TRABAJO DE FIN DE GRADO

EXTENSIONES DE LOS ESPACIOS FUNCIONALES DE LEBESGUE: ESPACIOS DE ORLICZ, MODULARES Y DE EXPONENTE VARIABLE

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

GRADO EN MATEMÁTICAS

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada

Curso 2020/2021

Autor: Daniel Peinado Ginés

Tutor: F. Javier Soria de Diego

Madrid, 16 de junio de 2021

Resumen

El propósito de este trabajo es presentar de manera autocontenida los principales resultados de la teoría de los espacios de Orlicz y ofrecer una introducción a los espacios modulares y de Lebesgue de exponente variable. Los espacios de Orlicz y de Lebesgue variables se enmarcan dentro de los espacios modulares y constituyen una extensión de los clásicos espacios L^p. Son característicos por su extraordinaria estructura topológica y geométrica, por este motivo han encontrado múltiples aplicaciones en diferentes disciplinas de las matemáticas. En este trabajo, primero se recogen algunas propiedades de las funciones convexas y se presenta el concepto de N-función y de N-funciones mutuamente complementarias, para posteriormente desarrollar los resultados más importantes de la teoría de los espacios de Orlicz. A su vez, se presentan la norma de Orlicz y la norma de Luxemburg, y se demuestran las propiedades funcionales más destacadas de los espacios de Orlicz. En la parte final, se ofrece un desarrollo de lo que son los espacios modulares, estableciendo relaciones con los espacios de Orlicz, y se presentan los espacios de Lebesgue de exponente variable junto con sus principales propiedades funcionales.

Abstract

The purpose of this work is to present in a self-contained way the main results of the theory of Orlicz spaces and to offer an introduction to modular spaces and variable Lebesgue spaces. The Orlicz and variable Lebesgue spaces are framed within the modular spaces and constitute an extension of the classics L^p spaces. They are characteristic for their extraordinary topological and geometric structure, for this reason they have found multiple applications on different disciplines of mathematics. In this work, first some properties of convex functions are collected and the concept of N-function and mutually complementary N-functions is presented, to later develop the most important results of the theory of Orlicz spaces. In turn, the Orlicz norm and the Luxemburg norm are presented, and the most outstanding functional properties of Orlicz spaces are proved. In the final part, a development of what modular spaces are is offered, relating them to Orlicz spaces, and finally, the variable Lebesgue spaces are presented together with their main functional properties.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El propósito de este trabajo es presentar de manera autocontenida los principales resultados de la teoría de los espacios de Orlicz y ofrecer una introducción a los espacios modulares y de Lebesgue de exponente variable. Los espacios de Orlicz y de Lebesgue variables se enmarcan dentro de los espacios modulares y constituyen una extensión de los clásicos espacios L^p. Son característicos por su extraordinaria estructura topológica y geométrica, por este motivo han encontrado múltiples aplicaciones en diferentes disciplinas de las matemáticas.

En el Capítulo 2 se tratarán algunas propiedades de las funciones reales convexas como su representación integral (véase el Teorema 2.16) o la desigualdad de Jensen en su formulación finita (desigualdad (2.3)). También se introduce el concepto de N-función, esencial en el desarrollo de la teoría de los espacios de Orlicz, y el concepto de N-funciones mutuamente complementarias.

Los Capítulos 3 y 4 están destinados a desarrollar los puntos principales de la teoría de los espacios de Orlicz. La primera aparición de estos espacios fue en 1932, cuando el matemático polaco W. Orlicz publicó un artículo en el que se estudiaban por primera vez, ligados a la propiedad Δ_2 de una N-función, (véase [9]), para posteriormente, en el año 1936, hacerlo sin ella, de una forma más general. En este trabajo se describen las numerosas implicaciones que tiene la propiedad Δ_2 de cara a las clases y los espacios de Orlicz.

De manera resumida, si Φ es una N-función, la clase de Orlicz $L_\Phi(G)$ está constituida por las funciones $u : G \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\rho(u; \Phi) = \int_G \Phi(u(x))\, dx < \infty,$$

donde G es un conjunto cerrado y acotado en un espacio euclídeo de dimensión finita. En este caso, la propiedad Δ_2 de la función Φ confiere a L_Φ una estructura de espacio vectorial (véase el Teorema 3.16). Por otra parte, los espacios de Orlicz L^*_Φ se definen como

$$L^*_\Phi(G) = \left\{ u : G \longrightarrow \mathbb{R} : \quad \int_G |u(x)v(x)|\, dx < \infty\,,\ \text{para todo } v \in L_\Psi \right\},$$

donde Φ y Ψ son dos N-funciones mutuamente complementarias, y éstos ya traen consigo esa condición de espacio vectorial, sin embargo, cuando Φ satisface la condición Δ_2, el espacio adquiere ciertas propiedades interesantes como puede ser la separabilidad (véase el Corolario 4.13). Al mismo tiempo, $L^*_\Phi(G)$ será el espacio generado por la clase $L_\Phi(G)$, además, clase y espacio coinciden si, y solo si, la N-función que los determina satisface la condición Δ_2 (véase el Teorema 4.6).

Para estudiar las propiedades funcionales de estos espacios, se define la norma de Orlicz de una función $u \in L^*_\Phi$ como

$$\|u\|_\Phi = \sup_{\rho(v;\Psi)\leq 1} \int_G |u(x)v(x)|\, dx.$$

Los espacios L^*_Φ junto con la norma de Orlicz son espacios de Banach. Por otra parte, se puede dotar a los espacios de Orlicz con otra norma distinta, equivalente a la anterior (véase el Teorema 4.21), como es la norma de Luxemburg, que también jugará un papel importante en los espacios modulares, y se define mediante la igualdad

$$\|u\|_{(\Phi)} = \text{ínf}\left\{k > 0 :\ \rho\left(\frac{u}{k};\Phi\right) \leq 1\right\}.$$

En esta parte del trabajo, se tratan también propiedades funcionales como la dualidad o la invariancia por reordenamientos (véase el Corolario 4.25 y el Teorema 4.35), y se demuestran desigualdades clásicas como la desigualdad de Jensen integral (desigualdad (3.5)) o la desigualdad de Hölder (desigualdad (4.6)). Algunas de ellas se plantean, en el contexto de los espacios de Orlicz, en una variante más general que en la que habitualmente se suelen encontrar.

El Capítulo 5 trata, en su primera parte, los espacios modulares. Estos espacios, estudiados por primera vez por H. Nakano, poseen la ventaja de que su topología puede ser descrita en términos de un funcional modular, aunque posteriormente este modular pueda inducir una norma. Ofrecen un marco distinto al de los espacios de Banach para el estudio de otros espacios y una amplia generalización para todos ellos. Un espacio modular X_ρ dado por un modular $\rho : X \longrightarrow [0,\infty]$, se definen como

$$X_\rho = \left\{u \in X :\ \lim_{\lambda\to 0} \rho(\lambda u) = 0\right\},$$

donde X es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Como se verá, existe un paralelismo claro entre estos espacios y los otros dos que se estudian en este trabajo (véanse Observaciones 5.7 y 5.21).

En la segunda sección del Capítulo 5 se ofrecerá un estudio de los espacios de Lebesgue de exponente variable $L^{p(\cdot)}$. El campo de estudio de los espacios $L^{p(\cdot)}$ variable ha experimentado un incipiente crecimiento de un tiempo a esta parte. Estos espacios aparecieron también de la mano de W. Orlicz en 1931 (véase [10]), y su investigación se ha tornado más intensa en los últimos años debido a diversas circunstancias, entre ellas, la conexión existente entre estos espacios y los problemas variacionales de crecimiento no estándar (véase [4, Capítulo 1]). Un espacios $L^{p(\cdot)}(G)$, con $p : G \longrightarrow [1,\infty]$ una función exponente, está constituido por las funciones $f \in \mathcal{M}(G)$ para las cuales puede hallarse un valor $\lambda > 0$ tal que

$$\int_{G\setminus G_\infty} \left(\frac{|f(x)|}{k}\right)^{p(x)} dx + \operatorname*{ess\,sup}_{x\in G_\infty} |f(x)| < \infty,$$

donde $G_\infty = \{x \in G : p(x) = \infty\}$. En esta parte, se recoge otra variante de la desigualdad de Hölder (desigualdad (5.7)), enmarcada en el contexto de los espacios de Lebesgue de exponente variable, y algunas propiedades funcionales de estos espacios como pueden ser la completitud, dualidad o invariancia por reordenamientos (véase Teorema 5.31).

Capítulo 2

Propiedades de las funciones convexas

En este capítulo se presentan algunos resultados sobre funciones reales convexas, recogidos esencialmente en *Convex Functions and Orlicz Spaces* de M. A. Krasnosel'skii y Y. B. Rutickii ([6, Capítulo 1]), y que componen la base para el posterior desarrollo de los siguientes. En la segunda parte, se pondrá especial interés en una clase específica dentro de las mismas como son las funciones de Young.

Definición 2.1. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea una función $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Se dice que F es *convexa* si para todo $u_1, u_2 \in I$, y todo $\alpha \in [0,1]$ se tiene que

$$F(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2) \leq \alpha F(u_1) + (1-\alpha)F(u_2). \tag{2.1}$$

Si $-F$ es una función convexa, entonces se dice que F es *cóncava*.

Observación 2.2. Desde un punto de vista geométrico, como ilustra la Figura 2.1, la condición (2.1) asegura que el segmento que une dos puntos cualesquiera del grafo de la función queda por encima del grafo de la función entre esos dos puntos.

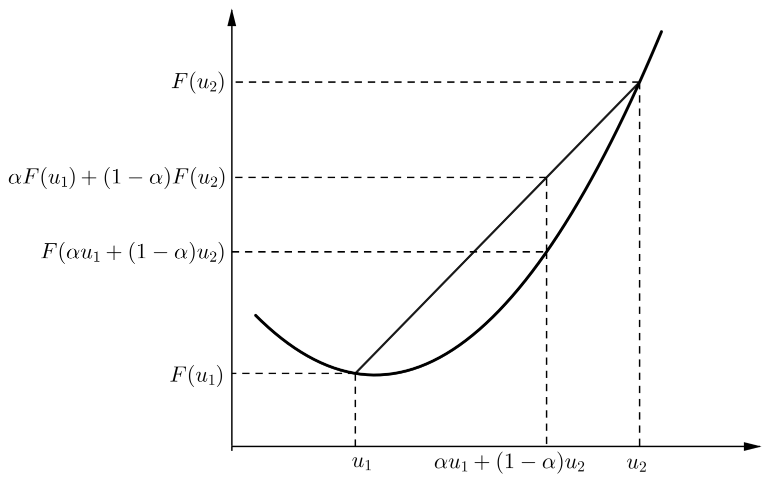

Figura 2.1: Función convexa

Observación 2.3. Partiendo de la definición dada, no es complicado probar que las funciones convexas tienen la propiedad de ser acotadas en todo intervalo cerrado contenido en su intervalo de definición. Más adelante, se verá que también puede asegurarse la continuidad en puntos interiores (véase el Lema 2.11). Además, si F es continua y satisface la desigualdad

$$F\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(F(u_1)+F(u_2)), \tag{2.2}$$

entonces F es una función convexa. En efecto, supongamos que no se satisface (2.1) para ciertos $u_1, u_2 \in I$. La función continua

$$\phi(\alpha) = F(\alpha u_1 + (1-\alpha u_2)) - \alpha F(u_1) - (1-\alpha)F(u_2)$$

alcanza su máximo en $[0,1]$ y ha de ser un valor positivo M_0. Sea α_0 el menor de los valores tales que $\phi(\alpha_0) = M_0$ y $\delta > 0$ de modo que $[\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta] \subset [0,1]$. Tomando los puntos

$$u_1^* = (\alpha_0 - \delta)u_1 + (1 - \alpha_0 + \delta)u_2,$$

$$u_2^* = (\alpha_0 + \delta)u_1 + (1 - \alpha_0 - \delta)u_2$$

en el intervalo $[u_1, u_2]$ y aplicándoles (2.2) se tiene que

$$F(\alpha_0 u_1 + (1-\alpha_0)u_2) \leq \frac{1}{2}(F(u_1^*) + F(u_2^*)).$$

Usando esta desigualdad en ϕ se obtiene

$$\phi(\alpha_0) \leq \frac{1}{2}(F(u_1^*) + F(u_2^*)) - \alpha_0 F(u_1) - (1-\alpha_0)F(u_2),$$

donde el miembro de la derecha es precisamente $\frac{1}{2}(\phi(\alpha_0 - \delta) + \phi(\alpha_0 + \delta))$, que se sabe estrictamente menor que M_0, ya que ϕ alcanza su máximo por primera vez en α_0. Por tanto, se llega a la contradicción $\phi(\alpha_0) < M_0$.

Observación 2.4. Es posible generalizar la desigualdad (2.2) de forma que para cualquier conjunto finito de n puntos se satisface

$$F\left(\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}(F(u_1)+F(u_2)+\ldots+F(u_n)). \tag{2.3}$$

Aplicando de forma recurrente (2.2) se prueban los casos en los que n es de la forma 2^k. En el caso de un n arbitrario, escogiendo m tal que $n+m = 2^k$ y tomando $u^* = \frac{1}{n}(u_1+u_2+\ldots+u_n)$, puede utilizarse (2.3) de manera que

$$F\left(\frac{u_1+u_2+\ldots+u_n+mu^*}{n+m}\right) \leq \frac{1}{n+m}(F(u_1)+F(u_2)+\ldots+F(u_n)+mF(u^*)).$$

El miembro de la izquierda de la desigualdad es precisamente $F(u^*)$ y despejando convenientemente se llega al resultado. Esta desigualdad es conocida como desigualdad de Jensen en su formulación finita.

Ejemplo 2.5. Todas las funciones de la forma $F(u) = u^\beta$, con $\beta \leq 0$ o $\beta \geq 1$, son ejemplos de funciones convexas en $[0, \infty)$. Como F es continua, basta probar que se cumple (2.2). Sean $u_1, u_2 \in [0, \infty)$ y $a = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$. En primer lugar, derivando la función F se obtiene

$$F'(u) = \beta u^{\beta-1},$$
$$F''(u) = \beta(\beta - 1)u^{\beta-2}.$$

Se puede apreciar que $F'' \geq 0$ si, y solo si, $\beta \leq 0$ o $\beta \geq 1$, y en consecuencia F' es una función no decreciente para estos valores de β. Aplicando el teorema del valor medio, se tiene que existen c_1, c_2 tales que $u_1 < c_1 < a < c_2 < u_2$ y se cumplen

$$\frac{F(a) - F(u_1)}{a - u_1} = F'(c_1),$$
$$\frac{F(u_2) - F(a)}{u_2 - a} = F'(c_2).$$

Como F' es no decreciente, se tiene que

$$\frac{F(a) - F(u_1)}{a - u_1} \leq F'(a) \leq \frac{F(u_2) - F(a)}{u_2 - a},$$

y teniendo en cuenta que $a - u_1 = u_2 - a$, despejando debidamente se llega a (2.2).

Proposición 2.6. *Sea F una función convexa y sean $u_1 < u_2 < u_3$. Entonces,*

$$\frac{F(u_2) - F(u_1)}{u_2 - u_1} \leq \frac{F(u_3) - F(u_1)}{u_3 - u_1} \leq \frac{F(u_3) - F(u_2)}{u_3 - u_2}. \tag{2.4}$$

Demostración. Se tiene que

$$u_2 = \frac{u_3 - u_2}{u_3 - u_1}u_1 + \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}u_3,$$

y como consecuencia de aplicar la desigualdad (2.1) con α igual al término que acompaña a u_1 en la expresión anterior, se obtiene

$$F(u_2) \leq \frac{u_3 - u_2}{u_3 - u_1}F(u_1) + \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}F(u_3).$$

□

Observación 2.7. Como puede apreciarse en la Figura 2.2, las desigualdades (2.4) se traducen en que la pendiente de la recta AB es menor o igual que la pendiente de la recta AC, y ésta, a su vez, menor o igual que la de la recta BC.

Estas desigualdades sobre funciones convexas suponen el eje central en la consecución del resto de resultados de este capítulo.

Lema 2.8. *Toda función convexa tiene derivadas laterales izquierda $f_-(u)$ y derecha $f_+(u)$ en cada uno de los puntos interiores de su intervalo de definición. Además*

$$f_-(u) \leq f_+(u). \tag{2.5}$$

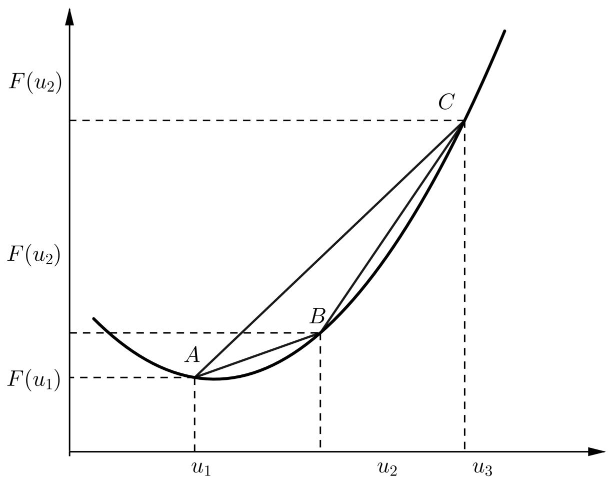

Figura 2.2: Ejemplo desigualdad (2.4)

Demostración. Sea $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y sean $0 < h_1 < h_2$ lo suficientemente pequeños. De acuerdo con (2.4), se tiene que

$$\frac{F(u) - F(u-h_2)}{h_2} \leq \frac{F(u) - F(u-h_1)}{h_1} \leq \frac{F(u+h_1) - F(u)}{h_1} \leq \frac{F(u+h_2) - F(u)}{h_2},$$

para todo u en el interior del intervalo I. De la primera desigualdad se deduce que el valor de $\frac{1}{h}(F(u) - F(u-h))$ no decrece cuando $h \to 0^+$ y está acotado superiormente, luego existe su límite y es $f_-(u)$. Análogamente, $\frac{1}{h}(F(u+h) - F(u))$ no crece al hacer $h \to 0^+$ y está acotado inferiormente, siendo su límite $f_+(u)$. Además, por la segunda desigualdad, se cumple $f_-(u) \leq f_+(u)$. $\square$

Definición 2.9. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$. Una función $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es *absolutamente continua* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para toda familia $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ de subintervalos disjuntos dos a dos de I tales que $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$, se cumple la desigualdad

$$\sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon.$$

Definición 2.10. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$. Una función $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es *lipschitziana* (o satisface la *condición de Lipschitz*) si existe una constante $L > 0$ tal que

$$|F(u_1) - F(u_2)| \leq L|u_1 - u_2|,$$

para todo $u_1, u_2 \in I$.

Lema 2.11. *Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces, F es absolutamente continua y satisface la condición de Lipschitz en todo intervalo cerrado contenido en el interior de I.*

Demostración. Sea $[a, b]$ contenido en el interior de I y sean $u_1 < u_2$ en el intervalo $[a, b]$. Obsérvese que, de la demostración del Lema 2.8, se sigue

$$f_+(u) \leq \frac{F(u+h) - F(u)}{h} \qquad \text{y} \qquad \frac{F(u) - F(u-h)}{h} \leq f_-(u), \tag{2.6}$$

para todo $h > 0$. De acuerdo con estas dos desigualdades y con las desigualdades (2.4), se cumple

$$f_+(a-\gamma) \leq \frac{F(u_1)-F(a-\gamma)}{u_1-(a-\gamma)} \leq \frac{F(u_2)-F(u_1)}{u_2-u_1} \leq \frac{F(b+\gamma)-F(u_2)}{(b+\gamma)-u_2} \leq f_-(b+\gamma),$$

con $\gamma > 0$ lo suficientemente pequeño como para que $[a-\gamma, b+\gamma] \subset I$, y por tanto

$$|F(u_1)-F(u_2)| \leq M|u_1-u_2|,$$

para todo $u_1, u_2 \in [a,b]$, donde $M = \text{máx}\{|f_+(a-\gamma)|, |f_-(b+\gamma)|\}$ es una constante. Basta tomar $L = M$ y $\delta < \varepsilon/M$ en las Definiciones 2.10 y 2.9, respectivamente. □

Observación 2.12. En particular, toda función convexa es continua en los puntos interior de su intervalo de definición.

Lema 2.13. *La derivada por la derecha f_+ de una función convexa F es continua por la derecha y no decreciente.*

Demostración. Sean $u_1 < u_2$ y $h > 0$ tal que $u_1 + h < u_2 - h$. Se puede asegurar vía (2.4) que

$$\frac{F(u_1+h)-F(u_1)}{h} \leq \frac{F(u_2)-F(u_2-h)}{h},$$

y en consecuencia, haciendo $h \to 0^+$, se tiene que

$$f_+(u_1) \leq f_-(u_2). \tag{2.7}$$

Por el Lema 2.8, se puede asegurar que $f_+(u_1) \leq f_-(u_2) \leq f_+(u_2)$, luego f_+ es no decreciente. Para ver que f_+ es continua por la derecha, la desigualdad (2.6) garantiza

$$f_+(u) \leq \frac{F(u+h)-F(u)}{h},$$

para todo $h > 0$. Fijando h y haciendo $u \to u_0^+$, puede apreciarse que la continuidad de F asegura la existencia del límite en el miembro de la derecha de la desigualdad, y la monotonía de f_+, en el de la izquierda. Consecuentemente, haciendo $h \to 0^+$ en la expresión obtenida, se tiene que

$$\lim_{u \to u_0^+} f_+(u) \leq \lim_{h \to 0^+} \frac{F(u_0+h)-F(u_0)}{h} = f_+(u_0).$$

Además, si $u \leq u_0$, entonces $f_+(u) \geq f_+(u_0)$, de nuevo por la monotonía de f_+. Por tanto,

$$\lim_{u \to u_0^+} f_+(u) \leq f_+(u_0) \leq \lim_{u \to u_0^+} f_+(u),$$

de donde

$$\lim_{u \to u_0^+} f_+(u) = f_+(u_0),$$

siendo la función f_+ continua por la derecha. □

Observación 2.14. De manera análoga se prueba que la derivada por la izquierda f_- es una función continua por la izquierda y no decreciente.

Lema 2.15. *Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces, F es derivable en casi todos los puntos.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, puede considerarse la función F definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. La función f_- es monótona, por lo tanto, sus puntos de discontinuidad en $[a, b]$ conforman un conjunto numerable. Efectivamente, f_- únicamente tiene discontinuidades de salto, y considerando el conjunto

$$D_n = \left\{ u_0 \in [a, b] : \lim_{u \to u_0^+} f_-(u) - \lim_{u \to u_0^-} f_-(u) > \frac{1}{n} \right\},$$

de los puntos en los que el salto de f_- es superior a $1/n$, entonces D_n tiene a lo sumo $n(f(b) - f(a)) + 1$ puntos. El conjunto D de todas las discontinuidades de f_- en $[a, b]$ es

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n,$$

y por consiguiente, es un conjunto numerable. Por otra parte, si u_0 es un punto de continuidad de la función f_-, en consonancia con (2.5) y (2.7), si $u_0 < u$, entonces

$$f_-(u_0) \leq f_+(u_0) \leq f_-(u).$$

En virtud de la continuidad de f_- en u_0, haciendo el límite cuando $u \to u_0^+$, queda

$$f_-(u_0) \leq f_+(u_0) \leq f_-(u_0).$$

Por tanto, $f_-(u_0) = f_+(u_0)$ y se puede concluir que F es derivable en todos los puntos en los que f_- es continua. Esto es, $F'(u) = f_+(u) = f_-(u)$ a.e. □

Teorema 2.16. *Toda función convexa $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(a) = 0$ admite una representación de la forma*

$$F(u) = \int_a^u f(t)\, dt,$$

donde f es una función continua por la derecha y no decreciente.

Demostración. Del Lema 2.15, $F'(u) = f_+(u)$ a.e., y f_+ es continua por la derecha y no decreciente. Puesto que, en virtud del Lema 2.11, F es absolutamente continua, por el teorema fundamental del cálculo (véase [3, página 163]) queda probado. □

A continuación, se presenta uno de los conceptos fundamentales en el desarrollo de la teoría de los espacios de Orlicz: las llamadas N-funciones o funciones de Young. Esta clase de funciones aúna un importante espectro de propiedades que serán clave durante los siguientes capítulos.

Definición 2.17. Se dirá que una función F es una N-*función* (o también *función de Young*) si admite una representación de la forma

$$F(u) = \int_0^{|u|} f(t)\,dt, \tag{2.8}$$

donde $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua por la derecha, positiva para $t > 0$ y no decreciente, tal que

$$f(0) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty} f(t) = \infty. \tag{2.9}$$

Observación 2.18. De la representación (2.8), es inmediato que toda N-función es continua, par y positiva para $u \neq 0$.

Observación 2.19. La composición de dos N-funciones es también una N-función. Si F_1 y F_2 son dos N-funciones, entonces la derivada por la derecha de la composición $F_1 \circ F_2$ es $f = f_1(F_2(u))f_2(u)$, donde f_1 y f_2 son las respectivas derivadas por la derecha de F_1 y F_2. La función f es continua por la derecha, positiva, no decreciente para $u > 0$ y satisface (2.9).

Ejemplo 2.20. Las funciones del tipo $F(u) = |u|^\beta$, con $\beta > 1$, son N-funciones. No es difícil comprobar que su derivada, $F'(u) = \beta|u|^{\beta-1}$, se ajusta a las condiciones de la Definición 2.17.

Ejemplo 2.21. La función $F(u) = |u|^\beta(|\log|u|| + 1)$, con $\beta > \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$, es una N-función (véase [11, página 11]). Su derivada, $F'(u) = u^{\beta-1}(\beta|\log u| + \beta + 1)$, para $u > 0$, es continua por la derecha, positiva para $u > 0$ y creciente, y satisface (2.9).

Ejemplo 2.22. Si F es una N-función, entonces $G(u) = e^{F(u)} - 1$ también lo es. Efectivamente, $g_+(u) = f_+(u)e^{F(u)}$ es continua por la derecha, positiva para $u > 0$, no decreciente, y satisface las condiciones (2.9).

Es usual encontrar otra definición de este tipo de funciones equivalente a ésta. Paralelamente, se define una N-función como una función $F : [0, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y convexa tal que

$$F(u) > 0 \qquad , \qquad \lim_{u\to 0} \frac{F(u)}{u} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{u\to\infty} \frac{F(u)}{u} = \infty.$$

Obsérvese que, asumiendo la paridad de F, es posible extender el dominio de la función a toda la recta real, y por el Teorema 2.16, se llega a su representación integral (más en detalle en [6, página 9]). En lo sucesivo, se considerará la primera definición dada de N-función, y, de los resultados que se van a extraer a partir de ella, se desprende la equivalencia entre ambas.

Se probarán a continuación algunas propiedades importantes de las N-funciones, entre las que se encuentra la de ser convexas. Para demostrar la convexidad de una N-función F, considérense dos puntos u_1 y u_2 arbitrarios. Por ser una función par y creciente para valores positivos, se tiene que

$$F(u_1 + u_2) = F(|u_1 + u_2|) \leq F(|u_1| + |u_2|).$$

Por tanto, basta ver que se cumple la condición (2.2) para $0 \leq u_1 \leq u_2$. En virtud de la monotonía de f, se tiene que

$$F\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) = \int_0^{(u_1+u_2)/2} f(t)\,dt \leq \int_0^{u_1} f(t)\,dt + \frac{1}{2}\left(\int_{u_1}^{(u_1+u_2)/2} f(t)\,dt + \int_{(u_1+u_2)/2}^{u_2} f(t)\,dt\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{u_1} f(t)\,dt + \int_0^{u_2} f(t)\,dt\right) = \frac{1}{2}(F(u_1)+F(u_2)),$$

quedando patente que F es una función convexa.

Continuando con las propiedades de las N-funciones, si se considera $u_2 = 0$ en (2.1), se tiene que, para todo u,

$$F(\alpha u) \leq \alpha F(u), \tag{2.10}$$

con $\alpha \in [0,1]$. De la primera condición de (2.9), unida a que la monotonía de f asegura $F(u) \leq |u| f(u)$, se deduce que

$$\lim_{u\to 0} \frac{F(u)}{u} = 0. \tag{2.11}$$

Y de manera similar, la segunda condición asegura que

$$\lim_{u\to \infty} \frac{F(u)}{u} = \infty. \tag{2.12}$$

Volviendo a (2.10), obsérvese que la igualdad se da si, y solo si, $\alpha = 0$, 1 o $u = 0$. En efecto, suponiendo que existan $u \neq 0$ y $\alpha \in (0,1)$ tales que $F(\alpha u) = \alpha F(u)$, por (2.11), debería tenerse

$$0 = \lim_{\alpha\to 0} \frac{F(\alpha u)}{\alpha u} = \frac{F(u)}{u},$$

y esto no es posible ya que F es positiva para valores distintos de cero. Consecuentemente, para todo $u \neq 0$ y todo $0 < \alpha < 1$ se cumple la desigualdad

$$F(\alpha u) < \alpha F(u). \tag{2.13}$$

De ella se sigue que si $0 < u_1 < u_2$, entonces tomando convenientemente $\alpha = u_1/u_2$ se tiene que $F(u_1) = F(\frac{u_1}{u_2}u_2) < \frac{u_1}{u_2}F(u_2)$, de donde

$$\frac{F(u_1)}{u_1} < \frac{F(u_2)}{u_2}. \tag{2.14}$$

Éstas son algunas de las características destacables, además de las propias de las funciones convexas, y cada una de ellas tiene su traducción geométrica en la gráfica de la función. La propiedad (2.11) supone que el eje de abscisas sea tangente al grafo de la función F en el origen, así como (2.14) y (2.12) marcan el comportamiento de las pendientes de las rectas secantes, en cada uno de sus puntos y en el origen, al grafo de F.

Es interesante comprobar que si $F^{-1} : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es la inversa de una N-función F, considerada únicamente para valores no negativos, entonces F^{-1} es una función cóncava, es decir satisface (2.1) cambiando el signo de la desigualdad. Es claro que F^{-1} es creciente, ya que F lo es para valores positivos, con lo cual, para todo $v_1, v_2 \geq 0$, tomando $u_1 = F^{-1}(v_1)$ y $u_2 = F^{-1}(v_2)$, se cumple

$$F^{-1}(\alpha F(u_1) + (1-\alpha)F(u_2)) \geq F^{-1}(F(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2)),$$

y por tanto

$$F^{-1}(\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2) \geq \alpha F^{-1}(v_1) + (1-\alpha)F^{-1}(v_2),$$

siendo F^{-1} una función cóncava.

Por otro lado, en virtud de la monotonía de la función f, se tiene que

$$\begin{aligned} F(u_1) + F(u_2) &= \int_0^{|u_1|} f(t)\,dt + \int_0^{|u_2|} f(t)\,dt \\ &\leq \int_0^{|u_1|} f(t)\,dt + \int_{|u_1|}^{|u_1|+|u_2|} f(t)\,dt = F(|u_1| + |u_2|). \end{aligned}$$

Y de acuerdo con esta última desigualdad, si $a = F(u_1)$ y $b = F(u_2)$ son dos valores no negativos, entonces

$$F^{-1}(a+b) \leq F^{-1}(a) + F^{-1}(b).$$

Definición 2.23. Dada una función $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ no decreciente, continua por la derecha, positiva para valores mayores que cero y que satisface las condiciones (2.9), se define la función $g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(s) = \sup_{f(t) \leq s} t.$$

Se suele denominar a g *inversa a la derecha* de f (o también *inversa generalizada* o *pseudo-inversa* de f). Recíprocamente, la función f es la inversa a la derecha de g.

Se puede apreciar que esta función g posee las mismas propiedades que f destacadas en la definición anterior, y si f es continua y estrictamente creciente, entonces g es la inversa de f propiamente dicha.

Definición 2.24. Sea $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función no decreciente, continua por la derecha, positiva para valores mayores que cero y que satisface las condiciones (2.9). Sea g la inversa a la derecha de f. Las N-funciones

$$\Phi(u) = \int_0^{|u|} f(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad \Psi(v) = \int_0^{|v|} g(s)\,ds$$

reciben el nombre de *N-funciones mutuamente complementarias.*

Ejemplo 2.25. Las funciones

$$\Phi(u) = \frac{|u|^p}{p} \qquad \text{y} \qquad \Psi(v) = \frac{|v|^q}{q},$$

con $p > 1$ y q tal que $1/p + 1/q = 1$, son N-funciones mutuamente complementarias. Derivando la primera, se puede ver que Φ cumple con los requisitos para ser una N-función, ya que $\Phi'(u) = |u|^{p-1}$ es continua, positiva para $u > 0$, no decreciente ($\Phi''(u) > 0$ para $u > 0$) y satisface las condiciones (2.9). Además, $g(s) = s^{1/(p-1)}$ es la inversa de Φ', y

$$\int_0^{|v|} g(s)\,ds = \frac{p-1}{p}|v|^{p/(p-1)} = \frac{|v|^q}{q} = \Psi(v),$$

concluyendo que, efectivamente, Ψ es su complementaria.

Ejemplo 2.26. Dada la N-función

$$\Phi(u) = \int_0^{|u|} e^t - 1\,dt = e^{|u|} - |u| - 1,$$

su complementaria será

$$\Psi(v) = \int_0^{|v|} \log(s+1)\,ds = (|v|+1)\log(|v|+1) - |v|.$$

En ciertos casos, partiendo de dos N-funciones Φ y Ψ mutuamente complementarias, será necesario considerar la N-función $\Phi_1(u) = a\Phi(bu)$, con $a, b > 0$. Bajo estas circunstancias, la derivada por la derecha de Φ_1 es $f_1 = abf(bt)$, donde f es la derivada por la derecha de Φ, y $g_1(s) = (1/b)g(s/ab)$ es la inversa por la derecha de f_1. De todo esto, se sigue que

$$\Psi_1(v) = \int_0^{|v|} g_1(s)\,ds = \frac{1}{b}\int_0^{|v|} g\left(\frac{s}{ab}\right)\,ds = a\int_0^{|v|/ab} g(s)\,ds.$$

Consecuentemente, la N-función complementaria de Φ_1 puede definirse mediante la igualdad

$$\Psi_1(v) = a\Phi\left(\frac{v}{ab}\right). \tag{2.15}$$

Proposición 2.27 (Desigualdad de Young)**.** *Sean Φ y Ψ dos N-funciones mutuamente complementarias. Entonces,*

$$uv \leq \Phi(u) + \Psi(v), \tag{2.16}$$

y la igualdad se da si y solo si $v = f(|u|)\operatorname{sgn}(u)$ o $u = g(|v|)\operatorname{sgn}(v)$, donde f y g son las derivadas por la derecha de Φ y de Ψ, respectivamente, y sgn *es la función signo.*

Demostración. Sea un u arbitrario. En el caso donde $u = 0$ el resultado es inmediato, por tanto, se considerará $u \neq 0$. Si $v = f(|u|)\operatorname{sgn}(u)$, la Figura 2.3 ilustra claramente cómo la propia construcción de las funciones f y g garantiza que las áreas acotadas por sus gráficas componen un rectángulo de área $|u|f(|u|)$. Esto es,

$$|u|f(|u|) = \Phi(u) + \Psi(f(|u|)). \tag{2.17}$$

Análogamente,

$$|v|g(|v|) = \Phi(g(|v|) + \Psi(v).$$

Obsérvese que, en el caso en el que $\operatorname{sgn}(u) \neq \operatorname{sgn}(v)$ no puede darse la igualdad en (2.16), ya que Φ y Ψ son no negativas.

Considérese ahora $v \in [0, \infty)$. Puede suponerse, sin pérdida de generalidad, $u > 0$ y $f(u) < v$. Al ser $g(s) = \sup_{f(t) \leq s} t$, si $f(u) < s < v$ entonces $u < g(s) < g(v)$, y por tanto se tiene que

$$u(v - f(u)) < \int_{f(u)}^{v} g(s)\, ds.$$

Combinando esta última desigualdad con (2.17) se sigue que

$$uv = uf(u) + u(v - f(u)) < \int_0^u f(t)\, dt + \int_0^{f(u)} g(s)\, ds + \int_{f(u)}^{v} g(s)\, ds = \Phi(u) + \Psi(v).$$

Al tener ambas N-funciones de partida la propiedad de ser pares y mayores o iguales que cero, la desigualdad anterior es válida para todo u y para todo v. □

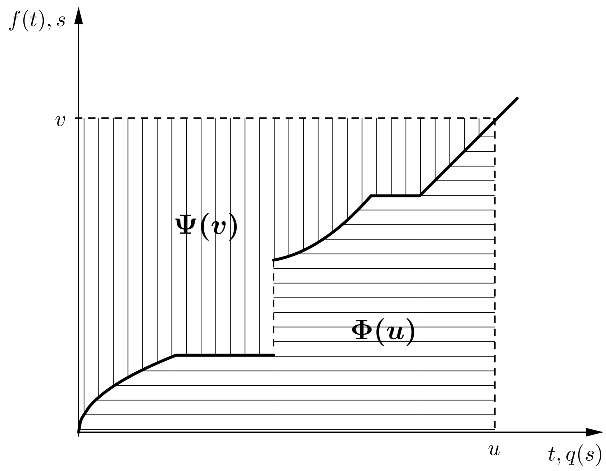

Figura 2.3: *N-funciones* complementarias

Observación 2.28. De la Proposición 2.27 se sigue que $\Psi(v) \geq uv - \Phi(u)$ y, para $u = g(|v|)\,\mathrm{sgn}(v)$, se tiene la igualdad. Es por esto que

$$\Psi(v) = \max_{u \geq 0} \{u|v| - \Phi(u)\}.$$

Es muy común encontrar esta igualdad como definición en sí misma de N-función complementaria.

Observación 2.29. Sean $p, q > 1$ exponentes conjugados, esto es $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y sean $a, b \geq 0$. Entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{2.18}$$

Esta desigualdad se obtiene particularizando en (2.16) con las N-funciones complementarias $\Phi(u) = u^p/p$ y $\Psi(v) = v^q/q$.

Observación 2.30. Sean f y g dos funciones positivas e integrables en Ω, y $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces

$$\int_\Omega f(t)g(t)\, dt \leq \left(\int_\Omega f(t)^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega g(t)^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.19}$$

Para ver que esto es así, si $\lambda > 0$, considerando $a = \lambda f$ y $b = g/\lambda$ en (2.18), e integrando a ambos lados de la desigualdad, se tiene que

$$\int_\Omega f(t)g(t)\,dt \leq \frac{\lambda^p}{p}\int_\Omega f(t)^p\,dt + \frac{\lambda^{-q}}{q}\int_\Omega g(t)^q\,dt. \tag{2.20}$$

Para reducir el tamaño de los cálculos, se definen $\alpha = \int_\Omega f(t)^p\,dt$, $\beta = \int_\Omega g(t)^q\,dt$ y la función

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{p}\lambda^p\alpha + \frac{1}{q}\lambda^{-q}\beta.$$

Derivando esta función,

$$\varphi'(\lambda) = \lambda^{p-1}\alpha - \lambda^{-(q+1)}\beta,$$

e igualando a cero, se tiene que, si $\lambda > 0$ satisface $\lambda^p\alpha = \lambda^{-q}\beta$, entonces φ alcanza su valor mínimo. Nótese que $\varphi''(\lambda) = (p-1)\lambda^{p-2}\alpha + (q+1)\lambda^{-(q+2)}\beta > 0$ para todo $\lambda > 0$. En consecuencia, sustituyendo este valor de λ en (2.20), se sigue

$$\int_\Omega f(t)g(t)\,dt \leq \frac{1}{p}\lambda^p\alpha + \frac{1}{q}\lambda^p\alpha = (\lambda^p\alpha)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = (\lambda^p\alpha)^{\frac{1}{p}}(\lambda^{-q}\beta)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_\Omega f(t)^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega g(t)^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Esta desigualdad es conocida como desigualdad de Hölder.

Observación 2.31. Si Φ y Ψ son dos N-funciones mutuamente complementarias, entonces, considerando su la rama positiva, se cumple

$$v < \Phi^{-1}(v)\Psi^{-1}(v) \leq 2v,$$

para todo $v > 0$. La segunda desigualdad se obtiene directamente de la desigualdad de Young. En cuanto a la primera, si f y g son las correspondientes derivadas por la derecha de Φ y Ψ, como se ha visto, $g(s) = \sup_{f(t)\leq s} t$, y por ello, si $f(t) \geq s$, entonces $g(s) \leq t$, y si $g(s) \geq t$, entonces $f(t) \leq s$. Por tanto,

$$\operatorname{mín}\left\{\frac{f(t)}{s}, \frac{g(s)}{t}\right\} \leq 1,$$

para todo $t, s > 0$. Finalmente, si $t = \Phi^{-1}(v)$ y $t = \Psi^{-1}(v)$, entonces

$$v = \operatorname{mín}\{\Phi(t), \Psi(s)\} \leq \operatorname{mín}\{tf(t), sg(s)\} \leq st = \Phi^{-1}(v)\Psi^{-1}(v).$$

Teorema 2.32. *Sean Φ_1 y Φ_2 dos N-funciones tales que $\Phi_1(u) \leq \Phi_2(u)$, para $u \geq u_0$. Sean Ψ_1 y Ψ_2 sus N-funciones complementarias. Entonces, se cumple que $\Psi_2(v) \leq \Psi_1(v)$ para todo $v \geq v_0 = f_2(u_0)$, donde f_2 es la derivada por la derecha de Φ_2.*

Demostración. Sea g_2 la derivada por la derecha de Ψ_2. La función g_2 es no decreciente y satisface

$$g_2(v) = \sup_{f_2(u)\leq v} u,$$

luego $g_2(v) \geq u_0$ para $v \geq v_0 = f_2(u_0)$. De acuerdo con (2.17) y con la desigualdad de Young (2.16), se tiene que

$$\Phi_2(g_2(v)) + \Psi_2(v) = g_2(v)v \leq \Phi_1(g_2(v)) + \Psi_1(v).$$

Por hipótesis, se cumple $\Phi_1(g_2(v)) \leq \Phi_2(g_2(v))$, para $v \geq v_0$. De esta forma, se concluye que $\Psi_2(v) \leq \Psi_1(v)$ para todo $v \geq v_0 = f_2(u_0)$. $\square$

Con objeto de comparar cómo de rápido es el crecimiento de dos N-funciones se determina una relación de orden parcial entre funciones.

Definición 2.33. Sean dos N-funciones Φ_1 y Φ_2. Se dice que Φ_2 *domina cerca del* ∞ *a* Φ_1, y se escribe $\Phi_1 \prec \Phi_2$, si existen dos valores $u_0 > 0$ y $k > 0$ tales que, para todo $u \geq u_0$,

$$\Phi_1(u) \leq \Phi_2(ku).$$

Se dice que dos funciones son *comparables* si se relacionan vía $\prec$, en un sentido o en otro.

Ejemplo 2.34. Sean $1 < \beta_1 \leq \beta_2$. Las N-funciones $\Phi_1(u) = |u|^{\beta_1}$ y $\Phi_2(u) = |u|^{\beta_2}$ cumplen que $\Phi_1 \leq \Phi_2$, para todo $u \geq 1$. En definitiva, $\Phi_1 \prec \Phi_2$.

Definición 2.35. Se dirá que dos N-funciones Φ_1 y Φ_2 son equivalentes, y se denota $\Phi_1 \sim \Phi_2$, cuando $\Phi_1 \prec \Phi_2$ y $\Phi_2 \prec \Phi_1$.

Teorema 2.36. *Sean dos N-funciones Φ_1 y Φ_2 tales que $\Phi_1 \prec \Phi_2$. Entonces, sus respectivas N-funciones complementarias satisfacen la relación $\Psi_2 \prec \Psi_1$.*

Demostración. Como $\Phi_1 \prec \Phi_2$, existen $k, u_0 > 0$ tales que $\Phi_1(u) \leq \Phi_2(ku)$, para todo $u \geq u_0$. Considerando la función $\Phi(u) = \Phi_2(ku)$, en virtud de la identidad (2.15), su complementaria será $\Psi(v) = \Psi_2(v/k)$. Obsérvese que $\Phi_1(u) \leq \Phi(u)$, para $u \geq u_0$, y de acuerdo con el Teorema 2.32, se tiene que $\Psi(v) \leq \Psi_1(v)$, para todo $v \geq v_0 = f(u_0)$, donde f es la derivada por la derecha de Φ. Por tanto, $\Psi_2(v) \leq \Psi_1(kv)$, para todo $v \geq v_0/k$. $\square$

Capítulo 3

Clases y espacios de Orlicz: propiedad Δ_2

El objetivo último de este capítulo es presentar los espacios funcionales de Orlicz, pasando, en primer lugar, por plantear el concepto de propiedad Δ_2 o propiedad doblante de una función, y el concepto de clase de Orlicz.

Propiedad Δ_2

Los espacios de Orlicz aparecieron por primera vez de la mano del matemático polaco W. Orlicz en 1932 asociados a la condición Δ_2.

Definición 3.1. Se dice que una función F satisface la *condición Δ_2 para grandes valores de u* (o *para todo u*), y se escribe $F \in \Delta_2(\infty)$ (o $F \in \Delta_2$), si existen constantes $u_0 \geq 0$ y $k > 0$ tales que

$$F(2u) \leq kF(u), \tag{3.1}$$

para todo $u \geq u_0$ (o para todo $u > 0$, respectivamente).

Observación 3.2. Obsérvese que si F es una N-función, aplicando (2.13) con $\alpha = 1/2$ y $u' = u/2$, se tiene que $F(2u) > 2F(u)$ para todo $u \neq 0$. Por tanto, necesariamente deberá ser $k > 2$ en la definición anterior.

Proposición 3.3. *Una N-función F satisface la propiedad Δ_2 para grandes valores de u (o para todo u) si y solo si existe $u_0 \geq 0$ que cumple que, para todo $l > 1$, existe $k(l) > 0$ tal que*

$$F(lu) \leq k(l)F(u), \tag{3.2}$$

para todo $u \geq u_0$ (o para todo $u > 0$, respectivamente).

Demostración. Dado $l > 1$, si F satisface la propiedad Δ_2, escogiendo $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^n \geq l$, se tiene que

$$F(lu) \leq F(2^n u) \leq k^n F(u) = k(l)F(u),$$

en virtud de (3.1) y de la monotonía de F para valores positivos. Recíprocamente, tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq l^n$, se sigue de (3.2) que

$$F(2u) \leq F(l^n u) \leq k^n(l)F(u) = kF(u).$$

$\square$

Observación 3.4. Atendiendo a la definición de límite superior, se tiene que $F \in \Delta_2(\infty)$ si

$$\varlimsup_{u\to\infty} \frac{F(2u)}{F(u)} < \infty.$$

De la misma forma, $F \in \Delta_2$ si y solo si

$$\varlimsup_{u\to\infty} \frac{F(2u)}{F(u)} < \infty \qquad y \qquad \varlimsup_{u\to 0} \frac{F(2u)}{F(u)} < \infty.$$

Ejemplo 3.5. La N-función $F(u) = k|u|^\beta$, con $k > 0$ y $\beta > 1$, satisface la propiedad Δ_2 para todo u, ya que $F(2u) = k2^\beta |u|^\beta = 2^\beta F(u)$.

Ejemplo 3.6. La N-función

$$F_p(u) = \frac{|u|^p}{\log(e+|u|)},$$

con $p \geq 2$ (consultar [11, página 10]) satisface la propiedad Δ_2. Su primera y segunda derivadas son

$$F_p'(u) = \frac{pu^{p-1}(e+u)\log(e+u) - u^p}{(u+e)(\log(e+u))^2} > 0,$$
$$F_p''(u) = \frac{pu^{p-2}(((e+u)\log(e+u)-u)^2 + g(u))}{(e+u)^2(\log(e+u))^3} > 0,$$

donde

$$g(u) = (p-2)(e+u)^2(\log(e+u))^2 - u^2 + \frac{2}{p}u^2 + \frac{1}{p}u^2\log(e+u) \geq (p-2)u^2 - u^2 + \frac{2}{p}u^2 + \frac{1}{p}u^2 > 0.$$

Esto prueba que F_p es una N-función (F_p' es positiva, creciente y continua en valores positivos, y satisface (2.9)). Por otro lado,

$$\varlimsup_{u\to\infty} \frac{F_p(2u)}{F_p(u)} = \lim_{u\to\infty} \frac{2^p\log(e+u)}{\log(e+2u)} = 2^p \lim_{u\to\infty} \frac{2u+e}{2u+2e} = 2^p < \infty,$$
$$\varlimsup_{u\to 0} \frac{F_p(2u)}{F_p(u)} = \lim_{u\to 0} \frac{2^p\log(e+u)}{\log(e+2u)} = 2^p < \infty,$$

luego $F_p \in \Delta_2$.

Proposición 3.7. *Sea una N-función $F \in \Delta_2(\infty)$ y sea H otra N-función tal que $F \sim H$. Entonces, $H \in \Delta_2(\infty)$ y existe una N-función G en la clase de equivalencia de F tal que $G \in \Delta_2$.*

Demostración. Supongamos que F satisface la propiedad Δ_2 para todo $u \geq u_0$. Al ser $F \sim H$, existen $\alpha, \beta > 0$ y $u_1 \geq 0$ tales que $H(u) \leq F(\beta u)$ y $F(\alpha u) \leq H(u)$, para todo $u \geq u_1$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer $\alpha < 2\beta$. En consecuencia, para $u \geq \max\{u_0, u_1\}$ se tiene que

$$H(2u) \leq F\left(\frac{\alpha\beta u}{\alpha}\right) \leq k\left(\frac{2\beta}{\alpha}\right) F(\alpha u) \leq k\left(\frac{2\beta}{\alpha}\right) H(u).$$

Por otro lado, se define

$$G(u) = \begin{cases} \frac{F(u_0)}{u_0^\alpha}|u|^\alpha & \text{si } |u| \leq u_0, \\ F(u) & \text{si } |u| \geq u_0, \end{cases}$$

donde $\alpha = u_0 f(u_0)/F(u_0) > 1$, siendo f la derivada por la derecha de F. Se puede apreciar que G es una N-función, ya que su derivada por la derecha

$$g_+(u) = \begin{cases} \frac{\alpha F(u_0)}{u_0^\alpha}|u|^{\alpha-1}, & \text{si } 0 \leq u \leq u_0, \\ f(u), & \text{si } |u| \geq u_0. \end{cases}$$

es continua por la derecha, no decreciente, positiva para $u > 0$ y satisface (2.9). Además, claramente $F \sim G$, y para todo $u \geq 0$, se tiene que

$$G(2u) \leq \text{máx}\{2^\alpha, k\}G(u),$$

luego G satisface la propiedad Δ_2 para todo $u \geq 0$. □

Teorema 3.8. *Una N-función F satisface la propiedad Δ_2 para grandes valores de u (o para todo u) si y solo si existen constantes $u_0 > 0$ y $\alpha > 0$ tales que, para todo $u \geq u_0$ (o para todo $u > 0$, respectivamente),*

$$\frac{uf(u)}{F(u)} < \alpha, \tag{3.3}$$

donde f es la derivada por la derecha de la N-función F.

Demostración. Atendiendo a la igualdad (2.8) y a la monotonía de la función f se deduce que $uf(u) > F(u)$. Ahora, asumiendo que se cumple (3.3), dividiendo por u e integrando a ambos lados de la desigualdad, se tiene que

$$\ln \frac{F(2u)}{F(u)} = \int_u^{2u} \frac{f(t)}{F(t)}\,dt < \alpha \int_u^{2u} \frac{dt}{t} = \ln 2^\alpha,$$

equivalentemente, $F(2u) < 2^\alpha F(u)$. Para la implicación inversa, si $F(2u) \leq kF(u)$ para $u \geq u_0$, entonces

$$kF(u) \geq F(2u) = \int_0^{2u} f(t)\,dt > \int_u^{2u} f(t)\,dt > uf(u),$$

cumpliéndose (3.3) para $u \geq u_0$. □

Clases de Orlicz

Tras haber mostrado en el Capítulo 2 el abanico de propiedades que poseen las N-funciones e introducido al inicio de este el concepto de condición Δ_2, estamos en disposición de introducir las clases de Orlicz. De ahora en adelante, se denotará por G a un conjunto cerrado y acotado en un espacio euclídeo de dimensión finita, en el que se considerará la medida usual de Lebesgue.

Definición 3.9. Sea Φ una N-función. Se define la *clase de Orlicz* $L_\Phi(G)$ de las funciones reales definidas en G como

$$L_\Phi(G) = \left\{ u : G \longrightarrow \mathbb{R} : \quad \rho(u;\Phi) = \int_G \Phi(u(x))\,dx < \infty \right\}.$$

Caben dos puntualizaciones: en este contexto, cuando se habla de una función, en realidad de hace referencia a la clase de equivalencia de las funciones que son idénticas a ella en casi todo punto, y en las situaciones en las que no haya lugar a equívoco, se escribirá L_ϕ en lugar de $L_\Phi(G)$.

Observación 3.10. Se puede ver fácilmente que toda función acotada pertenece a L_ϕ, ya que si $|u(x)| < M$, entonces $\rho(u;\Phi) \leq |G|\Phi(M) < \infty$.

Observación 3.11. Toda función u integrable en G pertenece a alguna clase de Orlicz. En efecto, considerando los subconjuntos $G_n = \{x \in G :\ n-1 \leq |u(x)| < n\}$, se puede apreciar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|G_n| \leq \int_G |u(x)|\,dx + |G| < \infty.$$

A partir de esta desigualdad es posible construir una sucesión creciente $\alpha_n \to \infty$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n|G_n| < \infty. \tag{3.4}$$

En efecto, si $A_m = \sum_{m=n}^{\infty} m|G_m|$, la secuencia definida como

$$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{A_{m+1}} + \sqrt{A_m}},$$

diverge a infinito, puesto que $A_m \to 0$. Ahora,

$$\alpha_n n|G_n| = n|G_n|\frac{1}{\sqrt{A_{m+1}} + \sqrt{A_m}} = n|G_n|\frac{\sqrt{A_{m+1}} - \sqrt{A_m}}{A_m - A_{m+1}} = \sqrt{A_m} - \sqrt{A_{m+1}},$$

por lo tanto, se tiene la siguiente serie telescópica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n|G_n| = \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} m|G_m|} < \infty.$$

Así, se ha construido una sucesión $\alpha_n \to \infty$ que satisface (3.4). De todo esto, la función

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ \alpha_n & \text{si } n \leq t < n+1, \end{cases}$$

tiene las propiedades necesarias para que

$$\Phi(u) = \int_0^{|u|} f(t)\,dt$$

sea una N-función, además,

$$\Phi(n) = \int_0^n f(t)\,dt \le \alpha_n n.$$

De acuerdo con la aditividad respecto al dominio de integración como consecuencia del teorema de la convergencia monótona (véase [3, página 86]) y haciendo uso de (3.4), se sigue que

$$\int_G \Phi(u(x))\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{G_n} \Phi(u(x))\,dx \le \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(n)|G_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n|G_n| < \infty,$$

y por tanto que $u \in L_\Phi$.

Teorema 3.12 (Desigualdad de Jensen integral)**.** *Sea Φ una función convexa, y sea una función positiva $p \not\equiv 0$ e integrable en G. Entonces, si existen todas las integrales en cuestión, se satisface la desigualdad*

$$\Phi\left(\frac{\int_G u(t)p(t)\,dt}{\int_G p(t)\,dt}\right) \le \frac{\int_G \Phi(u(t))p(t)\,dt}{\int_G p(t)\,dt}. \tag{3.5}$$

Demostración. Sea

$$\gamma = \frac{\int_G u(t)p(t)\,dt}{\int_G p(t)\,dt}. \tag{3.6}$$

La función ϕ es convexa y, del capítulo 2 (Lema 2.8 y su demostración), se tiene que, si $u_1 \le \gamma$ y $u_2 \ge \gamma$, entonces

$$\frac{\Phi(\gamma) - \Phi(u_1)}{\gamma - u_1} \le f_+(\gamma) \le \frac{\Phi(u_2) - \Phi(\gamma)}{u_2 - \gamma},$$

donde f_+ es la derivada por la derecha de Φ. Por tanto, para todo u, se tiene que

$$\Phi(u) - \Phi(\gamma) \ge f_+(\gamma)(u - \gamma).$$

Reemplazando u por $u(t)$, multiplicando por la función positiva $p(t)$ e integrando a ambos lados, se obtiene

$$\int_G \Phi(u(t))p(t)\,dt - \Phi(\gamma)\int_G p(t)\,dt \ge f_+(\gamma)\left(\int_G u(t)p(t)\,dt - \gamma\int_G p(t)\,dt\right).$$

Sustituyendo γ de acuerdo a (3.6), se observa que el miembro de la derecha es igual a cero, y despejando convenientemente, gracias a que p es positiva, se llega fácilmente al resultado. □

Corolario 3.13. *Si $u \in L_\Phi$ es integrable, entonces se satisface la desigualdad*

$$\Phi\left(\frac{\int_G u(t)\,dt}{|G|}\right) \le \frac{\int_G \Phi(u(t))\,dt}{|G|}. \tag{3.7}$$

Demostración. El resultado es inmediato tomando $p(t) \equiv 1$ en (3.5). □

Teorema 3.14. *Sean Φ_1 y Φ_2 dos N-funciones, y sean L_{Φ_1} y L_{Φ_2} sus respectivas clases de Orlicz. La inclusión*

$$L_{\Phi_1} \subset L_{\Phi_2}$$

se cumple, si y solo si, existen $a > 0$ y $u_0 \geq 0$ tales que

$$\Phi_2(u) \leq a\Phi_1(u),$$

para todo $u \geq u_0$.

Demostración. Sea una función $u \in L_{\Phi_1}$ cualquiera. Entonces,

$$\rho(u;\Phi_2) = \int_G \Phi_2(u(x))\,dx \leq \Phi_2(u_0)|G| + a\int_G \Phi_1(u(x))\,dx < \infty,$$

quedando demostrada la condición suficiente. En cuanto a la condición necesaria, suponiendo que no se diera, para cada $u_0 \geq 0$ y cada $a > 0$, existiría $u \geq u_0$ tal que $\Phi_2(u) > a\Phi_1(u)$. En base a esto, puede construirse una sucesión creciente $u_n \to \infty$ que satisfaga

$$\Phi_2(u_n) > 2^n\Phi_1(u_n),$$

$n = 1, 2, \ldots$ Se consideran subconjuntos disjuntos de G cuya medida venga dada por

$$|G_n| = \frac{\Phi_1(u_1)}{2^n\Phi_1(u_n)}|G|.$$

Obsérvese que esto es posible ya que, al ser Φ_1 creciente para valores positivos, se cumple que

$$|G|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_1(u_1)}{2^n\Phi_1(u_n)} < |G|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = |G|.$$

La función definida como

$$u(x) = \begin{cases} u_n & \text{si } x \in G_n, \\ 0 & \text{si } x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n, \end{cases}$$

cumple que

$$\int_G \Phi_1(u(x))\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{G_n}\Phi_1(u(x))\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\Phi_1(u_n)|G_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Phi_1(u_1)|G|}{2^n} = \Phi_1(u_1)|G| < \infty,$$

y por tanto $u \in L_{\Phi_1}$. Sin embargo,

$$\begin{aligned}\int_G \Phi_2(u(x))\,dx &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{G_n}\Phi_2(u(x))\,dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\Phi_2(u_n)|G_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\Phi_2(u_n)\frac{\Phi_1(u_1)}{2^n\Phi(u_n)}|G| > \sum_{n=1}^{\infty}\Phi_1(u_1)|G| = \infty,\end{aligned}$$

y $u \notin L_{\Phi_2}$, que contradice la hipótesis $L_{\Phi_1} \subset L_{\Phi_2}$. $\square$

Corolario 3.15. *Dos N-funciones Φ_1 y Φ_2 determinan la misma clase de Orlicz si, y solo si, existen $a, b > 0$ y $u_0 \geq 0$ tales que, para todo $u \geq u_0$,*

$$a\Phi_2(u) \leq \Phi_1(u) \leq b\Phi_2(u).$$

Para estudiar la estructura de las clases de Orlicz, en primera instancia, es de interés recalcar que cada una de estas clases es un conjunto convexo. En efecto, si $u_1, u_2 \in L_\Phi$, entonces

$$\rho(u_\alpha; \Phi) = \int_G \Phi(\alpha u_1(x) + (1-\alpha)u_2(x))\, dx \leq \alpha \int_G \Phi(u_1(x))\, dx + (1-\alpha) \int_G \Phi(u_2(x))\, dx < \infty.$$

En base a esto, a continuación se demuestra uno de los principales resultados de la teoría de los espacios de Orlicz.

Teorema 3.16. *La clase L_Φ constituye un espacio vectorial si, y solo si, $\Phi \in \Delta_2(\infty)$.*

Demostración. Supongamos que $u \in L_\Phi$ y $\Phi \in \Delta_2(\infty)$. Por la Proposición 3.3, para cualquier $l > 1$, existe una constante $k(l)$, y un $u_0 \geq 0$, a partir del cual $\Phi(lu) \leq k(l)\Phi(u)$. Es claro que, si $0 \leq l \leq 1$, también se cumple la desigualdad con $k(l) = 1$. Por consiguiente, para todo $l \geq 0$,

$$\rho(lu; \Phi) \leq \Phi(u_0)|G| + \rho(u; \Phi) < \infty,$$

esto es $lu \in L_\Phi$. Sumado a esto el hecho de que L_Φ es un conjunto convexo, puede asegurarse que si $u_1, u_2 \in L_\Phi$, entonces $\alpha u_1 + \beta u_2 \in L_\Phi$. Recíprocamente, supóngase que la clase L_Φ se comporta como un espacio vectorial. Si $u \in L_\Phi$, entonces $2u \in L_\Phi$, es decir $L_\Phi \subset L_{\Phi_1}$ con $\Phi_1(u) = \Phi(2u)$. Por tanto, de acuerdo con el Teorema 3.14, existen constantes positivas a y u_0 tales que, para $u \geq u_0$,

$$\Phi_1(u) = \Phi(2u) \leq a\Phi(u).$$

□

Es natural plantearse cómo será el comportamiento de una clase de Orlicz cuando la N-función que la define no satisface la propiedad Δ_2. En este caso, si u es una función acotada, u pertenece a L_Φ y es claro que βu con $\beta \geq 0$ también forma parte de la clase de Orlicz. El conjunto de todas las funciones $u_\beta = \beta u$, $\beta \geq 0$, recibe el nombre de *rayo a través de* u. Por el contrario, si u no es una función acotada puede ocurrir que una parte del rayo no pertenezca a la clase de Orlicz de Φ. Se denota por β_0 al número tal que $\beta u \in L_\Phi$ para $\beta < \beta_0$ y $\beta u \notin L_\Phi$ para $\beta > \beta_0$. Bajo estas circunstancias, puede ocurrir que $\beta_0 u \in L_\Phi$ o que $\beta_0 u \notin L_\Phi$. A continuación se presentan dos ejemplos representativos de esta situación que serán de utilidad más adelante.

Ejemplo 3.17. Sea Φ una función de Young que no satisface la condición Δ_2. Se construirá una función u^* tal que $\beta u^* \in L_\Phi$ si $\beta \leq 1$, y $\beta u^* \notin L_\Phi$ si $\beta > 1$. Por la Proposición 3.3, para todo $u \geq 0$, $l > 1$ y $k > 0$, existe $u_0 \geq u$ tal que $\Phi(lu_0) > k\Phi(u_0)$. Por consiguiente, puede construirse una sucesión creciente de números u_n tal que $u_n \to \infty$, $\Phi(u_1) > 1$ y

$$\Phi\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n\right) > 2^n \Phi(u_n), \tag{3.8}$$

para todo $n = 1, 2, \ldots$ A su vez, es posible tomar subconjuntos disjuntos $G_n \subset G$ que satisfagan

$$|G_n| = \frac{|G|}{2^n \Phi(u_n)}, \tag{3.9}$$

ya que, al ser Φ creciente y $\Phi(u_1) > 1$, se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} |G_n| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|G|}{2^n} = |G|.$$

Con todo esto, se define la función u^* mediante la igualdad

$$u^*(x) = \begin{cases} u_n & \text{si } x \in G_n, \\ 0 & \text{si } x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n. \end{cases} \tag{3.10}$$

Esta función pertenece a L_Φ:

$$\rho(u^*; \Phi) = \int_G \Phi(u^*(x))\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_G \Phi(u^*(x))\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} |G_n| \Phi(u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|G|}{2^n} < \infty.$$

Además, de acuerdo con (2.13), si $\beta < 1$, entonces $\Phi(\beta u^*(x)) < \beta \Phi(u^*(x))$, cumpliéndose que $\beta u^* \in L_\Phi$. Por el contrario, si $\beta > 1$, entonces, usando (3.8) y (3.9), se tiene que, para $\beta > 1 + (1/n)$,

$$\int_{G_n} \Phi(\beta u^*(x))\, dx = \Phi(\beta u_n)|G_n| > \Phi\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n\right) |G_n| > |G|,$$

de donde, por la aditividad respecto al dominio de integración, consecuencia del teorema de la convergencia monótona, (véase [3, página 86]), se sigue que

$$\begin{aligned} \rho(u^*; \Phi) &= \int_G \Phi(\beta u^*(x))\, dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{G_n} \Phi(\beta u^*(x))\, dx \geq \sum_{1+\frac{1}{n}<\beta} \int_{G_n} \Phi(\beta u^*(x))\, dx > \sum_{1+\frac{1}{n}<\beta} |G| = \infty, \end{aligned}$$

concluyendo que $\beta u^* \notin L_\Phi$.

Ejemplo 3.18. Sea Φ una función de Young que no satisface la condición Δ_2, y sean G_n, $n = 1, 2, \ldots$, subconjuntos disjuntos de G tales que se cumple (3.9). Se construirá una función u^* para la cual $\beta u^* \in L_\Phi$ si $\beta < 1$, y $\beta u^* \notin L_\Phi$ si $\beta \geq 1$. Se define u^* como

$$u^*(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n & \text{si } x \in G_n, \\ 0 & \text{si } x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n. \end{cases} \tag{3.11}$$

De acuerdo con (3.8) y (3.9), se tiene que, para $\beta \geq 1$,

$$\begin{aligned} \rho(\beta u^*; \Phi) &= \int_G \Phi(\beta u^*(x))\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{G_n} \Phi(\beta u^*(x))\, dx \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n\right) |G_n| \geq \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \Phi(u_n) |G_n| = \infty, \end{aligned}$$

y por tanto, $\beta u^* \notin L_\Phi$. Sin embargo, para $\beta < 1$, se tiene que, si $\beta(1 + (1/n)) < 1$, entonces

$$\int_{G_n} \Phi(\beta u^*(x))\, dx = \Phi\left(\beta\left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n\right) |G_n| \leq \frac{|G|}{2^n},$$

de donde

$$\rho(\beta u^*; \Phi) = \int_G \Phi(u^*(x))\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{G_n} \Phi(\beta u^*(x))\, dx < \infty,$$

y $\beta u^* \in L_\Phi$.

Espacios de Orlicz

Como se ha visto, las clases de Orlicz son convexas, sin embargo, la propiedad Δ_2 se presenta como condición necesaria y suficiente para que éstas adquieran comportamiento de espacio vectorial con las operaciones usuales. Los espacios de Orlicz, por contrapartida, solventarán este problema. Además de presentar esta ventaja en su estructura, constituyen una generalización de los clásicos espacios de Lebesgue.

Definición 3.19. Sean Φ y Ψ dos N-funciones mutuamente complementarias. Se define el *espacio de Orlicz* $L^*_\Phi(G)$ como

$$L^*_\Phi(G) = \left\{ u : G \longrightarrow \mathbb{R} : \quad \int_G |u(x)v(x)|\, dx < \infty\,, \text{ para todo } v \in L_\Psi \right\}.$$

Al igual que con las clases de Orlicz, se escribirá L^*_Φ en lugar de $L^*_\Phi(G)$ cuando esté claro que las funciones actúan sobre el conjunto G, y aquellas que difieran en un conjunto de medida de cero serán consideradas iguales.

Observación 3.20. Es fácil ver que el conjunto L^*_Φ constituye un espacio vectorial con las operaciones usuales. Es más, puede asegurarse que $L_\Phi \subseteq L^*_\Phi$ gracias a la desigualdad de Young (2.27):

$$\int_G |u(x)v(x)|\, dx \leq \int_G (\Phi(u(x)) + \Psi(v(x)))\, dx = \rho(u; \Phi) + \rho(v; \Psi) < \infty. \tag{3.12}$$

Más adelante, se determinarán las condiciones bajo las cuales $L_\Phi = L^*_\Phi$ (véase el Teorema 4.6).

Teorema 3.21. *Sean Φ y Ψ dos N-funciones mutuamente complementarias, y $u \in L^*_\Phi$. Entonces,*

$$\sup_{\rho(v,\Psi)\leq 1} \int_G |u(x)v(x)|\, dx < \infty.$$

Demostración. Suponiendo que no se cumpliera esta afirmación, existiría una función $u_0 \in L^*_\Phi$ y una sucesión de funciones $v_n \in L_\Psi$ con $\rho(v_n; \Psi) \leq 1$ tales que, para cada n,

$$\int_G |u_0(x)v_n(x)|\, dx > 2^n. \tag{3.13}$$

Considerando la sucesión creciente de funciones

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}|v_k(x)|,$$

convergente a.e. a la función

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}|v_k(x)|,$$

de acuerdo con la convexidad y paridad de Ψ, al aplicar sucesivamente (2.2), se sabe que

$$\Psi\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}|v_k(x)|\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\Psi(v_k(x)).$$

Por consiguiente, como $\rho(v_n; \Psi) \leq 1$ para todo n,

$$\rho(s_n; \Psi) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\rho(v_k; \Psi) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < 1.$$

En virtud de la continuidad y de la monotonía de Ψ en valores positivos, y sabiendo que $s_n \in L_\Psi$ para todo n, es posible hacer uso del teorema de la convergencia monótona sobre la sucesión creciente de funciones positivas $\Psi(s_n)$, de modo que

$$\int_G \Psi(s(x))\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_G \Psi(s_n(x))\, dx = \lim_{n\to\infty} \rho(s_n; \Psi) \leq 1.$$

De aquí que $s \in L_\Psi$. Por otra parte, vía (3.13), se tiene que

$$\int_G |u_0(x)s_n(x)|\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_G \frac{1}{2^k}|u_0(x)v_k(x)| > 2^n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} > n.$$

En la misma línea, la sucesión creciente de funciones integrables $|u_0 s_n|$ converge a.e. a la función $|u_0 s|$, por tanto, de nuevo, por el teorema de la convergencia monótona, se sigue que

$$\int_G |u_0(x)s(x)|\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_G |u_0(x)s_n(x)|\, dx = \infty.$$

Esto supone una contradicción ya que $s \in L_\Psi$ y $u_0 \in L^*_\Phi$. $\square$

Este último resultado habilita la definición de la *norma de Orlicz* mediante la igualdad

$$\|u\|_\Phi = \sup_{\rho(v,\Psi)\leq 1} \int_G |u(x)v(x)|\, dx. \tag{3.14}$$

Se suele denominar *espacio de Orlicz* al espacio vectorial normado $(L^*_\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$. La norma (3.14) está bien definida:

(1) $\|u\|_\Phi \geq 0$, y $\|u\|_\Phi = 0$ si, y solo si, $u \equiv 0$ a.e.,

(2) $\|\alpha u\|_\Phi = |\alpha|\|u\|_\Phi$,

(3) $\|u_1 + u_2\|_\Phi \leq \|u_1\|_\Phi + \|u_2\|_\Phi$.

Para probar (1), supongamos que $u(x) \neq 0$ en un subconjunto $G' \subseteq G$ de medida positiva. Como la N-función Ψ es continua, creciente y $\Psi(0) = 0$, existe $v_0 > 0$ tal que $|G|\Psi(v_0) \leq 1$. Dado que $\rho(v_0; \Psi) = |G|\Psi(v_0) \leq 1$, la función constante $v \equiv v_0$ delimita un valor mínimo para la norma de u, esto es,

$$\|u\|_\Phi = \sup_{\rho(v;\Psi)\leq 1} \int_G |u(x)v(x)|\, dx \geq \int_G |u(x)v_0|\, dx \geq \int_{G'} |u(x)v_0|\, dx > 0.$$

Por otro lado, si $u(x) \equiv 0$ a.e., entonces $u(x)v(x) \equiv 0$ a.e. y $\|u\|_\Phi = 0$. La propiedad (2) queda demostrada viendo que

$$\sup_{\rho(v;\Psi)\leq 1} \int_G |ku(x)v(x)|\, dx = |k| \sup_{\rho(v;\Psi)\leq 1} \int_G |u(x)v(x)|\, dx.$$

Por último, (3) se desprende de la desigualdad triangular junto con las propiedades inherentes al supremo:

$$\begin{aligned}\sup_{\rho(v;\Psi)\leq 1} \int_G |(u_1(x) + u_2(x))v(x)|\, dx &\leq \sup_{\rho(v;\Psi)\leq 1} \left(\int_G |u_1(x)v(x)| + \int_G |u_2(x)v(x)|\, dx \right) \\ &\leq \sup_{\rho(v;\Psi)\leq 1} \left(\int_G |u_1(x)v(x)| \right) + \sup_{\rho(v;\Psi)\leq 1} \left(\int_G |u_2(x)v(x)|\, dx \right).\end{aligned}$$

Ejemplo 3.22. Como se ha visto en el Capítulo 2, las N-funciones

$$\Phi(u) = \frac{|u|^p}{p} \qquad \text{y} \qquad \Psi(v) = \frac{|v|^q}{q},$$

con $p > 1$ y q tal que $1/p + 1/q = 1$, son mutuamente complementarias. Si se considera una función $u_1 \in L^*_\Phi$, tal que

$$\|u_1\|_p = \left(\int_G |u_1(x)|^p\, dx \right)^{1/p} = 1,$$

($u_1 \equiv 1/|G|^{1/p}$ serviría), de acuerdo con la desigualdad de Hölder (2.19), para $v \in L_\Psi$ que satisfaga $\rho(v; \Psi) \leq 1$, se cumple que

$$\int_G |u_1(x)v(x)|\, dx \leq \left(\int_G |u_1|^p\, dx \right)^{1/p} \left(\int_G |v(x)|^q\, dx \right)^{1/q} = (q\rho(v; \Psi))^{1/q} \leq q^{1/q},$$

obteniendo una cota superior para $\|u_1\|_\Phi$. Por otra parte, es fácil comprobar que la función $v_0(x) = q^{1/q}|u_1(x)|^{p-1} \operatorname{sgn} u_1(x)$ satisface $\rho(v_0; \Psi) = 1$, y

$$\int_G u_1(x)v_0(x)\, dx = q^{1/q} \int |u_1(x)|^p\, dx = q^{1/q}.$$

Por tanto, $\|u_1\|_\Phi = q^{1/q}$. Ahora, si se considera una función $u \in L^*_\Phi$ arbitraria, entonces $u' = u/\|u\|_p$ satisface $\|u'\|_p = 1$ y, en consecuencia,

$$\|u\|_\Phi = q^{1/q} \left(\int_G |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

De esto se concluye que la norma de Orlicz en L^*_Φ, con $\Phi(u) = |u|^p/p$, $p > 1$, y la norma usual definida en el espacio de Lebesgue L^p son equivalentes.

Ejemplo 3.23. Se denota por χ_J a la función característica de un conjunto $J \subset G$. Si $v \in L_\Psi$ cumple que $\rho(v;\Psi) \leq 1$, entonces, en virtud de la desigualdad de Jensen integral (3.7),

$$\Psi \left(\frac{\int_J v(x)\, dx}{|J|} \right) \leq \frac{\int_J \Psi(v(x))\, dx}{|J|} \leq \frac{1}{|J|}.$$

De esto último se sigue que, al ser Ψ^{-1} creciente,

$$\frac{1}{|J|} \int_J v(x)\, dx \leq \Psi^{-1} \left(\frac{1}{|J|} \right).$$

Considerando la función $v_0(x) = \Psi^{-1}(1/|J|)\chi_J(x)$, la cual claramente satisface $\rho(v_0;\Psi) = 1$, se tiene que

$$\int_J v_0(x)\, dx = \int_J \Psi^{-1} \left(\frac{1}{|J|} \right) \chi_J(x)\, dx = |J| \Psi^{-1} \left(\frac{1}{|J|} \right).$$

De todo esto, se concluye que

$$\|\chi_J\|_\Phi = \sup_{\rho(v;\Psi)\leq 1} \int_G |\chi_J(x) v(x)|\, dx = \sup_{\rho(v;\Psi)\leq 1} \int_J |v(x)|\, dx,$$

y como en v_0 se alcanza este supremo, entonces

$$\|\chi_J\|_\Phi = |J| \Psi^{-1} \left(\frac{1}{|J|} \right). \tag{3.15}$$

Capítulo 4

Propiedades funcionales y norma de Luxemburg

Los espacios de Orlicz destacan especialmente por sus propiedades funcionales. En este cuarto capítulo se abordarán aquellas que se consideran más importantes, habiendo tomado como principales referencias *Convex Functions and Orlicz Spaces* ([6, Capítulo 2]) y *Function Spaces* ([5, Capítulo 4]).

Completitud

Se empezará probando que el espacio L^*_Φ junto con la norma de Orlicz es un espacio de Banach, esto es, un espacio vectorial normado completo.

Teorema 4.1. *Todo espacio de Orlicz L^*_Φ es completo.*

Demostración. Sea una sucesión de Cauchy de funciones $u_n \in L^*_\Phi$, $n = 1, 2, \ldots$, esto es

$$\lim_{n,m\to\infty} \|u_n - u_m\|_\Phi = 0. \tag{4.1}$$

Es claro que, para toda función v tal que $\rho(v; \Psi) \leq 1$, se cumple

$$\int_G |(u_n - u_m)v(x)|\, dx \leq \sup_{\rho(v;\Psi)\leq 1} \int_G |(u_n - u_m)v(x)|\, dx,$$

y por tanto, por la propia definición de la norma $\|\cdot\|_\Phi$, se tiene que

$$\varliminf_{n,m\to\infty} \int_G |(u_n - u_m)v(x)|\, dx \leq \lim_{n,m\to\infty} \|u_n - u_m\|_\Phi = 0.$$

De esto último se concluye que $\int_G |(u_n - u_m)v(x)|\, dx \to 0$ cuando $n, m \to \infty$, y la sucesión u_n converge en L^1, por consiguiente, existe una subsucesión suya u_{n_k} convergente a.e. a alguna función u_0 (véase [3, página 181, Teorema 1.1]. Por otro lado, de acuerdo con (4.1), dado un $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k, k + p > N$, se tiene que

$$\int_G |u_{n_{k+p}}(x) - u_{n_k}(x)||v(x)|\, dx < \varepsilon,$$

para cualquier $v \in L_\Psi$ que satisfaga $\rho(v;\Psi) \leq 1$. Tomando el límite cuando $p \to \infty$ en la desigualdad anterior, y en virtud del lema de Fatou,

$$\int_G |u_0(x) - u_{n_k}(x)||v(x)|\,dx \leq \varliminf_{p\to\infty} \int_G |u_{n_{k+p}}(x) - u_{n_k}(x)||v(x)|\,dx \leq \varepsilon. \tag{4.2}$$

De esto último, se sigue que $u_0 - u_{n_k} \in L_\Phi^*$ para todo n_k y, en consecuencia, dada la estructura de espacio vectorial de L_Φ^*, se tiene que $u_0 \in L_\Phi^*$. Además, por (4.2), es claro que

$$\|u_0 - u_{n_k}\|_\Phi \leq \varepsilon,$$

luego la subsucesión u_{n_k} converge a u_0, y necesariamente, la sucesión inicial u_n también converge a u_0. □

Desigualdad de Hölder

En el Capítulo 2 quedó demostrada la desigualdad de Hölder, sin embargo, puede obtenerse una forma más general de esta desigualdad en base a la teoría de los espacios de Orlicz.

Lema 4.2. *Sea ϕ la derivada por la derecha de una N-función Φ. Sea Ψ la función complementaria de Φ. Si $u \in L_\Phi^*$ cumple que $\|u\|_\Phi \leq 1$, entonces la función $v_0(x) = \phi(|u(x)|)$ pertenece a L_Ψ y $\rho(v_0;\Psi) \leq 1$.*

Demostración. En primer lugar se demostrará que para cualquier función $v \in L_\Psi$ se cumple que

$$\left|\int_G u(x)v(x)\,dx\right| \leq \begin{cases} \|u\|_\Phi, & \text{si } \rho(v;\Psi) \leq 1, \\ \|u\|_\Phi \rho(v;\Psi), & \text{si } \rho(v;\Psi) > 1. \end{cases} \tag{4.3}$$

La primera desigualdad es trivial atendiendo a la propia definición de la norma de Orlicz. En cuanto a la segunda de ellas, tomando $\alpha = 1/\rho(v;\Psi)$ en (2.13) e integrando a ambos lados de la desigualdad, se tiene que

$$\int_G \Psi\left(\frac{v(x)}{\rho(v;\Psi)}\right) dx \leq \frac{1}{\rho(v;\Psi)} \int_G \Psi(v(x))\,dx = 1.$$

Esto último supone que $\rho(v/\rho(v;\Psi);\Psi) \leq 1$, y por tanto, puede asegurarse vía la primera desigualdad de (4.3) que

$$\left|\int_G u(x)\frac{v(x)}{\rho(v;\Psi)}\,dx\right| \leq \|u\|_\Phi,$$

de donde se obtiene directamente la segunda desigualdad. Una vez probadas las dos desigualdades iniciales, sea $u \in L_\Psi^*$ con $\|u\|_\Phi \leq 1$, y sean las funciones $u_n \in L_\Psi^*$ definidas como

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } |u(x)| \leq n, \\ 0 & \text{si } |u(x)| > n, \end{cases}$$

$n = 1, 2, \ldots$ Cada u_n está acotada por el valor n, y $\phi(|u_n(x)|)$, a su vez, está acotado por $\phi(n)$. Es por esto que $\phi \circ |u_n|$ pertenece a L_Ψ. Supongamos que la función $v_0(x) = \phi(|u(x)|)$ no satisface la condición del enunciado y $\rho(v_0; \Psi) > 1$, entonces existiría un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho(u_{n_0}; \Psi) = \int \Psi(\phi(|u_{n_0}(x)|))\, dx > 1.$$

De acuerdo con la Proposición 2.27, y más en concreto con la igualdad (2.17), se tiene que

$$\Psi(\phi(|u_{n_0}(x)|)) < \Phi(u_{n_0}(x)) + \Psi(\phi(|u_{n_0}(x)|)) = |u_{n_0}(x)|\phi(|u_{n_0}(x)|).$$

Integrando a ambos lados de la desigualdad, como $\phi(|u_{n_0}|)$ pertenece a L_Ψ, se puede usar la segunda desigualdad de (4.3) de modo que

$$\int_G \Psi(\phi(|u_{n_0}(x)|))\, dx < \int_G |u_{n_0}(x)|\phi(|u_{n_0}(x)|)\, dx \le \|u_{n_0}\|_\Phi \int_G \Psi(\phi(|u_{n_0}(x)|)\, dx,$$

y despejando queda que $\|u_{n_0}\|_\Phi > 1$. Finalmente, como $u_{n_0}(x) \le u(x)$ y por hipótesis $\|u\|_\Phi \le 1$, se tiene que $\|u_{n_0}\|_\Phi \le \|u\|_\Phi \le 1$, lo cual supone una contradicción. □

Lema 4.3. *Si $u \in L^*_\Phi$ y $\|u\|_\Phi \le 1$, entonces $u \in L_\Phi$ y*

$$\rho(u; \Phi) \le \|u\|_\Phi. \tag{4.4}$$

Demostración. De acuerdo con el lema previo, la función $v_0 = \phi(|u(x)|)\operatorname{sgn} u(x)$, donde ϕ es la derivada por la derecha de Φ, cumple que $\rho(v_0; \Psi) \le 1$. Aplicando (2.17), se obtiene

$$u(x)v_0(x) = \Phi(u(x)) + \Psi(v_0(x)) \ge \Phi(u(x)),$$

e integrando a ambos lados se tiene que

$$\rho(u; \Phi) = \int_G \Phi(u(x))\, dx \le \int_G \Phi(u(x))\, dx + \int_G \Psi(v_0(x))\, dx = \int_G u(x)v_0(x)\, dx \le \|u\|_\Phi.$$

□

Corolario 4.4. *Si $u \in L^*_\Phi$, entonces*

$$\int_G \Phi\left(\frac{u(x)}{\|u\|_\Phi}\right) dx \le 1. \tag{4.5}$$

Demostración. Aplicando el lema anterior a la función $u'(x) = u(x)/\|u\|_\Phi$ se obtiene el resultado. □

Teorema 4.5 (Desigualdad de Hölder)**.** *Para todo par de funciones $u \in L^*_\Phi$ y $v \in L^*_\Phi$ se satisface la desigualdad*

$$\left|\int_G u(x)v(x)\, dx\right| \le \|u\|_\Phi \|v\|_\Psi. \tag{4.6}$$

Demostración. De acuerdo con (4.5), se tiene que

$$\rho\left(\frac{u}{\|u\|_\Phi}; \Phi\right) = \int_G \Phi\left(\frac{u(x)}{\|u\|_\Phi}\right) dx \le 1.$$

Por tanto,

$$\left|\int_G \frac{u(x)}{\|u\|_\Phi} v(x)\, dx\right| \le \|v\|_\Psi,$$

y despejando se obtiene (4.6). □

Relación entre clases y espacios de Orlicz

La desigualdad (4.5) es de gran importancia de cara a establecer una relación definitiva entre la clase L_Φ y el espacio L^*_Φ.

Teorema 4.6. *Sea Φ una N-función, y sean L_Φ y L^*_Φ sus respectivas clase y espacio de Orlicz. La igualdad*

$$L_\Phi = L^*_\Phi,$$

se mantiene si, y solo si, $\Phi \in \Delta_2(\infty)$.

Demostración. La desigualdad (4.5) asegura que si una función u pertenece a L^*_Φ, entonces $u/\|u\|_\Phi$ está en L_Φ. Consecuentemente, el espacio de Orlicz L^*_Φ es el espacio generado por la clase L_Φ. En virtud del Teorema 3.16, una clase de Orlicz está dotada de la estructura de espacio vectorial si, y solo si, $\Phi \in \Delta_2(\infty)$. Por tanto, se puede concluir que la propiedad Δ_2 es condición necesaria y suficiente para que se de la igualdad. □

Separabilidad

De cara a estudiar las condiciones bajo las cuales un espacio de Orlicz es separable, es necesario introducir una nueva noción de convergencia.

Definición 4.7. Se dice que una sucesión de funciones $u_n \in L^*_\Phi$ *converge en media a* $u_0 \in L^*_\Phi$ si

$$\lim_{n\to\infty} \int_G \Phi(u_n(x) - u_0(x))\, dx = 0. \tag{4.7}$$

Observación 4.8. De la desigualdad (4.4) se sigue que la convergencia con la norma de Orlicz en L^*_Φ siempre implica convergencia en media. El recíproco, como regla general, no se cumple (un ejemplo en [6, páginas 75–76]).

Teorema 4.9. *Sea Φ una N-función y L^*_Φ su correspondiente espacio de Orlicz. Si $\Phi \in \Delta_2(\infty)$, entonces la convergencia en la norma de Orlicz es equivalente a la convergencia en media.*

Demostración. Sea una sucesión de funciones $u_n \in L^*_\Phi$ convergente en media a una función $u_0 \in L^*_\Phi$, y sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Eligiendo $k \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^{k-1} < \varepsilon$, al ser $\Phi \in \Delta_2(\infty)$, de la desigualdad (3.1) se sigue que $\Phi(2^k(u_n(x) - u_0(x))) \le C^k \Phi(u_n(x) - u_0(x))$ para cierta constante $C > 0$, y por tanto, de la convergencia en media, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_G \Phi(2^k(u_n(x) - u_0(x)))\, dx = 0.$$

En base a esto, puede elegirse un $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que para $n \ge n_0$ se cumpla

$$\int_G \Phi(2^k(u_n(x) - u_0(x)))\, dx < 1.$$

Y utilizando la desigualdad de Young (2.27) se sigue que

$$\begin{aligned}\|2^k(u_n - u_0)\|_\Phi &= \sup_{\rho(v;\Psi)\le 1} \int_G |2^k(u_n(x) - u_0(x))v(x)|\,dx \\ &\le \sup_{\rho(v;\Psi)\le 1} \int_G (\Phi(2^k(u_n(x) - u_0(x))) + \Psi(v(x)))\,dx.\end{aligned}$$

Eligiendo en la expresión anterior una función cualquiera v tal que $\rho(v;\Psi) \le 1$, se tiene que

$$\|2^k(u_n - u_0)\|_\Phi \le \int_G \Phi(2^k(u_n(x) - u_0(x)))\,dx + 1 < 2,$$

de donde $\|u_n - u_0\|_\Phi < 1/2^{k-1} < \varepsilon$. □

Definición 4.10. Se denotará por E_Φ a la clausura en L^*_Φ del conjunto de todas las funciones acotadas, en el sentido de la norma de Orlicz.

Proposición 4.11. *$E_\Phi \subset L_\Phi$ y, si $\Phi \in \Delta_2(\infty)$, entonces $E_\Phi = L^*_\Phi$.*

Demostración. Veamos primero que, si se considera la convergencia en media, el conjunto de funciones acotadas es denso en la clase L_Φ. En efecto, como se vio anteriormente, toda función acotada pertenece a la clase L_Φ, y para una función cualquiera $u \in L_\Phi$, la sucesión u_n de funciones acotadas definidas como

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } |u(x)| \le n, \\ 0 & \text{si } |u(x)| > n, \end{cases}$$

por la continuidad de Φ unida al teorema de la convergencia monótona (véase [3, página 86]), satisface (4.7), esto es, u_n converge en media a u. Nótese que si la N-función Φ satisface la condición Δ_2, sabemos que $L_\Phi = L^*_\Phi$ y que la convergencia en media equivale a la convergencia con la norma de Orlicz. Es por esto que, en este caso, el conjunto de las funciones acotadas es denso en L_Φ, también en el sentido de la convergencia con la norma de Orlicz, y $E_\Phi = L^*_\Phi$.

Para demostrar la primera inclusión, sean $u_0 \in E_\Phi$ y u_1 una función acotada tal que $\|u_0 - u_1\|_\Phi < 1/2$. Obsérvese que es posible encontrar esta función u_1 atendiendo a la propia definición de E_Φ. De acuerdo con el Lema (4.3), se sigue que $2u_0 - 2u_1 \in L_\Phi$. Como $u_1 \in L_\Phi$ por ser acotada, y en virtud de la convexidad de L_Φ, la función $u_0 = \frac{1}{2}(2u_0 - 2u_1) + \frac{1}{2}(2u_1)$ pertenece también a L_Φ. □

Además de estas propiedades, el conjunto E_Φ tiene la categoría de espacio vectorial con las operaciones usuales. En efecto, si $u, v \in E_\Phi$, entonces $u, v \in L_\Phi \subset L^*_\Phi$ y existen sucesiones u_n y v_n de funciones acotadas que convergen en norma a u y v, respectivamente. Por tanto, la sucesión de funciones acotadas $\alpha u_n + \beta v_n$ converge a $\alpha u + \beta v \in L^*_\Phi$, y $\alpha u + \beta v$ está en la adherencia en L^*_Φ del conjunto de las funciones acotadas.

Teorema 4.12. *El espacio E_Φ es separable.*

Demostración. Sea una función acotada u tal que $|u(x)| \leq M$. Del teorema de Lusin (véase [3, página 64]), se sigue que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe una función continua u_n tal que $u(x) \neq u_n(x)$ únicamente en un conjunto $G_n \subset G$, con $|G_n| < 1/n$, y

$$\sup_{x\in G}|u_n(x)| \leq \sup_{x\in G}|u(x)| \leq M.$$

Por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|u - u_n\|_\Phi &= \sup_{\rho(v;\Psi)\leq 1} \int_G |u(x) - u_n(x))v(x)|\,dx \\ &\leq 2M \sup_{\rho(v;\Psi)\leq 1} \int_{G_n} |v(x)|\,dx = 2M \sup_{\rho(v;\Psi)\leq 1} \int_G |v(x)\chi_{G_n}(x)|\,dx = 2M\|\chi_{G_n}\|_\Phi, \end{aligned}$$

donde χ_{G_n} es la función característica en G_n. En virtud de la ecuación que ofrece la norma de Orlicz de la función característica (3.15), se tiene que

$$\|u - u_n\|_\Phi = 2M|G_n|\Psi^{-1}\left(\frac{1}{|G_n|}\right) \leq \frac{2M}{n}\Psi^{-1}(n),$$

y finalmente, como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2M}{n}\Psi^{-1}(n) = 2M \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Psi'(\Psi^{-1}(n))} = 0,$$

se llega a que

$$\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_\Phi = 0,$$

y la sucesión u_n converge en norma a u. En conclusión, el conjunto de las funciones continuas es denso en E_Φ. Además, como consecuencia del teorema de aproximación de Weierstrass (véase [1, página 177]), para cualquier función u continua en G, existe una sucesión de polinomios con coeficientes racionales que converge uniformemente a u. En definitiva, el conjunto de polinomios con coeficientes racionales es numerable y denso en el espacio E_Φ, luego E_Φ es separable. □

Corolario 4.13. *Si $\Phi \in \Delta_2(\infty)$ entonces L^*_Φ es separable.*

Demostración. Por la Proposición 4.11, como $\Phi \in \Delta_2(\infty)$, entonces $E_\Phi = L^*_\Phi$, y por el teorema previo, E_Φ es separable. □

Definición 4.14. Se define el conjunto de funciones de L^*_Φ que están a una distancia menor que $r > 0$ de E_Φ como

$$\Pi(E_\Phi; r) = \{u \in L^*_\Phi : d(u, E_\Phi) = \inf_{w\in E_\Phi} \|u - w\|_\Phi < r\}.$$

La clausura de este conjunto será designada como $\overline{\Pi}(E_\Phi; r)$.

Teorema 4.15. *Sea Φ una N-función que no satisface la propiedad Δ_2. Entonces*

$$\Pi(E_\Phi; 1) \subsetneq L_\Phi \subsetneq \overline{\Pi}(E_\Phi; 1).$$

Demostración. En primer lugar, veamos que, para toda función $u_0 \in E_\Phi$, la bola abierta de centro u_0 y radio unitario, $B(u_0, 1)$, está contenida en L_Φ. Sea $u \in L_\Phi^*$ tal que $\|u - u_0\|_\Phi < 1$. Es posible escoger $0 < \alpha < 1$ suficientemente pequeño que satisfaga $\|u - u_0\|_\Phi < 1 - \alpha$. Por ser E_Φ un espacio vectorial, la función u_0/α pertenece a E_Φ. De modo que, como la Proposición 4.11 asegura que $E_\Phi \subset L_\Phi$, entonces $u_0/\alpha \in L_\Phi$, y al ser $\|(u-u_0)/(1-\alpha)\|_\Phi < 1$, de acuerdo con (4.4), la función $(u - u_0)/(1 - \alpha)$ también pertenece a L_Φ. Por consiguiente, de la convexidad de L_Φ se sigue que, escribiendo u como combinación convexa de estas funciones,

$$u(x) = (1 - \alpha) \left(\frac{u(x) - u_0(x)}{1 - \alpha} \right) + \alpha \frac{u_0(x)}{\alpha},$$

u también está en L_Φ, quedando patente la primera inclusión. Por otra parte, en el Ejemplo 3.17, se construyó a través de la igualdad (3.10) una función $u^* \in L_\Phi$ tal que $\beta u^* \in L_\Phi$ si $\beta \leq 1$, y $\beta u^* \notin L_\Phi$ si $\beta > 1$. Veamos que $u^* \notin \Pi(E_\Phi; 1)$. Suponiendo que se cumple que $d(u^*, E_\Phi) < 1$, entonces puede tomarse $\beta > 1$ suficientemente pequeño para el cual se tiene que

$$d(\beta u^*; E_\Phi) = \inf_{w \in E_\Phi} \|\beta u^* - w\|_\Phi = \beta \inf_{w \in E_\Phi} \|u^* - w\|_\Phi < 1,$$

donde la categoría de espacio vectorial de E_Φ posibilita la segunda igualdad. Por tanto, $\beta u^* \in \Pi(E_\Phi; 1)$ y, como ya quedó probado que $\Pi(E_\Phi; 1) \subset L_\Phi$, esto significaría que βu^* pertenece a la clase L_Φ, lo cual contradice la propia naturaleza de u^*. En conclusión, $u^* \notin \Pi(E_\Phi; 1)$ y $u^* \in L_\Phi$, luego $\Pi(E_\Phi; 1) \subsetneq L_\Phi$. Para ver la segundad inclusión, sea una función $u \in L_\Phi$. En virtud de la densidad de las funciones acotadas en L_Φ respecto a la convergencia en media (ver la demostración de la Proposición 4.11), para todo $\varepsilon > 0$, puede encontrarse una función acotada $u_\varepsilon \in E_\Phi$ tal que

$$\int_G \Phi(u(x) - u_\varepsilon(x)) \, dx < \varepsilon.$$

De manera que, de acuerdo con la desigualdad de Young (2.16), se sigue

$$\begin{aligned} \|u - u_\varepsilon\|_\Phi &= \sup_{\rho(v;\Psi) \leq 1} \int_G |(u(x) - u_\varepsilon(x))v(x)| \, dx \\ &\leq \sup_{\rho(v;\Psi) \leq 1} \left(\int_G \Phi(u(x) - u_\varepsilon(x)) \, dx + \int_G \Psi(v(x)) \, dx \right) < 1 + \varepsilon, \end{aligned}$$

de donde, como $u_\varepsilon \in E_\Phi$,

$$d(u, E_\Phi) = \inf_{w \in E_\Phi} \|u - w\|_\Phi \leq \|u - u_\varepsilon\|_\Phi < 1 + \varepsilon.$$

Y haciendo $\varepsilon \to 0$ se concluye que $d(u, E_\Phi) \leq 1$, luego $L_\Phi \subset \overline{\Pi}(E_\Phi; 1)$. Por otra parte, en el Ejemplo 3.18 se definía mediante (3.11) una función $u^* \notin L_\Phi$ tal que $\beta u^* \in L_\Phi$ si $\beta < 1$, y $\beta u^* \notin L_\Phi$ si $\beta \geq 1$. Se demostrará que $u^* \in \overline{\Pi}(E_\Phi; 1)$, esto es $d(u^*, E_\Phi) = 1$. Si no fuese así, como $u^* \notin L_\Phi$, necesariamente $d(u^*, E_\Phi) > 1$, por la primera inclusión. En base a esto, existiría $\beta < 1$ suficientemente cercano a la unidad tal que $\beta d(u^*, E_\Phi) = d(\beta u^*, E_\Phi) > 1$. De modo que tendríamos una función $\beta u^* \in L_\Phi^*$ que no pertenece a $\overline{\Pi}(E_\Phi; 1)$, y como se ha demostrado, $L_\Phi \subset \overline{\Pi}(E_\Phi; 1)$, lo cual sería una contradicción. Así, queda demostrado que $L_\Phi \subsetneq \overline{\Pi}(E_\Phi; 1)$. □

Lema 4.16. *Si $u \in L_\Phi^*$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_\Phi = d(u, E_\Phi),$$

donde

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x) & si\ |u(x)| \le n, \\ 0 & si\ |u(x)| > n. \end{cases}$$

Demostración. La sucesión de funciones $|u(x) - u_n(x)|$ es decreciente, por lo que es claro que $\|u - u_n\|_\Phi$ también lo es, y como las funciones u_n son acotadas, esta norma no puede ser menor que $d(u, E_\Phi)$. Así, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_\Phi \ge \inf_{w\in E_\Phi} \|u - w\|_\Phi = d(u, E_\Phi).$$

Por otro lado, sean $\varepsilon > 0$ y $\alpha > 0$ tales que se cumple

$$\frac{1}{d(u, E_\Phi) + 2\varepsilon} < \alpha < \frac{1}{d(u, E_\Phi) + \varepsilon}.$$

Gracias a la estructura de espacio vectorial de E_Φ, se tiene que

$$d(\alpha u, E_\Phi) = \inf_{w\in E_\Phi} \|\alpha u - w\|_\Phi = \alpha \inf_{w\in E_\Phi} \|u - w\|_\Phi < \frac{d(u, E_\Phi)}{d(u, E_\Phi) + \varepsilon} < 1.$$

Además, como $\alpha u \in L_\Phi^*$, se cumple $\int_G \Phi(\alpha u(x))\, dx < \infty$, y como αu_n converge en media a αu (véase la demostración de la Proposición 4.11), existe un n_0 tal que, para todo $n \ge n_0$, se satisface la desigualdad

$$\int_G \Phi(\alpha u(x) - \alpha u_n(x))\, dx < \alpha\varepsilon.$$

Aplicando la desigualdad de Young (2.27), se tiene que

$$\|\alpha u - \alpha u_n\|_\Phi = \sup_{\rho(v;\Psi)\le 1} \int_G |(\alpha u(x - \alpha u_n(x))v(x)|\, dx \le 1 + \int_G \Phi(\alpha u(x) - \alpha u_n(x))\, dx < 1 + \alpha\varepsilon,$$

o equivalentemente,

$$\|u - u_n\|_\Phi < \frac{1}{\alpha} + \varepsilon < d(u, E_\Phi) + 3\varepsilon.$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$ se llega a $\|u - u_n\|_\Phi \le d(u, E_\Phi)$. Al haber obtenido esta desigualdad y su inversa queda demostrado el enunciado del lema. □

Teorema 4.17. *Sea Φ una N-función que no satisface la condición Δ_2. Entonces el espacio de Orlicz L_Φ^* no es separable.*

Demostración. Sea $\{u_n : n = 1, 2, \dots\}$ un conjunto numerable de funciones en L_Φ^*. En virtud del teorema de Lusin (véase [3, página 64]), para todo $\varepsilon_1 > 0$ existe un subconjunto cerrado $G_1 \subset G$ tal que $|G \setminus G_1| < \varepsilon_1$ y la función u_1 es continua en G_1. De nuevo, por el teorema de Lusin, dado $\varepsilon_2 > 0$, existe un subconjunto $G_2 \subset G_1$ tal que $|G_1 \setminus G_2| < \varepsilon_2$ y u_2 es continua en G_2. Repitiendo este argumento sucesivamente y eligiendo $\varepsilon_n < |G|/2^n$, se obtiene una familia de subconjuntos $\{G_n : n = 1, 2, \dots\}$ tales que $G_{n+1} \subset G_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además,

$$G_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

cumple que

$$|G_0| = |G| - \sum_{n=1}^{\infty} |G_n \setminus G_{n+1}| = |G| - \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n > |G| - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|G|}{2^n} = 0.$$

G_0 es un subconjunto de G cerrado, acotado y de medida positiva en el que todas las funciones del conjunto $\{u_n : n = 1, 2, \dots\}$ son continua. Ahora, considerando el espacio de Orlicz $L_\Phi^*(G_0)$ y las funciones continuas $w_n : G_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $w_n(x) = u_n(x)$, es claro que $w_n \in E_\Phi(G_0)$, $n = 1, 2, \dots$, y de acuerdo con el Teorema 4.15, existe una función $w \in L_\Phi^*(G_0)$ tal que $d(w, E_\Phi(G_0)) > 1$. Por otro lado, la función definida como

$$u(x) = \begin{cases} w(x) & \text{si } x \in G_0, \\ 0 & \text{si } x \in G \setminus G_0, \end{cases}$$

es acotada, luego pertenece a L_Φ^*. De todo esto, se sigue que

$$\begin{aligned} \|u - u_n\|_\Phi &= \sup_{\rho(v;\Psi) \le 1} \int_G |(u(x) - u_n(x))v(x)|\, dx \\ &\ge \sup_{\rho(v;\Psi) \le 1} \int_{G_0} |(u(x) - u_n(x))v(x)|\, dx \\ &= \sup_{\rho(v;\Psi) \le 1} \int_{G_0} |(w(x) - w_n(x))v(x)|\, dx = \|w - w_n\|_\Phi > 1, \end{aligned}$$

ya que $d(w, E_\Phi(G_0)) > 1$. Consecuentemente, no es posible hallar una sucesión de funciones en $\{u_n : n = 1, 2, \dots\}$ que converja a w y el conjunto $\{u_n : n = 1, 2, \dots\}$ no es denso en L_Φ^*. □

Corolario 4.18. *El espacio de Orlicz L_Φ^* es separable si, y solo si, $\Phi \in \Delta_2(\infty)$.*

Demostración. El Corolario 4.13 y el Teorema 4.17 aseguran las condiciones suficiente y necesaria, respectivamente. □

Norma de Luxemburg

El espacio L_Φ^* puede dotarse de una norma distinta de la *norma de Orlicz* para obtener un espacio de Banach. En este contexto, W.A.J. Luxemburg introdujo por primera vez en su tesis *Banach Function Spaces* la norma que lleva su propio nombre (véase [7, página 47]). Se define la *norma de Luxemburg* mediante la igualdad

$$\|u\|_{(\Phi)} = \text{ínf} \left\{ k > 0 : \ \rho\left(\frac{u}{k}; \Phi\right) \le 1 \right\}. \tag{4.8}$$

Teorema 4.19. *El funcional* (4.8) *cumple*

(1) $\|u\|_{(\Phi)} \geq 0$, *y* $\|u\|_{(\Phi)} = 0$ *si, y solo si,* $u \equiv 0$ *a.e.,*

(2) $\|\alpha u\|_{(\Phi)} = |\alpha|\|u\|_{(\Phi)}$,

(3) $\|u_1 + u_2\|_{(\Phi)} \leq \|u_1\|_{(\Phi)} + \|u_2\|_{(\Phi)}$,

i.e., define una norma en el espacio L^*_Φ.

Demostración. Para ver (1), puede apreciarse que $\|u\|_{(\Phi)} = 0$ es equivalente a que $\rho(u/k;\Phi) = \int_G \Phi(u(x)/k)\,dx \leq 1$ para $k > 0$ arbitrariamente pequeño, y esto se cumple si, y solo si, $u \equiv 0$ a.e., ya que $\Phi(u) \to \infty$ cuando $u \to \infty$. En cuanto a (2), se sigue de

$$\|\alpha u\|_{(\Phi)} = \text{ínf}\left\{k > 0 :\ \rho\left(\frac{\alpha u}{k};\Phi\right) \leq 1\right\} = |\alpha|\,\text{ínf}\left\{\frac{k}{|\alpha|} :\ \rho\left(\frac{\alpha u}{k};\Phi\right) \leq 1,\ k > 0\right\} = |\alpha|\|u\|_{(\Phi)}.$$

Si $\|u_1\|_{(\Phi)} = 0$ o $\|u_2\|_{(\Phi)} = 0$, la desigualdad en (3) es trivial, así que se asume que ambos valores son mayores que cero. Obsérvese que

$$\rho\left(\frac{u}{\|u\|_{(\Phi)} + \varepsilon};\Phi\right) = \int_G \Phi\left(\frac{u(x)}{\|u\|_{(\Phi)} + \varepsilon}\right)\,dx \leq 1,$$

y en virtud del lema de Fatou y de la continuidad de Φ, se puede hacer $\varepsilon \to 0$, obteniendo

$$\rho\left(\frac{u}{\|u\|_{(\Phi)}};\Phi\right) = \int_G \Phi\left(\frac{u(x)}{\|u\|_{(\Phi)}}\right)\,dx \leq 1. \tag{4.9}$$

Finalmente, de la convexidad de Φ, aplicando (2.1), se tiene que

$$\Phi\left(\frac{u_1(x) + u_2(x)}{\|u_1\|_{(\Phi)} + \|u_2\|_{(\Phi)}}\right) \leq \frac{\|u_1\|_{(\Phi)}}{\|u_1\|_{(\Phi)} + \|u_2\|_{(\Phi)}}\Phi\left(\frac{u_1(x)}{\|u_1\|_{(\Phi)}}\right) + \frac{\|u_2\|_{(\Phi)}}{\|u_1\|_{(\Phi)} + \|u_2\|_{(\Phi)}}\Phi\left(\frac{u_2(x)}{\|u_2\|_{(\Phi)}}\right),$$

e integrando a ambos lados y aplicando la desigualdad (4.9), se llega a

$$\int_G \Phi\left(\frac{u_1(x) + u_2(x)}{\|u_1\|_{(\Phi)} + \|u_2\|_{(\Phi)}}\right) \leq 1.$$

De manera que $\|u_1\|_{(\Phi)} + \|u_2\|_{(\Phi)}$ delimita un valor máximo para $\|u_1 + u_2\|_{(\Phi)}$ dando validez al tercer axioma. □

Ejemplo 4.20. Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces el espacio de Orlicz dado por la *N-función* $\Phi(t) = |t|^p$ coincide con el espacio de Lebesgue L^p. Además, la norma de Luxemburg coincide con la norma usual definida en este espacio:

$$\|u\|_{(\Phi)} = \text{ínf}\left\{k > 0 :\ \left(\int_G |u(x)|^p\,dx\right) \leq k^p\right\} = \left(\int_G |u(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Corolario 4.21. *Las normas de Orlicz* $\|\cdot\|_\Phi$ *y de Luxemburg* $\|\cdot\|_{(\Phi)}$ *son equivalentes. De hecho,*

$$\|u\|_{(\Phi)} \leq \|u\|_\Phi \leq 2\|u\|_{(\Phi)}. \tag{4.10}$$

Demostración. En efecto, de la desigualdad (4.5) se sigue que $\rho(u/\|u\|_\Phi;\Phi) \leq 1$, y $\|u\|_\Phi > 0$, por tanto,

$$\|u\|_{(\Phi)} \leq \|u\|_\Phi.$$

Por otro lado, en virtud de (3.12), se tiene que

$$\|u\|_\Phi = \sup_{\rho(v;\Psi)\leq 1} \langle u, v\rangle \leq \rho(u;\Phi) + 1. \tag{4.11}$$

Usando esta última desigualdad y (4.9), se sigue que

$$\left\| \frac{u}{\|u\|_{(\Phi)}} \right\|_\Phi \leq \rho\left(\frac{u}{\|u\|_{(\Phi)}};\Phi\right) + 1 \leq 2,$$

y finalmente, despejando se llega a $\|u\|_\Phi \leq 2\|u\|_{(\Phi)}$. □

Por consiguiente, ambas normas inducen la misma topología en L^*_Φ.

Dualidad

En esta sección comenzaremos probando un resultado importante que relaciona la normas de Orlicz y de Luxemburg.

Teorema 4.22. *Sea Φ una N-función y $u \in L^*_\Phi$.*

(a) Si $\|u\|_{(\Phi)} \leq 1$, entonces $\rho(u;\Phi) \leq \|u\|_{(\Phi)}$.

(b) Si $\|u\|_{(\Phi)} > 1$, entonces $\rho(u;\Phi) \geq \|u\|_{(\Phi)}$.

Consecuentemente, $\|u\|_{(\Phi)} \leq 1$ si, y solo si, $\rho(u;\Phi) \leq 1$.

Demostración. Supongamos $\|u\|_{(\Phi)} \leq 1$. Si $\|u\|_{(\Phi)} = 0$, entonces $u \equiv 0$ a.e. y $\rho(u;\Phi) = 0$. Si $\|u\|_{(\Phi)} = 1$, entonces $\rho(u;\Phi) \leq 1 = \|u\|_{(\Phi)}$. Si $0 < \|u\|_{(\Phi)} < 1$, de acuerdo con (2.13) y (4.9), se tiene que

$$\frac{1}{\|u\|_{(\Phi)}} \int_G \Phi(u(x))\,dx \leq \int_G \Phi\left(\frac{u(x)}{\|u\|_{(\Phi)}}\right) dx \leq 1,$$

luego $\rho(u;\Phi) \leq \|u\|_{(\Phi)}$, quedando demostrado el primer apartado. Asumiendo ahora que $\|u\|_{(\Phi)} > 1$, de acuerdo con (2.13), se tiene que

$$\frac{1}{\|u\|_{(\Phi)} - \varepsilon} \int_G \Phi(u(x))\,dx \geq \int_G \Phi\left(\frac{u(x)}{\|u\|_{(\Phi)} - \varepsilon}\right) dx > 1,$$

para todo $0 < \varepsilon < \|u\|_{(\Phi)} - 1$. Es por esto que

$$\|u\|_{(\Phi)} - \varepsilon < \rho(u;\Phi),$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, y por tanto, haciendo $\varepsilon \to 0$, se obtiene $\|u\|_{(\Phi)} \leq \rho(u;\Phi)$. □

Observación 4.23. De este teorema se desprende una definición alternativa para la norma de Orlicz:

$$\|u\|_\Phi = \sup_{\|v\|_{(\Psi)} \leq 1} \int_G |u(x)v(x)|\, dx. \tag{4.12}$$

Además, de (4.12) se sigue que, si $u \in L^*_\Phi$ y $v \in L^*_\Psi$, entonces

$$\left| \int_G u(x) \frac{v(x)}{\|v\|_{(\Psi)}}\, dx \right| \leq \|u\|_\Phi,$$

y por tanto

$$\left| \int_G u(x)v(x)\, dx \right| \leq \|u\|_\Phi \|v\|_{(\Psi)}.$$

Análogamente,

$$\left| \int_G u(x)v(x)\, dx \right| \leq \|u\|_{(\Phi)} \|v\|_\Psi.$$

Estas dos últimas son las conocidas como desigualdades de Hölder reforzadas.

Definición 4.24. Sea X un espacio de Banach determinado por la norma $\|\cdot\|_X$. Se define X', el espacio asociado de X, como

$$X' = \{f : G \longrightarrow \mathbb{R} : \ \|f\|_{X'} < \infty\},$$

donde $\|\cdot\|_{X'}$ se conoce como la norma asociada de $\|\cdot\|_X$, y viene dada por la igualdad

$$\|f\|_{X'} = \sup_{\|g\|_X \leq 1} \int_G |f(x)g(x)|\, dx$$

Corolario 4.25. *Sean Φ y Ψ dos N-funciones mutuamente complementarias. Entonces el espacio $(L^*_\Psi, \|\cdot\|_{(\Psi)})$ tiene como espacio asociado $(L^*_\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$.*

Demostración. Sea $X = (L^*_\Psi, \|\cdot\|_{(\Psi)})$. Atendiendo a la definición norma asociada y a la expresión (4.12), se tiene que

$$\|g\|_{X'} = \sup_{\|f\|_{(\Psi)} \leq 1} \int_G |f(x)g(x)|\, dx = \|g\|_\Phi.$$

Aplicando la definición de espacio asociado,

$$X' = \{f : G \longrightarrow \mathbb{R} : \ \|f\|_\Phi < \infty\} = (L_\Phi, \|\cdot\|_\Phi).$$

□

Invariancia de la norma por reordenamientos

Durante esta sección será necesario referirse al espacio de funciones medibles definidas en G que son finitas en casi todo punto. Se denotará por $\mathcal{M}_0(G)$ a este espacio, y por $\mathcal{M}_0^+(G)$ al subconjunto de funciones no negativas de $\mathcal{M}_0(G)$.

Definición 4.26. Sea $f \in \mathcal{M}_0(G)$. Se define la *función de distribución* asociada a f como la función $\mu_f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ dada por

$$\mu_f(s) = \mu\{t \in G : \ |f(t)| > s\}.$$

Observación 4.27. La función de distribución μ_f es no negativa, decreciente y continua por la derecha. Además, si $a \neq 0$, se tiene que $\mu_{af}(s) = \mu_f(s/|a|)$ (demostración detallada en [2, página 37]).

Ejemplo 4.28. Considérese la función simple no negativa definida en el conjunto G

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(t), \tag{4.13}$$

donde los E_j son subconjuntos disjuntos dos a dos de G, χ_{E_j} es la función característica de $E_j \subset G$ y $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > a_{n+1} = 0$. Se puede apreciar que si $s \geq a_1$, entonces $\mu_f(s) = 0$, ya que $\{t \in G : |f(t)| > a_1\} = \emptyset$, y si $s \in [a_{j+1}, a_j)$, $j = 1, \ldots, n$, entonces $\mu_f(s) = \mu\{t \in G : |f(t)| > a_{j+1}\} = \mu\big\{\bigcup_{i=1}^{j} E_i\big\}$. Generalizando, la función de distribución de f viene dada por la identidad

$$\mu_f(s) = \sum_{j=1}^{n} m_j \chi_{[a_{j+1}, a_j)}(s), \tag{4.14}$$

para $s \geq 0$, donde

$$m_j = \sum_{i=1}^{j} |E_i|. \tag{4.15}$$

Geométricamente, los bloques situados verticalmente en la gráfica de f quedan colocados horizontalmente en orden decreciente de longitud para formar la gráfica de μ_f (ver Figuras 2.2 y 4.2).

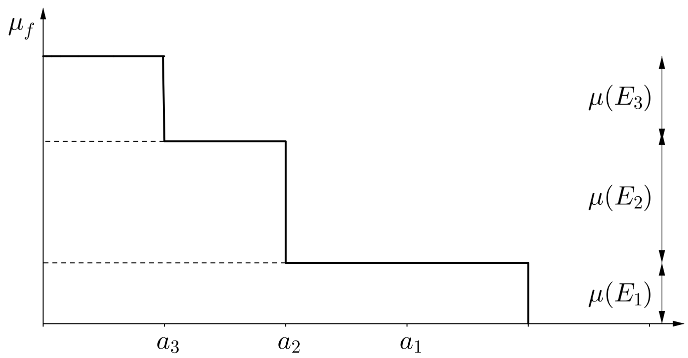

Figura 4.1: Función de distribución.

Definición 4.29. Se dice que dos funciones $f, g \in \mathcal{M}_0$ son *equimedibles* si tienen la misma función de distribución, esto es, $\mu_f(s) = \mu_g(s)$ para todo $s \geq 0$.

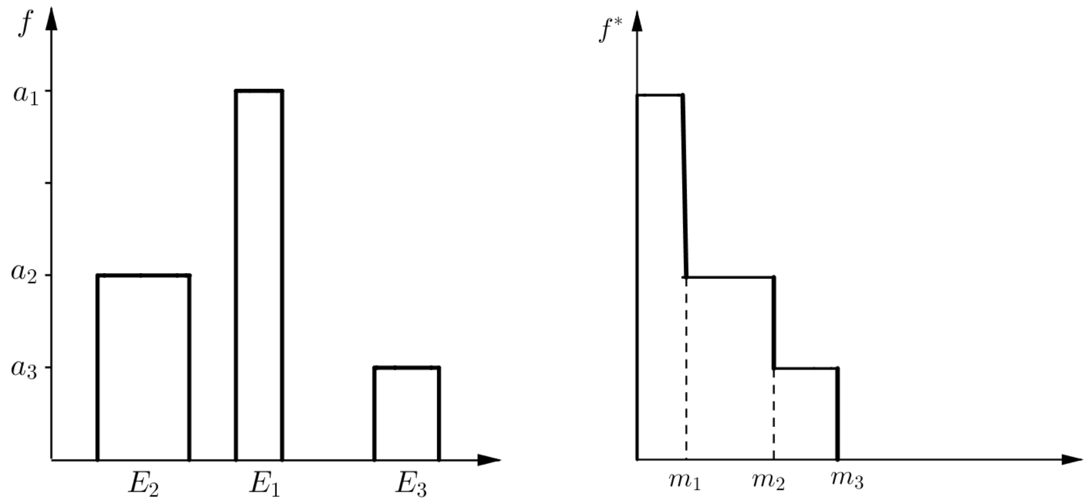

Figura 4.2: Reordenada decreciente.

Definición 4.30. Sea $f \in \mathcal{M}_0(G)$ y μ_f su función de distribución. La *reordenada decreciente* de f es una función $f^* : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ definida como

$$f^*(t) = \text{ínf}\{s : \ \mu_f(s) \leq t\}. \tag{4.16}$$

Por convención, ínf $\emptyset = \infty$.

Observación 4.31. Si la función de distribución μ_f es continua y estrictamente decreciente, entonces f^* es su función inversa. Además, al construir la función de distribución de la propia distribución μ_f, se llega precisamente a la reordenada decreciente f^* de f. Esto es inmediato a partir de la siguiente igualdad

$$f^*(t) = \text{ínf}\{s : \ \mu_f(s) \leq t\} = \sup\{s : \ \mu_f(s) > t\} = \mu_{\mu_f}(t), \tag{4.17}$$

justificada gracias a la propia definición de función de distribución y a que μ_f es una función decreciente. Por tanto, f^* comparte propiedades con la función de distribución al ser una distribución en sí misma. En particular, es no negativa, decreciente, continua por la derecha, y si $a \neq 0$, entonces $(af^*) = |a|f^*$.

Ejemplo 4.32. Tras haber calculado la distribución de una función simple no negativa f en el Ejemplo 4.28, será de utilidad calcular la reordenada decreciente de esta misma función (4.13). Atendiendo a (4.16), puede observarse que $f^*(t) = 0$ si $t \geq m_n$, y si $t \in [m_j, m_{j+1})$, entonces $f^*(t) = a_{j+1}$. Por tanto, la reordenada decreciente de f viene dada por la igualdad

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{[m_{j-1}, m_j)}(t), \tag{4.18}$$

para $t \geq 0$, y donde $m_0 = 0$. Geométricamente, la gráfica de la función f^* está formada por los bloques verticales de la gráfica de f situados consecutivamente por orden decreciente de longitud (ver Figura 4.2).

Definición 4.33. Una norma $\|\cdot\|$ se dice *invariante por reordenamientos* si

$$\|f\| = \|g\|,$$

para todo par de funciones $f, g \in \mathcal{M}^+$ equimedibles. En tal caso, el correspondiente espacio de Banach determinado por la norma $\|\cdot\|$ se dice *invariante por reordenamientos.*

Lema 4.34. *Si Φ es una N-función y $u \in L_\Phi$, entonces*

$$\int_G \Phi(u(x))\,dx = \int_G \Phi(u^*(x))\,dx.$$

Demostración. Al ser Φ una función par, puede suponerse que u es no negativa, y como es bien sabido, toda función positiva e integrable es el límite de una sucesión creciente de funciones simples no negativas e integrables (véase [3, página 50]). De modo que, si $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es tal sucesión, entonces, para todo n, se tiene que

$$\int_G \Phi(u_n(x))\,dx \leq \int_G \Phi(u(x))\,dx < \infty,$$

luego $u_n \in L_\Phi$. Puede suponerse que las u_n son de la forma (4.13), de manera que

$$\begin{aligned}\int_G \Phi(u_n(x))\,dx &= \int_G \Phi\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(t)\right)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \Phi(a_j)|E_j| \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Phi(a_j)(m_j - m_{j-1}) = \int_G \Phi\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{[m_{j-1},m_j)}(x)\right)\,dx = \int_G \Phi(u_n^*(x))\,dx,\end{aligned}$$

donde se ha usado (4.18) y los m_j son como en (4.15). Haciendo $n \to \infty$ en ambos extremos de la igualdad, y por el teorema de la convergencia monótona, se concluye

$$\int_G \Phi(u(x))\,dx = \int_G \Phi(u^*(x))\,dx.$$

$\square$

Teorema 4.35. *La norma de Luxemburg es invariante por reordenamientos.*

Demostración. Sean u_1 y u_2 dos funciones equimedibles. Éstas comparten la misma función de distribución y, por (4.17), su reordenada decreciente es la misma. Por tanto, basta probar que $\|u_1\|_{(\Phi)} = \|u_1^*\|_{(\Phi)}$. Como $(u_1/k)^* = u_1^*/k$ para $k > 0$, y por el lema anterior, $\rho(u_1/k;\Phi) = \rho(u_1^*/k;\Phi)$, se tiene que

$$\|u_1\|_{(\Phi)} = \operatorname{ínf}\left\{k > 0 :\ \rho\left(\frac{u_1}{k};\Phi\right) \leq 1\right\} = \operatorname{ínf}\left\{k > 0 :\ \rho\left(\frac{u_1^*}{k};\Phi\right) \leq 1\right\} = \|u_1^*\|_{(\Phi)}.$$

$\square$

Capítulo 5

Espacios modulares y espacios de Lebesgue de exponente variable

Este último capítulo estará dividido en dos partes. En la primera, fundamentada esencialmente en *Orlicz Spaces and Modular Spaces* de J. Musielak ([8, Capítulo 1]), se presenta una breve introducción a los espacios modulares, y en la segunda parte, basada en *Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis* de D.V. Cruz-Uribe y A. Fiorenza ([4, Capítulos 1–2]), se introducen los espacios de Lebesgue de exponente variable. Como se verá, existe cierto paralelismo entre los espacios de Orlicz y estos dos nuevos espacios, ofreciendo los espacios modulares una amplia generalización para algunos de los espacios funcionales que se conocen.

Espacios modulares

Los espacios modulares son el contexto ideal para el desarrollo de diferentes clases de espacios funcionales, entre los que se encuentran los espacios de Orlicz o los espacios de Lebesgue de exponente variable. Éstos ofrecen una conexión entre todos ellos, y el hecho de poder describir su topología en términos de un modular, frente a hacerlo en términos de una norma, ofrece ciertas ventajas.

Definición 5.1. Sea (K) un cuerpo y X un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Una función $\rho : X \longrightarrow [0, \infty]$ es *continua por la izquierda* si $\lambda \longmapsto \rho(\lambda x)$ es continua por la izquierda, i.e. $\lim_{\lambda \to 1^-} \rho(\lambda x) = \rho(x)$ para todo $x \in X$.

Definición 5.2. Sea X un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Una función $\rho : X \longrightarrow [0, \infty]$ se llama *semimodular en X*, si se cumplen

(1) $\rho(0) = 0$,

(2) $\rho(\lambda x) = \rho(x)$ para todo $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| = 1$,

(3) ρ es convexa,

(4) ρ es continua por la izquierda,

(5) si $\rho(\lambda x) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $x = 0$.

Se dice que un semimodular ρ es un *modular en* X si

(6) $\rho(x) = 0$ implica $x = 0$.

Un semimodular ρ se dice que es *continuo* si

(7) $\lambda \longmapsto \rho(\lambda x)$ es continua en $[0, \infty)$ para todo $x \in X$.

Observación 5.3. De la convexidad de ρ y del Teorema 2.16 se sigue que

$$\begin{aligned} \rho(\lambda x) &\leq |\lambda|\rho(x) \quad \text{si } |\lambda| \leq 1, \\ \rho(\lambda x) &\geq |\lambda|\rho(x) \quad \text{si } |\lambda| \geq 1. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Definición 5.4. Sea X un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea ρ un semimodular, o un modular, en X. Se define el *espacio semimodular*, o *espacio modular*, respectivamente, como

$$X_\rho = \left\{ u \in X : \lim_{\lambda \to 0} \rho(\lambda u) = 0 \right\}.$$

Observación 5.5. Puede definirse alternativamente el espacio X_ρ como

$$X_\rho = \{u \in X : \rho(\lambda u) < \infty \text{ para algún } \lambda > 0\}, \tag{5.2}$$

Efectivamente, es claro que si $\rho(\lambda u) \xrightarrow{\lambda \to 0} 0$ entonces $\rho(\lambda u) < \infty$ para algún $\lambda > 0$, y en virtud de (5.1), si $\rho(\lambda u) < \infty$ y $\lambda' < \lambda$, entonces

$$\rho(\lambda' u) = \rho\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\lambda u\right) \leq \frac{\lambda'}{\lambda}\rho(\lambda u) \xrightarrow{\lambda' \to 0} 0.$$

Observación 5.6. X_ρ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. En efecto, sean $u_1, u_2 \in X_\rho$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Es claro que $0 \in X_\rho$ y que $\rho(\alpha\lambda u) \to 0$ cuando $\lambda \to 0$, y por tanto que $\alpha u \in X_\rho$. Por otro lado, debido a la convexidad de ρ puede asegurarse que

$$\rho(\lambda(u_1 + u_2)) \leq \frac{1}{2}\rho(2\lambda u_1) + \frac{1}{2}\rho(2\lambda u_2) \xrightarrow{\lambda \to 0} 0.$$

Observación 5.7. Los espacios de Orlicz estudiados en los capítulos anteriores son una particularización de los espacios modulares. Si se considera una N-función Φ, entonces el funcional

$$\rho(u; \Phi) = \int_G \Phi(u(x))\, dx$$

cumple con las condiciones de la Definición 5.2 siendo un modular en el espacio $\mathcal{M}$ de las funciones medibles. Si $u \in \mathcal{M}_{\rho(\cdot;\Phi)}$, entonces existe $\lambda > 0$ tal que $\rho(\lambda u; \Phi) < \infty$, luego λu pertenece a L^*_Φ, y por la estructura de espacio vectorial de los espacios de Orlicz, se tiene que $u \in L^*_\Phi$. Por tanto, $\mathcal{M}_{\rho(\cdot;\Phi)} \subset L^*_\Phi$. Suponiendo ahora que $u \in L^*_\Phi$, si se aplica la desigualdad (2.13), para $\lambda > 0$ tal que $\lambda\|u\|_\Phi < 1$, se tiene que

$$\int_G \Phi(\lambda u(x))\, dx = \int_G \Phi\left(\lambda\|u\|_\Phi \frac{u(x)}{\|u\|_\Phi}\right) dx < \lambda\|u\|_\Phi \int_G \Phi\left(\frac{u(x)}{\|u\|_\Phi}\right) dx,$$

y en virtud de (4.5), haciendo $\lambda \to 0$ en el miembro de la derecha, se llega a que

$$\lim_{\lambda \to 0} \rho(\lambda u; \Phi) = 0.$$

Por tanto $u \in \mathcal{M}_{\rho(\cdot;\Phi)}$ y $L^*_\Phi \subseteq \mathcal{M}_{\rho(\cdot;\Phi)}$. En conclusión, L^*_Φ es el espacio modular determinado por $\rho(\cdot;\Phi)$ en el espacio de las funcione medibles $\mathcal{M}$.

Al igual que en los espacios de Orlicz, un espacio semimodular X_ρ puede dotarse con la norma dada por

$$\|u\|_\rho = \operatorname{ínf}\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \le 1\right\}. \tag{5.3}$$

Esta norma, presentada ahora en el caso general de los espacios semimodulares, recibe el nombre de *norma de Luxemburg* en X_ρ. El funcional (5.3) también es conocido como *funcional de Minkowski* del conjunto $\{u \in X : \rho(u) \le 1\}$ y fue introducido por Kolmogorov antes de la aparición de la norma de Luxemburg.

Teorema 5.8. *El funcional* (5.3) *cumple*

(1) $\|u\|_\rho \ge 0$, *y* $\|u\|_\rho = 0$ *si, y solo si,* $u = 0$,

(2) $\|\alpha u\|_\rho = |\alpha|\|u\|_\rho$,

(3) $\|u_1 + u_2\|_\rho \le \|u_1\|_\rho + \|u_2\|_\rho$,

(4) $\|u\|_\rho < \infty$ *para todo* $u \in X_\rho$,

i.e., define una norma en el espacio X_ρ.

Demostración. Respecto a la propiedad (1), es claro que $\|u\|_\rho \ge 0$ y que $\|0\|_\rho = 0$. Supongamos que $\|u\|_\rho = 0$. Entonces, $\rho(u/\lambda) \le 1$ para $\lambda > 0$ arbitrariamente pequeño, y se tiene gracias a (5.1) que

$$\rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \le \beta\rho\left(\frac{u}{\lambda\beta}\right) \le \beta,$$

para todo $\lambda > 0$ y $\beta \in (0, 1]$. Así, $\rho(\lambda u) = 0$ para todo $\lambda > 0$, y por las propiedades del semimodular, $u = 0$. El axioma (2) se sigue de

$$\|\alpha u\|_\rho = \operatorname{ínf}\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{\alpha u}{\lambda}\right) \le 1\right\} = |\alpha| \operatorname{ínf}\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \le 1\right\} = |\alpha|\|u\|_\rho.$$

Para probar (3), sean $u_1, u_2 \in X$. Obsérvese que si alguno de ellos, o ambos, son cero, el resultado es trivial utilizando la propiedad (1). Por tanto, se supone que $u_1, u_2 \in X \setminus \{0\}$. Dado que, atendiendo (5.3), $\rho(u_1/\|u_1\|_\rho) \le 1$ y $\rho(u_2/\|u_2\|_\rho) \le 1$, por la convexidad de ρ, puede aplicarse (2.1) de modo que

$$\rho\left(\frac{u_1 + u_2}{\|u_1\|_\rho + \|u_2\|_\rho}\right) \le \frac{\|u_1\|_\rho}{\|u_1\|_\rho + \|u_2\|_\rho}\rho\left(\frac{u_1}{\|u_1\|_\rho}\right) + \frac{\|u_2\|_\rho}{\|u_1\|_\rho + \|u_2\|_\rho}\rho\left(\frac{u_2}{\|u_2\|_\rho}\right) \le 1.$$

Esto se traduce en que $\|u_1 + u_2\| \le \|u_1\|_\rho + \|u_2\|_\rho$. Por último, si $u \in X_\rho$, entonces, como $\rho(\lambda u) \xrightarrow{\lambda \to 0} 0$, existe $\lambda > 0$ tal que $\rho(u/\lambda^{-1}) < \infty$, luego $\|u\|_\rho \le \lambda^{-1} < \infty$ cumpliéndose (4). $\square$

Proposición 5.9. *Sea X un espacio vectorial, sea ρ un semimodular en X y $u \in X$. Entonces $\rho(u) \leq 1$ si, y solo si, $\|u\|_\rho \leq 1$.*

Demostración. Se desprende de la propia definición de la norma de Luxemburg. □

Proposición 5.10. *Sea X un espacio vectorial, sea ρ un semimodular en X y $u \in X$.*

(1) Si $\|u\|_\rho \leq 1$, entonces $\rho(u) \leq \|u\|_\rho$.

(2) Si $\|u\|_\rho > 1$, entonces $\rho(u) \geq \|u\|_\rho$.

(3) Se satisface $\|u\|_\rho \leq \rho(u) + 1$.

Demostración. Si $u = 0$ los resultados (1) y (3) son inmediatos, así que, asumiendo $0 < \|u\|_\rho \leq 1$, por la proposición anterior, como $\|u/\|u\|_\rho\|_\rho \leq 1$ se tiene que

$$\rho\left(\frac{u}{\|u\|_\rho}\right) \leq 1, \tag{5.4}$$

de donde, por (5.1) con $\lambda = 1/\|u\|_\Phi$, se llega a $\rho(u) \leq \|u\|_\rho$. Suponiendo ahora que $\|u\|_\rho > 1$, por la definición de la norma, para todo $\lambda \in (1, \|u\|_\rho)$, se cumple $\rho(u/\lambda) > 1$. De acuerdo con (5.1), $(1/\lambda)\rho(u) \geq \rho(u/\lambda)$, por tanto $\rho(u) > \lambda$ para todo $\lambda < \|u\|_\rho$. Haciendo $\lambda \to \|u\|_\rho$ se obtiene (2). La propiedad (3) es consecuencia directa de las dos anteriores. □

Proposición 5.11. *Sea X un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, sea ρ un semimodular en X, y sea $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en X. Entonces $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_\rho = 0$ si, y solo si, $\lim_{n\to\infty}\rho(\lambda x_n) = 0$ para todo $\lambda > 0$.*

Demostración. Supongamos que $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|_\rho = 0$ y sea $\lambda > 0$ arbitrario. Para todo $K > 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, se cumple que

$$\|x_n\|_\rho < \frac{1}{K\lambda}.$$

Por la Proposición 5.9, al ser $\|K\lambda x_n\| < 1$, entonces $\rho(K\lambda x_n) \leq 1$ para $n \geq n_0$, y por (5.1), se tiene que

$$\rho(\lambda x_n) = \rho\left(\frac{1}{K}K\lambda x_n\right) \leq \frac{1}{K}\rho(K\lambda x_n) \leq \frac{1}{K}.$$

Como para K arbitrariamente grande puede encontrarse un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(\lambda x_n) \leq 1/K$ si $n \geq n_0$, se concluye que $\rho(\lambda x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Para probar la implicación en la otra dirección, supongamos que $\lim_{n\to\infty}\rho(\lambda x_n) = 0$ para todo $\lambda > 0$. Entonces, puede encontrarse un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq n_0$, entonces $\rho(\lambda x_n) \leq 1$. De nuevo, por la Proposición 5.9, se tiene que $\|\lambda x_n\|_\rho \leq 1$, luego $\|x_n\|_\rho \leq 1/\lambda$ para $n \geq n_0$. Como λ puede ser arbitrariamente grande se concluye que $\|x_n\|_\rho \xrightarrow{n\to\infty} 0$. □

Definición 5.12. Sea X un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, sea ρ un semimodular en X, y sea $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en X. Se dice que $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *converge modularmente* a algún $x \in X$ si

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n - x) = 0.$$

Observación 5.13. Obsérvese que la convergencia en media en los espacios de Orlicz es precisamente convergencia modular.

Observación 5.14. De la Proposición 5.10 se sigue que si X es un espacio modular, entonces la convergencia en norma siempre implica convergencia modular.

Proposición 5.15. *Sea X un espacio modular. Entonces la convergencia modular en X es equivalente a la convergencia en norma si, y solo si, $\rho(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ implica $\rho(2x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.*

Demostración. Suponiendo que la convergencia modular y en norma son equivalentes, sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que $\rho(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Por la Proposición 5.11, $\|x_n\|_\rho \xrightarrow{n\to\infty} 0$ y, de nuevo, aplicando este resultado con $\lambda = 2$, se concluye que $\rho(2x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Recíprocamente, supongamos que $\rho(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ implica $\rho(2x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que $\rho(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Para todo $\lambda > 0$ puede hallarse un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda \leq 2^m$, y por tanto, $\rho(2^m x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Ahora, en virtud de (5.1), se sigue

$$\lim_{n\to\infty} \rho(\lambda x_n) \leq \frac{\lambda}{2^m} \lim_{n\to\infty} \rho(2^m x_n) = 0.$$

Esto es, para todo $\lambda > 0$ se cumple que $\rho(\lambda x_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, y aplicando la Proposición 5.11, se tiene que $\|x_n\|_\rho \xrightarrow{n\to\infty} 0$. En definitiva, la convergencia modular implicaría convergencia en norma, y como la convergencia en norma siempre implica convergencia modular, las dos serían equivalentes. □

Espacios de Lebesgue de exponente variable

Recientemente, una nueva clase de espacios ha experimentado un importante crecimiento. Estos son los llamados espacios de Lebesgue de exponente variable, o espacios $L^{p(\cdot)}$, que en estrecha relación con los de Orlicz, también constituyen una generalización de los clásicos espacios funcionales de Lebesgue y se desarrollan en el marco de los espacios modulares.

Definición 5.16. Sea $\mathcal{P}(G)$ el conjunto de todas las funciones medibles $p(\cdot) : G \longrightarrow [1, \infty]$. Los elementos de $\mathcal{P}(G)$ son denominados *funciones exponente.*

Se escribirá $p(\cdot)$ para diferenciar del exponente constante p.

Definición 5.17. Para una función $p(\cdot) \in \mathcal{P}(G)$ y $E \subset G$, se denotan

$$p_{max}(E) = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in E} p(x) \qquad \text{y} \qquad p_{min}(E) = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in E} p(x),$$

Además, se definen los siguientes subconjuntos de G:

$$\begin{aligned} G_1 &= \{x \in G : p(x) = 1\}, \\ G_\infty &= \{x \in G : p(x) = \infty\}, \\ G_0 &= \{x \in G : 1 < p(x) < \infty\}. \end{aligned}$$

Si el dominio de la función exponente es claro, se escribe simplemente $p_{max} = p_{max}(G)$ y $p_{min} = p_{min}(G)$.

Definición 5.18. Sea $p(\cdot) \in \mathcal{P}(G)$ y sea f una función medible. Se define el *modular asociado a* $p(\cdot)$ como

$$\rho_{p(\cdot)}(f) = \int_{G_0 \cup G_1} |f(x)|^{p(x)}\, dx + \operatorname*{ess\,sup}_{x \in G_\infty} |f(x)|. \tag{5.5}$$

Cuando la función exponente sea clara se escribirá ρ en lugar de $\rho_{p(\cdot)}$.

Observación 5.19. El funcional (5.5) es un modular definido sobre el espacio de funciones medibles $\mathcal{M}(G)$. Es fácil ver que para todo $f \in \mathcal{M}(G)$ se cumple que $\rho(f) \geq 0$ y que $\rho(f) = 0$ si, y solo si, $f \equiv 0$ a.e. De modo que, atendiendo a la Definición 5.2, es claro que $\rho : \mathcal{M}(G) \longrightarrow [0, \infty]$ satisface las propiedades (1), (2), (5) y (6). Como $p(x) \geq 1$ para todo $x \in G$, la función $t \longmapsto t^{p(x)}$ es convexa, y ésto sumado a la convexidad de la norma usual en L^∞, conduce a la convexidad de ρ. Por último, como $|\lambda f(x)| \leq |f(x)|$ para todo $\lambda \leq 1$ y $x \in G_0 \cup G_1$, por el teorema de la convergencia dominada (véase [3, página 90]), se tiene que

$$\lim_{\lambda \to 1^-} \rho(\lambda f) = \rho(f),$$

cumpliéndose la propiedad (4).

Definición 5.20. Sea $p(\cdot) \in \mathcal{P}(G)$. Se define el espacio de las funciones medibles en G tales que existe un $k > 0$ para el cual se satisface

$$\int_{G_0 \cup G_1} \left(\frac{|f(x)|}{k} \right)^{p(x)} dx + \operatorname*{ess\,sup}_{x \in G_\infty} |f(x)| < \infty. \tag{5.6}$$

A este espacio se le llama *espacio de Lebesgue de exponente variable* (o también *espacio de Lebesgue generalizado*), y se denota por $L^{p(\cdot)}(G)$.

De nuevo, cuando se habla de una función en realidad se hace referencia a la clase de equivalencia de las funciones que son idénticas a ella en casi todo punto.

Observación 5.21. Obsérvese que la condición (5.6) equivale a que $\rho(f/k) < \infty$ para algún k, y según la definición alternativa de espacio modular dada en (5.2) se concluye que $L^{p(\cdot)}$ es el espacio modular asociado al modular ρ en $\mathcal{M}$.

Observación 5.22. Si f pertenece a $L^{p(\cdot)}$, entonces $f \in \mathcal{M}_0$.

Ejemplo 5.23. En la Definición (5.20), se consideran $G = [1, \infty)$, $p(x) = x$ y $f(x) \equiv a$, con $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tomando $k > 0$ tal que $|a/k| < 1$ en (5.6) se tiene que

$$\rho(f/k) = \frac{|ak^{-1}|}{\log |ak^{-1}|} < \infty,$$

por lo que $f \in L^x([1, \infty))$. Sin embargo, puede comprobarse fácilmente que para todo $0 < p < \infty$ constante,

$$\|f\|_p = \left(\int_{[1,\infty)} |a|^p\, dx \right)^{1/p} = \infty,$$

i.e., $f \notin L^p([1, \infty))$ para cualquier valor de p constante.

Ejemplo 5.24. Considérese la función $f(x) = |x|^{-2/3}$. Se puede comprobar fácilmente que, para todo $0 < p < \infty$, la integral $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx$ es divergente y $\|f\|_\infty = \infty$, por tanto $f \notin L^p(\mathbb{R})$, $0 < p \leq \infty$. Sin embargo, si se toma la función exponente

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1, 1], \\ 2 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1], \end{cases}$$

la función f pertenece a $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R})$. En efecto,

$$\rho(f) = \int_{-1}^{1} |x|^{-2/3} \, dx + \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} |x|^{-4/3} \, dx = 12 < \infty.$$

Obsérvese que, para no dividir el dominio, se puede considerar la función exponente

$$q(x) = \frac{4|x| + 1}{2|x| + 1},$$

que es creciente, satisface $q(0) = 1$ y $q(x) \xrightarrow{x \to \infty} 2$, por lo que

$$\rho(f) = \int_{\mathbb{R}} |x|^{(-8|x|-2)/(6|x|+3)} \, dx \leq \int_{[-1,1]} |x|^{-2/3} \, dx + \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} |x|^{(-2/3)(5/3)} \, dx = 24 < \infty,$$

de donde $f \in L^{q(\cdot)}$.

Como se ha visto, $L^{p(\cdot)}$ va a heredar todas las propiedades de los espacios modulares, empezando por su estructura de espacio vectorial, y de igual manera, puede equiparse con la norma de Luxemburg:

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \operatorname{ínf} \left\{ \lambda > 0 : \, \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}.$$

Definición 5.25. Sea $p(\cdot) \in \mathcal{P}(G)$. Se define la *función exponente conjugada de* $p(\cdot)$ como

$$p'(x) = \begin{cases} \frac{p(x)}{p(x)-1} & \text{si } 1 < p(x) < \infty, \\ 1 & \text{si } p(x) = \infty, \\ \infty & \text{si } p(x) = 1. \end{cases}$$

Teorema 5.26 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sea* $p(\cdot) \in \mathcal{P}(G)$*. La desigualdad*

$$\int_G |f(x)g(x)| \, dx \leq K_{p(\cdot)} \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{p'(\cdot)} \tag{5.7}$$

se cumple para todo $f \in L^{p(\cdot)}(G)$ *y* $g \in L^{p'(\cdot)}(G)$*, donde*

$$K_{p(\cdot)} = \|\chi_{G_1}\|_\infty + \|\chi_{G_\infty}\|_\infty + \|\chi_{G_0}\|_\infty \left(1 + \frac{1}{p_{min}} - \frac{1}{p_{max}}\right). \tag{5.8}$$

Demostración. Supongamos que $\|f\|_{p(\cdot)}, \|g\|_{p'(\cdot)} \neq 0$ y $|G_0| > 0$, en otro caso a desigualdad es trivial. Se puede desglosar la integral de $|fg|$ en los conjuntos disjuntos G_∞, G_1 y G_0. Así, si $x \in G_\infty$, se tiene que $p(x) = \infty$ y $p'(x) = 1$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{G_\infty} \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{p'(\cdot)}}\,dx &\leq \frac{\|f\chi_{G_\infty}\|_\infty \|g\chi_{G_\infty}\|_1}{\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{p'(\cdot)}} \\ &= \frac{\|f\chi_{G_\infty}\|_{p(\cdot)} \|g\chi_{G_\infty}\|_{p'(\cdot)}}{\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{p'(\cdot)}} \leq \frac{\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{p'(\cdot)}}{\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{p'(\cdot)}} = 1.\end{aligned}$$

Análogamente, cambiando $p(\cdot)$ por $p'(\cdot)$, se obtiene la desigualdad para G_1

$$\int_{G_1} \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{p'(\cdot)}}\,dx \leq 1.$$

Por otra parte, para casi todo $x \in G_0$ se tiene que $1 < p(x) < \infty$, $|f(x)|, |g(x)| < \infty$. Aplicando la desigualdad de Young (2.18) con $a = f(x)/\|f\|_{p(\cdot)}$, $b = g(x)/\|g\|_{p'(\cdot)}$, $p = p(x)$ y $q = p'(x)$, e integrando sobre G_0 se obtiene que

$$\begin{aligned}\int_{G_0} \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{p'(\cdot)}}\,dx &\leq \int_{G_0} \frac{|f(x)|^{p(x)}}{p(x)\|f\|_{p(\cdot)}}\,dx + \int_{G_0} \frac{|g(x)|^{p'(x)}}{p'(x)\|g\|_{p'(\cdot)}}\,dx \\ &\leq \operatorname*{ess\,sup}_{x\in G_0} \frac{1}{p(x)}\rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\|f\|_{p(\cdot)}}\right) + \operatorname*{ess\,sup}_{x\in G_0} \frac{1}{p'(x)}\rho_{p'(\cdot)}\left(\frac{g}{\|g\|_{p'(\cdot)}}\right) \\ &\leq \frac{1}{p_{min}} + 1 - \frac{1}{p_{max}},\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se ha utilizado la relación (5.4) y que $\frac{1}{p'(x)} = 1 - \frac{1}{p(x)}$. Finalmente, para cualquier E subconjunto de G, $\|\chi_E\|_\infty = 1$ si $|E| > 0$, y $\|\chi_E\|_\infty = 0$ si $|E| = 0$, por consiguiente, se concluye que

$$\int_G |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\left(1 + \frac{1}{p_{min}} - \frac{1}{p_{max}}\right)\|\chi_{G_0}\|_\infty + \|\chi_{G_\infty}\|_\infty + \|\chi_{G_1}\|_\infty\right)\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{p'(\cdot)}.$$

□

Al igual que en los espacios de Orlicz, los espacios $L^{p(\cdot)}$ pueden dotarse de una norma distinta de la norma de Luxemburg.

Definición 5.27. Sean $p(\cdot) \in \mathcal{P}(G)$ y $f \in \mathcal{M}(G)$. Se define el funcional

$$|||f|||_{p(\cdot)} = \sup_{\rho_{p'(\cdot)}(g)\leq 1} \int_G f(x)g(x)\,dx. \tag{5.9}$$

No es difícil comprobar que (5.9) satisface la propiedades de una norma en $\mathcal{M}(G)$.

Lema 5.28. *Sea $f \in L^{p(\cdot)}(G)$. Si $|||f|||_{p(\cdot)} \leq 1$, entonces*

$$\rho_{p(\cdot)}(f) \leq c_{p(\cdot)}|||f|||_{p(\cdot)}, \tag{5.10}$$

donde

$$c_{p(\cdot)} = \|\chi_{G_1}\|_\infty + \|\chi_{G_0}\|_\infty + \|\chi_{G_\infty}\|_\infty. \tag{5.11}$$

Demostración. En primer lugar supongamos que $\rho_{p(\cdot)}(f) < \infty$. Se tiene que

$$\rho_{p(\cdot)}(f) = \|\chi_{G_1}\|_\infty \rho_{p(\cdot)}(f_1) + \|\chi_{G_0}\|_\infty \rho_{p(\cdot)}(f_0) + \|\chi_{G_\infty}\|_\infty \rho_{p(\cdot)}(f_\infty), \tag{5.12}$$

donde $f_i = f\chi_{G_i}$, $i = 1, 0, \infty$. Sea la función $g_1(x) = \operatorname{sign} f_1(x)$. Al ser $p'(x) = \infty$ en G_1, se tiene que

$$\rho_{p'(\cdot)}(g_1) = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in G_1} |g_1(x)| = 1.$$

Ahora, sea la función $g_0(x) = |f_0(x)|^{p(x)-1} \operatorname{sign} f_0(x)$. Puesto que $\rho_{p(\cdot)}(f_0) < \infty$ y $|||f_0|||_{p(\cdot)} \le 1$, entonces $\rho_{p(\cdot)}(f_0) \le 1$. En caso contrario, si fuese $\rho_{p(\cdot)}(f_0) > 1$, como $\lambda \longmapsto \rho_{p(\cdot)}(\lambda f)$ es continua por la izquierda y decreciente, existiría $\lambda > 1$ tal que $\rho_{p(\cdot)}(f/\lambda) = 1$. De esta forma, puede comprobarse sin dificultad que la función $g(x) = |f_0(x)/\lambda|^{p(x)-1} \operatorname{sign} f_0(x)$ cumple $\rho_{p'(\cdot)}(g) = \rho_{p(\cdot)}(f_0/\lambda) = 1$, y por consiguiente, se llegaría a la contradicción:

$$|||f_0|||_{p(\cdot)} \ge \int_G f_0(x)g(x)\,dx = \int_{G_0\cup G_1} \frac{f_0(x)^{p(x)}}{\lambda^{p(x)-1}} \operatorname{sign} f_0(x)\,dx = \lambda\rho_{p(\cdot)}(f_0/\lambda) = \lambda > 1.$$

Por tanto, al ser $\rho_{p(\cdot)}(f_0) \le 1$, se sigue que

$$\rho_{p'(\cdot)}(g_0) = \int_{G_0} |f(x)|^{p(x)}\,dx = \rho(f_0) \le 1.$$

Así, se ha probado que $\rho_{p'(\cdot)}(g_i) \le 1$, $i = 0, 1$, de donde, para $i = 0, 1$, se tiene que

$$|||f|||_{p(\cdot)} \ge \int_G f(x)g_i(x)\,dx = \rho_{p(\cdot)}(f_i). \tag{5.13}$$

Por otro lado, si $|G_\infty| > 0$, es fácil ver que para todo $\delta \in (0,1)$ puede encontrarse un subconjunto $G_\delta \subset G_\infty$ de medida positiva tal que

$$|f(x)| \ge \delta \operatorname*{ess\,sup}_{y\in G_\infty} |f(y)|,$$

para $x \in G_\delta$. Así, considerando las funciones $g_{\infty,\delta}(x) = |G_\delta|^{-1}\chi_{G_\delta}(x) \operatorname{sign} f(x)$, se tiene que

$$\rho_{p'(\cdot)}(g_{\infty;\delta}) = \int_{G_\delta} \frac{|\operatorname{sign} f(x)|}{|G_\delta|}\,dx \le 1,$$

lo cual justifica que

$$|||f|||_{p(\cdot)} \ge \int_G f(x)g_{\infty;\delta}(x)\,dx = \frac{1}{|G_\delta|}\int_{G_\delta} |f(x)|\,dx \ge \delta \operatorname*{ess\,sup}_{y\in G_\infty} |f(x)| = \delta\rho_{p(\cdot)}(f_\infty).$$

Haciendo $\delta \to 1^-$ en la expresión anterior, se obtiene

$$\rho_{p(\cdot)}(f_\infty) \le |||f|||_{p(\cdot)}. \tag{5.14}$$

Finalmente, aplicando (5.13) y (5.14) a la expresión (5.12) se concluye $\rho_{p(\cdot)}(f) \le c_{p(\cdot)}|||f|||_{p(\cdot)}$.

Suponiendo ahora que no se cumpla $\rho_{p(\cdot)}(f) < \infty$, puede tomarse la sucesión de funciones $f_n(x) = \min\{n, |f(x)|\}\chi_{G_n}(x)$, donde los G_n son conjuntos de medida finita tales que $G_n \subset$

$G_{n+1} \subset G$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. De esta forma, $\rho_{p(\cdot)}(f_n) < \infty$ y $|||f_n|||_{p(\cdot)} \leq |||f|||_{p(\cdot)} \leq 1$. Así, de acuerdo con la primera parte de la demostración, se tiene que

$$\rho_{p(\cdot)}(f_n) \leq c_{p(\cdot)} |||f_n|||_{p(\cdot)} \leq |||f|||_{p(\cdot)},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando el teorema de la convergencia monótona (véase [3, página 86], al hacer $n \to \infty$, se concluye que $\rho_{p(\cdot)}(f) \leq c_{p(\cdot)} |||f|||_{p(\cdot)}$. □

Teorema 5.29. *Sea $p(\cdot) \in \mathcal{P}(G)$. Las normas $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ y $|||\cdot|||_{p(\cdot)}$ son equivalentes. De hecho, si $f \in \mathcal{M}(G)$, se verifica*

$$c_{p(\cdot)}^{-1} \|f\|_{p(\cdot)} \leq |||f|||_{p(\cdot)} \leq K_{p(\cdot)} \|f\|_{p(\cdot)}, \tag{5.15}$$

donde $c_{p(\cdot)}$ es la constante (5.11) *y $K_{p(\cdot)}$ es la constante* (5.8).

Demostración. Sea $f \in L^{p(\cdot)}(G)$ y sea g una función tal que $\rho_{p'(\cdot)}(g) \leq 1$. Por la Proposición 5.9 se tiene que $\|g\|_{p'(\cdot)} \leq 1$, y en virtud de la desigualdad de Hölder (5.7), se tiene

$$\int_G |f(x)g(x)|\, dx \leq K_{p(\cdot)} \|f\|_{p(\cdot)} \|g\|_{p'(\cdot)} \leq K_{p(\cdot)} \|f\|_{p(\cdot)},$$

de donde se sigue la segunda desigualdad. Para comprobar la primera, asumiendo que $0 < |||f|||_{p(\cdot)} < \infty$, como $1 \leq c_{p(\cdot)} \leq 3$, se tiene que

$$\left|\left|\left| \frac{f}{c_{p(\cdot)} |||f|||_{p(\cdot)}} \right|\right|\right|_{p(\cdot)} = \frac{1}{c_{p(\cdot)}} \leq 1.$$

De acuerdo con esto último, puede aplicarse (5.10) de manera que

$$\rho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{c_{p(\cdot)} |||f|||_{p(\cdot)}} \right) \leq c_{p(\cdot)} \left|\left|\left| \frac{f}{c_{p(\cdot)} |||f|||_{p(\cdot)}} \right|\right|\right|_{p(\cdot)} = c_{p(\cdot)} c_{p(\cdot)}^{-1} = 1,$$

luego, por la Proposición 5.9, se tiene que

$$\left\| \frac{f}{c_{p(\cdot)} |||f|||_{p(\cdot)}} \right\|_{p(\cdot)} \leq 1,$$

y despejando se llega a la primera desigualdad. □

Teorema 5.30. *Sea $p(\cdot) \in \mathcal{P}(G)$. El espacio $(L^{p(\cdot)}, \|\cdot\|_{p(\cdot)})$ tiene como espacio asociado a $(L^{p'(\cdot)}, |||\cdot|||_{p'(\cdot)})$.*

Demostración. Sea $X = (L^{p(\cdot)}, \|\cdot\|_{p(\cdot)})$. Atendiendo a la definición, $|||\cdot|||_{p'(\cdot)}$ es la norma asociada de $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$. Por una parte, la inclusión $L^{p'(\cdot)} \subseteq X'$ se desprende de la desigualdad de Hölder (5.7). En efecto, sean $f \in L^{p'(\cdot)}$ y $g \in L^{p(\cdot)}$ tal que $\|g\|_{p(\cdot)} \leq 1$. Entonces

$$|||f|||_{p'(\cdot)} = \sup_{\|g\|_{p(\cdot)} \leq 1} \int_G f(x)g(x)\, dx \leq \|f\|_{p'(\cdot)} \|g\|_{p(\cdot)} \leq \|f\|_{p'(\cdot)} < \infty,$$

y f pertenece a X'. Recíprocamente, si $f \in X'$ entonces $|||f|||_{p'(\cdot)} < \infty$, y por la equivalencia entre normas (5.15), se tiene que $\|f\|_{p'(\cdot)} < \infty$. Por tanto, como $\rho(f/\|f\|_{p'(\cdot)}) \leq 1$, se tiene que $f/\|f\|_{p'(\cdot)}$ está en $L^{p'(\cdot)}$, luego $f \in L^{p'(\cdot)}$ y $X' \subseteq L^{p'(\cdot)}$. □

Teorema 5.31. *Sea $p(\cdot) \in \mathcal{P}(G)$. El espacio $L^{p(\cdot)}$ es completo.*

Demostración. Sea una sucesión de Cauchy de funciones $f_n \in L^{p(\cdot)}$, $n = 1, 2, \dots$, y sea $\varepsilon > 0$. Puede encontrarse un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $m, n \geq n_0$, entonces

$$\int |f_m(x) - f_n(x)||g(x)|\, dx \leq |||f_m - f_n|||_{p(\cdot)} < \varepsilon, \tag{5.16}$$

para toda función g tal que $\rho_{p'(\cdot)}(g) \leq 1$. Ahora, sea $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ una familia de subconjuntos de G disjuntos dos a dos y de medida finita tales que

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k.$$

Se definen las funciones

$$g_k(x) = \frac{\chi_{G_k}(x)}{1 + |G_k|},$$

$k = 1, 2, \dots$, que satisfacen

$$\rho_{p'(\cdot)}(g_k) = \int_{G_k \setminus G_\infty} \frac{1}{(1 + |G_k|)^{p(x)}}\, dx + \operatorname*{ess\,sup}_{x \in G_\infty} \frac{\chi_{G_k}(x)}{1 + |G_k|} \leq \frac{|G_k|}{1 + |G_k|} + \frac{1}{1 + |G_k|} = 1.$$

Particularizando (5.16) en g_k, se tiene que

$$\int_{G_k} |f_m(x) - f_n(x)|\, dx < \varepsilon(1 + |G_k|),$$

para $m, n \geq n_0$, $k \in \mathbb{N}$. Así, la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en el espacio de Lebesgue $L^1(G_k)$. Como $L^1(G_k)$ es completo (véase [3, página 182]), la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente en norma. Además, para $k = 1$, existe una subsucesión suya $\{f_n^{(1)}\}$ convergente a.e. $x \in G_1$ a una función $f^{(1)} \in L^1(G_1)$ (consultar [3, página 181, Teorema 1.1]). De la misma forma, para $k = 2$, puede hallarse $\{f_n^{(2)}\}$ subsucesión de $\{f_n^{(1)}\}$ que converge a.e. $x \in G_2$ a una función $f^{(2)} \in L^1(G_2)$. Repitiendo este argumento para todo $k \in \mathbb{N}$, se obtiene una sucesión de subsucesiones, de forma que $\{f_m^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ es subsucesión de todas ellas y

$$\lim_{m \to \infty} f_m^{(m)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(x) \chi_{G_k}(x) = f(x)$$

a.e. Por (5.16), sustituyendo f_m por $f_m^{(m)}$ y usando el lema de Fatou (véase [3, página 88]), se tiene que, para toda función g tal que $\rho_{p'(\cdot)}(g) \leq 1$,

$$\begin{aligned} \int_G |f(x) - f_n(x)||g(x)|\, dx &\leq \varliminf_{m \to \infty} \int_G |f_m^{(m)}(x) - f_n(x)||g(x)|\, dx \\ &\leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \int_G |f_m^{(m)}(x) - f_n(x)||g(x)|\, dx \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$. En consecuencia,

$$|||f_n - f|||_{p(\cdot)} \leq \varepsilon.$$

□

Observación final. Los espacios L^p, $0 < p < \infty$, de exponente constante, son invariantes por reordenamientos (véase [2, página 43]), por lo que es natural plantearse si los espacios $L^{p(\cdot)}$ variables van a tener esta propiedad. La respuesta será que los espacios $L^{p(\cdot)}$ de exponente no constante no son invariantes por reordenamientos (véase [4, Ejemplo 3.14]). En cuanto a las inclusiones entre espacios, si $p(\cdot), q(\cdot) \in \mathcal{P}(G)$ y $|G| < \infty$, entonces $L^{q(\cdot)}(G) \subset L^{p(\cdot)}(G)$ si y solo si $p(x) \leq q(x)$ a.e. (véase [4, páginas 35–40]). También es posible demostrar que si $p(\cdot) \in \mathcal{P}(G) \cap L^{\infty}(G)$, entonces $L^{p(\cdot)}(G)$ es separable (véase [5, páginas 447–449]).

Bibliografía

[1] R.G. Bartle y D.R. Sherbert, *Introducción al Análisis Matemático de una Variable*, Editorial Limusa Wiley, México, 2010.

[2] C. Bennett y R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, New York, 1988.

[3] J. Cerdà, *Análisis Real*, Edicions de la Universitat de Barcelona, 1996.

[4] D.V. Cruz-Uribe y A. Fiorenza, *Variable Lebesgue Spaces: Foundations and Harmonic Analysis*, Birkhäuser, Heidelberg, 2013.

[5] S. Fucík, O. John, A. Kufner y L. Pick, *Function Spaces*, De Gruyter, Berlin, 2012.

[6] M.A. Krasnosel'skii y Y.B. Rutickii, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, P. Noordhoff, Groningen, 1961.

[7] W.A.J. Luxemburg, *Banach Function Spaces*, Ph.D. Thesis, Technische Hogeschool te Delft, Netherlands, 1955.

[8] J. Musielak, *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[9] W. Orlicz, *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus*, Bulletin International de l'Academie Polonaise des Sciences **8/9** (1932), 207–220.

[10] W. Orlicz, *Über konjugierte Exponentenfolgen*, Studia Math. **3** (1931), 200–211.

[11] M.M. Rao y Z.D. Ren, *Applications of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker, New York, 2002.

Índice alfabético