E_1$. Para probar que $Af \prec f$, tenemos que probar que

$$\int_0^t (Af)^*(s)ds \leq \int_0^t f^*(s)ds, \tag{4.45}$$

para cada $t > 0$.

En primer lugar, supongamos que $0 < t < \infty$ y que t pertenece al rango de μ. Sea F un subconjunto de R con $\mu(F) = t$ y sea $t_0 = \mu(F \cap E_1)$. Entonces

$$\int_F |Af| d\mu = \int_{F\cap E} |f| d\mu + t_0\left|\frac{1}{\mu(E_1)}\int_{E_1} f d\mu\right|. \tag{4.46}$$

Para estimar el último término, escribimos $f = \chi_{E_1}$ en E_1 y usamos (4.29) y el hecho de que $(f\chi_{E_1})^{**}$ es decreciente para obtener

$$t_0\left|\frac{1}{\mu(E_1)}\int_{E_1} f d\mu\right| \leq t_0(f\chi_{E_1})^{**}(\mu(E_1)) \leq \int_0^{t_0}(f\chi_{E_1})^*(s)ds. \tag{4.47}$$

Pero (R,μ) es un espacio de medida resonante, entonces el espacio de medida $(E_1, \mu|_{E_1})$ es fuertemente resonante por el Corolario 4.17 porque $\mu(E_1)$ es finita. El número t_0 esta en el rango de $\mu|_{E_1}$ porque $\mu(F \cap E_1) = t_0$. Por tanto, por la Proposición 4.20 (b), existe un subconjunto medible G de E_1 con $\mu(G) = t_0$ tal que

$$\int_0^{t_0}(f\chi_{E_1})^*(s)ds = \int_G |f\chi_{E_1}| d\mu = \int_G |f| d\mu.$$

Combinando esto último con (4.47) y (4.46), obtenemos

$$\int_F |Af| d\mu \leq \int_{F\cap E} |f| d\mu + \int_G |f| d\mu. \tag{4.48}$$

Pero $F \cap E$ y G son disjuntos y

$$\mu(F \cap E) \cup G) = \mu(F \cap E) + \mu(G) = (t - t_0) + t_0 = t,$$

entonces aplicando (4.29) en el lado derecho de (4.48) obtenemos

$$\int_F |Af| d\mu \leq \int_0^t f^*(s) ds.$$

Finalmente, tomando supremo sobre todos los conjuntos F de medida t y aplicando la Proposición 4.20(a), obtenemos (4.45), al menos para los t que pertenecen al rango de μ. Dado que (R, μ) es uno de los tipos descritos en el Teorema 4.16, sin embargo, es claro que (4.45) se tiene que cumplir para todos los $t > 0$.

Esto termina la prueba en el caso en que J contiene un solo elemento. El correspondiente resultado para el caso en que J contenga un número finito de elementos se deduce de una sucesiva iteración. Si $J = \{1, 2, \cdots, N\}$, escribimos,

$$R_n = R \setminus \cup_{m=1}^n E_m$$

y

$$A_n f = f\chi_{R_n} + \sum_{m=1}^n \left(\frac{1}{\mu(E_m)} \int_{E_m} f d\mu \right) \chi_{E_m},$$

tenemos que

$$A_n f \prec A_{n-1} f \prec \cdots \prec A_1 f \prec f.$$

Finalmente, supongamos que J tiene cardinal infinito numerable, digamos que $J = \{1, 2, \cdots\}$. Dado que $|Af| \leq A(|f|)$, es suficiente probar $Af \prec f$ para f no negativa. En ese caso, las funciones

$$f_n = f\chi_E + \sum_{i=1}^n f\chi_{E_m}, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

satisfacen que $0 \leq f_n \uparrow f$ en c.t.p. y $0 \leq Af_n \uparrow Af$ en c.t.p. Pero entonces

$$Af_n = A_n f_n \prec f_n \prec f, \quad n = 1, 2, \cdots$$

aplicando el apartado (v) de la Proposición (4.19) en el lado izquierdo obtenemos que $Af \prec f$ como queríamos demostrar. $\square$

4.4. Espacios invariantes por reordenamientos

La norma $(\sum_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}$ de un vector de componentes positivas $(a_1, \cdots, a_n)$ evidentemente depende de los valores $a_1, \cdots, a_n$ pero no en el orden en que estos elementos están ordenados. En otras palabras, la norma de ℓ^p nos proporciona una cierta medida de la magnitud del vector sin importar cómo están distribuidas sus entradas sobre el espacio de medida subyacente. Nos interesa aislar los espacios de Banach de funciones, sobre un espacio de medida más general, cuya norma posee este tipo de propiedad. Estos espacios, llamados *espacios invariantes por reordenamientos*, en general tienen una estructura más rica que los espacios de funciones de Banach.

Definición 4.25. Sea ρ una función norma definida sobre un espacio de medida σ-finito (R, μ). Se dice que ρ es invariante por reordenamiento si $\rho(f) = \rho(g)$ para cualesquiera dos funciones f y g de $\mathcal{M}_0^+(R, \mu)$ equimedibles. En ese caso, el espacio de Banach de funciones $X = X(\rho)$ generado por ρ se dice que es un espacio invariante por reordenamiento.

Obsérvese que un espacio de Banach de funciones X es invariante por reordenamiento si y solo si, para cualquier f que pertenece a X, y cualquier g equimedible con f, entonces g también pertenece a X y $\|g\|_X = \|f\|_X$. Se sigue de la Proposición 4.9 que los espacios de Lebesgue $L^p(R, \mu)$ son espacios invariantes por reordenamiento.

La reordenada decreciente f^* de una función f es equimedible con f, y en cierto sentido se considerará a f^* como la elección canónica de una función equimedible con f. En esta sección veremos que muchas propiedades de los espacios de Banach de funciones invariantes por reordenamiento tienen una interpretación en términos de f^* más que en los de la propia f, al menos cuando el espacio de medida es resonante.

Proposición 4.26. *Sea ρ una función norma invariante por reordenamiento definida sobre un espacio de medida resonante (R, μ). Entonces la norma asociada ρ' es también una función norma invariante por reordenamiento. Además, las normas ρ y ρ' vienen dadas por*

$$\rho'(g) = \sup\left\{ \int_0^\infty f^*(s)g^*(s)ds : \rho(f) \leq 1 \right\}, \quad g \in \mathcal{M}_0^+ \tag{4.49}$$

$$\rho(f) = \sup\left\{ \int_0^\infty f^*(s)g^*(s)ds : \rho'(g) \leq 1 \right\}, \quad f \in \mathcal{M}_0^+ \tag{4.50}$$

Demostración. Sabemos, por la Definición 3.14, que la norma asociada ρ' viene dada por

$$\rho'(g) = \sup\left\{\int_R fg d\mu : \rho(f) \leq 1\right\}, \quad g \in \mathcal{M}_0^+. \tag{4.51}$$

Observemos sin embargo que si $\rho(f) \leq 1$, y si $\overline{f}$ es una función no negativa definida sobre R equimedible con f, entonces $\rho(\overline{f}) \leq 1$ porque ρ es invariante por reordenamiento. Por lo tanto el supremo en (4.51) se extiende sobre todas las funciones f con $\rho(f) \leq 1$ y sobre todas las funciones $\overline{f}$ equimedibles con esas funciones f. Pero por (4.13), dicho supremo debe coincidir con el supremo en (4.49) porque (R, μ) es resonante. Esto establece (4.49).

Dado que dos funciones equimedibles tienen la misma función reordenada decreciente, se sigue inmediatamente de (4.49) que ρ' es invariante por reordenamiento. En ese caso, podemos aplicar el resultado a ρ' en lugar de ρ, resultado una identidad análoga a (4.49) que coincide con (4.50) porque $\rho'' = \rho$ por el Teorema 3.20. □

Corolario 4.27. *(Desigualdad de Hölder)*

Sea ρ una función norma invariante por reordenamiento definida sobre un espacio de medida resonante (R, μ). Si f y g pertenecen a $\mathcal{M}_0^+$, entonces

$$\int_R fg d\mu \leq \int_0^\infty f^*(s)g^*(s)ds \leq \rho(f)\rho'(g). \tag{4.52}$$

Demostración. La primera desigualdad se sigue del Teorema 4.11, y la segunda desigualdad se sigue del resultado anterior. □

Por conveniencia de referencia, también formularemos los dos últimos resultados en términos de espacios de Banach de funciones X y X' generados por ρ y ρ', respectivamente.

Corolario 4.28. *Sea X un espacio de Banach de funciones sobre un espacio de medida resonante. Entonces X es invariante por reordenamiento si y solo si el espacio asociado X' es invariante por reordenamiento, y en ese caso, las normas vienen dadas por*

$$\|g\|_{X'} = \sup\left\{\int_0^\infty f^*(s)g^*(s)ds : \|f\|_X \leq 1\right\}, \quad g \in X'. \tag{4.53}$$

$$\|f\|_X = \sup\left\{\int_0^\infty f^*(s)g^*(s)ds : \|g\|_{X'} \leq 1\right\}, \quad f \in X. \tag{4.54}$$

Corolario 4.29. *(Desigualdad de Hölder)*

Sea X un espacio invariante por reordenamiento sobre un espacio de medida resonante (R, μ). Si f pertenece a X y g pertenece a X', entonces

$$\int_R |fg| d\mu \leq \int_0^\infty f^*(s) g^*(s) ds \leq \|f\|_X \|g\|_{X'}. \tag{4.55}$$

El significado de la relación de Hardy-Littlewood-Pólya para la teoría de espacios invariantes por reordenamiento proviene del siguiente resultado clave.

Teorema 4.30. *Sea (R, μ) un espacio de medida resonante y supongamos que f_1 y f_2 pertenecen a $\mathcal{M}_0^+(R, \mu)$. Sea ρ una función norma invariante por reordenamiento sobre (R, μ). Entonces $f_1 \prec f_2$ implica $\rho(f_1) \leq \rho(f_2)$.*

Demostración. Por (4.50), necesitamos solamente mostrar que

$$\int_0^\infty f_1^*(s) g^*(s) ds \leq \int_0^\infty f_2^*(s) g^*(s) ds,$$

para cualquier g satisfaciendo $\rho'(g) \leq 1$. Pero esto es una consecuencia inmediata del Lema de Hardy (Proposición 4.23) ya que $f_1 \prec f_2$ y g^* es una función decreciente no negativa. $\square$

Corolario 4.31. *Sea X un espacio invariante por reordenamiento sobre un espacio de medida resonante. Supongamos que f_1 pertenece a $\mathcal{M}_0$ y f_2 pertenece a X. Si $f_1 \prec f_2$, entonces f_1 pertenece a X y $\|f_1\|_X \leq \|f_2\|_X$.*

Una importante aplicación del Teorema 4.30 es que el operador promedio A del tipo descrito en (4.44) son contracciones en cualquier espacio invariante por reordenamiento X.

Teorema 4.32. *Sea (R, μ) un espacio de medida resonante y sea $\{E_j\}_{j \in J}$ una familia numerable de subconjuntos medibles de R disjuntos dos a dos, y cada uno de ellos con medida finita. Sea $E = R \setminus \cup_j E_j$. Para cada $f \in \mathcal{M}_0^+$, sea*

$$Af = f\chi_E + \sum_j \left(\frac{1}{\mu(E_j)} \int_{E_j} f d\mu \right) \chi_{E_j}.$$

Entonces A es una contracción en cualquier espacio invariante por reordenamiento X sobre (R, μ), esto es,

$$\|Af\|_X \leq \|f\|_X, \quad f \in X.$$

Demostración. Si f pertenece a X, entones f es integrable sobre cualquier E_j, con $j \in J$ por la propiedad (v) del Teorema 3.11. Pero $Af \prec f$ por la Proposición 4.24. Luego la conclusión se sigue del Corolario 4.31. □

El siguiente resultado es otra aplicación del Teorema 4.30.

Teorema 4.33. *Sea (R, μ) un espacio de medida σ-finito y sea λ una función norma invariante por reordenamiento definida sobre $(\mathbb{R}^+, m)$. Entonces el funcional $\overline{\lambda}$ definido por*

$$\overline{\lambda}(f) = \lambda(f^*), \quad f \in \mathcal{M}_0^+(R, \mu) \tag{4.56}$$

es una función norma invariante por reordenamiento definida sobre (R, μ).

Demostración. Las propiedades (P1),...,(P5) de la Definición 3.5 de una función norma para $\overline{\lambda}$ se siguen fácilmente de las respectivas propiedades para λ. La única propiedad que requiere un poco más de esfuerzo es la propiedad triangular. Supongamos que f_1 y f_2 pertenecen a $\mathcal{M}_0^+(R, \mu)$. Por la subaditividad del operador maximal (Teorema 4.21, tenemos que

$$(f_1 + f_2)^{**} \leq f_1^{**} + f_2^{**} = (f_1^* + f_2^*)^{**},$$

lo cual muestra que $(f_1 + f_2) \prec f_1^* + f_2^*$. Por eso, dado que $(\mathbb{R}^+, m)$ es resonante, podemos usar el Teorema 4.30 y la desigualdad triangular para λ para obtener

$$\lambda((f_1 + f_2)^*) \leq \lambda(f_1^* + f_2^*) \leq \lambda(f_1^*) + \lambda(f_2^*).$$

Por virtud de (4.56), esto establece la desigualdad triangular para $\overline{\lambda}$. □

El siguiente resultado muestra que cualquier función norma invariante por reordenamiento sobre (R, μ) surge de esta manera, siempre que el espacio de medida (R, μ) sea resonante.

Teorema 4.34. *(Teorema de representación de Luxemburg)*

Sea ρ una función norma invariante por reordenamiento definida sobre un espacio de medida resonante (R, μ). Entonces existe una función norma invariante por reordenamiento $\widetilde{\rho}$ sobre $(\mathbb{R}^+, m)$ tal que

$$\rho(f) = \widetilde{\rho}(f^*), \quad f \in \mathcal{M}_0^+(R, \mu). \tag{4.57}$$

Además, si σ es cualquier función norma invariante por reordenamiento sobre $(\mathbb{R}, m)$ que representa a ρ, en el sentido de que

$$\rho(f) = \sigma(f^*), \quad f \in \mathcal{M}_0^+(R, \mu), \tag{4.58}$$

entonces la norma asociada ρ' de ρ se representa de la misma manera por la norma asociada σ' de σ, esto es,

$$\rho'(g) = \sigma'(g^*), \quad g \in \mathcal{M}_0^+(R, \mu), \tag{4.59}$$

Demostración. Si $\widetilde{\rho}$ esta definida sobre $\mathcal{M}_0^+(\mathbb{R}, m)$ por

$$\widetilde{\rho}(h) = \sup\left\{\int_0^\infty g^*(s)h^*(s)ds : \rho'(g) \leq 1\right\}, \tag{4.60}$$

entonces es claro de (4.50) que (4.57) se cumple. Para mostrar que $\widetilde{\rho}$ es una función norma sobre $(\mathbb{R}^+, m)$, tenemos que ver que se verifican las propiedades (P1),...,(P5) de la Definición 3.5.

Para la desigualdad triangular, supongamos que h_1 y h_2 son funciones arbitrarias de $\mathcal{M}_0^+(\mathbb{R}, m)$. Entonces, como en la prueba del teorema anterior, $(h_1+h_2)^* \prec h_1^* + h_2^*$. Por tanto, usando el Lema de Hardy (Proposición 4.23) y (4.60), obtenemos

$$\widetilde{\rho}(h_1 + h_2) \leq \widetilde{\rho}(h_1) + \widetilde{\rho}(h_2),$$

que era lo que queríamos demostrar. Las propiedades restantes de (P1) son fáciles de probar. La propiedad de monotonía se sigue de la propiedad (1) de la Proposición 4.8 y de (4.60), y la propiedad de Fatou (P3) es consecuencia de la propiedad (4) de la Proposición 4.8, (4.60) y del Teorema de Convergencia Monótona.

El funcional $\widetilde{\rho}$ es evidentemente invariante por reordenamiento así que para verificar la propiedad (P4) es suficiente mostrar que $\widetilde{\rho}(\chi_{[0,t)})$ es finito para cada $t > 0$. Esto es claro si t está en el rango de μ, ya que en ese caso existe un subconjunto medible F de R con medida $\mu(F) = t$. Dado que $\rho(\chi_F)$ es finito por la propiedad (P4) de ρ, esto implica que $\widetilde{\rho}(\chi_{[0,t)})$ es finito por (4.57). La desigualdad triangular para $\widetilde{\rho}$ establece el mismo resultado para cualquier integral múltiple de t, y el resultado para un t arbitrario se sigue de aplicar la propiedad de monotonía (P2). La prueba de (P5) es similar, luego $\widetilde{\rho}$ es una función norma invariante por reordenamiento.

Sea ahora σ una función norma invariante por reordenamiento sobre $(\mathbb{R}^+, m)$ que representa a ρ en el sentido de que (4.58) se cumple. Dado que $(\mathbb{R}^+, m)$ es resonante (Teorema 4.16), la norma asociada σ' de σ se puede expresar en (4.49) por

$$\sigma'(k) = \sup\left\{\int_0^\infty h^*(s)k^*(s)ds : \sigma(h) \leq 1\right\}, \quad k \in \mathcal{M}_0^+(\mathbb{R}^+, m).$$

En particular,

$$\sigma'(g^*) = \sup\left\{\int_0^\infty g^*(s)h^*(s) : \sigma(h) \leq 1\right\}, \tag{4.61}$$

para cualquier g de $\mathcal{M}_0(R,\mu)$. Por tanto, se sigue de (4.58) y de (4.49) que

$$\rho'(g) \leq \sigma'(g^*), \quad g \in \mathcal{M}_0^+(R,\mu). \tag{4.62}$$

Para la desigualdad inversa, sea $\mathcal{H}$ la clase de funciones simples decrecientes no negativas h que tienen soporte en el intervalo $[0,\mu(R))$ y satisfacen que $\sigma(h) \leq 1$. Dado que σ' tiene la propiedad de Fatou, se sigue de (4.61) que

$$\sigma'(g^*) = \sup\left\{\int_0^\infty g^*(s)h^*(s)ds : h \in \mathcal{H}\right\}. \tag{4.63}$$

Si (R,μ) es no atómico, entonces cualquier función h de $\mathcal{H}$ es reordenada decreciente de una función simple f de R (Ejemplo 4.7 (b)). Por tanto, es claro de (4.49) y de (4.63) que la igualdad se cumple (4.62). Esto establece el resultado (4.59) que queríamos.

Dado que (R,μ) es resonante, el único caso que queda es que (R,μ) sea un espacio de medida completamente atómico con todos los átomos teniendo la misma medida, y supongamos que es α (Teorema 4.16). En ese caso, las funciones h en la clase $\mathcal{H}$ que hemos considerado anteriormente no necesariamente son constantes en los intervalos $I_k = [(k-1)\alpha, k\alpha)$, con $k \in \mathbb{N}$, entonces podría suceder que que esas h no las podamos representar como las reordenadas decrecientes de funciones simples f definidas en (R,μ). El remedio es simplemente promediar cada función h de $\mathcal{H}$ sobre cada intervalo I_k. Las integrales en (4.63) no cambian porque g^* es constante en cada I_k, y la σ-norma del promedio de h no puede exceder $\sigma(h)$ por el Teorema 4.32. Por tanto, con esta modificación de $\mathcal{H}$, podemos proceder exactamente como antes para concluir que (4.59) se cumple para ρ' y para σ'. □

El teorema de representación de Luxemburg (Teorema 4.34) en particular muestra que los espacios invariantes por reordenamiento sobre espacios de medida resonante (R,μ) están completamente determinados por el espacio invariante por reordenamiento sobre $(\mathbb{R}^+,m)$. La representación $\rho \mapsto \widetilde{\rho}$ es de hecho única si (R,μ) es no atómico y tiene medida finita, aunque este no es el caso general. Por ejemplo, la norma de L^1 sobre el intervalo finito $[0,1)$ se puede representar por ambas funciones normas invariantes por reordenamiento,

$$\sigma_1(h) = \int_0^1 h^*(s)ds, \quad \sigma_2(h) = \int_0^\infty h^*(s)ds$$

sobre $(\mathbb{R}^+,m)$. La unicidad se obtiene si cambiamos $\mathbb{R}^+$ por $[0,\mu(R))$ (o en el caso atómico, por un espacio discreto adecuado).

En los espacios de medida que no son resonantes (por tanto son una mezcla de una parte atómica con una parte que no es atómica, o mezcla de átomos pero de distinta medida), el concepto de invariancia por reordenamiento tiene un significado práctico pequeño. Como uno espera, muchos de los resultados anteriores no son verdad en tal escenario. Por ejemplo, puede haber una norma invariante por reordenamiento en tales espacios de medida que no se puede generar por ninguna norma invariante por reordenamiento definida sobre $\mathbb{R}^+$. Para los que surgen de las normas sobre $\mathbb{R}^+$ (como en el Teorema 4.33), algo de la teoría puede ser salvado. Estos son las llamadas *normas universalmente invariantes por reordenamiento.*

4.5. La función fundamental

Ciertas propiedades de dualidad y separabilidad para un espacio de Banach de funciones arbitrario fueron establecidas en el Capítulo 3. Vamos a considerar esas propiedades nuevamente en esta sección para los espacios invariantes por reordenamiento y reformularlas en términos de una cierta función φ_X, la *función fundamental* de X, asociada a un espacio invariante por reordenamiento X. A la luz de tales resultados es natural intentar clasificar los espacios invariantes por reordenamiento de acuerdo con la función fundamental, y en particular preguntar si existe el espacio invariante por reordenamiento más pequeño y el más grande con una función fundamental dada. Resulta que la concavidad es bastante crucial aquí pero una función fundamental arbitraria no tiene que tener esa propiedad. Sin embargo, siempre es posible remplazar una función fundamental φ_X dada por una función "equivalente" $\overline{\varphi}_X$ que es cóncava, y con esta modificación es posible demostrar que cualquier espacio invariante por reordenamiento X corresponde con dos espacios invariantes por reordenamiento $\Lambda(X)$ y $M(X)$ que son los espacios invariantes por reordenamiento más pequeño y más grande respectivamente cuya función fundamental es $\overline{\varphi}_X$. Los espacios $\Lambda(X)$ y $M(X)$ se conocen como *espacios de Lorentz* y juegan un papel fundamental en la teoría de interpolación.

Definición 4.35. Sea X un espacio de Banach de funciones invariante por reordenamiento sobre un espacio de medida resonante (R, μ). Para cada valor t que pertenece al rango de μ, sea E un subconjunto medible de R con $\mu(E) = t$ y sea

$$\varphi_X(t) = \|\chi_E\|_X. \tag{4.64}$$

La función φ_X se denomina función fundamental de X.

Observemos que la función φ_X dada por (4.64) está bien definida ya que si t es un valor que pertenece al rango de μ y E es un subconjunto medible de R con $\mu(E) = t$ y F es otro subconjunto medible de R con medida $\mu(F) = t$, entonces χ_E y χ_F son equimedibles y por ser X invariante por reordenamiento tenemos que $\|\chi_E\|_X = \|\chi_F\|_X$.

Si (R, μ) es no atómico, el rango de μ consiste en el intervalo $[0, \mu(R)]$. En ese caso, un simple cálculo muestra que la función fundamental de $L^p(R, \mu)$ viene dada por

$$\varphi_{L^p}(t) = t^{\frac{1}{p}}, \quad 0 \leq t < \mu(R),\ 1 \leq p < \infty, \tag{4.65}$$

$$\varphi_{L^\infty}(0) = 0,\ \varphi_{L^\infty}(t) = 1, \quad 0 \leq t < \mu(R). \tag{4.66}$$

Por el Teorema 4.16, el otro caso en que el espacio de medida es resonante es en el que (R, μ) es completamente atómico y todos los átomos tienen la misma medida. Un ejemplo típico de esa clase de espacios de medida es $(\mathbb{Z}, \mu)$, siendo μ la medida de contar. El rango de μ en ese caso es $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$. Escribiendo ℓ^p en vez de $L^p(\mathbb{Z}, \mu)$, tenemos que

$$\varphi_{\ell^p}(n) = n^{\frac{1}{p}}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,\ 1 \leq p < \infty, \tag{4.67}$$

$$\varphi_{\ell^\infty}(0) = 0,\ \varphi_{\ell^\infty}(t) = 1, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{4.68}$$

Se observa de estas identidades que el producto de las funciones fundamentales de $L^p(R, \mu)$ y la de su espacio asociado $L^{p'}(R, \mu)$, es idénticamente igual a t. Esto es cierto en general como muestra el siguiente resultado.

Teorema 4.36. *Sea X un espacio invariante por reordenamiento sobre un espacio de medida resonante (R, μ) y sea X' el espacio asociado de X. Entonces*

$$\varphi_X(t) \cdot \varphi_{X'}(t) = t, \tag{4.69}$$

para cada valor finito t en el rango de μ.

Demostración. En el caso en que $t = 0$ no hay nada que probar ya que cualquier función fundamental se anula en el origen. Por tanto, supongamos que $0 < t < \infty$. Dado que t está en el rango de μ, tenemos que existe un subconjunto medible E de R con $\mu(E) = t$, y por la desigualdad de Hölder (3.8), tenemos que

$$t = \int_E d\mu \leq \|\chi_E\|_X \|\chi_E\|_{X'} = \varphi_X(t)\varphi_{X'}(t).$$

Para la desigualdad inversa escribimos

$$\varphi_X(t) = \|\chi_E\|_X = \sup\left\{ \int_E |g| d\mu : \|g\|_X \leq 1 \right\}. \tag{4.70}$$

Ahora bien, para cualquier g con $\|g\|_X' \leq 1$, tenemos por el Teorema 4.32 que la función

$$h = \left(\frac{1}{t}\int_E |g| d\mu\right)\chi_E$$

satisface

$$\left(\frac{1}{t}\int_E |g| d\mu\right)\varphi_{X'}(t) = \|h\|_{X'} \leq \|g\|_{X'} \leq 1,$$

luego, tomando supremo sobre las funciones g y usando (4.70) obtenemos

$$\frac{\varphi_X(t)\varphi_{X'}(t)}{t} \leq 1,$$

que era justamente lo que queríamos probar. □

Corolario 4.37. *Sea X un espacio invariante por reordenamiento sobre un espacio de medida resonante (R,μ). Entonces la función fundamental de X, φ_X, satisface;*

(1) φ_X es creciente, y $\varphi_X(t) = 0$ si y solo si $t = 0$;

(2) $\varphi_X(t)/t$ es decreciente;

(3) φ_X es continua, excepto quizás en el origen.

Demostración. El hecho de que φ_X sea creciente se sigue de la propiedad de monotonía de los espacios de Banach de funciones (Teorema 3.11 (i)). En ese caso, el teorema anterior muestra que $\varphi_X(t)/t = 1/\varphi_{X'}(t)$ es decreciente. La continuidad de φ_X requiere una prueba solamente en el caso en que (R,μ) es no atómico ya que en otro caso φ_X está definida en un subconjunto discreto de $\mathbb{R}^+$ y por tanto es continua automáticamente. En el caso no atómico, φ_X es una función creciente en el intervalo $(0,\mu(R))$ así que en el peor de los casos puede tener discontinuidades de salto allí. Pero claramente φ_X no puede tener ninguna discontinuidad de salto en $t_0 > 0$ ya que (2) no se cumpliría a la derecha de t_0. Esto establece el punto (3). Observemos que (4.66) nos muestra un ejemplo en que φ_X tiene una discontinuidad de salto en el origen. □

Vamos ahora a enunciar dos resultados que tienen que ver con conceptos importantes estudiados en el capítulo anterior, como la separabilidad, sobre espacios invariantes por reordenamiento.

Recordemos del capítulo anterior que X_a es el ideal ordenado de las funciones de X cuya norma es absolutamente continua mientras que X_b es la clausura en X de las funciones simples. Si (R,μ) es completamente atómico, con todos los átomos (a lo sumo hay infinito numerable) teniendo la misma medida, entonces $X_a = X_b$ (Teorema 3.37) y $(X_b)^* = X'$ isométricamente (Teorema 3.38). Además, dado que un espacio de medida (R, μ) así es claramente separable, se sigue del Teorema 3.47 que X_b es separable. Vamos a resumir esos resultados en el siguiente teorema.

Teorema 4.38. *Sea (R, μ) un espacio de medida completamente atómico, que consiste en un conjunto numerable de átomos de igual medida. Si X es un espacio invariante por reordenamiento sobre (R, μ), entonces*

(1) $X_a = X_b$;

(2) $(X_b)^* = X'$;

(3) X_b *es separable.*

El resultado análogo para espacios de medida no atómicos requiere una hipótesis adicional sobre la función fundamental.

Teorema 4.39. *Sea (R, μ) un espacio de medida σ-finito y sea X un espacio invariante por reordenamiento sobre (R, μ).*
(a) Las siguientes condiciones sobre X son equivalentes:

(i) $\lim_{t \to 0^+} \varphi_X(t) = 0$;

(ii) $X_a = X_b$;

(iii) $(X_b)^* = X'$.

Si, además, μ es separable, entonces las propiedades (i), (ii) y (iii) son equivalentes a

(iv) X_b *es separable.*

(b) Si $\lim_{t \to 0^+} \varphi_X(t) > 0$, *entonces* $X_a = \{0\}$.

Demostración. La equivalencia de (ii) y (iii) se sigue del Teorema 3.38. La equivalencia de (ii) y (iv), para μ separable, se obtiene del Teorema 3.47. Por tanto, la prueba de la parte (a) estará completa una vez hayamos establecido la equivalencia de (i) y (ii).

Si (i) se cumple, entonces χ_E tiene norma absolutamente continua para cualquier subconjunto medible E de R con medida finita. Si $E_n \downarrow \emptyset$ en c.t.p., entonces $\mu(E \cap E_n) \downarrow 0$ por el Teorema de la Convergencia Dominada y por tanto

$$\|\chi_E \chi_{E_n}\|_X = \|\chi_{E \cap E_n}\|_X \leq \varphi_X(\mu(E \cap E_n)) \downarrow 0.$$

Pero por el Teorema 3.37 tenemos que $X_a = X_b$, y por tanto se cumple (ii).

Recíprocamente, supongamos que $X_a = X_b$. Sea E cualquier subconjunto medible de R de medida positiva. Dado que (R, μ) es no atómico, podemos elegir subconjuntos de E tales que $\mu(E_n) = 2^{-n}\mu(E)$ y $E_{n+1} \subset E_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. La hipótesis $X_a = X_b$ muestra que en particular que χ_E tiene norma absolutamente continua, luego $E_n \downarrow \emptyset$ en c.t.p.,

$$\varphi_X(2^{-n}\mu(E)) = \|\chi_{E_n}\|_X = \|\chi_E \chi_{E_n}\|_X \downarrow 0.$$

Esto, junto al hecho de que φ_X es monótona, establece (i).

Para probar la parte (b), supongamos por el contrario que X_b contiene a la función f que no es nula en un conjunto medible de medida positiva. Entonces existe $\epsilon > 0$ y un subconjunto medible E de R con medida positiva tal que que $\epsilon\chi_E \leq |f|$. Por tanto, χ_E también pertenece a X_a ya que X_a es un ideal ordenado. Pero entonces, como en la primera parte de la prueba, podemos concluir que $\varphi_X(t) \downarrow 0$ cuando $t \downarrow 0$. Esto establece la parte (b). □

Habíamos visto en el Corolario 4.37 que cualquier función fundamental verifica las propiedades (1) y (2) de ese mismo corolario. Nuestra siguiente meta es mostrar que estas propiedades de hecho determinan completamente las funciones φ que pueden surgir como funciones fundamentales de espacios invariantes por reordenamiento. Introducimos la siguiente terminología.

Definición 4.40. Sea φ una función no negativa definida en el intervalo $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. Si

(i) $\varphi(t)$ es creciente en $(0, \infty)$; $\varphi(t) = 0$ si y solo $t = 0$;

(ii) $\varphi(t)/t$ es decreciente en $(0, \infty)$,

entonces se dice que φ es cuasicóncava.

Observemos que cualquier función no negativa cóncava en $[0, \infty)$ que se anula únicamente en el origen es cuasicóncava. Existe, sin embargo, funciones cuasicóncavas que no son cóncavas; por ejemplo, la función $\varphi(t) = \max\{1, t\}$, para $t > 0$, y $\varphi(0) = 0$.

La función fundamental de cualquier espacio invariante por reordenamiento sobre $(\mathbb{R}^+, m)$ es cuasicóncava (Corolario 4.37). Recíprocamente, veremos que cualquier función cuasicóncava φ es la función fundamental de un espacio invariante por reordenamiento M sobre $(\mathbb{R}^+, m)$.

Definición 4.41. Sea φ una función cuasicóncava definida sobre $\mathbb{R}^+$. El espacio de Lorentz $M_\varphi = M_\varphi(\mathbb{R}^+, m)$ consiste en todas las funciones f de $\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^+, m)$ cuyo funcional

$$\|f\|_{M_\varphi} = \sup_{0<t<\infty} \{f^{**}(t)\varphi(t)\} \tag{4.71}$$

es finito.

Proposición 4.42. *Si φ una función cuasicóncava, entonces el espacio de Lorentz M_φ es un espacio de Banach de funciones invariante por reordenamiento cuya función fundamental coincide con φ.*

Demostración. Las propiedades de una función norma (P1), (P2) y (P3) (Definición 3.5) para el funcional

$$\rho(f) = \sup_{0<t<\infty} \{f^{**}(t)\varphi(t)\}, \quad f \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^+, m),$$

se sigue fácilmente de las propiedades elementales de f^{**} (la desigualdad triangular es consecuencia del Teorema 4.21). Además, M_φ es obviamente un espacio invariante por reordenamiento ya que la norma esta definida en términos de f^*. Para verificar la propiedad (P4), sea E cualquier subconjunto medible de $\mathbb{R}^+$ con medida $\mu(E) = t$. Entonces $\chi_E^* = \chi_{[0,t)}$ y obviamente

$$\begin{aligned} \|\chi_E\|_{M_\varphi} &= \sup_{0<s<\infty} \{\chi_E^{**}(s)\varphi(s)\} = \sup_{0<s<\infty} \left\{ \text{mín}\{1, \frac{t}{s}\varphi(s)\right\} \qquad (4.72) \\ &= \text{máx} \left\{ \sup_{0<s<t} \varphi(s), t \cdot \sup_{t \le s \le \infty} \frac{\varphi(s)}{s} \right\} = \varphi(t), \end{aligned}$$

dado que φ es creciente y $\varphi(s)/s$ es decreciente. Como $\varphi(t) < \infty$, esto establece (P4). Finalmente, si f pertenece a M_φ y E es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^+$ de medida t, entonces por (4.29),

$$\left| \int_E f(x)dx \right| \le \int_0^t f^*(s)ds \le \frac{t}{\varphi(t)} \sup_{0<s<\infty} \{f^{**}(s)\varphi(s)\} = C_t \|f\|_{M_\varphi}.$$

Dado que φ se anula en el origen, la constante $C_t = t/\varphi(t)$ es finita y esto establece (P5). Por tanto M_φ es un espacio de Banach de funciones invariante por reordenamiento y la identidad (4.72) muestra que su función fundamental coincide con φ. □

El siguiente resultado muestra que M_φ es de hecho el espacio invariante por reordenamiento más grande cuya función fundamental es φ.

Proposición 4.43. *Sea X un espacio invariante por reordenamiento sobre $(\mathbb{R}^+, m)$. Entonces $X \hookrightarrow M_{\varphi_X}$, y la aplicación inclusión tiene norma 1;*

$$\|f\|_{M_{\varphi_X}} \le \|f\|_X, \quad f \in X. \qquad (4.73)$$

Demostración. Sea $t > 0$. Entonces por la desigualdad de Hölder (3.8) y (4.69) tenemos que, para cualquier $f \in X$,

$$\int_0^t f^*(s)ds \leq \|\chi_{(0,t)}\|_{X'}\|f\|_X = \frac{t}{\varphi(t)}\|f\|_X.$$

Por tanto,

$$f^{**}(t)\varphi(t) \leq \|f\|_X, \quad t > 0,$$

de donde se sigue (4.73). □

Dada una función fundamental ϕ, es natural preguntarse si siempre existe el espacio invariante por reordenamiento más pequeño cuya función fundamental es ϕ. La respuesta es si, pero con algunas calificaciones, y con el fin de proporcionar la completa necesitaremos profundizar en la relación entre las funciones cóncavas y cuasicóncavas.

Observemos de (i) y (ii) de la Definición 4.40 que cualquier función cuasicóncava satisface que $\varphi(t) \leq \varphi(1)\max\{1, t\}$, para cada $t > 0$. En particular, φ esta dominada por la función cóncava $\varphi(1)(1 + t)$. Por tanto, el ínfimo puntual de una función cóncava es también una función cóncava, se sigue que existe una función cóncava que es la más pequeña, llamémosla $\overline{\varphi}$, que esta dominada por φ. A la función $\overline{\varphi}$ se conoce por la menor función cóncava mayorante de φ.

Si $x > 0$ esta fijo, se sigue de (i) y (ii) de la Definición 4.40 que $\varphi(t) \leq (1 + \frac{t}{x})\varphi(x)$ para cada $t \geq 0$. Por lo tanto, $\varphi(t)$ esta dominada por la función cóncava $\psi(t) = (1 + \frac{t}{x})\varphi(x)$ y por tanto la menor función cóncava mayorante $\overline{\varphi}$ satisface que $\overline{\varphi}(t) \leq \psi(t)$, para cada t. En particular, cuando $t = x$, obtenemos que $\overline{\varphi}(x) \leq \psi(x) \leq 2\varphi(x)$, y de este modo obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.44. *Si φ es una función cuasicóncava, entonces la menor función cóncava mayorante $\overline{\varphi}$ de φ satisface*

$$\frac{1}{2}\overline{\varphi} \leq \varphi \leq \overline{\varphi}. \tag{4.74}$$

Recordemos que las funciones cuasicóncavas son aquellas que aparecen de manera natural como las funciones fundamentales de espacios invariantes por reordenamiento. Esas funciones no tienen por qué ser cóncavas, pero con la ayuda del último resultado, veremos que cualquier norma de un espacio invariante por reordenamiento se puede cambiar por otra norma equivalente de manera que dicho espacio con esa nueva norma tenga función fundamental cóncava.

Proposición 4.45. *Sea X un espacio invariante por reordenamiento sobre $(\mathbb{R}^+, m)$. Entonces X se puede dotar de una norma invariante por reordenamiento equivalente a su norma inicial de manera que X con la nueva norma tenga su función fundamental que sea cóncava.*

Demostración. La función fundamental $\varphi = \varphi_X$ de X es cuasicóncava por el Corolario 4.37. Luego, por la Proposición 4.44, la menor función cóncava mayorante $\overline{\varphi}$ de φ satisface (4.74). Sea $M_{\overline{\varphi}}$ el espacio de Lorentz asociado a la función $\overline{\varphi}$, y sea

$$v(f) = \max(\|f\|_X, \|f\|_{M_{\overline{\varphi}}}), \quad f \in \mathcal{M}_0^+(\mathbb{R}^+, m).$$

Dado que ambos espacios X y $M_{\overline{\varphi}}$ son espacios invariantes por reordenamientos, es fácil ver que v es una norma invariante por reordenamiento. Además, se sigue de (4.73) y de (4.74) que

$$\|f\|_X \leq v(f) \leq \max(\|f\|_X, 2\|f\|_{M_\varphi}) \leq 2\|f\|_X,$$

entonces v es equivalente a la norma de X. Finalmente, dado que

$$v(\chi_{(0,t)}) = \max(\varphi(t), \overline{\varphi}(t)) = \overline{\varphi}(t),$$

vemos que $X = X(v)$ tiene norma fundamental cóncava $\overline{\varphi}$. □

Definición 4.46. Sea X un espacio invariante por reordenamiento sobre $(\mathbb{R}^+, m)$ y supongamos que X ha sido dotado de una norma como en la proposición anterior de manera que su función fundamental φ_X es cóncava. Los espacios de Lorentz $\Lambda(X)$ y $M(X)$ se definen como sigue. El espacio $M(X)$ es simplemente el espacio M_{φ_X} cuya norma viene dada por

$$\|f\|_{M(X)} = \|f\|_{M_{\varphi_X}}. \tag{4.75}$$

El espacio $\Lambda(X)$ consiste en todas las funciones de $\mathcal{M}_0^+(\mathbb{R}^+, m)$ para las cuales

$$\|f\|_{\Lambda(X)} = \int_0^\infty f^*(s) d\varphi_X(s) \tag{4.76}$$

es finito.

Observemos que la integral en (4.76) está bien definida porque φ_X es creciente. Además, dado que φ_X es no negativa y cóncava, entonces φ_X se puede representar como la integral de una función decreciente no negativa, digamos ϕ_X, en el intervalo $(0, \infty)$. Por otra parte, sabemos que f^* es una función continua por la derecha en $[0, \infty)$ (Proposición 4.8), con lo que

$\lim_{s\to 0^+} f^*(s) = f^*(0)$ y habíamos visto en (4.8) que $f^*(0) = \|f\|_{L^\infty}$. Por tanto, la integral de Riemann-Stieltjes en (4.76) se puede reescribir en la forma

$$\|f\|_{\Lambda(X)} = \lim_{s\to 0^+} f^*(s)\varphi_X(s) - f^*(0)\varphi_X(0) + \int_{(0,\infty)} f^*(s)\phi_X(s)ds \tag{4.77}$$

$$= \|f\|_{L^\infty}\varphi_X(0^+) + \int_0^\infty f^*(s)\phi_X(s)ds.$$

Teorema 4.47. *Sea X un espacio de Banach de funciones invariante por reordenamiento sobre $(\mathbb{R}^+, m)$ y supongamos que X ha sido dotado de una norma de manera que su función fundamental φ_X es cóncava. Los espacios de Lorentz $\Lambda(X)$ y $M(X)$ son espacios de Banach de funciones invariantes por reordenamiento y cada uno de ellos tiene función fundamental φ_X. Además,*

$$\Lambda(X) \hookrightarrow X \hookrightarrow M(X) \tag{4.78}$$

y cada una de las inclusiones tiene norma 1.

Demostración. Dado que $M(X) = M_{\varphi_X}$, las afirmaciones que envuelven $M(X)$ fueron establecidas en las Proposiciones 4.42 y 4.43.

Para establecer la desigualdad triangular en $\Lambda(X)$, recordemos que se verifica que $(f+g)^* \prec f^* + g^*$ (Teorema 4.21), y dado que φ_X es cóncava, su derivada ϕ_X es no negativa y decreciente, Por tanto, por el Lema de Hardy 4.23, tenemos que

$$\int_0^\infty (f+g)^*(s)\phi_X(s)ds \leq \int_0^\infty f^*(s)\phi_X(s)ds + \int_0^\infty g^*(s)\phi_X(s)ds,$$

y esto, junto a la identidad (4.77), establece la desigualdad triangular para la norma en $\Lambda(X)$. El resto de propiedades (P1)-(P3) se sigue fácilmente de las correspondientes propiedades de f^*. Para verificar la propiedad (P4) y (P5), sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^+$ de medida $m(E) = t > 0$. Entonces

$$\|\chi_E\|_{\Lambda(X)} = \int_0^\infty \chi_{(0,t)}(s)d\varphi_X(s) = \varphi_X(t). \tag{4.79}$$

Esto muestra que la propiedad (P4) se cumple y también que la función fundamental de $\Lambda(X)$ es igual a φ_X. La propiedad (P5) para $\Lambda(X)$ se sigue directamente de la correspondiente propiedad de X una vez que hayamos establecido que la inclusión de $\Lambda(X)$ en X tiene norma 1. Esto es,

$$\|f\|_X \leq \|f\|_{\Lambda(X)}, \quad f \in \Lambda(X). \tag{4.80}$$

Dado que ambos normas son invariantes por reordenamiento y tienen la propiedad de Fatou, será suficiente establecer (4.80) para funciones simples decrecientes $f = f^*$. En ese caso, podemos escribir

$$f^* = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{(0,t_k)},$$

donde $c_k > 0$ y $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ (Ejemplo 4.7 (b)). Pero entonces

$$\|f\|_X \leq \sum_{k=1}^{n} c_k \|\chi_{(0,t_k)}\|_X = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_X(t_k) = \int_0^\infty f^*(s) d\varphi_X(s) = \|f\|_{\Lambda(X)},$$

como queríamos demostrar. □

Corolario 4.48. *Si X es un espacio invariante por reordenamiento sobre $(\mathbb{R}^+, m)$ con función fundamental φ_X cóncava. entonces los espacios de Lorentz $\Lambda(X)$ y $M(X)$ son respectivamente el espacio invariante más pequeño y el más grande cuyas funciones fundamental es φ_X.*

En la última parte de esta sección hemos trabajado exclusivamente con el espacio de medida $(\mathbb{R}^+, m)$. Las definiciones y resultados se pueden trasladar fácilmente a un espacio de medida arbitrario (R, μ) resonante mediante el teorema de representación de Luxemburg (Teorema 4.34). En efecto, si X es un espacio invariante por reordenamiento con norma invariante $\|\cdot\|_X$ definido sobre un espacio de medida resonante (R, μ), tenemos por el teorema de representación de Luxemburg (Teorema 4.34), que existe una norma invariante $|||\cdot|||$ sobre $(\mathbb{R}^+, m)$ de manera que

$$\|f\|_X = |||f^*|||, \quad \forall f \in \mathcal{M}_0(R, \mu).$$

Sea $\overline{X} = \{f^* : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \mid f \in X\}$ la representación de X, en el sentido del teorema de representación de Luxemburg, con norma $|||\cdot|||$. Un ejemplo de un resultado que podemos trasladar a X es la Proposición 4.43. Aplicando dicha proposición a $\overline{X}$, tendríamos que

$$\|f\|_{M_{\varphi_X}} = \|f^*\|_{M_{\varphi_{\overline{X}}}} \leq |||f^*||| = \|f\|_X,$$

con lo que $X \hookrightarrow \|f\|_{M_{\varphi_X}}$ y con norma de la aplicación inclusión igual a 1.

4.6. Los espacios $L^1 + L^\infty$ y $L^1 \cap L^\infty$

Más ejemplos de espacios de Banach de funciones invariantes por reordenamiento pueden ser construidos a partir de los espacios de Lebesgue tomando sumas e intersecciones. El procedimiento se ilustra en esta sección mediante la construcción de $L^1 + L^\infty$ y $L^1 \cap L^\infty$. Estos espacios juegan un papel especial en la teoría en los que son el espacio invariante por reordenamiento más grande y el más pequeño respectivamente (Teorema 4.54).

Definición 4.49. Sea (R, μ) un espacio de medida σ-finito.

(a) El espacio $L^1 + L^\infty = (L^1 + L^\infty)(R, \mu)$ cosiste en todas las funciones f de $\mathcal{M}_0(R, \mu)$ que se pueden representar como una suma $f = g + h$ con g en L^1 y h en L^∞. Para cada f en $L^1 + L^\infty$, sea

$$\|f\|_{L^1+L^\infty} = \text{ínf}\{\|g\|_{L^1} + \|h\|_{L^\infty}\}, \tag{4.81}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las representaciones de $f = g + h$ con g en L^1 y h en L^∞.

(b) Para cada f de la intersección $L^1 \cap L^\infty$, sea

$$\|f\|_{L^1 \cap L^\infty} = \text{máx}\{\|f\|_{L^1}, \|f\|_{L^\infty}\}. \tag{4.82}$$

La expresión en la derecha de (4.82) es el máximo de las cantidades $\sup_{1 \le t < \infty} \int_0^t f^*(s)ds$ y $\sup_{0<t<1} f^{**}(t)$, con lo que la norma de $L^1 \cap L^\infty$ tiene la siguiente descripción en términos de la función maximal f^{**}:

$$\|f\|_{L^1 \cap L^\infty} = \sup_{0<t<\infty} \frac{\int_0^t f^*(s)ds}{\text{mín}(1, t)} = \sup_{0<t<\infty} (f^{**}(t) \cdot \text{máx}(1, t)). \tag{4.83}$$

El siguiente resultado proporciona una descripción análoga de la norma de $L^1 + L^\infty$.

Teorema 4.50. *Sea (R, μ) un espacio de medida σ-finito y sea f una función de $\mathcal{M}_0(R, \mu)$. Entonces*

$$\text{ínf}_{f=g+h}\{\|g\|_{L^1} + t\|h\|_{L^\infty}\} = \int_0^t f^*(s)ds = tf^{**}(t), \tag{4.84}$$

para cada $t > 0$.

Demostración. La segunda identidad de (4.84) se sigue de la definición de f^{**} con lo que necesitamos solo demostrar la primera identidad. Fijemos una función f de $\mathcal{M}_0(R, \mu)$ y $t > 0$ y sea α_t el ínfimo de la derecha de (4.84).

Veamos primero que se verifica que

$$\int_0^t f^*(s)ds \le \alpha_t. \tag{4.85}$$

Podemos suponer que f pertenece a $L^1 + L^\infty$ ya que en otro caso el ínfimo α_t es infinito y no hay nada que probar. En ese caso f se puede expresar como una suma $f = g + h$ con g de L^1 y h de L^∞. La subaditividad de f^{**} (Teorema 4.21) nos da que

$$\int_0^t f^*(s)ds \leq \int_0^t g^*(s)ds + \int_0^t h^*(s)ds$$

y por tanto, por (4.7) y (4.8), tenemos que

$$\int_0^t f^*(s)ds \leq \|g\|_{L^1} + t\|h\|_{L^\infty}.$$

Tomando ínfimo sobre todas las posibles representaciones de $f = g + h$, obtenemos (4.85).

Para la desigualdad contraria

$$\alpha_t \leq \int_0^t f^*(s)ds,$$

es suficiente construir dos funciones g de L^1 y h de L^∞ tal que $f = g + h$ y

$$\|g\|_{L^1} + t\|h\|_{L^\infty} \leq \int_0^t f^*(s)ds. \tag{4.86}$$

Claramente, el lado derecho de la desigualdad anterior se puede suponer que es finito. La desigualdad de Hardy-Littlewood (4.11) garantiza la integrabilidad de f sobre cualquier subconjunto medible de R de medida a lo sumo igual a t. Por lo tanto, si $E = \{x : |f(x)| > f^*(t)\}$ y sea $t_0 = \mu(E)$, entonces la propiedad (v) de la Proposición 4.8 nos da que $t_0 \leq t$, y por tanto f es integrable sobre E. En particular, la función

$$g(x) = \max\{|f(x)| - f^*(t), 0\} \cdot \operatorname{sgn} f(x)$$

pertenece a $L^1(R, \mu)$, mientras que la función

$$h(x) = \min\{|f(x)|, f^*(t)\} \cdot \operatorname{sgn} f(x)$$

pertenece a $L^\infty(R, \mu)$ con norma de L^∞ a lo sumo igual a $f^*(t)$. Por tanto, por (4.29),

$$\|g\|_{L^1} = \int_E |f|d\mu - \mu(E)f^*(t) \leq \int_0^{t_0} f^*(s)ds - t_0 f^*(t),$$

entonces

$$\|g\|_{L^1} + t\|h\|_{L^\infty} \leq \int_0^{t_0} f^*(s)ds + (t-t_0)f^*(t).$$

Pero f^* es constante igual a $f^*(t)$ cuando $t_0 \leq s \leq t$, con lo que la última estimación coincide con (4.86). Dado que $f = g + h$, tenemos que la prueba está terminada. □

El teorema anterior muestra, en particular, que la norma de f en L^1+L^∞ es simplemente $f^{**}(1)$. Esta caracterización nos permitirá probar con bastante facilidad que L^1+L^∞ es un espacio de Banach de funciones invariante por reordenamiento. También nos proporciona un enlace útil entre la norma de L^1+L^∞ y $L^1\cap L^\infty$, y esto llevará a la identificación de L^1+L^∞ como el espacio asociado de $L^1\cap L^\infty$ (Teorema 4.52).

Lema 4.51. *Sean ζ y η dos funciones decrecientes y no negativas en $(0,\infty)$. Entonces*

$$\int_0^\infty \zeta(s)\eta(s)ds \leq \left(\int_0^1 \eta(s)ds\right)\cdot \text{máx}\left\{\int_0^\infty \zeta(s)ds,\ \sup_{0<s<\infty}\zeta(s)\right\}. \quad (4.87)$$

Demostración. Sea A el máximo en el lado derecho de (4.87). Dado que ζ es decreciente y no negativa, podemos usar (4.83) para expresar A en la forma

$$A = \sup_{0<t<\infty} \frac{\int_0^t \zeta(s)ds}{\text{mín}(1,t)}.$$

Entonces, para cada $t>0$,

$$\int_0^t \zeta(s)ds \leq A\cdot \text{mín}(1,t) \leq \int_0^t A\chi_{(0,1)}(s)ds.$$

Dado que η también es decreciente y no negativa, podemos aplicar el Lema de Hardy 4.23 para obtener

$$\int_0^\infty \zeta(s)\eta(s)ds \leq \int_0^\infty A\chi_{(0,1)}\eta(s)ds = A\int_0^1 \eta(s)ds,$$

que era lo que queríamos probar. □

Teorema 4.52. *Los espacios L^1+L^∞ y $L^1\cap L^\infty$ sobre un espacio de medida resonante son espacios de Banach de funciones invariantes por reordenamiento, y sus normas vienen dadas por*

$$\|f\|_{L^1+L^\infty} = \int_0^1 f^*(s)ds \quad (4.88)$$

y

$$\|f\|_{L^1\cap L^\infty} = \sup_{0<t<\infty} \frac{\int_0^t f^*(s)ds}{\text{mín}(1,t)}. \tag{4.89}$$

Es más, los espacios $L^1 + L^\infty$ y $L^1 \cap L^\infty$ verifican que uno es el espacio asociado del otro, esto es,

$$(L^1 + L^\infty)' = L^1 \cap L^\infty; \quad (L^1 \cap L^\infty)' = L^1 + L^\infty. \tag{4.90}$$

Demostración. Las expresiones (4.88) y (4.89), las cuales se siguen directamente de (4.84) y de (4.83), respectivamente, se pueden escribir en la forma

$$\rho(f) = \|f\|_{L^1+L^\infty} = \sup_{0<t<\infty} \{f^{**}(t)\varphi(t)\},$$

donde $\varphi(t) = \text{mín}(1,t)$, y

$$v(f) = \|f\|_{L^1\cap L^\infty} = \sup_{0<t<\infty} \{f^{**}(t)\psi(t)\}, \tag{4.91}$$

donde $\psi(t) = \text{máx}(1,t)$. Por tanto, es claro que $L^1 + L^\infty$ y $L^1 \cap L^\infty$ son precisamente los espacios de Lorentz M_φ y M_ψ, respectivamente. En particular, por la Proposición 4.42, ambos espacios son espacios de Banach de funciones invariantes por reordenamiento.

Para establecer (4.90), es suficiente mostrar que $\rho' = v$, y una vez probado, tendríamos que $\rho = v'$ por el Teorema 4.16. En una dirección, la desigualdad (4.87) nos da que

$$\int fg d\mu \leq \int_0^\infty f^*(s)g^*(s)ds \leq \rho(f)v(g),$$

luego se sigue de la definición de la norma asociada que $\rho' \leq v$. En la dirección contraria, la desigualdad de Hölder (4.52), aplicada a ρ y a ρ', nos da que

$$\int_0^t g^*(s)ds \leq \rho(\chi_{(0,t)})\rho'(g) = \text{mín}(1,t)\rho'(g).$$

Se sigue de esto y de (4.91) que $v \leq \rho'$, terminando así la prueba. □

Corolario 4.53. *Las funciones fundamentales de $L^1 + L^\infty$ y $L^1 \cap L^\infty$ vienen dadas por*

$$\varphi_{L^1+L^\infty}(t) = \text{mín}(1,t); \quad \varphi_{L^1\cap L^\infty} = \text{máx}(1,t). \tag{4.92}$$

Teorema 4.54. *Sea X un espacio de Banach de funciones invariante por reordenamiento arbitrario sobre un espacio de medida resonante. Entonces*

$$L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow X \hookrightarrow L^1 + L^\infty. \tag{4.93}$$

Es más, la norma de X se puede remplazar por una norma que sea una constante por la norma inicial de modo que cada una de las inclusiones de (4.93) tenga norma igual a 1.

Demostración. En vista del teorema de representación de Luxemburg (Teorema 4.34) y las respectivas representaciones (4.88) y (4.89) de las normas de $L^1 + L^\infty$ y $L^1 \cap L^\infty$, es suficiente probar el resultado en el caso en el que el espacio de medida es $(\mathbb{R}^+, m)$. En ese casi, usando la desigualdad de Hölder (4.55) obtenemos que

$$\int_0^1 f^*(s)ds \leq \|\chi_{(0,1)}\|_{X'}\|f\|_X = \varphi_{X'}(1)\|f\|_X. \tag{4.94}$$

En vista de (4.88), esto establece la inclusión $X \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ y muestra que la aplicación inclusión tiene norma a lo sumo $\varphi_{X'}(1)$. En efecto, tomando f en (4.94) para ser $\chi_{(0,1)}$ y aplicando el Teorema 3.43, vemos que la inclusión tiene norma igual a $\varphi_{X'}(1)$.

De forma similar, intercambiando el papel de X por el de X', obtenemos que $X' \hookrightarrow L^1 + L^\infty$ con la aplicación inclusión teniendo norma igual a $\varphi_X(1)$. Por tanto, se sigue de la Proposición 3.24 y del Teorema 4.52 la inclusión $L^1 \cap L^\infty \hookrightarrow X$ y

$$\|f\|_X \leq \varphi_X(1)\|f\|_{L^1\cap L^\infty}, \tag{4.95}$$

para cada $f \in L^1 \cap L^\infty$.

Las desigualdades (4.94) y (4.95) juntas establecen la afirmación en (4.93). Además, por el Teorema 3.43 las constantes $\varphi_X(1)$ y $\varphi_{X'}(1)$ son mutuamente recíprocas, es claro que si remplazamos $\|\cdot\|_X$ por $\varphi_X(1)\|\cdot\|_X$, entonces cada inclusión en (4.93) tiene norma igual a 1. □

Si (R, μ) es finito, entonces $\|f\|_{L^1} \leq \mu(R)\|f\|_{L^\infty}$. Se sigue de (4.82) que los espacios $L^1 \cap L^\infty$ y L^∞ coinciden y sus normas son equivalentes (además son idénticas en el caso en que $\mu(R) = 1$). Por la Proposición 3.24, los espacios $L^1 + L^\infty$ y L^1 coinciden y tienen normas equivalentes (son normas idénticas si $\mu(R) = 1$). Por tanto, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.55. *Sea X un espacio de Banach de funciones invariante por reordenamiento sobre un espacio de medida finito (R, μ). Entonces*

$$L^\infty \hookrightarrow X \hookrightarrow L^1. \tag{4.96}$$

Además, si $\mu(R) = 1$ y $\|1\|_X = 1$, entonces ambas inclusiones en (4.96) tienen normas igual a 1.

En el caso discreto, es usual denotar al espacio $L^p(R, \mu)$ como ℓ^p, en ese caso, tenemos el siguiente resultado que es análogo al corolario anterior.

Corolario 4.56. *Supongamos que (R, μ) es completamente atómico, que consiste en un número numerable de átomos y los átomos tienen la misma medida igual a α. Si X es un espacio invariante por reordenamiento sobre (R, μ), entones*

$$\ell^1 \hookrightarrow X \hookrightarrow \ell^\infty. \tag{4.97}$$

Además, si $\alpha = 1$ y la norma de X de la función característica de un átomo es igual a 1, las inclusiones en (4.97) tienen norma igual a 1.

Vimos en el Corolario 4.53 que la función fundamental de $L^1 + L^\infty$ es igual a $\min(1, t)$. Dado que esta función es cóncava podemos construir inmediatamente los espacios de Lorentz $\Lambda(L^1 + L^\infty)$ y $M(L^1 + L^\infty)$:

$$\Lambda(L^1 + L^\infty) = L^1 + L^\infty = M(L^1 + L^\infty). \tag{4.98}$$

Por tanto, en vista del Corolario 4.48, $L^1 + L^\infty$ es el único espacio invariante por reordenamiento cuya función fundamental es igual a $\min(1, t)$.

Para $L^1 \cap L^\infty$, la situación es ligeramente diferente en esa función fundamental, que por el Corolario 4.53 es igual a la función $\max(1, t)$, no es cóncava. Sin embargo, teniendo en cuenta la Proposición 4.45, existe una norma equivalente en $L^1 \cap L^\infty$ de manera que este nuevo espacio tiene función fundamental cóncava. Es fácil ver que si remplazamos la norma

$$\|f\|_{L^1 \cap L^\infty} = \max\{\|f\|_{L^1}, \|f\|_{L^\infty}\} \tag{4.99}$$

por la norma equivalente

$$\|f\| = \|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^\infty}, \tag{4.100}$$

entonces la función fundamental resultante es igual a $t+1$, y esta es la menor función cóncava mayorante de $\max(1, t)$. Calculando los espacios $\Lambda(L^1 \cap L^\infty)$ y $M(L^1 \cap L^\infty)$, vemos nuevamente que ambos espacios coinciden con el espacio original. Esto es,

$$\Lambda(L^1 \cap L^\infty) = L^1 \cap L^\infty = M(L^1 \cap L^\infty). \tag{4.101}$$

En particular, $L^1 \cap L^\infty$, con la norma (4.100), es el único espacio invariante por reordenamiento con función fundamental igual a $1 + t$.

Como comentario final, observemos que la norma asociada de la norma de $(L^1 + L^\infty)$ viene dada por (4.99). Por tanto, la concavidad de la función fundamental de X no garantiza la concavidad de la función fundamental del espacio asociado X'.

Capítulo 5

El operador maximal de Hardy-Littlewood

En este capítulo vamos a estudiar propiedades del operador maximal de Hardy-Littlewood. Dicho operador es de gran importancia y aparece con bastante frecuencia en multitudes de áreas del análisis real.

5.1. El operador maximal de Hardy-Littlewood sobre espacios L^p

Empezamos viendo la definición del operador maximal de Hardy-Littlewood como también alguna de sus propiedades.

Definición 5.1. Sea f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Se define la función maximal de Hardy-Littlewood de f como la función $Mf : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que viene dada por

$$(Mf)(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|dy, \tag{5.1}$$

donde el supremo se extiende sobre todos los cubos Q que contienen a x en su interior (de aquí en adelante, supondremos que los cubos tienen los lados paralelos a los ejes coordenados).

El siguiente lema trata sobre la medibilidad de la función Mf para una función f localmente integrable en $\mathbb{R}^n$.

Lema 5.2. *Si f es una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, entonces para cada $\lambda > 0$, el conjunto*

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\},$$

es un conjunto abierto. En particular la función Mf es una función medible.

Demostración. Sea f una función localmente integrable y sea $\lambda > 0$. Sea $x \in E_\lambda$, con lo que $Mf(x) > \lambda$, es decir,

$$\sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy > \lambda,$$

por tanto, existe un cubo Q_x que contiene a x en su interior de manera que

$$\frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x} |f(y)| dy > \lambda.$$

Ahora bien, como x es un punto interior de Q_x, tenemos que existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset Q_x$. Veamos que $B(x, r) \subset E_\lambda$, para ello tomemos z en $B(x, r)$. Como $B(x, r) \subset Q_x$, tenemos que z pertenece a Q_x, con lo que

$$\sup_{z \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \geq \frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x} |f(y)| dy > \lambda,$$

es decir, $Mf(z) > \lambda$, con lo que $z \in E_\lambda$. Por lo tanto, E_λ es abierto. $\square$

Es usual encontrarse con una definición de la función maximal de Hardy-Littlewood ligeramente diferente a la que se ha dado en la Definición 5.1. Por ejemplo, una variante es

$$M_C f(x) = \sup_{x \in P} \frac{1}{|P|} \int_P |f(y)| dy, \quad f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), \tag{5.2}$$

donde ahora el supremo se toma sobre todos los cubos P centrados en x. Otra variante es la siguiente

$$M_B f(x) = \sup_{r > 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy, \quad f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n). \tag{5.3}$$

Una pregunta natural que surge es qué relación existe entre (5.1) y (5.2) o la que hay entre (5.1) y (5.3). La respuesta a dicha cuestión es que todas estas definiciones son equivalentes como se enuncia en la siguiente proposición.

Proposición 5.3. *Sea f una función localmente integrable. Entonces*

(1)
$$M_C f(x) \leq Mf(x) \leq 2^n M_C f(x),$$
para cada x de $\mathbb{R}^n$.

(2) Existen c_n y c'_n constantes positivas, que dependen únicamente de n, tales que

$$c_n M_B f(x) \leq Mf(x) \leq c'_n M_B f(x),$$

para cada x en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Empecemos probando la igualdad del punto (1). Claramente se tiene que $Mf_C(x) \leq Mf(x)$, sea quien sea x de $\mathbb{R}^n$. Veamos ahora la otra desigualdad. Sea $x = (x_1, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ y sea Q un cubo que contiene a x en su interior. Podemos suponer que Q es cerrado. Entonces Q es de la forma $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Sea ℓ la longitud de algún lado de Q. Consideremos el cubo $\widetilde{Q}$ dado por $\widetilde{Q} = [x_1 - \ell, x_1 + \ell] \times \cdots \times [x_n - \ell, x_n + \ell]$. Tenemos entonces que $Q \subset \widetilde{Q}$ y $|\widetilde{Q}| = 2^n |Q|$. Evidentemente $\widetilde{Q}$ es un cubo centrado en x. Luego, tenemos que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy \leq \frac{1}{|Q|} \leq \int_{\widetilde{Q}} |f(y)| dy = \frac{2^n}{|\widetilde{Q}|} \int_{\widetilde{Q}} |f(y)| dy \leq 2^n M_C f(x),$$

de donde se sigue que $Mf(x)\ 2^n M f_C(x)$.

Para el segundo punto sólo se probará la segunda desigualdad pues la primera desigualdad se razona de manera similar. Para probar la segunda desigualdad (también sirve para probar la primera desigualdad) vamos a usar el hecho de que $|B(0,r)| = \alpha(n) r^n$ donde $\alpha(n)$ es una constante que depende de n. Sea x un punto de $\mathbb{R}^n$. Consideremos una bola $B(x,r)$ con $r > 0$ arbitrario. Sea Q el cubo dado por $Q = [x_1 - r, x_1 + r] \times \cdots \times [x_n - r, x + r]$. Entonces se tiene que $B(x,r) \subset Q$. En efecto, si $z \in B(x,r)$, tenemos que $|z_i - x_i| \leq \|z - x\| < r$, para cada $i = 1, \cdots, n$. Luego $x_i - r < z_i < x_i + r$, para cada $i = 1, \cdots, n$. Esto nos dice que $z \in Q$. La medida de Q es justamente $|Q| = 2^n r^n$, con lo que $|B(x,r)| = \beta(n)|Q|$ donde $\beta(n) = \alpha(n) \cdot 2^{-n}$. Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy \leq \frac{1}{|B(x,r)|} \int_Q |f(y)| dy = \frac{1}{\beta(n)|Q|} \int_Q |f(y)| dy \\ \leq \frac{1}{\beta(n)} Mf(x),\end{aligned}$$

de donde se sigue $c_n M_B f(x) \leq Mf(x)$ para cada x de $\mathbb{R}^n$, donde la constante c_n viene dada por $c_n = \beta(n)$. □

El operador M que asigna a f su función maximal de Hardy-Littlewood Mf se denomina operador maximal de Hardy-Littlewood. Observemos que dicho operador es un funcional sublineal, es decir,

$$M(f+g) \leq Mf + Mg; \quad M(\lambda f) = |\lambda| Mf,$$

donde $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funciones localmente integrables y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observemos también que M es una contracción en L^∞. En efecto, si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$Mf(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|dy \leq \|f\|_\infty \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q 1dy = \|f\|_\infty,$$

sea quien sea $x \in \mathbb{R}^n$. Así tenemos que

$$\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty, \quad f \in L^\infty. \tag{5.4}$$

Sin embargo, M no es una contracción en $L^1(\mathbb{R}^n)$ ya que ni si quiera lo podemos definir como operador de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo pues para cualquier función f de $L^1(\mathbb{R}^n)$ que no sea la función nula, se tiene que Mf es una función que no es integrable. Esta afirmación será consecuencia del siguiente lema.

Lema 5.4. *Si f es una función de $L^1(\mathbb{R}^n)$ distinta de la función nula, entonces existen $R > 0$ y $c > 0$, que dependen de f, tales que*

$$Mf(x) \geq c/\|x\|^n,$$

para cada x de $\mathbb{R}^n$ con $\|x\| > R$.

Demostración. Sea f una función de $L^1(\mathbb{R}^n)$ distinta de la función nula. Por tanto, tenemos que existe E un conjunto medible de medida positiva de manera que $|f(x)| > 0$ para cada x de E. Ahora bien, tenemos que el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ se puede escribir como $\mathbb{R}^n = \cup_{k\geq 1} B(0,k)$. Luego, tenemos que existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|B(0,k) \cap E| > 0, \quad \forall k \geq k_0.$$

Sean $R = k_0$ y x de $\mathbb{R}^n$ con $\|x\| > R$. Sea $Q_x = [-\|x\|, \|x\|]^n$, que es un cubo de medida $|Q| = 2^n\|x\|^n$. Tenemos que x pertenece a Q_x pues $|x_i| \leq \|x\|$, para cada $i = 1, \cdots, n$. Además, $B(0,R) \subset Q_x$. En efecto, si $z \in B(0,R)$, tenemos que $|z_i| \leq \|z\| < R < \|x\|$, para cada $i = 1, \cdots, n$. Luego z pertenece a Q_x. Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned}
Mf(x) &= \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|dy \geq \frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x} |f(y)|dy \geq \frac{1}{|Q_x|} \int_{Q_x\cap E} |f(y)|dy \\
&\geq \frac{1}{|Q_x|} \int_{B(0,R)\cap E} |f(y)|dy = \frac{1}{\|x\|^n} \cdot \frac{1}{2^n} \int_{B(0,R)\cap E} |f(y)|dy = \frac{c}{\|x\|^n},
\end{aligned}$$

donde c es la constante $c = \frac{1}{2^n} \int_{B(0,R)\cap E} |f(y)|dy$ que es estrictamente positiva pues $|B(0,k) \cap E| > 0$ y $|f(y)| > 0$ para cada $y \in B(0,k) \cap E$. □

Corolario 5.5. *Si f es una función de $L^1(\mathbb{R}^n)$ distinta de la función nula, entonces Mf no es una función integrable.*

Demostración. Sa f una función de $L^1(\mathbb{R}^n)$ que es distinta de la función nula. La proposición anterior nos dice que existen $R > 0$ y $c > 0$ tales que

$$Mf(x) \geq c/\|x\|^n,$$

para cada x de $\mathbb{R}^n$ con $\|x\| > R$. Luego tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|dx \geq \int_{\|x\|>R} |Mf(x)|dx \geq c\int_{\|x\|>R} \|x\|^{-n}dx = \infty.$$

□

El siguiente objetivo es estimar el tamaño de Mf para una función integrable f, y nos va requerir el siguiente lema, que es una variante del lema de recubrimiento de Vitali. Antes de enunciar dicho lema, vamos a ver un lema previo, que informalmente se conoce con el nombre de *el pez grande se come al pez chico.*

Lema 5.6. *Sean Q_1 y Q_2 dos cubos de $\mathbb{R}^n$ tales que $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$. Supongamos que $|Q_1| \leq |Q_2|$. Entonces*

$$Q_1 \subset Q_2^*,$$

donde Q_2^* es el cubo concéntrico con Q_2, pero con la longitud de sus lados tres veces mayor que los de Q_2.

Demostración. Sean c_1 y c_2 los centros de Q_1 y Q_2 respectivamente. Obsérvese que c_2 es también el centro de Q_2. Sean ℓ_1 la longitud de cualquier lado de Q_1 y ℓ_2 la longitud de cualquier lado de Q_2 respectivamente. Tenemos Q_1, Q_2 y Q_2^* se pueden escribir de la forma

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - c_1\|_\infty \leq \ell_1/2\};\\
Q_2 &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - c_2\|_\infty \leq \ell_2/2\};\\
Q_2^* &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - c_2\|_\infty \leq 3\ell_2/2\}.
\end{aligned}$$

Dado que $\ell_1^n = |Q_1| \leq |Q_2| = \ell_2^n$, tenemos que $\ell_1 \leq \ell_2$. Sea $x_0 \in Q_1 \cap Q_2$. Veamos ahora que $Q_1 \subset Q_2^*$, para ello tomemos x_1 de Q_1 arbitrario. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\|x_1 - c_2\|_\infty &= \|x_1 - c_0 + c_0 - x_0 + x_0 - c_2\|_\infty\\
&\leq \|x_1 - c_0\|_\infty + \|c_0 - x_0\|_\infty + \|x_0 - c_2\|_\infty\\
&\leq \ell_1/2 + \ell_1/2 + \ell_2/2 \leq \ell_2/2 + \ell_2/2 + \ell_2/2\\
&= 3\ell_2/2,
\end{aligned}$$

con lo que x_1 pertenece a Q_2^*. □

Lema 5.7. *Sea Ω un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$ de medida finita. Sea $\mathcal{F}$ una colección de cubos Q que recubren a Ω. Entonces existe una subfamilia finita $Q_1, \cdots, Q_K$ de $\mathcal{F}$, con cubos disjuntos dos a dos, tal que*

$$|\Omega| \leq C_n \sum_{k=1}^{K} |Q_k|, \tag{5.5}$$

donde C_n es una constante que depende únicamente de n.

Demostración. Por la regularidad interior de la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$, el conjunto Ω lo podemos aproximar tanto como se quiera por dentro mediante conjuntos compactos. Además, cada cubo Q de la familia $\mathcal{F}$ se puede remplazar por un cubo abierto más grande con medida tan próxima como se quiera a la medida del cubo original Q. Por tanto, es suficiente probar el lema suponiendo que Ω es compacto y los cubos Q de la familia $\mathcal{F}$ son abiertos.

Con estas hipótesis, $\mathcal{F}$ es un recubrimiento abierto del conjunto Ω que es compacto, con lo que existe una cantidad finita de cubos de la familia $\mathcal{F}$ que cubren a Ω. Por tanto, podemos suponer también que la familia $\mathcal{F}$ es finita. Sea Q_1 el cubo más grande en $\mathcal{F}$, sea Q_2 el cubo más grande de los restantes de $\mathcal{F}$ que sea disjunto con Q_1, sea Q_3 el cubo más grande de los restantes de $\mathcal{F}$ que sea disjunto con Q_2, y así sucesivamente. Como $\mathcal{F}$ es finita, el proceso anterior termina después de un cierto número finito de pasos, resultando así un número finito de cubos $Q_1, \cdots, Q_K$. Para cada $k \in \{1, \cdots, K\}$, sea Q_k^* el cubo concéntrico con Q_k pero que tiene sus lados tres veces más largos que los lados de Q_k. Entonces la familia $\{Q_k^*\}_{k=1}^K$ recubre a Ω. En efecto, por reducción al absurdo, supongamos que no es así, luego existe $x \in \Omega \setminus \cup_{k=1}^K Q_k^*$, y dado que $\mathcal{F}$ recubre a Ω, tenemos que x pertenece, al menos, a uno cubo Q de la familia $\mathcal{F}$. Tenemos que Q no pertenece a la familia $\{Q_k^*\}_{k=1}^K$ ya que si $Q = Q_k^*$ para algún k de $\{1, \cdots, k\}$, tendríamos que x pertenece a Q_k^*, y llegaríamos a una contradicción, porque hemos supuesto que $x \in \Omega \setminus \cup_{k=1}^K Q_k^*$.Por construcción tenemos que existe k de $\{1, \cdots, K\}$ de manera que $Q_k \cap Q \neq \emptyset$ y $|Q| \leq |Q_k|$, porque si $Q_k \cap Q = \emptyset$ para cada $k = 1, \cdots, K$, entonces el proceso no tenía que haber terminado después de K pasos. Aplicando el Lema 5.6, tenemos que $Q \subset Q_k^*$, con lo que x pertenece a Q_k^*, y nuevamente llegamos a una contradicción, pues habíamos supuesto que $x \in \Omega \setminus \cup_{k=1}^K Q_k^*$. Luego la familia $\{Q_k^*\}_{k=1}^K$ recubre a Ω. Consecuentemente,

$$|\Omega| \leq \sum_{k=1}^{K} |Q_k^*| = 3^n \sum_{k=1}^{K} |Q_k|,$$

y, como habíamos comentado anteriormente, esto termina la prueba. $\square$

Teorema 5.8. *Si f pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces existe una constante C_n que depende únicamente de n tal que*

$$t(Mf)^*(t) \leq C_n \|f\|_{L^1}, \quad t > 0. \tag{5.6}$$

Demostración. En primer lugar, supongamos que f tiene soporte compacto, en ese caso, aplicando el Lema 5.4, tenemos que existen $R > 0$ y una constante $c > 0$ tales que $(Mf)(x) \geq c\|x\|^{-n}$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\| \geq R$. En particular, para cada $\lambda > 0$, el conjunto $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : (Mf)(x) > \lambda\}$ tiene medida finita pues se tiene que

$$E_\lambda \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sqrt[n]{\frac{c}{\lambda}} > \|x\| \right\} = B\left(0, \sqrt[n]{\frac{c}{\lambda}}\right).$$

Para cada $x \in E_\lambda$, la Definición 5.1 muestra que existe un cubo Q_x que contiene a x tal que

$$\lambda|Q_x| < \int_{Q_x} |f(y)|dy. \tag{5.7}$$

La colección de todos esos cubos Q_x cubren a E_λ, aplicando el Lema 5.7 existe un número finito de cubos, $Q_1, \cdots, Q_K$, de esa colección y una constante C_n, que depende únicamente de n, tales que

$$|E_\lambda| \leq C_n \sum_{k=1}^{K} |Q_k|. \tag{5.8}$$

Por tanto, combinando (5.7) con (5.8), obtenemos

$$|E_\lambda| \leq C_n \sum_{k=1}^{K} |Q_k| \leq \frac{C_n}{\lambda} \sum_{k=1}^{K} \int_Q |f(y)|dy \leq \frac{C_n}{\lambda} \|f\|_{L^1}.$$

Dado que $|E_\lambda|$ es justamente $m_{Mf}(\lambda)$, es decir, es la función de distribución de Mf evaluada en λ, tenemos, por la Proposición 5.10, que lo anterior es equivalente al resultado deseado en (5.6) para la función reordenada decreciente $(Mf)^*$.

En el caso general de una función integrable, podemos tomar una sucesión de funciones simples $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $f_k \uparrow f$ en c.t.p. Por una parte, es claro que la sucesión $\{Mf_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es creciente. Por otra parte, si x es un punto de $\mathbb{R}^n$ y Q es un cubo de $\mathbb{R}^n$ que contiene a x en su interior, tenemos, por el Teorema de la Convergencia Monótona, que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f_k(y)|dy = \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|dy.$$

Tomando supremo sobre todos los cubos Q que contienen a x en su interior, tenemos que

$$\sup_{x\in Q}\left\{\lim_{k\to\infty}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f_k(y)|dy\right\}=\sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|dy=Mf(x). \tag{5.9}$$

Veamos ahora que que

$$\sup_{x\in Q}\left\{\lim_{k\to\infty}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f_k(y)|dy\right\}=\lim_{k\to\infty}\left\{\sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f_k(y)|dy\right\}. \tag{5.10}$$

Sea Q un cubo que contiene a x en su interior. Tenemos entonces

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f_k(y)|dy\leq\sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f_k(y)|dy,$$

para cualquier $k\geq 1$. Luego, tomando límite cuando $k\to\infty$, tenemos que

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f_k(y)|dy=\lim_{k\to\infty}\left\{\sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f_k(y)|dy\right\}.$$

Dado que la elección del cubo Q ha sido arbitraria, obtenemos de lo anterior que

$$\sup_{x\in Q}\left\{\lim_{k\to\infty}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f_k(y)|dy\right\}\leq\lim_{k\to\infty}\left\{\sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f_k(y)|dy\right\}.$$

Para la desigualdad contraria, fijemos $k\geq 1$. Dado que $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es creciente, tenemos que

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f_k(y)|dy\leq\lim_{k\to\infty}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f_k(y)|dy,$$

para cualquier cubo Q que contiene a x en su interior. Luego, tomando supremo sobre todos los cubos que contienen a x en su interior, tenemos que

$$\sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f_k(y)|dy\leq\sup_{x\in Q}\left\{\lim_{k\to\infty}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f_k(y)|dy\right\},$$

y como esto es cierto para todo $k\geq 1$. Tomando límite cuando $k\to\infty$, tenemos que

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f_k(y)|dy\right\}\leq\sup_{x\in Q}\left\{\lim_{k\to\infty}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f_k(y)|dy\right\},$$

probándose así la igualdad en (5.10). Ahora bien, combinando (5.9) con (5.10) obtenemos justamente que $Mf_k\uparrow Mf$ y aplicando la propiedad (iv) de la Proposición 4.8, tenemos que $(Mf)^*\uparrow(Mf)^*$. Tenemos que por el argumento anterior, la desigualdad (5.6) se cumple para cada f_k, y como $\|f_k\|_{L^1}\uparrow\|f\|_{L^1}$, tenemos que (5.6) se cumple también para f. □

Un espacio de funciones que aparece en este capítulo es el espacio de Lebesgue $L^{1,\infty}$, llamado espacio de Lebesgue L^1-débil. Veamos cómo se define este espacio y alguna de sus propiedades.

Definición 5.9. Sea (R, μ) un espacio de medida. Se define el espacio de Lebesgue L^1-débil, y se denota $L^{1,\infty} = L^{1,\infty}(R, \mu)$, como el conjunto de funciones medibles $f : R \to \mathbb{K}$ que verifican

$$\|f\|_{L^{1,\infty}} = \sup_{t>0} t f^*(t) < \infty. \tag{5.11}$$

Una expresión alternativa para $\|\cdot\|_{L^{1,\infty}}$ viene recogida en la siguiente proposición.

Proposición 5.10. *Sea (R, μ) un espacio de medida. El conjunto de funciones $L^{1,\infty} = L^{1,\infty}(R, \mu)$ consiste en de todas las funciones medibles $f : R \to \mathbb{K}$ tales que*

$$\|f\|_{L^{1,\infty}} = \sup_{t>0} t\mu_f(t) < \infty. \tag{5.12}$$

Demostración. Vamos a ver que las expresiones (5.11) y (5.12) coinciden. Para ello, tomemos una función f de $L^{1,\infty}$. Empecemos viendo la desigualdad $\sup_{t>0} tf^*(t) \leq \sup_{t>0} t\mu_f(t)$. Sea $t > 0$. Supongamos que $f^*(t) > 0$ pues en caso contrario no hay nada que probar. Sea $\epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon < f^*(t)$. Sea $s_\epsilon = f^*(t) - \epsilon < f^*(t)$. Aplicando el punto (viii) de la Proposición 4.8, tenemos que $t \leq \mu_f(s_\epsilon)$. Multiplicando por s_ϵ en ambos miembros de la desigualad anterior, obtenemos justamente que

$$t(f^*(t) - \epsilon) \leq s_\epsilon \mu_f(s_\epsilon) \leq \sup_{s>0} t\mu_f(s),$$

para cada $\epsilon > 0$ con $\epsilon < f^*(t)$. Tomando límite cuando $\epsilon \to 0$, tenemos

$$tf^*(t) \leq \sup_{t>0} t\mu_f(t).$$

Dada la elección arbitraria de $t > 0$, obtenemos la desigualdad deseada.

Para la desigualdad contraria se razona de manera análoga. Tomemos $s > 0$ arbitrario. Supongamos que $\mu_f(s) > 0$ pues en caso contrario no hay nada que probar. Sea $\epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon < \mu_f(s)$. Sea $t_\epsilon = \mu_f(s) - \epsilon < \mu_f(s)$. Aplicando la propiedad (viii) de la Proposición 4.8, tenemos que $s \leq f^*(t_\epsilon)$. Multiplicando por t_ϵ en ambos miembros de la desigualad anterior, obtenemos justamente

$$s(\mu_f(s) - \epsilon) \leq t_\epsilon f^*(t_\epsilon) \leq \sup_{t>0} t\mu_f^*(t),$$

para cada $\epsilon > 0$ con $\epsilon < \mu_f(s)$. Tomando límite cuando $\epsilon \to 0$, tenemos

$$s\mu_f(s) \leq \sup_{t>0} tf^*(t).$$

Dada la elección arbitraria de $s > 0$, obtenemos la desigualdad deseada. $\square$

Veamos que $L^{1,\infty}$ es un espacio vectorial. Empecemos viendo que $L^{1,\infty}$ es cerrado para el producto por escalares. Sea f una función de $L^{1,\infty}$ y λ en $\mathbb{K}$. Entonces

$$\|\lambda f\|_{L^{1,\infty}} = \sup_{t>0} t(\lambda f)^*(t) = |\lambda| \sup_{t>0} tf^*(t) = |\lambda| \|f\|_{L^{1,\infty}} < \infty, \tag{5.13}$$

donde hemos usado el hecho de que $(\alpha f)^* = |\alpha| f^*$, para f de $\mathcal{M}_0(R, \mu)$ y α de $\mathbb{K}$. Veamos ahora que $L^{1,\infty}$ es cerrado para la suma. Sean f y g dos funciones de $L^{1,\infty}$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{L^{1,\infty}} &= \sup_{t>0} t(f+g)^*(t) \\
&\leq \sup_{t>0} tf^*(t/2) + \sup_{t>0} tg^*(t/2) \\
&= 2\sup_{t>0} \frac{t}{2} f^*(t/2) + 2\sup_{t>0} \frac{t}{2} g^*(t/2) \\
&= 2(\|f\|_{L^{1,\infty}} + \|g\|_{L^{1,\infty}}) < \infty.
\end{aligned}$$

Un hecho importante en lo anterior es que la constante $c = 2$ que aparece en

$$\|f+g\|_{L^{1,\infty}} \leq 2(\|f\|_{L^{1,\infty}} + \|g\|_{L^{1,\infty}}), \tag{5.14}$$

no se puede rebajar a 1. Lo que hace que $\|\cdot\|_{L^{1,\infty}}$ sea una cuasinorma. En efecto, consideremos como espacio de medida $(R, \mu) = ((0,1), m)$ donde m denota la medida de Lebesgue restringida a $(0,1)$, y consideremos las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \frac{1}{1-x}$ entonces unos cálculos inmediatos muestran que $\|f\|_{L^{1,\infty}} = \|g\|_{L^{1,\infty}} = 1$ mientras que $\|f+g\|_{L^{1,\infty}} \geq 4$, con lo que

$$\|f\|_{L^{1,\infty}} + \|g\|_{L^{1,\infty}} < \|f+g\|_{L^{1,\infty}}.$$

La siguiente proposición nos afirma de que $L^{1,\infty}$ es un espacio cuasinormado.

Proposición 5.11. *Sea (R, μ) un espacio σ-finito. Entonces el espacio vectorial $L^{1,\infty} = L^{1,\infty}(R, \mu)$ dotado de $\|\cdot\|_{L^{1,\infty}}$ es un espacio cuasinormado.*

Demostración. La propiedad de homogeneidad es justamente lo que se ha probado en (5.13), mientras que la desigualdad cuasi-triangular es lo que hemos demostrado en (5.14).

Nos queda por ver que $\|f\|_{L^{1,\infty}} = 0$ si y solo si $f = 0$. Si $f \equiv 0$, tenemos que $f^* \equiv 0$ con lo que $\|f\|_{L^{1,\infty}} = 0$. Supongamos ahora que $\|f\|_{L^{1,\infty}} = 0$, tenemos entonces que $tf^*(t) \leq 0$ para cada $t > 0$. Con lo que, $f^*(t) = 0$ para cada $t > 0$. Es decir $m_{\mu_f}(t) = 0$ para cada $t > 0$. Luego $\mu_f(t) = 0$ para cada $t > 0$, de donde se sigue que $f = 0$ en c.t.p. □

La cuasi-norma $\|\cdot\|_{L^{1,\infty}}$ induce una topología en $L^{1,\infty}$ que es la generada por las cuasi-bolas $B(f,r) = \{g \in L^{1,\infty} : \|f - g\|_{L^{1,\infty}} < r\}$, donde $r > 0$ y f es una función de $L^{1,\infty}$. Por lo que tiene sentido hablar de convergencia, sucesiones de Cauchy, completitud, etc.

La siguiente proposición nos dice que el espacio $L^{1,\infty}$ es un espacio cuasi-Banach, es decir, que $L^{1,\infty}$ es un espacio completo con la topología inducida por la cuasi-norma $\|\cdot\|_{L^{1,\infty}}$.

Proposición 5.12. *$L^{1,\infty}$ es un espacio cuasi-Banach.*

Demostración. Tenemos que ver que toda sucesión de Cauchy es convergente (con respecto a la cuasi-norma $\|\cdot\|_{L^{1,\infty}}$). Sea pues $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de funciones que pertenecen al espacio $L^{1,\infty}$ y sea $\epsilon > 0$. Tenemos que existe $N_k \geq 1$ tal que si $n, m \geq N_k$, entonces

$$\|f_n - f_m\|_{L^{1\infty}} < \epsilon^2.$$

Teniendo en cuenta la Proposición 5.10, tenemos que para todo $t > 0$

$$t\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > t\} \leq \|f_n - f_m\|_{L^{1,\infty}} < \epsilon^2,$$

de manera que si tomamos $t = \epsilon$, podemos escribir

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > t\}) < \epsilon,$$

es decir, que la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en medida y podemos aplicar la Proposición 2.9 para obtener que existe una subsucesión $\{f_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ que converge hacia una función medible f. Fijemos entonces un $k_0 \geq 1$ y consideremos la cantidad

$$|f_{n_{k_0}} - f| = \lim_{j\to\infty} |f_{n_{k_0}} - f_{n_j}|,$$

aplicamos la propiedad (iv) de la Proposición 4.3 para obtener

$$\mu_{|f_{n_{k_0}} - f|}(t) \leq \liminf_{j\to\infty} \mu_{|f_{n_{k_0}} - f_{n_j}|}(t),$$

y a partir de esta desigualdad reconstruimos $\|\cdot\|_{L^{1,\infty}}$ para llegar a

$$\|f_{n_{k_0}} - f\|_{L^{1,\infty}} \leq \liminf_{j\to\infty} \|f_{n_{k_0}} - f_{n_j}\|_{L^{1,\infty}}.$$

Hacemos ahora tender $k_0 \to \infty$ y usamos el hecho de la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^{1,\infty}$ de manera que la parte derecha de la estimación anterior tiende a cero. Obtenemos de esta manera una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge hacia una función f de $L^{1,\infty}$. Como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy con una subsucesión convergente, tenemos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en la cuasi-norma $\|\cdot\|_{L^{1,\infty}}$. □

Una última, pero no menos importante, observación sobre el espacio $L^{1,\infty}$ es que no se puede dotar de una norma que sea equivalente a la cuasi-norma dada en (5.11), y por tanto $L^{1,\infty}$ no puede ser normado. En efecto, supongamos que existe una norma $\|\cdot\|$ definida en $L^{1,\infty}$ equivalente a la cuasi-norma dada en (5.11). Por tanto, existen $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$c_1\|f\| \leq \|f\|_{L^{1,\infty}} \leq c_2\|f\|, \quad \forall f \in L^{1,\infty}. \tag{5.15}$$

Sea $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $L^{1,\infty}$. Tenemos, por (5.15), que

$$\left\|\sum_{k=1}^{N} f_k\right\|_{L^{1,\infty}} \leq c_2\left\|\sum_{k=1}^{N} f_k\right\| \leq c_2\sum_{k=1}^{N}\|f_k\| \leq K\sum_{k=1}^{N}\|f_k\|_{L^{1,\infty}}, \tag{5.16}$$

donde $K = c_2/c_1$, que es una constante que no depende de N. Consideremos en $\mathbb{R}$ la sucesión de funciones $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dada por

$$f_k(x) = \frac{1}{|x-k|}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

Tenemos que cada f_k pertenece a $L^{1,\infty}$ ya que mediante cálculos elementales se puede ver que $\|f_k\|_{L^{1,\infty}} \leq 1$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Esto último junto a (5.16), nos proporciona que

$$\left\|\sum_{k=1}^{N} f_k\right\|_{L^{1,\infty}} \leq K\sum_{k=1}^{N}\|f_k\|_{L^{1,\infty}} \leq KN \tag{5.17}$$

Por otra parte, tenemos que si $1 < x < N-1$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N-1} f_k(x) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{|x-k|} &= \sum_{k=1}^{[x]} \frac{1}{x-k} + \sum_{k=[x]+1}^{N-1} \frac{1}{k-x} \\
&\geq \sum_{k=1}^{[x]} \frac{1}{[x]+1-k} + \sum_{k=[x]+1}^{N-1} \frac{1}{k-[x]} \\
&\geq \sum_{k=1}^{[x]} \frac{1}{N-k} + \sum_{k=[x]+1}^{N-1} \frac{1}{k-[x]} = \sum_{l=N-[x]}^{N-1} \frac{1}{l} + \sum_{l=1}^{N-[x]-1} \frac{1}{l} \\
&= \sum_{l=1}^{N-1} \frac{1}{l} \geq \log(N-1) \geq \frac{1}{2}\log N, \quad N \geq 4.
\end{aligned}$$

Luego, si $N \geq 4$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{N-1} f_k \right\|_{L^{1,\infty}} &= \sup_{t>0} t \left| \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{N-1} f_k(x) > t \right\} \right| \\
&\geq \frac{1}{2}\log N \left| \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{N-1} f_k(x) > \frac{1}{2}\log N \right\} \right| \\
&\geq \frac{1}{2}\log N \left| \left\{ 1 < x < N-1 : \sum_{k=1}^{N-1} f_k(x) > \frac{1}{2}\log N \right\} \right| \\
&= \frac{1}{2}\log N(N-2) \geq \frac{1}{4} N\log N.
\end{aligned}$$

Esto último junto (5.17), nos da que

$$\frac{1}{4} N\log N \leq \left\| \sum_{k=1}^{N-1} f_k \right\|_{L^{1,\infty}} \leq KN, \qquad N \geq 4,$$

lo que es una contradicción cuando $N \to \infty$.

Una vez introducido el espacio $L^{1,\infty}$, nótese que de la desigualdad (5.6) se obtiene que

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}} \leq C_n \|f\|_{L^1}, \quad f \in L^1.$$

Es decir, que el operador maximal de Hardy-Littlewood es acotado de L^1 en $L^{1,\infty}$.

Teorema 5.13. *(Teorema de diferenciación de Lebesgue)*
Si f es una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\lim_{\substack{|Q|\to 0\\ x\in Q}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)-f(x)|dy = 0, \tag{5.18}$$

en casi todo punto x de $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Dado la naturaleza local del resultado, es claro que una vez establecido el resultado para funciones integrables, también sera cierto para funciones localmente integrables. Sea entonces $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Para cada x de $\mathbb{R}^n$, sea

$$(\Omega f)(x) = \limsup_{\substack{|Q|\to 0\\ x\in Q}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)-f(x)|dy.$$

La prueba termina si $(\Omega f)(x) = 0$ en c.t.p. x de $\mathbb{R}^n$.

Observemos que

$$(\Omega f)(x) \leq (Mf)(x) + |f(x)|,$$

entonces, para cada $t > 0$ (propiedad (iii) de la Proposición 4.8),

$$(\Omega f)^*(t) \leq (Mf)^*\left(\frac{t}{2}\right) + f^*\left(\frac{t}{2}\right).$$

Por tanto, usando la propiedad débil (5.6) de M y el hecho de que

$$f^*\left(\frac{t}{2}\right) \leq f^{**}\left(\frac{t}{2}\right) \leq \left(\frac{2}{t}\right)\|f\|_{L^1},$$

obtenemos que

$$(\Omega f)^*(t) \leq \frac{c}{t}\|f\|_{L^1}, \tag{5.19}$$

con la constante c dependiendo únicamente de n. Se sigue del Teorema Fundamental del Cálculo que $\Omega f = \Omega(f-h)$ cuando h es una función continua de soporte compacto, entonces aplicando (5.19) a $f-h$ en vez de a f, obtenemos que

$$(\Omega f)^*(t) \leq \frac{c}{t}\|f-h\|_{L^1}.$$

Pero el lado derecho en la desigualdad anterior lo podemos hacer tan pequeño como queramos dado que las funciones continuas de soporte compacto son densas en L^1. Por tanto $(\Omega f)^*(t) = 0$ para cada $t > 0$, y de aquí concluimos que $\Omega f(x) = 0$ en c.t.p x de $\mathbb{R}^n$. □

Corolario 5.14. *Si f es una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, entonces*

$$\lim_{\substack{|Q|\to 0\\ x\in Q}} \frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)dy = f(x), \tag{5.20}$$

en casi todo punto x de $\mathbb{R}^n$.

Corolario 5.15. *Si f es una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, entonces*

$$|f(x)| \leq (Mf)(x), \tag{5.21}$$

en casi todo punto x de $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Para cada x de $\mathbb{R}^n$, $Mf(x)$ viene dada por

$$Mf(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|dy,$$

y teniendo en cuenta el corolario anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \lim_{\substack{|Q|\to 0\\ x\in Q}} \frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)dy \right| \leq \lim_{\substack{|Q|\to 0\\ x\in Q}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|dy \\ &\leq \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|dy = Mf(x), \end{aligned}$$

en casi todo punto x de $\mathbb{R}^n$. □

Observemos si f es de L^∞, entonces de la desigualdad (5.21) se obtiene que $\|f\|_\infty \leq \|Mf\|_\infty$. Esto último combinado con la desigualdad (5.4), tenemos que realmente se verifica la igualdad, esto es,

$$\|f\|_\infty = \|Mf\|_\infty,$$

para cada f de L^∞.

Antes de seguir con nuestro análisis del operador maximal de Hardy-Littlewood necesitamos otro lema de recubrimiento. Un recubrimiento que se obtiene a partir de unos cubos espaciales llamados *cubos diádicos* (Véase la Definición 5.16).

Definición 5.16. para cada $k \in \mathbb{Z}$, sea $\Delta = 2^{-k}\mathbb{Z}^n$, es decir, el conjunto formado por los vectores de $\mathbb{Z}^n$ dilatados por un factor 2^{-k}. Sea D_k el conjunto de cubos de longitud 2^{-k} y cuyos vértices están en Δ_k. Los cubos diádicos son los cubos pertenecientes a $D = \cup_{k\in\mathbb{Z}} D_k$. Diremos que dos cubos Q y Q' no se solapan si la intersección de sus interiores es vacía.

Lema 5.17. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ de medida finita. Entonces existe una sucesión de cubos diádicos $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, con $\mathring{Q}_i \cap \mathring{Q}_j = \emptyset$ si $i \neq j$, que recubre a Ω y satisface*

(1) $Q_k \cap \Omega^c \neq \emptyset, \quad k \in \mathbb{N}$;

(2) $|\Omega| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| \leq 2^n |\Omega|$.

Demostración. Dado que Ω es un abierto, para cada x de Ω existe un cubo diádico, que denotamos por $Q(x)$, de diámetro más pequeño, que contiene a x y tiene intersección no vacía con Ω^c. Subdividimos $Q(x)$ en 2^n subcubos diádicos, congruentes, y seleccionamos uno cualquiera de ellos que contiene a x, y lo denotamos por $\widetilde{Q}(x)$ (véase la Figura 5.1).

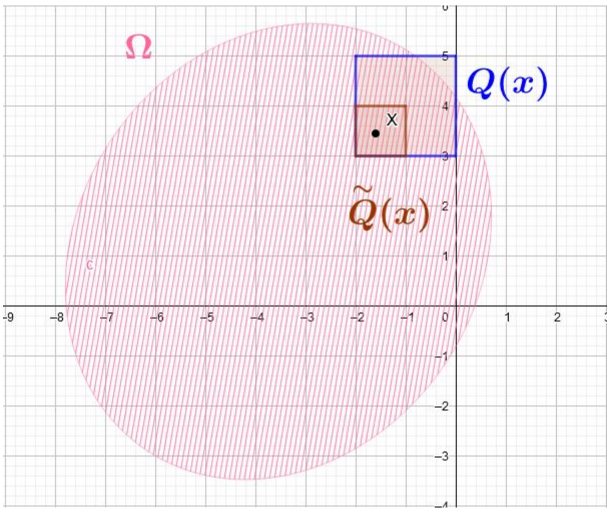

Figura 5.1: Representación gráfica de la elección de $\widetilde{Q}(x)$. Realización propia.

Entonces $\widetilde{Q}(x) \subset \Omega$. Luego,

$$2^{-n}|Q(x)| = |\widetilde{Q}(x)| = |\widetilde{Q}(x) \cap \Omega| \leq |Q(x) \cap \Omega|. \tag{5.22}$$

Ahora, cualquier par de cubos diádicos tienen la propiedad de que si sus interiores se cortan, entonces un cubo esta contenido en otro. Por tanto, como Ω tiene medida finita, cualquier x de Ω pertenece a un cubo maximal de la colección $\{Q(y) : y \in \Omega\}$. Hay un número a lo sumo numerable de esos cubos maximales (ya que hay un número numerable de cubos diádicos), que denotaremos por $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, y cualquiera dos de ellos sus interiores no se cortan. Evidentemente cubren a Ω y se cumple por tanto la primera desigualdad del punto (ii). La propiedad (i) se cumple por construcción. Además, cualquier cubo Q_k satisface una desigualdad del tipo (5.22), y por tanto,

$$\sum_{k=!}^{\infty} |Q_k| \leq 2^{-n} \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k \cap \Omega| = 2^n |\Omega|.$$

Esto establece la segunda desigualdad del punto (ii) completándose así la demostración. □

La función $f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds$ es el promedio de f^* sobre el intervalo $(0,t)$ (véase la Definición 4.18). $f^{**}(t)$ es el máximo valor entre todos los promedios de f^* sobre los intervalos que contienen a t porque la función f^* es decreciente. Por tanto f^{**} es la función maximal de Hardy-Littlewood de la función f^*. El siguiente resultado demuestra la equivalencia de la función maximal de una reordenada decreciente y la reordenada decreciente de una función maximal de Hardy-Littlewood. La primera desigualdad de este resultado se debe a F. Riesz, basándose en los trabajos previos de R. M. Gabriel, mientras que la segunda desigualdad, fue probada primero en una dimensión por C. Herz usando los métodos de martingala mientras que la versión n-dimensional se debe a C. Bennett y R. Sharpley.

Teorema 5.18. *Existen constantes c y c', dependiendo únicamente de n, tales que*

$$c(Mf)^*(t) \leq f^{**}(t) \leq c'(Mf)^*(t), \quad t > 0, \tag{5.23}$$

para cualquier función localmente integrable f en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Fijemos un $t > 0$. Para la desigualdad de la izquierda, podemos suponer que $f^{**}(t) < \infty$, ya que en el otro caso no hay nada que probar. En ese caso, por el Teorema 4.50, dado $\epsilon > 0$, existen dos funciones g_t de L^1 y h_t de L^∞ tales que $f = g_t + h_t$ y

$$\|g_t\|_{L^1} + t\|h_t\|_{L^\infty} \leq t f^{**}(t) + \epsilon. \tag{5.24}$$

Entonces, por (5.6) y (5.4), tenemos que para cada $s > 0$ que

$$\begin{aligned}(Mf)^*(s) &\leq (Mg_t)^*\left(\frac{s}{2}\right) + (Mh_t)^*\left(\frac{s}{2}\right) \leq \frac{c}{s}\|g_t\|_{L^1} + \|h_t\|_{L^\infty} \\ &\leq \frac{c}{s}(\|g_t\|_{L^1} + s\|h_t\|_{L^\infty}).\end{aligned}$$

Poniendo $s = t$, y usando (5.24), y haciendo $\epsilon \to 0$, obtenemos la primera desigualdad de (5.23).

Para la desigualdad de la derecha en (5.23), podemos suponer que se tiene que $(Mf)^*(t) < \infty$, ya que en otro caso no tenemos nada que probar. Teniendo en cuenta el Lema 5.2, tenemos que el conjunto

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : (Mf)(x) > (Mf)^*(t)\}$$

es abierto, y tenemos que $|\Omega| \leq t$ porque Mf y $(Mf)^*$ son equimedibles. Aplicando el Lema 5.17, obtenemos una sucesión de cubos diádicos $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, donde los interiores de cualquiera dos de esos cubos no se cortan, que cubre a Ω y satisface

$$Q_k \cap \Omega^c \neq \emptyset, \quad k = 1, 2, \cdots \tag{5.25}$$

y

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| \leq 2^n |\Omega| \leq 2^n t. \tag{5.26}$$

Sean $F = (\cup_{k=1}^{\infty} Q_k)^c$, y

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} f\chi_{Q_k}, \quad h = f\chi_F,$$

entonces $f = g + h$. La subaditividad del operador $f \mapsto f^{**}$ (Teorema 4.21) nos da que

$$f^{**}(t) \leq g^{**}(t) + h^{**}(t) \leq \frac{1}{t}\|g\|_{L^1} + \|h\|_{L^\infty}. \tag{5.27}$$

Ahora, por (5.25), cada cubo Q_k contiene un punto de Ω^c, y en ese punto, la función maximal tiene a lo sumo el valor $(Mf)^*(t)$ por el modo en que está definido Ω. Por tanto,

$$\frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} |f(y)| dy \leq (Mf)^*(t), \quad k = 1, 2, \cdots$$

luego el valor de $\|g\|_{L^1}$ se puede estimar por

$$\|g\|_{L^1} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Q_k} |f(y)| dy \leq \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| (Mf)^*(t).$$

Por tanto, usando (5.26), obtenemos

$$\|g\|_{L^1} \leq 2^n t (Mf)^*(t). \tag{5.28}$$

Por otra parte, el conjunto F esta contenido en Ω^c y entonces la función maximal esta acotada por $(Mf)^*(t)$ en F. Por tanto, usando (5.21), obtenemos

$$\|h\|_{L^\infty} = \|f\chi_F\|_{L^\infty} \leq \|(Mf)\chi_F\|_{L^\infty} \leq (Mf)^*(t).$$

Combinando la última estimación con (5.27) y (5.28), obtenemos la desigualdad de la derecha de (5.23). $\square$

El último resultado simplifica el problema de establecer la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood en espacios invariantes por reordenamientos. En efecto, reduce el problema a establecer la acotación de f^{**}, que a menudo es mas sencillo ya que f^{**} es un simple promedio y no el supremo de promedios. Procedemos a establecer la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood en el ambiente de los espacios de Lebesgue aunque se puede hacer sobre espacios más generales. Para ello vamos a necesitar las siguientes desigualdades que son cruciales, y se deben a G. H. Hardy.

Lema 5.19. *(Desigualdades de Hardy)*

Sea ψ una función medible no negativa en el intervalo $(0,\infty)$ y supongamos que $-\infty < \lambda < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$. Entonces

$$\left\{ \int_0^\infty \left(t^\lambda \frac{1}{t} \int_0^t \psi(s)ds \right)^q \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{1-\lambda} \left\{ \int_0^\infty (t^\lambda \psi(t))^q \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{q}} \tag{5.29}$$

y

$$\left\{ \int_0^\infty \left(t^{1-\lambda} \int_s^\infty \psi(s) \frac{ds}{s} \right)^q \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{1-\lambda} \left\{ \int_0^\infty (t^{1-\lambda} \psi(t))^q \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{q}} \tag{5.30}$$

(con los pertinentes cambios en el caso $q = \infty$).

Demostración. Solo se probará (5.29) pues (5.30) tiene prueba similar a la de (5.29).

Escribiendo $\psi(s) = s^{-\lambda/q'} s^{\lambda/q'} \psi(s)$ y aplicando la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t \psi(s)ds &\leq \left(\frac{1}{t} \int_0^t s^{-\lambda} ds \right)^{1/q'} \left(\frac{1}{t} \int_0^t s^{\lambda q/q'} \psi(s)^q ds \right)^{1/q} \\ &= (1-\lambda)^{-1/q'} t^{-\lambda/q' - 1/q} \Big(\int_0^t s^{\lambda(q-1)} \psi(s)^q ds)^{1/q}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, intercambiando el orden de integración, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(t^\lambda \frac{1}{t} \int_0^t \psi(s)ds \right)^q \frac{d}{dt} &\leq (1-\lambda)^{1-q} \int_0^\infty t^{\lambda-2} \int_0^t s^\lambda (q-1) \psi(s)^q ds dt \\ &= (1-\lambda)^{1-q} \int_0^\infty s^{\lambda(q-1)} \psi(s)^q \int_s^\infty t^{\lambda-2} dt ds. \end{aligned}$$

Realizando la integral sobre t y tomando la raíz q-ésima, obtenemos (5.29). $\square$

Sean $1 \leq q \leq \infty$ y $-\infty < \lambda < 1$. Si consideramos el operador de Hardy que asigna a cada función f, medible no negativa en el intervalo $(0,\infty)$, la función $Sf(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(s)ds$, y consideramos el espacio con peso $L^q((0,\infty),\mu)$, con $\mu = \frac{dt}{t^{1-\lambda q}}$, entonces la desigualdad (5.29) se puede escribir como

$$\|Sf\|_{L^q((0,\infty),\mu))} \leq \frac{1}{1-\lambda}\|f\|_{L^q((0,\infty),\mu))},$$

es decir, que el operador $f \mapsto Sf$ es un operador acotado de $L^q((0,\infty),\mu))$ en sí mismo, y con norma menor o igual que la constante $1/(1-\lambda)$. Veamos ahora que la norma del operador S es justamente $1/(1-\lambda)$. En efecto, consideremos la función $\psi(s) = s^{-\lambda+\epsilon}\chi_{(0,1)}(s)$, con $\epsilon > 0$. Tenemos por una parte que

$$\|S\psi\|_{L^q((0,\infty),\mu))} = \left\{\int_0^\infty \left(t^\lambda \frac{1}{t}\int_0^t \psi(s)ds\right)^q \frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{q}} = \left\{\frac{(1-\lambda)+\epsilon}{(1-\lambda+\epsilon)^q \epsilon q}\right\}^{1/q}.$$

Por otra parte, tenemos que

$$\|\psi\|_{L^q((0,\infty),\mu))} = \left\{\int_0^\infty (t^\lambda\psi(t))^q \frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{q}} = \left\{\frac{1}{\epsilon q}\right\}^{1/q}.$$

De donde se sigue que,

$$\frac{\|S\psi\|_{L^q((0,\infty),\mu))}}{\|\psi\|_{L^q((0,\infty),\mu))}} = \left\{\frac{(1-\lambda)+\epsilon}{(1-\lambda+\epsilon)^q(1-\lambda)}\right\}^{1/q} \underset{\epsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\lambda}.$$

La desigualdad (5.30) también tiene una interpretación como una acotación de un cierto operador. En este caso, el operador que se acota es el que asigna a una función g, medible no negativa en el intervalo $(0,\infty)$, la función $\int_s^\infty g(s)\frac{ds}{s}$. Este operador se conoce como el operador conjugado del operador de Hardy. Si S^*g es la función dada por $S^*g(s) = \int_s^\infty g(s)\frac{ds}{s}$, entonces la desigualdad (5.30) nos dice que

$$\|S^*g\|_{L^q((0,\infty),\nu)} \leq \frac{1}{1-\lambda}\|g\|_{L^q((0,\infty),\nu)},$$

donde ahora $\nu = \frac{dt}{t^{1-q(1-\lambda)}}$. Es decir, que S^* es un operador acotado del espacio con peso $L^q((0,\infty),\nu)$ en sí mismo. Además, sucede, como en el caso anterior, que $\|S^*\| = 1/(1-\lambda)$.

Ahora podemos establecer la acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood entre ciertos espacios de Lebesgue.

Teorema 5.20. *(Teorema Maximal de Hardy-Littlewood)*

Sea $1 < p \leq \infty$ y supongamos que f pertenece a $L^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces Mf pertenece a $L^p(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|Mf\|_{L^p} \leq c\|f\|_{L^p}, \tag{5.31}$$

donde la constante c depende únicamente de p y de n.

Demostración. Dado que $p > 1$, estamos en condiciones de poder aplicar la primera parte del Lema 5.19 con $\lambda = 1/p$ y $q = p$. En ese caso, obtenemos de (5.23) y de (5.29), con c dependiendo únicamente de n, que

$$\begin{aligned}\|Mf\|_{L^p(\mathbb{R}^n} &= \left(\int_0^\infty (Mf)^*(t)^p dt\right)^{1/p} \\ &\leq c\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds\right)^p dt\right)^{1/p} \\ &\leq cp'\left(\int_0^\infty f^*(t)^p dt\right)^{1/p} \\ &= cp'\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

□

El Teorema Maximal de Hardy-Littlewood (Teorema 5.20) se puede considerar como un teorema de interpolación del operador maximal de Hardy-Littlewood. El ingrediente crucial en la prueba (Teorema 5.18) afirma que

$$(Mf)^*(t) \leq cf^{**}(t), \quad t > 0, \tag{5.32}$$

para cualquier función localmente integrable f. En esta desigualdad se esconde la propiedad de que M es acotado en L^∞;

$$\|Mf\|_{L^\infty} = \sup_{t>0}(Mf)^*(t) \leq c \cdot \sup_{t>0} f^{**}(t) = c\|f\|_{L^\infty}.$$

y que M esta acotado de L^1 en $L^{1,\infty}$:

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}} = \sup_{t>0} t(Mf)^*(t) \leq \sup_{t>0} ctf^{**}(t) = \sup_{t>0} c\int_0^t f^*(s)ds = c\|f\|_{L^1}. \tag{5.33}$$

Observemos que la prueba sólo usa (5.32) y la desigualdad de Hardy apropiada.

Volvamos ahora al operador de Hardy, que asigna cada función f de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$ la función

$$Sf(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(s)ds, \quad t > 0.$$

Obsérvese que si $t > 0$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\left\{s : \frac{1}{s}\int_0^s |f(u)|du > t\right\}\right| &= \left|\left\{s : \int_0^1 |f(su)|du > t\right\}\right| \\ &\leq \frac{1}{t}\int_0^\infty \int_0^1 |f(su)|duds \\ &= \frac{1}{t}\int_0^1 \int_0^\infty |f(su)|dsdu \\ &= \frac{1}{t}\int_0^1 \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}du \\ &= \frac{1}{t}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+)},\end{aligned}$$

de donde se sigue la siguiente desigualdad

$$\|S|f|\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^+)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}, \tag{5.34}$$

es decir, el operador S es acotado de $L^1(\mathbb{R}^+)$ en $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^+)$.

5.2. Teorema de G. G. Lorentz y T. Shimogaki

En esta sección lo que vamos a obtener es un teorema de G.G.Lorentz y T. Shimogaki. Dicho resultado nos va caracterizar los espacios invariantes por reordenamientos en los que el operador maximal de Hardy-Littlewood es acotado. Durante la sección, veremos los índices de Boyd de un espacio de Banach de funciones invariante por reordenamiento X, $(\underline{\alpha}, \overline{\alpha})$, que son unos índices de enorme importancia y que satisfacen $0 \leq \underline{\alpha} \leq \overline{\alpha} \leq 1$. Estos índices indican, en algún sentido, la posición del espacio X en la escala entre L^1 y L^∞. Veremos, por ejemplo, que los índices de L^p son ambos igual a $1/p$ y los índices de $L^p \cap L^q$, $p < q$, son $\underline{\alpha} = 1/q$, $\overline{\alpha} = 1/p$.

Necesitaremos ciertos hechos elementales de la teoría de funciones subaditivas. Una función real ω definida sobre $\mathbb{R}$ es subaditiva si

$$\omega(s+t) \leq \omega(s) + \omega(t), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Lema 5.21. *Sea ω una función creciente y subaditiva definida sobre $\mathbb{R}$ tal que $\omega(0) = 0$. Entonces*

$$-\omega(-s) \leq \omega(s), \quad s \in \mathbb{R}. \tag{5.35}$$

Además, $\alpha = \lim\limits_{s\to\infty} \frac{\omega(s)}{s}$ es finito y

$$\alpha = \lim_{s\to\infty} \frac{\omega(s)}{s} = \inf_{s>0} \frac{\omega(s)}{s}. \tag{5.36}$$

Demostración. La estimación en (5.35) se sigue inmediatamente de la subaditividad de ω y del hecho de que $\omega(0) = 0$:

$$0 = \omega(0) = \omega(s + (-s)) \leq \omega(s) + \omega(-s).$$

Sea $\alpha = \operatorname{ínf}_{s>0} \omega(s)/s$. Es claro que $0 \leq \alpha \leq \omega(1)$, por lo que, en particular, α es finito. Sea $\epsilon > 0$, y sea $t > 0$ tal que $\alpha \leq \omega(t)/t < \alpha + \epsilon$, y tomemos N natural tal que $(1 + 1/N)\omega(t)/t < \alpha + \epsilon$. Para cada $s \geq Nt$, existe un $n \geq N$ tal que $nt \leq s < (n+1)t$. Usando la última desigualdad y el hecho de que ω es creciente y subaditiva, obtenemos que $\omega(s) \leq (n+1)\omega(t)$, y por tanto

$$\frac{\omega(s)}{s} \leq \frac{(n+1)\omega(t)}{nt} \leq \left(1 + \frac{1}{N}\right)\frac{\omega(t)}{t} < \alpha + \epsilon.$$

Luego, $\omega(s)/s \to \alpha$ cuando $s \to \infty$. □

Una función no negativa ψ en $(0, \infty)$ se dice que es submultiplicativa si

$$\psi(st) \leq \psi(s)\psi(t), \quad 0 < s, t < \infty.$$

A cada función multiplicativa ψ en $(0, \infty)$, le asociamos una función ω definida, sobre $\mathbb{R}$, como

$$\omega(s) = \log \psi(e^s), \quad s \in \mathbb{R}. \tag{5.37}$$

Es claro que ω es subaditiva. Por lo tanto, si ψ es creciente y $\psi(1) = 1$, entonces ω satisface las hipótesis del Lema 5.21. Sea α el correspondiente límite definido por (5.36) y sea $\overline{\alpha}(\psi) = \alpha$. Entonces $0 \leq \overline{\alpha} < \infty$ y, por (5.36),

$$\overline{\alpha}(\psi) = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \psi(t)}{\log t} = \inf_{t>1} \frac{\log \psi(t)}{\log t}. \tag{5.38}$$

Lema 5.22. *Sea ψ una función creciente y submultiplicativa en $(0, \infty)$ tal que $\psi(1) = 1$, y sea a un número positivo arbitrario. Entonces $\overline{\alpha}(\psi) < a$ si y solo si*

$$\int_1^\infty t^{-a}\psi(t)\frac{dt}{t} < \infty. \tag{5.39}$$

Demostración. Si $\overline{\alpha}(\psi) < a$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $\overline{\alpha}(\psi) < a - \epsilon$. Por (5.38), existe $T > 1$ tal que $\log \psi(t)/\log t < a - \epsilon$ para cada $t \geq T$. Entonces $\psi(t) < t^{a-\epsilon}$ para cada $t \geq T$, entonces

$$\int_1^\infty t^{-a}\psi(t)\frac{dt}{t} \leq \psi(T)\int_1^T t^{-1-a}dt + \int_T^\infty t^{-1-\epsilon}dt < \infty.$$

Recíprocamente, si (5.39) se cumple, entonces $s^{-a}\psi(s) < 1$ para algún $s > 1$. Entonces, por (5.38),

$$\overline{\alpha}(\psi) \leq \frac{\log \psi(s)}{\log s} < \frac{\log s^a}{\log s} = a,$$

como queríamos probar. □

Para lo que queda de esta sección, denotaremos por $X = X(\rho)$ a un espacio de Banach de funciones invariante por reordenamiento sobre un espacio de medida (R, μ) σ-finito, infinito y no atómico. En ese caso, el Teorema de Representación de Luxemburg (Teorema 4.34) proporciona una única norma invariante por reordenamiento $\overline{\rho}$ sobre $(\mathbb{R}^+, m)$, definida por

$$\overline{\rho}(h) = \sup\left\{ \int_0^\infty g^*(t)h^*(t)dt : \rho'(g) \leq 1 \right\}, \tag{5.40}$$

tal que

$$\rho(f) = \overline{\rho}(f^*), \tag{5.41}$$

para cada $f \in \mathcal{M}_0^+(R, \mu)$. El espacio de Banach de funciones invariante por reordenamiento generado por $\overline{\rho}$ se denotará por $\overline{X}$.

Definición 5.23. Para cada $t > 0$, sea E_t el operador de dilatación definido sobre $\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^+, m)$ por

$$(E_t f)(s) = f(ts), \quad 0 < s < \infty. \tag{5.42}$$

Con X y $\overline{X}$ definidos al principio de este epígrafe, sea $h_X(t)$ la norma del operador $E_{1/t}$ como operador de $\overline{X}$ en sí mismo. Esto es,

$$h_X(t) = \|E_{1/t}\|, \quad 0 < t < \infty. \tag{5.43}$$

No está claro que el operador E_t sea acotado sobre $\overline{X}$. Veremos que ciertamente lo es y daremos una estimación de su norma, pero antes, vamos a enunciar un resultado de la teoría de interpolación.

Teorema 5.24. *(Calderón)*

Sea X un espacio de Banach de funciones invariante por reordenamiento sobre un espacio de medida resonante. Si T es acotado de L^1 en L^1 y de L^∞ en L^∞, entonces $T : X \to X$ es un operador acotado y además

$$\|T\| \leq \max\left\{ \|T\|_{L^\infty \to L^\infty}, \|T\|_{L^1 \to L^1} \right\}.$$

Demostración. Referencia [1]. □

Proposición 5.25. *Para cada $t > 0$, el operador E_t es un operador acotado de $\overline{X}$ en sí mismo. La función h_X es creciente y submultiplicativa en $(0, \infty)$, satisface $h_X(1) = 1$, y*

$$h_X(t) \leq \text{máx}(1, t), \quad 0 < t < \infty. \tag{5.44}$$

Es más, si X' es el espacio asociado a X, entonces

$$h_X(t) = t h_{X'}\left(\frac{1}{t}\right), \quad 0 < t < \infty. \tag{5.45}$$

Demostración. Sean $t > 0$ y $f \in L^\infty(\mathbb{R}^+, m)$, entonces

$$|(E_{1/t})f(s)| = |f(s/t)| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,m)}, \quad 0 < s < \infty,$$

con lo que $E_{1/t}$ es una contracción en $L^\infty(\mathbb{R}^+, m)$. Por otra parte, tenemos que si $f \in L^1(\mathbb{R}^+, m)$, entonces

$$\int_0^\infty |(E_{1/t}f)(s)|ds = \int_0^\infty |f(s/t)|ds = t\int_0^\infty |f(s)|ds = t\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+,m)}.$$

Es decir, $E_{1/t}$ es un operador acotado de $L^1(\mathbb{R}^+, m)$ en sí mismo y además su norma como operador es exactamente igual a t. Teniendo en cuenta el Teorema 5.24, tenemos que $E_{1/t}$ es un operador acotado y además

$$h_X(t) = \|E_{1/t}\| \leq \text{máx}\{1, t\}.$$

La afirmación $h_X(1) = 1$ es obvia dado que E_1 es el operador identidad.

Obsérvese que $(E_t f)^* = E_t(f^*)$. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mu_{E_t f}(\lambda) &= |\{z \geq 0 : (E_t f)(z) > \lambda\}| = |\{z > 0 : f(tz) > \lambda\}| \\
&= |\{x/t \geq 0 : f(x) > \lambda\}| = \frac{1}{t}|\{x > 0 : f(x) > \lambda\}| \\
&= \frac{1}{t}\mu_f(\lambda).
\end{aligned}$$

Para cada $\lambda \geq 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
(E_t f)^*(s) &= \text{ínf}\{\lambda : \mu_{E_t f}(\lambda) \leq s\} = \text{ínf}\{\lambda : \mu_f(\lambda) \leq st\} \\
&= f^*(ts) = \{E_t(f^*)\}(s),
\end{aligned}$$

para cada $s > 0$. Se sigue de (4.54) que

$$\|E_{1/t}f\|_{\overline{X}} = \sup\left\{\int_0^\infty f^*\left(\frac{s}{t}\right)g^*(s)ds : \|g\|_{(\overline{X})'} \leq 1\right\}, \tag{5.46}$$

para cualquier f de $\overline{X}$. Sean ahora $0 < t_1 \leq t_2$. Tenemos, por ser f^* una función decreciente, que

$$f^*\left(\frac{s}{t_1}\right) \leq f^*\left(\frac{s}{t_2}\right), \quad s > 0.$$

De aquí es claro que la función h_X es una función creciente. La submultiplicatividad de h_X es una consecuencia inmediata del hecho de que $E_{st} = E_s E_t$, para cualquier $s, t > 0$. En efecto, sea $f \in \overline{X}$ y sean $t, s > 0$. Tenemos que

$$E_{st} f(u) = f(stu) = (E_s f)(tu) = \{(E_s \circ E_t)(f)\}(u), \quad u > 0.$$

Luego

$$h_X(st) = \|E_{1/st}\| = \|E_{1/s} \circ E_{1/t}\| \leq \|E_{1/s}\| \|E_{1/t}\| = h_X(t) h_X(t).$$

Veamos ahora la igualdad (5.45). De (5.46), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|E_{1/t} f\|_{\overline{X}} &= \sup\left\{ \int_0^\infty f^*\left(\frac{s}{t}\right) g^*(s) ds : \|g\|_{(\overline{X})'} \leq 1 \right\} \\
&= \sup\left\{ t \int_0^\infty f^*(s) g^*(ts) ds : \|g\|_{(\overline{X})'} \leq 1 \right\} \\
&\leq t \|f\|_{\overline{X}} \|E_t g\|_{(\overline{X})'} \leq t \|f\|_{\overline{X}} \|E_t\|_{(\overline{X})'} \\
&= t \|f\|_{\overline{X}} \|E_t\|_{\overline{(X')}} = t \|f\|_{\overline{X}} h_{X'}\left(\frac{1}{t}\right),
\end{aligned}$$

donde, en la penúltima igualdad, hemos usado el hecho de que $(\overline{X})' = \overline{(X')}$ (Teorema 4.34). Por tanto, tenemos que $h_X(t) \leq t h_{X'}(\frac{1}{t})$. Remplazando X por X', t por $1/t$, y usando el hecho de que $X'' = X$ (Teorema 3.20), obtenemos también que $h_{X'}(1/t) \leq (1/t) h_X(t)$. Esto, junto a la estimación previa, llegamos a la igualdad (5.45). $\square$

Definición 5.26. Sea X un espacio de Banach de funciones invariante por reordenamiento sobre un espacio de medida σ-finito, no atómico y infinito, los índices de Boyd de X son los números $\underline{\alpha}_X$ y $\overline{\alpha}_X$ definidos por

$$\underline{\alpha}_X = \sup_{0<t<1} \frac{\log h_X(t)}{\log t}, \quad \overline{\alpha}_X = \sup_{1<t<\infty} \frac{\log h_X(t)}{\log t}. \tag{5.47}$$

Proposición 5.27. *Los índices $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_X$ y $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}_X$ de X vienen dados por los límites*

$$\underline{\alpha}_X = \lim_{t\to 0^+} \frac{\log h_X(t)}{\log t}, \quad \overline{\alpha}_X = \lim_{t\to\infty} \frac{\log h_X(t)}{\log t}, \tag{5.48}$$

y satisfacen

$$0 \leq \underline{\alpha} \leq \overline{\alpha} \leq 1. \tag{5.49}$$

Además, los índices $\underline{\alpha}' = \underline{\alpha}_{X'}$ *y* $\overline{\alpha}' = \overline{\alpha}_{X'}$ *del espacio asociado* X' *vienen dados por*

$$\underline{\alpha}' = 1 - \overline{\alpha}, \quad \overline{\alpha}' = 1 - \underline{\alpha}. \tag{5.50}$$

Demostración. Usando (5.45), tenemos que

$$\log h_X(t) = \log t + \log h_{X'}(1/t), \quad 0 < t < \infty.$$

equivalentemente,

$$\frac{\log h_X(t)}{\log t} = 1 + \frac{\log h_{X'}(1/t)}{\log t} = 1 - \frac{\log h_{X'}(1/t)}{\log(1/t)}, \quad 0 < t < \infty. \tag{5.51}$$

Las relaciones (5.50) se siguen de lo anterior junto a (5.47).

Vimos en la Proposición 5.25 que la función h_X es creciente y submultiplicativa en $(0, \infty)$ con $h_X(1) = 1$. Por tanto, tenemos que $\overline{\alpha}$ coincide con la constante $\overline{\alpha}(h_X)$ definido por (5.38), y de aquí se deduce la segunda identidad en (5.48). La primera identidad de (5.48) resulta de la segunda aplicándole (5.50) y (5.51).

El hecho de que $\overline{\alpha} \leq 1$ se deduce de (5.44) y (5.47). Aplicando este resultado a X', obtenemos que $\underline{\alpha} = 1 - \overline{\alpha}' \geq 0$. Por lo tanto, solo nos queda ver que $\underline{\alpha} \leq \overline{\alpha}$. Dado que h_X es una función submultiplicativa, tenemos que $1 = h_X(1) \leq h_X(t) h_X(1/t)$. Por tanto, para cada $t > 1$,

$$\frac{\log h_x(1/t)}{\log(1/t)} = \frac{\log\left(\frac{1}{h_X(1/t)}\right)}{\log t} \leq \frac{\log h_X(t)}{\log t}.$$

Tomando límite cuando $t \to \infty$, obtenemos de (5.47) que $\underline{\alpha} \leq \overline{\alpha}$, como queríamos probar. □

Ejemplo 5.28. Sea (R, μ) un espacio de medida resonante. Vimos en la Proposición (4.9) que se tienen la siguientes igualdad:

$$\|f\|_{L^p(R,\mu)} = \|f^*\|_{L^p(\mathbb{R}^+,m)}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

para cada $f \in L^p(R, \mu)$. Por tanto, tenemos que la norma invariante por reordenamiento $\overline{\rho}$ sobre $(\mathbb{R}^+, m)$ que nos asegura su existencia el teorema de representación de Luxemburg (Teorema 4.34) es justamente la que viene definida por

$$\overline{\rho}(f^*) = \|f^*\|_{L^p(\mathbb{R}^+,m)},$$

para cada $f \in L^p(R,\mu)$. Por tanto, si $t > 0$, $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^+, m)$,

$$\|E_{1/t}f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+,m)} = \int_0^\infty |f(s/t)|^p ds = t\int_0^\infty |f(z)|^p dz = t\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^+,m)}.$$

Esto último nos dice que el operador $E_{1/t}$ es acotado de $L^p(\mathbb{R}^+, m)$ en sí mismo, y su norma es $\|E_{1/t}\| = t^{1/p}$. Mientas que si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^+, m)$, tenemos entonces que

$$\|E_{1/t}f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,m)} = \sup_{0<s<\infty}\operatorname{ess} |f(s/t)| = \sup_{0<z<\infty}\operatorname{ess} |f(z)| = \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+,m)}.$$

Esto nos dice que el operador $E_{1/t}$ es acotado de $L^\infty(\mathbb{R}^+, m)$ en sí mismo, y su norma es $\|E_{1/t}\| = 1$. Recopilando todo lo que hemos obtenido, tenemos que $h_{L^p(R,\mu)} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ viene dada por

$$h_{L^p(R,\mu)}(t) = \begin{cases} t^{1/p} & si \quad 1 \leq p < \infty, \\ \\ 1 & si \qquad p = \infty. \end{cases}$$

Observemos que $h_{L^\cdot(R,\mu)}(t)$ es continua como función de la variable p.

Por tanto, tenemos que si $1 \leq p < \infty$, entonces

$$\underline{\alpha}_{L^p(R,\mu)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\log h_{L^p(R,\mu)}(t)}{\log t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\log t^{1/p}}{\log t} = \frac{1}{p},$$

$$\overline{\alpha}_{L^p(R,\mu)} = \lim_{t\to \infty} \frac{\log h_{L^p(R,\mu)}(t)}{\log t} = \lim_{t\to \infty} \frac{\log t^{1/p}}{\log t} = \frac{1}{p}.$$

En el caso en que $p = \infty$, tenemos que

$$\underline{\alpha}_{L^\infty(R,\mu)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\log h_{L^\infty(R,\mu)}(t)}{\log t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\log 1}{\log t} = 0,$$

$$\overline{\alpha}_{L^\infty(R,\mu)} = \lim_{t\to \infty} \frac{\log h_{L^\infty(R,\mu)}(t)}{\log t} = \lim_{t\to \infty} \frac{\log 1}{\log t} = 0.$$

En definitiva, hemos obtenido que los índices de Boyd de $L^p(R,\mu)$ coinciden con $1/p$ (tomando 0 como $1/\infty$).

Si ahora $1 \leq p < q \leq \infty$, mediante cálculos similares a los anteriores y teniendo en cuenta que $\|E_{1/t}\|_{L^p\cap L^q} = \max\{\|E_{1/t}\|_{L^p}, \|E_{1/t}\|_{L^q}\}$, se llega a que los índices de Boyd del espacio $L^p \cap L^q = L^p(R,\mu) \cap L^q(R,\mu)$ son justamente

$$\overline{\alpha}_{L^p\cap L^q} = 1/p; \quad \underline{\alpha}_{L^p\cap L^q} = 1/q.$$

Vamos ahora a definir dos operadores importantes, que generalizan al operador de Hardy y a su conjugado.

Definición 5.29. Sea $0 < a \leq 1$, y sea P_a el operador integral definido sobre $\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^+, m)$ por

$$(P_a f)(t) = t^{-a} \int_0^t s^a f(s) \frac{ds}{s}, \quad 0 < t < \infty. \tag{5.52}$$

De forma similar, sea Q_a, con $0 < a \leq 1$, el operador integral definido sobre $\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^+, m)$ por

$$(Q_a f)(t) = t^{-a} \int_t^\infty s^a f(s) \frac{ds}{s}, \quad 0 < t < \infty. \tag{5.53}$$

Obsérvese que Q_a es el adjunto formal de P_a cuando $a + b = 1$. En otras palabras, un intercambio de orden de integración muestra que,

$$\int_0^\infty (P_a f)(t) g(t) dt = \int_0^\infty f(t)(Q_b g)(t) dt, \tag{5.54}$$

para toda f y g para las cuales dichas integrales existen.

Teorema 5.30. *El operador P_a es acotado en $\overline{X}$ si y solo si $a > \overline{\alpha}_X$, y Q_a es acotado en $\overline{X}$ si y solo si $a < \underline{\alpha}_X$.*

Demostración. Supongamos que P_a es acotado en $\overline{X}$. Sean f y g dos funciones de $\overline{X}$ y de $\overline{X}'$ respectivamente, tales que

$$\|f\|_{\overline{X}} \leq 1, \quad \|g\|_{\overline{X}'} \leq 1. \tag{5.55}$$

Entonces $\int_0^\infty f^*(s/t) g^*(s)$ decrece con t y por tanto, para cada $t > 0$ fijo, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f^*\left(\frac{s}{t}\right) g^*(s) ds &= at^a \left(\int_0^\infty f^*\left(\frac{s}{t}\right) g^*(s) ds \right) \left(\int_0^{1/t} u^{a-1} du \right) \\
&\leq at^a \int_0^{1/t} \left(\int_0^\infty f^*(su) g^*(s) ds \right) u^{a-1} du \\
&= at^a \int_0^\infty g^*(s) \left(\int_0^{1/t} f^*(su) u^a \frac{du}{u} \right) ds.
\end{aligned}$$

Si $t > 1$, podemos extender el rango de integración en la integral interior a $0 \leq u \leq 1$. Entonces, mediante un cambio de variable, obtenemos de (5.55),

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f^*\left(\frac{s}{t}\right) g^*(s) ds &\leq at^a \int_0^\infty g^*(s) \left(s^{-a} \int_0^s f^*(v) v^a \frac{dv}{v}\right) ds \\ &= at^a \int_0^\infty g^*(s)(P_a f^*)(s) ds \\ &\leq at^a \|P_a\|.\end{aligned}$$

Tomando supremo sobre todas las funciones f y g satisfaciendo (5.55), obtenemos que

$$h_X(t) = \|E_{1/t}\| \leq at^a \|P\|, \quad t > 1.$$

Luego,

$$\frac{\log h_X(t)}{\log t} \leq a + \frac{\log(a\|P_a\|)}{\log t} \to a,$$

cuando $t \to \infty$, y de (5.48) se sigue que $\overline{\alpha}_X \leq a$. Por tanto, hemos probado que

$$\|P_a\| < \infty \implies a \geq \overline{\alpha}_X. \tag{5.56}$$

Procedemos ahora a obtener la desigualdad estricta $a > \overline{\alpha}_X$. Sea $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $\epsilon\|P_a\| < 1$. Entonces el operador $I - \epsilon P_a$ es acotado, es invertible y

$$(I - \epsilon P_a)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty \epsilon^n P_a^n, \tag{5.57}$$

donde la convergencia es en la norma de operadores. El operador

$$T = P_a(I - \epsilon P_a)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty \epsilon^n P_a^{n+1}, \tag{5.58}$$

es también un operador continuo de $\overline{X}$ en sí mismo. Veamos que la iteración P_a^{n+1} de P_a se puede escribir en la forma

$$(P_a^{n+1} f)(t) = \int_0^1 f(st) \frac{(\log 1/s)^n}{n!} s^{a-1} ds. \tag{5.59}$$

La prueba la haremos utilizando inducción sobre n. El caso $n = 0$ se sigue directamente de la definición de P_a. Supongamos ahora que (5.59) es cierta para n. Entonces

$$\begin{aligned}(P_a^{n+1} f)(t) = P_a(P_a^n)(t) &= \int_0^1 P_a^n f(rt) r^{a-1} dr \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 f(srt) \frac{(\log 1/s)^n}{n!} s^{a-1} ds\right) r^{a-1} dr,\end{aligned}$$

mediante un cambio de variable $u = rs$, obtenemos

$$(P_a^{n+1}f)(t) = \int_0^1 \left(\int_0^r f(ut) \frac{(\log r/u)^n}{n!} u^{a-1} du \right) \frac{dr}{r}.$$

Intercambiando el orden de integración y haciendo un cambio de variable $v = r/u$, obtenemos

$$\begin{aligned}(P_a^{n+1}f)(t) &= \int_0^1 \left(\int_u^1 \frac{(\log r/u)^n}{n!} \frac{dr}{r} \right) f(ut) u^{a-1} du \\ &= \int_0^1 \left(\int_1^{1/u} \frac{(\log v)^n}{n!} \frac{dv}{v} \right) f(ut) u^{a-1} du \\ &= \int_0^1 \frac{(\log 1/u)^{n+1}}{(n+1)!} f(ut) u^{a-1} du.\end{aligned}$$

Esto completa la inducción y establece (5.59) para cada $n \in \mathbb{N}$.

Combinando (5.58), (5.59), y usando el Teorema de Convergencia Monótona, obtenemos, para funciones no negativas en $\overline{X}$,

$$(Tf)(t) = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\epsilon \log 1/s)^n}{n!} \right) f(st) s^{a-1} ds = \int_0^1 f(st) s^{a-\epsilon-1} ds.$$

Mediante la usual descomposición de una función en su parte positiva y su parte negativa, obtenemos la esta última identidad para cualquier f de $\overline{X}$. Por tanto, $T = P_{a-\epsilon}$. Dado que T es acotado, podemos aplicar (5.56) para obtener que $a - \epsilon \geq \overline{\alpha}_X$. Luego, $a > \overline{\alpha}_X$, como deseábamos.

Supongamos ahora que $a > \overline{\alpha}_X$. Entonces el Lema 5.22 muestra que

$$\int_0^1 \|E_s\| s^{a-1} ds = \int_1^{\infty} t^{-a} h_X(t) \frac{dt}{t} < \infty. \tag{5.60}$$

Por tanto, si f y g satisfacen (5.55),

$$\begin{aligned}\left| \int_0^{\infty} (P_a f)(t) g(t) dt \right| &\leq \int_0^{\infty} \left(\int_0^1 |f(st)| s^{a-1} ds \right) |g(t)| dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{\infty} |f(st) g(t)| dt \right) s^{a-1} ds \\ &\leq \int_0^1 \|E_s\| s^{a-1} ds.\end{aligned}$$

Usando (5.60) y tomando el supremo sobre todas las funciones f y g que satisfacen (5.55), llegamos a que P_a es un operador acotado en $\overline{X}$. Por tanto hemos probado que P_a es acotado en $\overline{X}$ si y solo si $a > \overline{\alpha}_X$.

Si ahora $0 \leq a < 1$, se sigue de (5.54) que Q_a es acotado en $\overline{X}$ si y solo si P_{1-a} es acotado en $\overline{X}'$. Aplicando lo que acabamos de probar, esto ocurre si y solo si $1 - a > \overline{\alpha}_{X'}$. Pero $\overline{\alpha}_{X'} = 1 - \underline{\alpha}_X$, por (5.50). Por tanto, Q_a es acotado en $\overline{X}$ si y solo si $a < \underline{\alpha}_X$. □

Estamos ahora en condiciones de dar una caracterización elegante de los espacios invariantes por reordenamientos en los cuales el operador maximal de Hardy-Littlewood es acotado.

Teorema 5.31. *(G. G. Lorentz - T. Shimogaki) Sea X un espacio de Banach de funciones invariante por reordenamiento sobre $\mathbb{R}^n$. Entonces el operador maximal de Hardy-Littlewood M es acotado en X si y solo si el índice de Boyd $\overline{\alpha}_X$ de X satisface que $\overline{\alpha}_X < 1$.*

Demostración. Se sigue del Teorema 5.18 que M es acotado en X si y solo si P_1 es acotado en $\overline{X}$. Por el teorema anterior, esto ocurre si y solo si se tiene que $\overline{\alpha}_X < 1$. □

Obsérvese que el Teorema 5.20 nos dice que en el caso de los espacios de Lebesgue L^p, con $p > 1$, se tiene que el operador maximal de Hardy-Littlewood M es acotado. El teorema anterior además de confirmarnos lo mismo, pues vimos que los índices de Boyd de los espacios de Lebesgue L^p son justamente $1/p < 1$, nos dice también que si el operador M es acotado de L^p en L^p, entonces p necesariamente tiene que ser mayor que 1.

Capítulo 6

Dominio óptimo para el operador de Hardy

Sea S el operador de Hardy definido por

$$Sf(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(s)ds, \quad t > 0.$$

para cualquier función $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+)$. Sea X un espacio de Banach invariante por reordenamiento de funciones medibles definidas sobre $\mathbb{R}^+$. Recordemos que X tiene la propiedad de retículo si para cada $g \in X$ y f con $|f| \leq |g|$, entonces $f \in X$ y $\|f\|_X \leq \|g\|_X$. Sea $[S, X]$ el conjunto dado por

$$[S, X] = \{f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \text{ medible} : S|f| \in X\}.$$

Resulta ser que $[S, X]$ con la norma $\|f\|_{[S,X]} = \|S|f|\|_X$ es un espacio de Banach con la propiedad de retículo. Obviamente $S : [S, X] \to X$ es continuo. Es más, si Y es un espacio de Banach de funciones con la propiedad de retículo tal que $S : Y \to X$ está bien definido (y entonces S es continuo, ya que es un operador lineal positivo entre dos espacios de Banach con la propiedad de retículo) es continuamente contenido en $[S, X]$. Esto es, $[S, X]$ es el *dominio óptimo* para S (con valores en X) dentro de la clase de espacios de Banach con la propiedad de retículo.

El articulo de referencia para este capítulo ha sido, "Optimal domain for the Hardy operator" de O. Delgado y J. Soria [5].

Empezamos con un caso particular donde podemos identificar el dominio óptimo de S. Recordemos que el espacio $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^+)$ es un espacio cuasi-Banach invariante por reordenamiento.

Proposición 6.1. $[S, L^{1,\infty}(\mathbb{R}^+)] = L^1(\mathbb{R}^+)$, *con igualdad de normas.*

Demostración. Dado $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ y $\epsilon > 0$, existe $z > 0$ tal que

$$\int_0^x |f(y)|dy \geq (1-\epsilon)\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}\chi_{[z,\infty)}(x).$$

En efecto, por ser la función $x \mapsto \int_0^x |f(y)|dy$ una función creciente tenemos que

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+} = \int_0^\infty |f(y)|dy = \sup_{0<z<\infty} \int_0^z |f(y)|dy$$

Luego, si $\epsilon > 0$, tenemos que existe $z > 0$ tal que

$$(1-\epsilon)\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+} \leq \int_0^z |f(y)|dy \leq \int_0^x |f(y)|dy, \quad x \geq z,$$

donde en la última desigualdad se ha usado nuevamente el hecho de que $x \mapsto \int_0^x |f(y)|dy$ es una función creciente. Luego, de esto último, obtenemos que

$$\chi_{[z,\infty)}(x)(1-\epsilon)\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+} \leq \int_0^x |f(y)|dy, \quad x > 0.$$

Volvemos ahora la prueba de la proposición, y usando la desigualdad anterior, llegamos a que

$$\begin{aligned}\|f\|_{[S,L^{1,\infty}(\mathbb{R}^+)]} &= \sup_{t>0} t\left(\frac{1}{x}\int_0^x |f(y)|dy\right)^*(t)\\ &\geq (1-\epsilon)\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \sup_{t>0} \frac{t}{t+z} = (1-\epsilon)\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}.\end{aligned}$$

Si tomamos ahora límite cuando $\epsilon \to 0^+$ en lo anterior, obtenemos la desigualdad $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \leq \|f\|_{[S,L^{1,\infty}(\mathbb{R}^+)]}$. Concluimos de esta estimación, y de la desigualdad $\|f\|_{[S,L^{1,\infty}(\mathbb{R}^+)]} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}$ obtenida en (5.34) que se tiene que $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} = \|f\|_{[S,L^{1,\infty}(\mathbb{R}^+)]}$, se cumple para cualquier $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$. □

Vamos ahora a considerar los espacios $L^p(\mathbb{R}^+)$. Es fácil ver que se tiene que $[S, L^1(\mathbb{R}^+)] = \{0\}$. En efecto, supongamos por reducción al absurdo que existe $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ con $f \neq 0$. Esto es, existe un conjunto medible E con $|E| > 0$ tal que

$$|f(s)| > 0, \quad \forall s \in E.$$

Como $\mathbb{R}^+ = \cup_{n=1}^\infty [0,n)$, tenemos que

$$E = E \cap \mathbb{R}^+ = E \cap (\cup_{n=1}^\infty [0,n)) = \cup_{n=1}^\infty (E \cap [0,n)),$$

por lo que existe, $n_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|E \cap [0,n_0)| > 0.$$

Tenemos así que

$$\begin{aligned}\|f\|_{[S,L^1(\mathbb{R}^+)]} = \|S|f|\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} &= \int_0^\infty \frac{1}{t}\int_0^t |f(s)|dsdt \\ &= \int_0^{n_0} \frac{1}{t}\int_0^t |f(s)|dsdt + \int_{n_0}^\infty \frac{1}{t}\int_0^t |f(s)|dsdt \\ &\geq \int_{n_0}^\infty \frac{1}{t}\int_0^{n_0} |f(s)|dsdt = \int_0^{n_0} |f(s)|ds \int_{n_0}^\infty \frac{dt}{t} = \infty,\end{aligned}$$

lo que es una contradicción. Luego $[S, L^1(\mathbb{R}^+)] = \{0\}$.

Para el resto de índices tenemos el siguiente resultado (aunque esto se seguirá del Teorema 6.5, vamos a dar una prueba mostrando, en este caso, un contraejemplo explícito):

Proposición 6.2. *$L^p(\mathbb{R}^+) \subsetneq [S, L^p(\mathbb{R}^+)]$, $1 < p \leq \infty$.*

Demostración. Empezamos viendo el contenido $L^p(\mathbb{R}^+) \subset [S, L^p(\mathbb{R}^+)]$. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^+)$. Teniendo en cuenta la desigualdad de Hardy (Lema 5.19), tenemos que

$$\begin{aligned}\|f\|_{[S,L^p(\mathbb{R}^+)]} &= \left\{\int_0^\infty \left(\frac{1}{t}\int_0^t |f(s)|ds\right)^p dt\right\}^{1/p} \\ &= \left\{\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}\frac{1}{t}\int_0^t |f(s)|ds\right)^p \frac{dt}{t}\right\}^{1/p} \\ &\leq \frac{p}{p-1}\left\{\int_0^\infty (t^{1/p}|f(t)|)^p \frac{dt}{t}\right\}^{1/p} \\ &= \frac{p}{p-1}\left\{\int_0^\infty |f(t)|^p dt\right\}^{1/p} \\ &= \frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^+)} < \infty,\end{aligned}$$

con lo que $f \in [S, L^p(\mathbb{R}^+)]$.

Ahora, fijemos $\alpha \in (-1, 0)$, y sea $f_\alpha(t) = (1-t)^\alpha \chi_{(0,1)}(t)$. Obsérvese que $f_{-1/p} \in L^1(\mathbb{R}^+) \setminus L^p(\mathbb{R}^+)$, para $1 < p < \infty$. Cálculos inmediatos muestran que

$$Sf_{-1/p}(t) = \begin{cases} \frac{1-(1-t)^{1-1/p}}{(1-1/p)t}, & \text{si} \quad 0 < t < 1, \\ \frac{p}{p-1}\frac{1}{t}, & \text{si} \quad 1 \leq t. \end{cases}$$

Por tanto, obtenemos un contraejemplo ya que $Sf_{-1/p}(t) \in L^q(\mathbb{R}^+)$, para cada $1 < q \leq \infty$. $\square$

Obsérvese en la demostración anterior que $f^*_{-1/p} \notin [S, L^p(\mathbb{R}^+)]$ y por tanto $[S, L^p(\mathbb{R}^+)]$ no es un espacio invariante por reordenamiento.

Para un espacio de Banach de funciones X con la propiedad de retículo, definimos

$$\Gamma_X = \{f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \text{ medible}, \; Sf^* \in X\},$$

con la norma $\|f\|_{\Gamma_X} = \|Sf^*\|_X$, entonces Γ_X es el espacio de Banach de funciones invariante por reordenamiento con la propiedad de retículo más grande contenido en $[S, X]$. En efecto, si $f \in \Gamma_X$, entonces $S|f| \leq Sf^* \in X$ y por tanto $f \in [S, X]$, y si Y es un espacio de Banach de funciones invariante por reordenamiento la propiedad de retículo contenido en $[S, X]$, entonces para cada $f \in Y$ tenemos que $f^* \in Y$ y $Sf^* \in X$, esto es $f \in \Gamma_X$.

Proposición 6.3. *Dado un espacio de Banach con la propiedad de retículo X, tenemos lo siguiente;*

(a) Si $S : X \to X$, entonces $X \subset [S, X]$.

(b) Si X es un espacio invariante por reordenamiento, entonces se tiene que $\Gamma_X \subset X \cap [S, X]$.

(c) Si $S : X \to X$ y X es invariante por reordenamiento, entonces se tiene que $\Gamma_X = X$.

(d) Si X es un espacio invariante por reordenamiento, la siguientes condiciones son equivalentes

(d1) $\Gamma_X \neq \{0\}$.

(d2) $\chi_{(0,1)} \in \Gamma_X$.

(d3) $\chi_{(0,1)}(t) + \frac{1}{t}\chi_{[1,\infty)}(t) \in X$.

(d4) $(L^\infty \cap L^{1,\infty})(\mathbb{R}^+) \subset X$.

Demostración. (a) es inmediata. Para probar (b), sea $f \in \Gamma_X$, dado que $f^* \leq Sf^* \in X$, entonces $f^* \in X$ y por tanto $f \in X$. (c) se sigue de (a), (b) y del hecho de que Γ_X es el espacio invariante más grande contenido en $[S, X]$. Finalmente, observemos que para la función $f = \chi_{(0,1)}$, tenemos que $Sf(t) = \chi_{(0,1)} + \frac{1}{t}\chi_{[1,\infty)}(t)$, y las equivalencias (d1)-(d4) se siguen fácilmente. Por ejemplo, si $g \in (L^\infty \cap L^{1,\infty})(\mathbb{R}^+)$, luego se tiene la desigualdad siguiente; $g^*(t) \leq C \min(1, 1/t) = C(\chi_{(0,1)} + \frac{1}{t}\chi_{(1,\infty)}(t))$. Por tanto, (d3) implica (d4). $\square$

Obsérvese que sólo hemos necesitado que X sea un espacio invariante por reordenamiento para probar que (d3) implica (d4). La Proposición 6.2 muestra que la inclusión en (a) de la Proposición 6.3 puede ser estricta.

Veamos ahora un ejemplo de un espacio invariante por reordenamiento con la propiedad de retículo con el que la inclusión en (b) de la Proposición 6.3 es también estricta.

Proposición 6.4. $\Gamma_{(L^1+L^\infty)(\mathbb{R}^+)} \subsetneq (L^1+L^\infty)(\mathbb{R}^+) \cap [S,(L^1+L^\infty)(\mathbb{R}^+)]$.

Demostración. Veamos que S no está acotado en $(L^1+L^\infty)(\mathbb{R}^+)$. En efecto, si

$$g(t) = \frac{1}{t\log^2(e^2/t)}\chi_{(0,1)}(t),$$

entonces g es una función decreciente de $(L^1+L^\infty)(\mathbb{R}^+)$. Sea ahora f la función dada por $f(t) = g(t-1)\chi_{(1,2)}(t)$. Luego se tiene que, $f^* = g$, Sf es una función de $(L^1+L^\infty)(\mathbb{R}^+)$ (obsérvese que dado que $f \in L^1$ y es una función acotada en cero entonces $Sf \in L^\infty$), y $Sf^* \notin (L^1+L^\infty)(\mathbb{R}^+)$:

$$\begin{aligned}
\|Sf^*\|_{(L^1+L^\infty)(\mathbb{R}^+)} &= \int_0^1 (Sf^*)^*(t)dt = \int_0^1 (Sg)^*(t)dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{t}\int_0^t g(s)dsdt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{t}\int_0^t \frac{1}{s\log^2(e^2/s)}\chi_{(0,1)}(s)dsdt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{t}\int_0^t \frac{1/s}{\log^2(e^2/s)}dsdt \\
&\overset{(*)}{=} \int_0^t \frac{1}{t}\int_{e^2/t}^\infty \frac{1/u}{\log^2 u}dudt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{t\log(e^2/t)}dt = \infty,
\end{aligned}$$

donde en la primera igualdad hemos usado (4.88) y en $(*)$ hemos usado el cambio de variable $u = e^2/s$.

Por tanto, hemos probado que

$$\Gamma_{(L^1+L^\infty)(\mathbb{R}^+)} \subsetneq (L^1+L^\infty)(\mathbb{R}^+) \cap [S,(L^1+L^\infty)(\mathbb{R}^+)].$$

□

Ahora vamos a ver que la Proposición 6.2 se puede extender a cualquier espacio invariante por reordenamiento. Es decir, siempre que el rango del operador de Hardy sea un espacio invariante por reordenamiento, entonces el dominio óptimo no puede ser un espacio invariante por reordenamiento.

Teorema 6.5. *Si X es un espacio de Banach de funciones invariante por reordenamiento con la propiedad de retículo, y $S : X \to X$, entonces*

$$[S, X] \not\subset (L^1 + L^\infty)(\mathbb{R}^+).$$

En particular, $X \subsetneq [S, X]$ y $[S, X]$ no es un espacio invariante por reordenamiento.

Demostración. Vamos a ver que podemos encontrar una función en $[S, X]$ que no pertenece a $(L^1 + L^\infty)(\mathbb{R}^+)$, y por tanto, no pertenece a X tampoco. Empezamos con la siguiente observación: si $f \geq 0$,

$$f \notin (L^1 + L^\infty)(\mathbb{R}^+) \iff \text{para cada } c > 0, f\chi_{\{f>c\}} \notin L^1(\mathbb{R}^+). \tag{6.1}$$

Es claro que si para alguna $c > 0$, $f\chi_{\{f>c\}} \in L^1(\mathbb{R}^+)$, entonces

$$f = f\chi_{\{f>c\}} + f\chi_{\{f\leq c\}} \in (L^1 + L^\infty)(\mathbb{R}^+).$$

Recíprocamente, supongamos que $f = g + h$, con $h \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$. Tomamos $c = 2\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} > 0$. Entonces

$$f\chi_{\{f>c\}} = (g + h)\chi_{\{g+h>2\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)}\}} \leq (g + h)\chi_{\{|g|>\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)}\}} \leq 2|g|.$$

Si $g \in L^1(\mathbb{R}^+)$, entonces $f\chi_{\{f>c\}} \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Si $X \subset L^1(\mathbb{R}^+)$, tenemos que $[S, X] \subset [S, L^1(\mathbb{R}^+)] = \{0\}$, y por tanto, por la Proposición 6.3 (a), $X = \{0\}$. Luego, $X \not\subseteq L^1(\mathbb{R}^+)$. Por lo tanto, podemos encontrar una función positiva decreciente $f \in X$ tal que si $F(t) = \int_0^t f(x)dx$, entonces F es estrictamente creciente y no esta acotada: tomamos $f_1 \in X \setminus L^1(\mathbb{R}^+)$, f_1 decreciente (y por lo tanto $f_1 \geq 0$). Elegimos $f_2 \in (L^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^+)$, decreciente y positiva (por ejemplo, $f_2(t) = (1 + t^2)^{-1}$). Nótese que, dado que X es un espacio de Banach de funciones invariante por reordenamiento se tiene la inclusión $(L^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R}^+) \subset X$ por el Teorema 4.54, y por lo tanto $f_2 \in X$. Entonces $f = f_1 + f_2$ satisface las condiciones exigidas. Ahora tomamos $t_1 = 1$, y por inducción, elegimos $t_{k+1} > t_k$ satisfaciendo que $F(t_{k+1}) = 2F(t_k) = 2^k F(1)$. Ahora vamos a modificar la función F en cada subintervalo (t_k, t_{k+1}) de manera que obtenemos una función G absolutamente continua, positiva y decreciente satisfaciendo que $F(t) \approx G(t)$, y si $g(t) = G'(t)$, para casi todo $t > 0$, entonces $g \notin (L^1 + L^\infty)(\mathbb{R}^+)$. Por tanto, $g \in [S, X]$ (Obsérvese que $S(g) \approx S(f) \in X$), y $g \notin X$.

En el intervalo $[0, t_1)$, definimos G como $G(t) = F(t)$. Ahora observemos que como

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx = F(t_k) \geq F(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)dx,$$

y f es decreciente, entonces $t_{k+1}-t_k \geq t_k-t_{k-1}$. Por tanto, el triángulo T_k determinado por los vértices $(t_{k+1}-t_2+1, F(t_{k+1})-F(1)), (t_{k+1}, F(t_{k+1})-F(1))$, y $(t_{k+1}, F(t_{k+1}))$ (que es congruente con el triángulo $T_1 : (1, F(1)), (t_2, F(1))$, y $(t_2, F(2))$) esta contenido en el triángulo de vértices $(t_k, F(t_k)), (t_{k+1}, F(t_k))$ y $(t_{k+1}, F(t_{k+1}))$, para cada $k \geq 1$ (obsérvese que T_k tiene longitud de los lados independiente de k).

En el intervalo $[t_k, t_{k+1} - t_2 + 1]$, definimos $G(t)$ como la línea que une los puntos $(t_k, F(t_k))$ y $(t_{k+1} - t_2 + 1, F(t_{k+1}) - F(1))$. Para definir G en el intervalo $(t_{k+1} - t_2 + 1, t_{k+1})$ usamos el siguiente argumento: fijamos una función convexa h en $[1, t_2]$, tal que $h(1) = F(1)$, $h(t_2) = F(t_2)$, y $h'(t_2^-) = \infty$ (por tanto, el grafo de g esta contenido en T_1). Ahora, usamos la congruencia entre T_1 y T_k (que llamamos A_k, entonces $A_k(T_1) = T_k$) trasladamos el grafo de h a T_k, y definimos $G(t)$, si $t \in (t_{k+1}-t_2+1, t_{k+1})$, por medo de la igualdad

$$(t, G(t)) = A_k(t - t_{k+1} + t_2, h(t - t_{k+1} + t_2)),$$

(por tanto, $G(t) = h(t)$, si $t \in (1, t_2)$). Observemos que G es una función continua y creciente en $[0, \infty)$. Es más, $G(t) \leq F(t)$ dado que, por concavidad, el grafo de F esta encima de la linea que pasa por los puntos $(t_k, F(t_k))$ y $(t_{k+1}, F(t_{k+1}))$, mientras que G esta debajo de esa linea, por construcción. Por otra parte si $t \in (t_k, t_{k+1})$ entonces

$$G(t) \geq G(t_k) = F(t_k) = F(t_{k+1})/2 \geq F(t)/2,$$

y obtenemos la otra estimación.

Definimos ahora $g(t) = G'(t)$, en casi todo punto $t > 0$. Vamos a ver que $g \notin (L^1 + L^\infty)(\mathbb{R}^+)$. Usando (6.1), si fijamos $c > 0$, y $k \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $s \in (1, t_2)$ tal que $g(t) > c$, si $t \in (s, t_2)$ (observemos que se tiene que $g(t_2^-) = G'(t_2^-) = h'(t_2^-) = \infty$). Entonces,

$$\int_{\{x\in(1,t_{k+1}):g(x)>c\}} g(x)dx \leq \sum_{j=2}^{k+1} \int_{s-t_2+t_j}^{t_j} g(x)ds = k \int_s^{t_2} h'(x)dx \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

□

Obsérvese que sin la hipótesis sobre X, el teorema anterior es falso. En efecto, vimos en la Proposición 6.1, que $[S, L^{1,\infty}(\mathbb{R}^+)] = L^1(\mathbb{R}^+)$, que sí es un espacio invariante por reordenamiento. El resultado deja de ser cierto pues $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^+)$ no es un espacio de Banach sino cuasi-Banach (Proposición 5.12).

Bibliografía

[1] C. Bennett y R. Sharpley, *Interpolation of Operators*. Academic Press Inc,1988.

[2] Y. Brudnyĭ y N. Krugljak, *Interpolation Functors and Interpolation Spaces*, Vol. I, North Holland Mathematical Library, 47, Amsterdam, 1991.

[3] D. Chamorro, *Espacios de Lebesgue y de Lorentz*. Universidad de Evry, 2018. *https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01801025/document.*

[4] J. R. Choksi, *El teorema de convergencia de Vitali sobre integración término a término*, La Gaceta de la RSME, Vol. 11 (2008), Núm. 3, Págs. 475–488.

[5] O. Delgado y J. Soria. *Optimal domain for the Hardy operator*. Journal of Functional Analysis, Vol. 244 (2007), Págs. 119–133.

[6] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos y V. Zizler, *Banach Space Theory*. Springer, 2010.

[7] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill International Editions, 1987.