



Universidad Complutense de Madrid

GRADO EN MATEMÁTICAS

# CONVERGENCIA DE LAS SERIES DE FOURIER

*Trabajo de Fin de Grado*

Álvaro Bárez Sánchez

Tutor:

F. Javier Soria de Diego

24 de junio de 2025



## **Resumen:**

Este trabajo tiene como objetivo el estudio de la convergencia de las series de Fourier, una herramienta fundamental en múltiples áreas de las matemáticas. En primer lugar, se introduce la teoría de series de Fourier mediante definiciones clave y propiedades, posteriormente se abordan teoremas de convergencia puntual.

La memoria incluye hechos relevantes como el fenómeno de Gibbs, el comportamiento del núcleo de Fejér y la importante relación entre el espacio  $L^2(\mathbb{T})$  y el espacio de sucesiones  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Por último, se analiza la utilidad de las series de Fourier en la resolución de EDP's, lo que permite apreciar su importancia en el ámbito de la Física.

## **Abstract:**

This work aims to study the convergence of Fourier series, a fundamental tool in multiple areas of mathematics. First, the theory of Fourier series is introduced through key definitions and properties; subsequently, pointwise convergence theorems are addressed.

The manuscript includes important topics such as the Gibbs phenomenon, the behavior of the Fejér kernel, and the significant relationship between the space  $L^2(\mathbb{T})$  and the sequence space  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Finally, the applications of Fourier series in solving partial differential equations (PDEs) is analyzed, allowing to appreciate their importance in the field of Physics.



# Índice general

<b>1. Resultados previos</b>	<b>3</b>
<b>2. Introducción a las Series de Fourier</b>	<b>7</b>
2.1. Series de Fourier de funciones . . . . .	7
2.2. Series de Fourier de funciones continuas . . . . .	15
2.3. Propiedades elementales de las series de Fourier . . . . .	20
<b>3. Criterios de convergencia</b>	<b>23</b>
<b>4. <math>L^2(\mathbb{T})</math>: Espacio de Hilbert</b>	<b>27</b>
<b>5. Fenómeno de Gibbs</b>	<b>33</b>
<b>6. Núcleo de Fejér</b>	<b>35</b>
<b>7. Aplicaciones y resolución de EDP's</b>	<b>39</b>
7.1. Ecuación del calor en un rectángulo . . . . .	39
7.2. Ecuación de onda . . . . .	42
<b>Bibliografía</b>	<b>45</b>



# Capítulo 1

## Resultados previos

En esta sección se presentarán algunos resultados fundamentales que serán utilizados en el futuro del trabajo.

**Teorema 1.1.** *Teorema del Valor Medio para Integrales:* Sean  $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f_1$  es monótona creciente en  $[a, b]$  y  $f_2$  es continua en  $[a, b]$ . Entonces existe una constante  $\delta \in [a, b]$  tal que se cumple:

$$\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx = f_1(a^+) \int_a^\delta f_2(x)dx + f_2(b^-) \int_\delta^b f_2(x)dx.$$

*Demostración.* Primero definimos la función:

$$h(x) = \int_b^x f_2(t)dt$$

Nótese que  $h$  es derivable y su derivada es:

$$h'(x) = -f_2(x)$$

Ahora integremos por partes la siguiente expresión:

$$\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx = -f_1(x)f_2(x)]_a^b + \int_a^b h(x)df_1(x) = -f_1(a^+) \int_a^b f_2(t)dt + \int_a^b h(x)df_1(x)$$

Ahora por el Teorema del Valor Medio, existe  $\delta \in [a, b]$  tal que:

$$\int_a^b h(x)df_1(x) = h(\delta)(f_1(b^-) - f_1(a^+)).$$

Sustituyendo:

$$\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx = -f_1(a^+) \int_a^b f_2(t)dt + h(\delta)(f_1(b^-) - f_1(a^+)).$$

Ahora como  $h(\delta) = \int_b^\delta f_2(t)dt$ , llegamos a que:

$$\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx = f_1(a^+) \int_a^b f_2(t)dt + f_1(b^-) \int_\delta^b f_2(t)dt$$

con lo que llegamos al resultado deseado.  $\square$

**Teorema 1.2.** *Teorema de Tonelli:* Si  $(X, A, \mu)$  y  $(Y, B, \nu)$  son espacios métricos  $\sigma$ -finitos, sea  $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$  es una función no negativa, se tiene que:

$$\int_X \left( \int_Y f(x, y)dy \right) dx = \int_Y \left( \int_X f(x, y)dx \right) dy = \int_{X \times Y} f(x, y)d(x, y).$$

*Demostración.* Su demostración la podemos encontrar en el libro [3, Teorema de Tonelli, pg.112].  $\square$

**Teorema 1.3.** *Teorema de Baire:* Si  $X$  es un espacio métrico completo, entonces para cada colección de conjuntos abiertos densos  $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ , su intersección  $\bigcap_{n=1}^\infty U_n \neq \emptyset$ .

*Demostración.* Su demostración la podemos encontrar en el libro [7, Teorema de Baire, pg. 97].  $\square$

Para introducir el Teorema de los Residuos, un resultado fundamental en el análisis complejo, comenzaremos presentando las definiciones de función holomorfa, de residuo y de índice de una función.

**Definición 1.4.** Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{C}$ , sea  $z_0 \in \Omega$  y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Se dice que  $f$  es holomorfa en  $z_0$  si existe:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'_0$$

Además, si  $f$  es holomorfa en cada punto de  $\Omega$ , entonces se dice que  $f$  es holomorfa en  $\Omega$  y se denota por  $f \in H(\Omega)$ .

**Definición 1.5.** Sea  $f \in H(D'(a, R))$ , llamamos residuo de  $f$  en  $a$  al coeficiente  $c_{-1}(f)$ , es decir:

$$Res(f, a) = c_{-1}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(w)dw, \quad \gamma = D(a, r) \quad , 0 < r < R.$$

**Definición 1.6.** Sea  $\gamma$  un camino cerrado y  $z$  un punto que no pertenece a la traza de  $\gamma$ , se define la función índice de la siguiente manera:

$$Ind(z, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w - z} dw.$$

**Teorema 1.7.** *Teorema de los Residuos:* Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  un conjunto abierto, sea  $\gamma$  un camino cerrado nulo en  $\Omega$  y sea  $P \subseteq \Omega \setminus \gamma$  un conjunto finito. Si  $f$  es holomorfa en  $\Omega$  excepto en los puntos de  $P$  donde tiene polos, entonces:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{w \in \text{int}(\gamma \cap P)} \text{Ind}(w, \gamma) \text{Res}(f, w),$$

donde  $\text{Ind}(w; \gamma)$  denota la función índice.

*Demostración.* Su demostración la podemos encontrar en el libro [5, Teorema de los Residuos, pg.114].  $\square$

**Proposición 1.8.** *Definimos la función  $Si : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por la expresión:*

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\text{sen } u}{u} du.$$

*Esta función verifica:*

1.  $Si(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$
2.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} Si(x) = \frac{\pi}{2}$

*Demostración.*  $Si(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$  se deduce directamente del Teorema Fundamental del Cálculo y por ser  $\text{sen } u/u$  infinitamente derivable.

Para la segunda afirmación nótese que la función  $Si(x)$  es par por lo que se tiene  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} Si(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{sen } u}{u} du$ . Ahora, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\text{sen } u}{u} du &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\text{sen } u}{u} du = \lim_{R \rightarrow \infty} \text{Im} \left( \int_{-R}^R \frac{\text{sen } u}{u} du \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \text{Im} \left( \int_{-R}^{-r} \frac{e^{iu}}{u} du + \int_r^R \frac{e^{iu}}{u} du \right). \end{aligned}$$

Consideremos la función  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$  y el camino cerrado  $\gamma(R, r) = I(R, r) * J(R, r) * C(R) * C^*(r)$  en el plano complejo. Sean  $I = [-R, -r]$ ,  $J = [r, R]$  y  $C$  semicircunferencia de centro  $(0, 0)$  recorrida en sentido antihorario y  $C^*$  la semicircunferencia de centro  $(0, 0)$  en sentido horario, es decir:

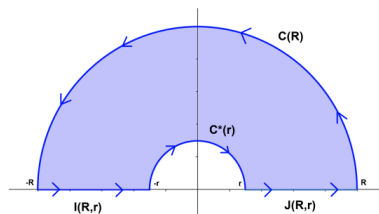


Figura 1.1: Representación del camino cerrado  $\gamma(R, r)$  en el plano complejo.

Por el Teorema de Cauchy de los Residuos (1.7) tenemos lo siguiente:

$$\int_{\gamma(R,r)} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Además se puede escribir:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma(R,r)} \frac{e^{iz}}{z} dz &= \int_{I(R,r)} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{J(R,r)} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C^*(r)} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C(R)} \frac{e^{iz}}{z} dz \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Además se puede observar lo siguiente:

$$I_1 = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{iu}}{u} du \quad I_2 = \int_r^R \frac{e^{iu}}{u} du$$

Por lo que para obtener el resultado deseado basta calcular  $I_3$  e  $I_4$ . Para calcular  $I_3$ , como  $z = 0$  es un polo de orden 1 de  $f(z)$  se tiene:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C^*(r)} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C(r)} f(z) dz = -\pi.$$

Ahora calculemos  $I_4$ :

$$\begin{aligned} \left| \int_{C(R)} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{e^{iR \cos t - R \sin t}}{R e^{it}} R i e^{it} dt \right| \leq \int_0^\pi |e^{iR \cos t - R \sin t}| dt = \int_0^\pi |e^{-R \sin t}| dt \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin t} dt \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-2Rt/\pi} dt = \frac{\pi}{-R} (e^{-R} - 1) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Con esto tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin u}{u} du &= \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \operatorname{Im} \left( \int_{-R}^{-r} \frac{e^{iu}}{u} du + \int_r^R \frac{e^{iu}}{u} du \right) = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \operatorname{Im}(I_1 + I_2) \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \operatorname{Im}(I_3 + I_4) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

□

**Teorema 1.9.** *Teorema de Aproximación por Funciones Simples: Toda función medible extendida con valores reales,  $f$ , es el límite de una sucesión  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de funciones simples.*

*Demostración.* Su demostración la podemos encontrar en el libro [4, pg.85]. □

## Capítulo 2

# Introducción a las Series de Fourier

En este capítulo introduciremos las series de Fourier que son esencialmente una suma infinita de polinomios trigonométricos obtenidos a partir de una función inicial dada. El objetivo principal de este capítulo es introducir las principales definiciones y propiedades básicas de estas series, así como estudiar bajo qué condiciones una función  $2\pi$ -periódica dada admite una representación de esta forma, mediante teoremas que nos aseguren su convergencia. Las principales referencias usadas en este capítulo son [9] y [8].

### 2.1. Series de Fourier de funciones

Un polinomio trigonométrico de grado  $n$  es una función de la forma:

$$p(t) = \sum_{|j| \leq n} c_j e^{ijt}, \quad \text{con } |c_n| + |c_{-n}| \neq 0, \quad (2.1)$$

donde  $n$  nos indica el grado del polinomio y  $c_j$  son números complejos. Definimos  $\mathbb{T}$  como un intervalo de longitud  $2\pi$  y vemos que los valores de  $c_j$  son:

$$c_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} p(t) e^{-ijt} dt, \quad |j| \leq n$$

ya que se tiene:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{-ijt} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq 0, \\ 1 & \text{si } j = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Con esto, llamamos a las constantes  $c_j$  los coeficientes de Fourier de  $f$ .

Denotaremos por  $L^1(\mathbb{T})$  a aquellas funciones medibles en el sentido de Lebesgue cuya norma es finita, es decir:

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)| dt < \infty$$

Sujeto a estas condiciones  $L^1(\mathbb{T})$  es un espacio de Banach. Además definimos  $L^p(\mathbb{T})$  como:

$$L^p(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} \mid 2\pi\text{-periódica, medible, } \|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

**Definición 2.1.** El coeficiente de Fourier  $j$ -ésimo asociado a una función  $f \in L^1(\mathbb{T})$  se define como:

$$c_j(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-ijt} dt.$$

**Definición 2.2.** Una suma parcial simétrica asociada a un polinomio trigonométrico se define como:

$$s_n(f, t) = \sum_{|j| \leq n} c_j e^{ijt}$$

De momento no asumiremos nada sobre la existencia del  $\lim_{t \rightarrow \infty} s_n(f, t) \quad \forall x \in \mathbb{T}$ .

Cuando  $f$  es real es conveniente utilizar las series de Fourier en forma de coseno y seno, es decir:

$$\begin{aligned} s_n(f, t) &= c_0 + \sum_{j=1}^n (c_j e^{ijt} + c_{-j} e^{-ijt}) \\ &= c_0 + \sum_{j=1}^n \left( (c_j + c_{-j}) \cos(jt) + i(c_j - c_{-j}) \sin(jt) \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n \left( a_j \cos(jt) + b_j \sin(jt) \right), \end{aligned}$$

donde  $a$  y  $b$  son valores reales y son:

$$\begin{aligned} a_j &= c_j + c_{-j} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \cos(jt) dt, \\ b_j &= c_j - c_{-j} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \sin(jt) dt. \end{aligned}$$

Si la función  $f(t)$  es par, es decir,  $f(t) = f(-t)$  entonces los coeficientes  $b_j$  se anulan, porque la integral  $\int_{\mathbb{T}} f(t) \sin(jt) dt$  es 0 y los coeficientes  $a_j$  serán de la forma:  $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(jt) dt$ . En cambio, si la función es impar, es decir,  $f(t) = -f(-t)$  entonces los coeficientes  $a_j$  serán todos 0, y los coeficientes  $b_j$  serán de la forma  $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(jt) dt$ .

A continuación vamos a ver algún ejemplo de cálculo de una serie de Fourier, los cuales utilizaremos posteriormente:

**Ejemplo 2.3.** Vamos a escribir la serie de Fourier de la función  $f(x) = x$ . Primero vamos a calcular los coeficientes  $c_n(f)$ :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Ahora integrando por partes con  $u = x$  y  $dv = e^{-inx}$  tenemos que  $du = dx$  y  $v = \frac{-e^{-inx}}{in}$ , entonces haciendo un calculo se tiene que  $c_0(f) = 0$  y para  $n \neq 0$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx = \left. \frac{xe^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} dx = \frac{2\pi}{in}(-1)^n - \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} dx = \frac{-2\pi}{in}(-1)^n.$$

Por lo que tenemos que  $c_n(f) = (-1)^{n+1}/in$  para  $n \neq 0$  y la serie de Fourier de  $f(x)$  es:

$$s_n(f, x) = \sum_{|j| \geq 1}^n \frac{(-1)^{j+1} e^{ijx}}{ij}$$

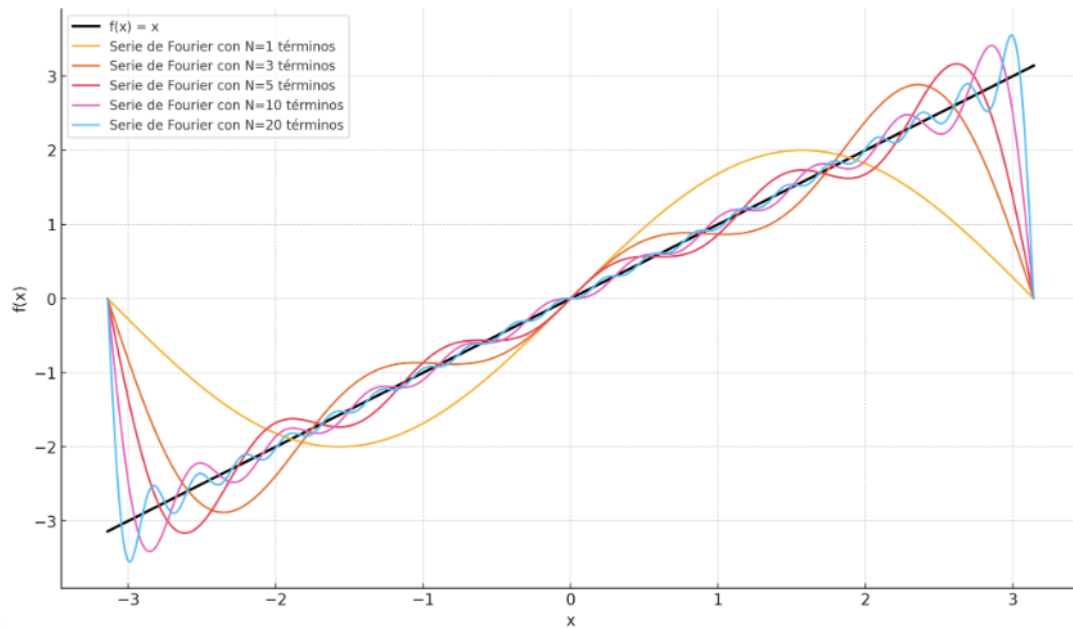


Figura 2.1: Representación de  $f(x) = x$  y  $s_n(f, x)$ .

En el siguiente ejemplo vamos a ver el cálculo de una serie de Fourier, la cual utilizaremos para calcular el límite de  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ :

**Ejemplo 2.4.** Consideremos la función  $f(x) = x^2$  en  $[-\pi, \pi]$ , es fácil ver que es una función para por lo que los  $b_j$  se anulan. Calculemos los coeficiente se Fourier  $a_j$ :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \left. \frac{1}{2\pi} \frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Para los  $a_n$  haremos la siguiente integral resolviéndola por partes y quedaría:

$$a_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(jx) dx = (-1)^j \frac{4}{j^2}.$$

Por lo que se tiene que la serie de Fourier de  $f(x)$  es:

$$f_n(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos(kx).$$

Entonces por el Teorema de Dini 3.1 tenemos que  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$  en todo punto de  $\mathbb{T}$ , y como  $f(0) = 0$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \\ -\frac{\pi^2}{3} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \\ -\frac{\pi^2}{12} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

Ahora, para demostrar el resultado, hagamos un paso intermedio que consistirá en demostrar  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = -2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}$ , para ello:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\ A &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k}}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)^2}. \end{aligned}$$

Ahora sumemos  $S$  y  $A$ , entonces vemos que se cancelan los términos impares, es decir:

$$S + A = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Pero tenemos que  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = S$ , así que:

$$S + A = \frac{1}{2}S \Rightarrow S = -2A$$

Con esto llegamos a lo que queríamos, y finalmente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = -2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Proposición 2.5.** Si la suma parcial simétrica,  $s_n(f, t)$  de la serie trigonométrica converge en  $\mathbb{L}^1(\mathbb{T})$  a  $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{T})$ , entonces  $c_j(f) = c_j$ .

*Demostración.* Fijado un  $j$ , observamos que  $f_n(t) = (f(t) - s_n(t))e^{-ijt}$ ,  $n = 0, 1, \dots$  converge a 0 en  $L^1(\mathbb{T})$ . Por lo que los coeficientes de Fourier de dicha serie serán:

$$c_j(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-ijt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (f(t) - s_n(t))e^{-ijt} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} s_n(t)e^{-ijt} dt,$$

con un cálculo tenemos que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{-ijt} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq 0, \\ 1 & \text{si } j = 0. \end{cases}$$

Por esta razón tenemos que la segunda integral de  $c_j(f)$  es  $c_j$  cuando  $|n| \geq j$ . Haciendo uso de  $|c_j(f)| \leq \|f\|_1$ , llegamos a que  $|c_j(f) - c_j| \leq \|f_n\|_1 \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , con lo que tenemos que  $c_j(f) = c_j$ .  $\square$

**Teorema 2.6.** *Teorema de Riemann-Lebesgue:* Sea  $f \in L^1(\mathbb{T})$ . Entonces  $c_j \rightarrow 0$  cuando  $|j| \rightarrow \infty$ .

*Demostración.* Utilizaremos el hecho de que los polinomios trigonométricos son densos en  $L^1(\mathbb{T})$ , como se establece en la Proposición 6.5. Dado un  $\varepsilon > 0$  demostraremos que  $|c_j| \leq \varepsilon$  cuando  $|j| > n_0$ . Sea  $p$  un polinomio trigonométrico tal que  $\|f - p\|_1 \leq \varepsilon$ , y sea  $n_0$  el grado de  $p$ . Dado un  $|j| > n_0$  tenemos que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} p(t)e^{-ijt} dt = 0 \quad \text{si } |j| > n_0$$

$$c_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-ijt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (f(t) - p(t))e^{-ijt} dt.$$

y como  $|c_j| \leq \|f - p\|_1 \leq \varepsilon$ .  $\square$

Veamos ahora que  $s_n(f, x)$  también se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} s_n(f, x) &= \sum_{|j| \leq n} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-ijt} dt \right) e^{ijx} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \left( \frac{1}{2} \sum_{|j| \leq n} e^{ij(x-t)} \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) D_n(x-t) dt. \end{aligned} \tag{2.3}$$

**Definición 2.7.** Denotamos por *Núcleo de Dirichlet de orden  $n$*  a:

$$D_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{|j| \leq n} e^{ijt}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.4}$$

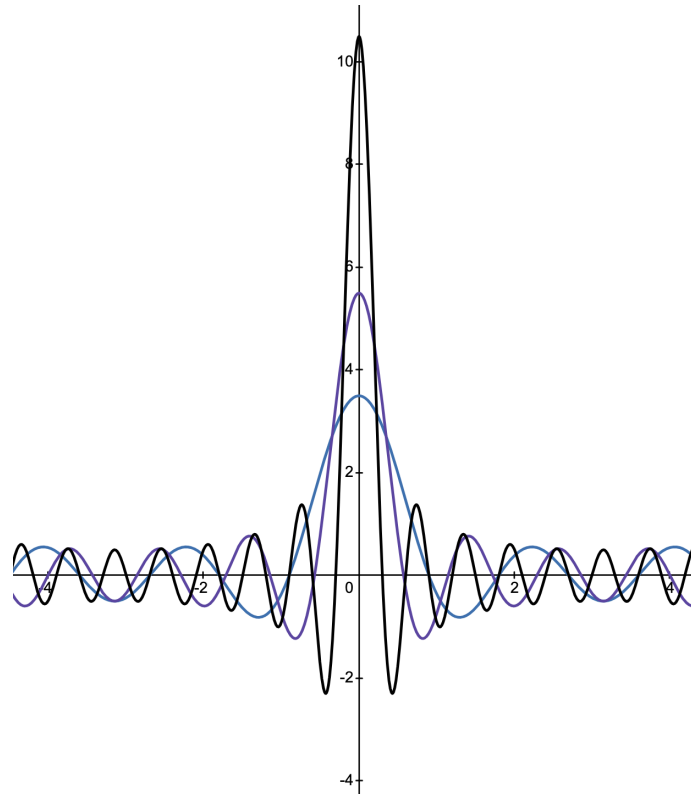


Figura 2.2: Representación de  $D_n(t)$  para los valores  $n = 3, 5$  y  $10$ .

Vamos a estudiar algunas de sus propiedades, para ver la primera propiedad haremos la suma geométrica de (2.4):

$$\begin{aligned}
 D_n(t) &= \frac{1}{2} e^{-int} \frac{(e^{i(2n+1)t} - 1)}{(e^{it} - 1)} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{e^{i(n+1)t} - e^{-int}}{e^{it/2}(e^{it/2} - e^{-it/2})} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{e^{i(n+1/2)t} - e^{-i(n+1/2)t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\text{sen}((n+1/2)t)}{\text{sen}(t/2)} \quad n = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

También tenemos que por (2.2):

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} D_n(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_{[0, \pi]} D_n(t) dt = 1 \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.6}$$

Podemos estimar  $D_n(t)$  sabiendo que  $|e^{ijt}| = 1$ :

$$|D_n(t)| \leq \frac{1}{2} \sum_{|j| \leq n} |e^{ijt}| = \frac{2n+1}{2} = n + \frac{1}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

Además se puede deducir:

$$\frac{1}{2 \sin(t/2)} \leq \frac{\pi}{2t} \quad \text{para } 0 < t < \pi. \quad (2.8)$$

Vamos a ver como se puede llegar a esta desigualdad, para ello consideremos la función:

$$f(t) = \frac{\text{sen}(t/2)}{t}.$$

Demostrar la desigualdad equivale a demostrar que:

$$\frac{1}{2f(t)} \leq \frac{\pi}{2},$$

lo cual es cierto si se cumple que:

$$f(t) \geq \frac{1}{\pi},$$

para  $0 < t < \pi$ , se sabe que:

$$\text{sen } x \geq \frac{2}{\pi}x \quad \text{para } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Sustituimos  $x = \frac{t}{2}$ , y obtenemos:

$$\text{sen}(t/2) \geq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{t}{2} = \frac{t}{\pi}.$$

Dividimos ambos lados por  $t$ :

$$\frac{\text{sen}(t/2)}{t} \geq \frac{1}{\pi}.$$

Esto implica que:

$$f(t) \geq \frac{1}{\pi}.$$

Con lo que llegamos al resultado buscado.

A partir de esto y con (2.5) tenemos que:

$$|D_n(t)| \leq \frac{\pi}{2|t|} \quad \text{para } 0 < t < \pi \quad y \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

A veces, es de ayuda sustituir  $D_n(t)$  por  $D_n^*(t) = (D_{n-1}(t) + D_n(t))/2$ , haciendo uso de esto:

$$D_n^*(t) = \frac{\text{sen}((n-1/2)t) + \text{sen}((n+1/2)t)}{2 \text{sen}(t/2)} = \frac{\text{sen } nt}{2 \tan(t/2)} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

Además tenemos que  $D_n(t) - D_n^*(t) = (D_n(t) - D_{n-1}(t))/2 = \cos(nt/2)$ , así podemos escribir:

$$s_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) D_n^*(x-t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \cos(n(x-t)) dt = s_n^*(f, x) + A_n. \quad (2.10)$$

Llamamos al término  $A_n$  el error, en el sentido de que tiende a 0 cuando  $n \rightarrow \infty$  uniformemente en  $x$ , y por lo tanto podremos ignorarlo. Es fácil ver utilizando  $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ , que  $A_n$  se puede escribir como:

$$\cos(nx) \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \cos(nt) dt + \operatorname{sen}(nx) \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \operatorname{sen}(nt) dt.$$

Utilizando ahora el teorema de Riemann-Lebesgue tenemos que ambas integrales tienden a 0 cuando  $n \rightarrow \infty$ . Ahora vamos a trabajar con  $D_n^*(t)$  y estudiar algunas de sus propiedades. Por (2.6) es fácil ver que:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} D_n^*(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_{[0, \pi]} D_n^*(t) dt = 1 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Utilizando (2.7) también podemos obtener:

$$|D_n^*(t)| = (D_{n-1}(t) + D_n(t))/2 \leq \frac{(n-1) + \frac{1}{2} + n + \frac{1}{2}}{2} = n \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

También por el hecho de que  $D_n^*(t)$  es una función par tenemos que  $s_n^*(f, x)$  se puede escribir como:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{(f(x+t) + f(x-t))}{2} D_n^*(t) dt. \quad (2.11)$$

**Proposición 2.8.** *Sea  $[a, b] \subset \mathbb{T}$ . Entonces existe una constante  $C > 0$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se cumple que:*

$$\left| \int_a^b D_n(x) dx \right| \leq C.$$

*Demostración.* Por (2.5) se tiene que:

$$\begin{aligned} 2 \int_a^b D_n(x) dx &= \int_a^b \frac{\operatorname{sen}((n+1/2)x)}{\operatorname{sen}(x/2)} dx = \\ &= \int_a^b \operatorname{sen}((n+1/2)x) \left( \frac{1}{\operatorname{sen}(x/2)} - \frac{1}{x/2} \right) dx + \int_a^b \frac{\operatorname{sen}((n+1/2)x)}{x/2} dx. \end{aligned}$$

La segunda integral se puede acotar mediante la Proposición 1.8 de la siguiente manera:

$$\left| \int_a^b \frac{\operatorname{sen}((n+1/2)x)}{\operatorname{sen}(x/2)} dx \right| = |2[Si(b(n+1/2)) - Si(a(n+1/2))]|.$$

Por las propiedades demostradas en la Proposición 1.8 se tiene que la integral anterior está acotada por una constante  $K$ . Para acotar la primera integral, empleamos el desarrollo en series de Taylor del seno y el cambio de variable  $u = x/2$  y tenemos:

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b \operatorname{sen}((n+1/2)x) \left( \frac{1}{\operatorname{sen}(x/2)} - \frac{1}{x/2} \right) dx \right| &\leq \int_a^b \left| \frac{1}{\operatorname{sen}(x/2)} - \frac{1}{x/2} \right| dx \\
&= \int_{a/2}^{b/2} \left| \frac{1}{\operatorname{sen}(u)} - \frac{1}{u} \right| du = \int_{a/2}^{b/2} \left| \frac{u - \operatorname{sen} u}{u \operatorname{sen}(u)} \right| du \\
&= \int_{a/2}^{b/2} \left| \frac{u - (u - u^3/3! + O(u^5))}{u \operatorname{sen}(u)} \right| du \\
&= \int_{a/2}^{b/2} \left| \frac{u}{\operatorname{sen} u} |u/3! + O(u^3)| dx \right| \leq \int_{a/2}^{b/2} M dx \\
&= \left( \frac{b-a}{2} \right) M.
\end{aligned}$$

Por lo que con  $C = M + K$  tenemos el resultado.  $\square$

**Teorema 2.9.** *Principio de Localización de Riemann:* Sean  $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ , si existe  $\delta > 0$  tal que:

$$f(x) = g(x) \quad \text{para todo } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

entonces se tiene que  $s_n(f - g, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  para todo  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .

*Demostración.* Sea  $h = f - g$ , por hipótesis,  $h(x) = 0$  en un entorno abierto  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Para  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $h(x - t) = 0$  si  $|t| < \varepsilon$ . Entonces usando que  $h(x - t)$  en un entorno del origen:

$$s_n(h, x) = \int_{-\pi}^{\pi} h(x - t) D_n(t) dt = \int_{|t| \geq \varepsilon} h(x - t) D_n(t) dt + \int_{|t| \leq \varepsilon} h(x - t) D_n(t) dt = I_1 + I_2$$

En el caso de  $I_1$  se tiene que  $h$  es 0 por lo que su integral también. Ahora veamos qué pasa con  $I_2$ :

$$|s_n(h, x)| \leq \int_{|t| \geq \varepsilon} |h(x - t)| |D_n(t)| dt.$$

Pero  $D_n(t)$  está uniformemente acotado fuera de cualquier entorno de 0 y como  $h(x) \in L^1(\mathbb{T})$ , se tiene que  $I_2 \rightarrow 0$ . Esto completa la demostración.  $\square$

## 2.2. Series de Fourier de funciones continuas

En esta sección vamos a tratar las series de Fourier de funciones continuas, podríamos pensar que las funciones continuas cumplen el teorema de Dini, es decir, que verifican (3.1). Sin embargo, (3.1) puede divergir en puntos de continuidad, este es el caso de puntos en los que la función es continua pero su crecimiento no está acotado.

**Proposición 2.10.** Si  $f(t)$  es una función continua en  $\mathbb{T}$  entonces  $f(t) \in L^\infty(\mathbb{T})$ .

*Demostración.* Supongamos que  $f(t)$  es continua en  $\mathbb{T}$ , que es un compacto entonces por el teorema de Weierstrass tenemos que  $f(t)$  es acotada y alcanza máximos y mínimos, con lo que tenemos el resultado.  $\square$

**Definición 2.11.** Las constantes de Lebesgue  $L_n$  se definen por:

$$L_n = 2\|D_n\|_1 = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} |D_n(t)| dt, \quad n \geq 0.$$

Esta definición viene de que por (2.3) y porque  $D_n(t) = D_n(-t)$ :

$$|s_n(f, 0)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)| |D_n(-t)| dt = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)| |D_n(t)| dt \leq \|f\|_\infty L_n.$$

Por lo tanto al definir  $f_n(t) = \text{sgn}(D_n(t))$ ,  $t \in \mathbb{T}$ , es decir:

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } D_n(t) > 0, \\ 0 & \text{si } D_n(t) = 0, \\ -1 & \text{si } D_n(t) < 0, \end{cases}$$

podemos ver que  $\|f_n\| = 1$ , y entonces:

$$\sup_{f \in L^\infty(\mathbb{T}), \|f\|_\infty \leq 1} |s_n(f, 0)| = L_n.$$

Como la función  $f_n(t)$  toma valores reales y es discontinua en un número finito de puntos (esto se debe a que  $D_n(t) = 0$  en un número finito de valores). Entonces ahora utilizando que las funciones continuas son  $L^\infty(\mathbb{T})$  en entornos cerrados y acotados tenemos que:

$$\sup_{f \in C(\mathbb{T}), \|f\|_\infty \leq 1} |s_n(f, 0)| = L_n.$$

Entonces ahora se puede ver la importancia de estudiar el comportamiento de  $L_n$ .

**Proposición 2.12.**  $L_n \sim (\frac{4}{\pi^2}) \ln n$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demostración.* Como  $D_n(t) = D_n(-t)$  y por (2.5), tenemos que:

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{\text{sen}((n+1/2)t)}{2 \text{sen}(t/2)} \right| dt = \frac{2}{\pi} \int_{[0, \pi]} \left| \text{sen}((n+1/2)t) \right| \left( \frac{1}{2 \text{sen}(t/2)} - \frac{1}{t} \right) dt \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \int_{[0, \pi]} \left| \text{sen}((n+1/2)t) \right| \frac{dt}{t} = A_n + B_n. \end{aligned}$$

Se ve que  $A_n = O(1)$ . Ahora vamos a ver que pasa con  $B_n$ . Realizamos el cambio de variable  $(n+1/2)t = s$  y queda:

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_{[0, (n+1/2)\pi]} |\operatorname{sen} s| \frac{ds}{s} = \frac{2}{\pi} \int_{[\pi, n\pi]} |\operatorname{sen} s| \frac{ds}{s} + O(1) = B'_n + O(1).$$

Así habremos terminado si demostramos que

$$B'_n \sim \frac{4}{\pi} \ln n + O(1).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} B'_n &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{[k\pi, (k+1)\pi]} \frac{|\operatorname{sen} s|}{s} ds \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{[0, \pi]} \frac{|\operatorname{sen} k\pi + t|}{k\pi + t} dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{[0, \pi]} (\operatorname{sen} t) \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\pi + t} \right) dt. \end{aligned}$$

La expresión dentro de los corchetes se puede sustituir por arriba y abajo por:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{\pi} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Utilizando esto y que  $\int_{[0, \pi]} \operatorname{sen} t dt = 2$  llegamos a:

$$\frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - O(1) \leq B'_n \leq \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Entonces ya tenemos el resultado buscado porque utilizando el criterio de Stolz llegamos a que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n 1/k}{\ln n} = 1$ .  $\square$

**Corolario 2.13.** Si  $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ , entonces  $s_n(f, x) = O(\ln n)$ .

**Teorema 2.14.** *Teorema de Banach-Steinhaus (Principio de Acotación Uniforme):* Sea  $E$  un espacio de Banach,  $F$  un espacio normado y sea  $W$  un subconjunto de  $\mathbb{L}(E, F)$  (operadores lineales acotados de  $E$  en  $F$ ) tal que para cada  $x \in E$ ,  $\sup\{\|Tx\|_F : T \in W\} < \infty$ . Entonces se tiene:

$$\sup\{\|T\| : T \in W\} < \infty.$$

*Demostración.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$  sea:

$$F_n = \{x \in E : \|Tx\| \leq n, \text{ para todo } T \in W\} = \bigcap_{T \in W} T^{-1}(\bar{B}(0, n)).$$

Como cada  $T \in W$  es acotado,  $F_n$  es cerrado para todo  $n$ . Además, dado cualquier  $x \in E$ , puesto que  $\sup\{\|Tx\|_F : T \in W\} < \infty$ , podemos encontrar un  $n$  tal que  $\sup\{\|Tx\|_F : T \in W\} < n$ .

$W\} \leq n$  y así tenemos  $x \in F_n$ . Luego  $E = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ . Por el Teorema de Baire 1.3, existe  $x_0 \in E$ ,  $m \in \mathbb{N}$  y  $r > 0$  tal que  $B(x_0, 2r) \subseteq F_m$ . Por lo tanto si  $\|x\| \leq 1$  y  $T \in W$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \left\| T\left(\frac{1}{r}x_0 + x\right) - T\left(\frac{1}{r}x_0\right) \right\| = \frac{1}{r} \|Tx_0 + rx - T(x_0)\| \\ &\leq \frac{1}{r} \|T(x_0 + rx)\| + \frac{1}{r} \|Tx_0\| \leq \frac{1}{r}(m + m) = \frac{2m}{r}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\sup\{\|T\| : T \in W\} = \sup\{\sup\{\|Tx\|_F : \|x\| \leq 1\} : T \in W\} \leq \frac{2m}{r} < \infty.$$

□

Ahora apliquemos el Teorema de Banach-Steinhaus 2.14 con  $E = \mathbb{C}(\mathbb{T})$  y  $F = \mathbb{C}$ , entonces tenemos que:

$$T_n f = s_n(f, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) D_n(t) dt, \quad n \geq 0,$$

lo cual implica que:

$$\sup_{\|f\|_{\mathbb{C}(\mathbb{T})} \leq 1} |T_n f| \sim \frac{4}{\pi^2} \ln n.$$

Pero utilizando el Teorema de Banach-Steinhaus 2.14 esto implicaría que existen una constante  $c$  tal que  $\frac{4}{\pi^2} \ln n \leq c$ , para todo  $n$  lo cual es imposible. Entonces, sabemos que tiene que existir una función continua  $f$  tal que  $\sup_n |s_n(f, 0)| = \infty$ . Claramente esta función no tiene una serie de Fourier convergente en 0.

Ahora trataremos de probar la existencia de esta función continua. Definimos  $f$  en  $(0, \pi]$  y la extendemos como una función par, es decir:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sen}(n_k t) \chi_{I_k}(t), \quad 0 < t < \pi,$$

con  $c_k \rightarrow 0$  y  $\chi_{I_k}$  es la función característica en el intervalo  $[\pi/n_k, \pi/n_{k-1})$ . Empezaremos con la elección de  $c_1 = 1, n_1 = 2$  y  $I_1 = (\pi/2, \pi]$ , con  $n_1 < \dots < n_{k-1}$ . Además, introduciremos la siguiente función:

$$h(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{k-1} c_j \operatorname{sen}(n_j t) \chi_{I_j}(t) & \text{si } t \in (\pi/n_{k-1}, \pi], \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces  $h(t)/t$  está acotada haciendo la elección de  $c_j = 1/n_j$ , ya que si  $t \notin (\pi/n_{k-1}, \pi]$  está acotada y si  $t \in (\pi/n_{k-1}, \pi]$  tenemos:

$$\left| \frac{h(t)}{t} \right| = \left| \frac{c_j \operatorname{sen}(n_j t)}{t} \right| = |c_j| \left| \frac{\operatorname{sen}(n_j t)}{n_j t} \right| |n_j| = |c_j n_j| < \infty.$$

Aplicando ahora el Teorema de Riemann-Lebesgue 2.6 llegamos a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, \pi]} \frac{h(t)}{t} \operatorname{sen}(nt) dt = 0.$$

Escogemos  $n_k$ , suficientemente grande para que verifique:

$$\left| \int_{[0, \pi]} \frac{h(t)}{t} \operatorname{sen}(n_k t) dt \right| < 1. \quad (2.12)$$

Con esta elección de  $n_k$  ponemos  $I_k = (\pi/n_k, \pi/n_{k-1}]$  y  $f(t) = c_k \operatorname{sen}(n_k t)$ . Ahora para estimar las sumas parciales  $s_{n_k}(f, 0)$  lo hacemos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_{(0, \pi]} f(t) \operatorname{sen}(n_k t) \frac{dt}{t} &= \frac{2}{\pi} \left( \int_{(0, \pi/n_k]} f(t) \operatorname{sen}(n_k t) \frac{dt}{t} \right. \\ &\quad \left. + \int_{(\pi/n_k, \pi/n_{k-1}]} f(t) \operatorname{sen}(n_k t) \frac{dt}{t} + \int_{(\pi/n_{k-1}, \pi]} f(t) \operatorname{sen}(n_k t) \frac{dt}{t} \right) \\ &= A_k + B_k + C_k. \end{aligned}$$

Por (2.12) tenemos que  $C_k = O(1)$ . Además, independientemente de la elección de  $c_k$  que hagamos llegamos a:

$$|A_k| \leq \int_{(0, \pi/n_k]} |\operatorname{sen}(n_k t)| \frac{dt}{t} \leq c n_k \frac{\pi}{n_k} = O(1).$$

Finalmente, vamos a ver qué ocurre con  $B_k$ . Tenemos que:

$$\begin{aligned} B_k &= c_k \int_{I_k} (\operatorname{sen}(n_k t))^2 \frac{dt}{t} = c_k \int_{I_k} \frac{1 - \cos(2n_k t)}{2t} dt \\ &= c_k \frac{1}{2} \int_{I_k} \frac{dt}{t} - \frac{c_k}{2} \int_{I_k} \cos(2n_k t) \frac{dt}{t} = B'_k + B''_k \end{aligned}$$

Sea  $N_k \geq 2^k$ , con la elección de  $c_k = (\ln N_k)^{-\varepsilon}$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , tenemos que  $c_k \rightarrow 0$ , entonces:

$$B'_k = \frac{1}{2} (\ln N_k)^{1-\varepsilon} \rightarrow \infty, \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

Ahora con  $B''_k$  integramos por partes con  $u = \frac{1}{t}$ ,  $dv = \cos(2n_k t) dt$ , entonces  $du = -\frac{1}{t^2} dt$ ,  $v = \frac{\operatorname{sen}(2n_k t)}{2n_k}$  y nos queda al integrar:

$$B'_k = \left. \frac{\operatorname{sen}(2n_k t)}{2n_k} \right]_{\pi/n_k}^{\pi/n_{k-1}} + \int_{I_k} \frac{\operatorname{sen}(2n_k t)}{2n_k} \frac{dt}{t^2}.$$

Por la elección de los  $n_k$  tenemos que el término ya integrado tiende a 0 cuando  $k \rightarrow \infty$ , y con el término de la integral hacemos lo siguiente:

$$\int_{I_k} \left| \frac{\operatorname{sen}(2n_k t)}{2n_k} \frac{dt}{t^2} \right| \leq \frac{1}{2n_k} \int_{[\pi/n_k, \infty)} \frac{dt}{t^2} = O(1),$$

con esto llegamos a que  $s_{n_k}(f, 0) \sim \frac{1}{2} (\ln N_k)^{1-\varepsilon} + O(1)$ .

### 2.3. Propiedades elementales de las series de Fourier

En esta sección estudiaremos algunas de las propiedades elementales de las series de Fourier, que nos serán útiles para trabajar con dichas series en un futuro. En primer lugar vamos a ver la linealidad de las series, es decir:

$$f \sim \sum c_j e^{ijt} \quad g \sim x \sum c'_j e^{ijt} \quad \text{entonces} \quad c_j(f + \lambda g) = c_j f + \lambda c'_j(g).$$

**Definición 2.15.** Sea  $a \in \mathbb{R}$ , llamaremos a  $f_a(t) = f(t + a)$  la función desplazada de  $f$ .

**Observación 2.16.** Los coeficientes de Fourier de la función desplazada de  $f$  se pueden obtener realizando el cambio de variable  $u = t + a$  y  $du = dt$  de tal manera:

$$\begin{aligned} c_j(f_a) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t+a) e^{-ijt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(u) e^{-ij(u-a)} du \\ &= e^{ija} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-iju} du = e^{ija} c_j(f), \quad \text{para todo } j. \end{aligned}$$

Es decir,  $f_a \sim \sum c_j(f) e^{ij(a+t)}$ .

Ahora vamos a estudiar cómo actúan algunas operaciones usuales sobre las series de Fourier como lo son la diferenciación, la integración y la convolución.

**Proposición 2.17.** Sea  $f \in L(\mathbb{T})$  y sea  $F(t)$  su integral indefinida, es decir:

$$F(t) = c + \int_{(0,t]} f(s) ds, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Entonces,

$$F(t) - c_0(f)t \sim C_0 + \sum_{j \neq 0} \frac{c_j(f)}{ij} e^{ijt}, \quad \text{con } C_0 \text{ constante.}$$

*Demostración.*

$$F(t+2\pi) - F(t) = \int_{(t,t+2\pi]} f(s) ds = \int_{\mathbb{T}} f(s) ds = 2\pi c_0(f).$$

Entonces tenemos que  $F(t)$  es periódica si  $c_0(f) = 0$ . Ahora vamos a trabajar con  $H(t) = F(t) - c_0(f)t$ , esta función es periódica y absolutamente continua por ser la integral de una función de  $L^1(\mathbb{T})$  al igual que  $H'(t) = f(t) - c_0(f)$ . Ahora vamos a calcular los coeficientes de Fourier de  $H(t)$ , si  $j \neq 0$ :

$$\begin{aligned} c_j(H) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} H(t) e^{-ijt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{H(t) e^{-ijt}}{-ij} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi ij} \int_{\mathbb{T}} (f(t) - c_0(f)) e^{-ijt} dt = \frac{c_j(f)}{ij}. \end{aligned}$$

Entonces:

$$F(t) - c_0(f)t = H(t) \sim C_0 + \sum_{j \neq 0} \frac{c_j(f)}{ij} e^{ijt}.$$

□

**Proposición 2.18.** Si  $f$  es absolutamente continua, entonces:

$$f' \sim \sum_j ij c_j(f) e^{ijt},$$

además,  $c_j(f') = o(\frac{1}{|j|})$ .

*Demostración.* Como se tiene que  $f(t) = F(-\pi) + \int_{(-\pi, t]} f'(s) ds$ , con lo que quedaría aplicar la Proposición 2.17.  $\square$

**Corolario 2.19.** Sea  $f \in C^k(\mathbb{T})$ . Entonces sea  $D^k f$  la  $k$ -ésima derivada de  $f$ , tenemos que:

$$D^k f \sim \sum_j (ij)^k c_j(f) e^{ijt}.$$

Además,  $c_j(D^k f) = o(1/|j|^k)$ .

Ahora vemos que pasa con el operador convolución en  $L^1(\mathbb{T})$ .

**Definición 2.20.** La convolución de  $f$  con  $g$  se denota por  $f * g$  y se define como:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x-t)g(t)dt.$$

**Teorema 2.21.** Sea  $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ . Entonces para casi todo  $x$ , la función  $f(x-t)g(t)$  como función de  $t$  es integrable, además se tiene que  $f * g \in L^1(\mathbb{T})$  y  $\|f * g\| \leq \|f\|_1 \|g\|_1$  y también:

$$c_j(f * g) = c_j(f)c_j(g) \quad \text{para todo } j.$$

*Demostración.* Vamos a probar ambos resultados mediante el Teorema de Fubini. Para  $\|f * g\| \leq \|f\|_1 \|g\|_1$  tenemos que:

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int_{\mathbb{T}} |(f * g)(x)| dx = \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x-t)g(t)dt \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\mathbb{T}} |f(x-t)g(t)| dt \right) dx \leq \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{2\pi} |g(t)| \int_{\mathbb{T}} |f(x-t)| dx dt. \end{aligned}$$

Ahora haciendo el cambio de variable  $u = x - t$ :

$$\|f * g\|_1 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |g(t)| \left( \int_{\mathbb{T}} |f(u)| du \right) dt = \frac{1}{2\pi} \|f\|_1 \int_{\mathbb{T}} |g(t)| dt = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Con lo que llegamos a que  $\|f * g\| \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ . Ahora para probar  $c_j(f * g) = c_j(f)c_j(g)$  utilizaremos también el Teorema de Fubini.

$$\begin{aligned} c_j(f * g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x-t)g(t)dt \right) e^{-ijx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(t) e^{-ijt} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x-t) e^{-ij(x-t)} dx \right) dt = c_j(f)c_j(g). \end{aligned}$$

Finalmente tenemos  $c_j(f * g) = c_j(f)c_j(g)$ .  $\square$

**Corolario 2.22.** Si  $f \in L^1(\mathbb{T})$  y  $p(t) = \sum_{|j| \leq N} c_j(p) e^{ijt}$ , entonces  $f * g$  es el polinomio de grado menor o igual que  $N$ , tal que:

$$(f * p)(x) = \sum_{|j| \leq N} c_j(f) c_j(p) e^{ijt}.$$

**Proposición 2.23.** Sea  $f, g, fg \in L^1(\mathbb{T})$ , entonces:

$$c_j(fg) = \sum_k c_k(f) c_{j-k}(g).$$

*Demostración.* Sea  $f(x) = \sum_j c_j(f) e^{ijx}$  y  $g(x) = \sum_k c_k(g) e^{ikx}$ , entonces:

$$f(x)g(x) = \sum_j \sum_k c_j(f) c_k(g) e^{i(j+k)x},$$

además sabemos que:

$$fg(x) = \sum_k c_k(fg) e^{ikx}.$$

Pero en nuestra expresión anterior, cada término  $e^{i(j+k)x}$  aparece con coeficientes  $c_j(f) c_k(g)$ , y la suma recorre todos los posibles valores de  $j$  y  $k$ . Por lo tanto el coeficiente de Fourier  $c_k(fg)$  se obtiene sumando todas las combinaciones que sumen  $k$ , es decir:

$$c_k(fg) = \sum_j c_j(f) c_{k-j}(g).$$

□

## Capítulo 3

# Criterios de convergencia

La principal referencia utilizada en este capítulo ha sido [9]. Nos centraremos en demostrar bajo qué condiciones  $f$  se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f, x)$  converge a  $f$ , es decir, cuándo la serie de Fourier converge a  $f$ . Comenzaremos con uno de los teoremas más relevantes que trata sobre la convergencia puntual:

**Teorema 3.1.** *Teorema de Dini:* Sea  $f \in L^1(\mathbb{T})$  y sea  $x \in \mathbb{T}$ . Si existe una constante  $A$  tal que:

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - A \right| \frac{dt}{t} < \infty, \quad (3.1)$$

entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f, x) = A$ .

*Demostración.* Por (2.10) es suficiente probar la afirmación de  $s_n(f, x)$  reemplazándolo por  $s_n^*(f, x)$ . Ahora utilizando (2.9) y (2.11), tenemos:

$$s_n^*(f, x) - A = \frac{2}{\pi} \int_{[0, \pi]} \left( \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - A \right) \frac{\sin nt}{2 \tan(t/2)} dt.$$

Ahora utilizando (3.1) tenemos que la función:

$$F_x(t) = \left( \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - A \right) \frac{1}{2 \tan(t/2)} \in L^1(\mathbb{T}),$$

ya que cerca de 0 tenemos que  $\tan(t/2) \sim t/2$ , y ahora aplicando el Teorema de Riemann-Lebesgue 2.6 a  $F_x(t)$  tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} F_x(t) e^{-int} dt \rightarrow 0$  tiende a 0 cuando  $n \rightarrow \infty$ . Lo que implica  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f, x) = A$ .  $\square$

A tomar en cuenta sobre este resultado que si  $x$  es un punto de discontinuidad de salto entonces:  $A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}$ . En los puntos de continuidad de la función se tiene  $A = f(x)$ . Además, si  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(x+t) - f(x-t) = O(|t|^\alpha)$ ,  $\alpha > 0$  entonces la serie de Fourier de  $f$  converge a  $f(x)$ . Esto equivale a decir que si  $f'(x)$  existe y es finita entonces la serie de Fourier de  $f$  converge a  $f(x)$ , además si esto se satisface en un intervalo entonces  $s_n(f, x)$  converge uniformemente a  $f(x)$  en dicho intervalo.

**Teorema 3.2.** *Teorema de Stone-Weierstrass: Sea  $\varepsilon > 0$  arbitrario y  $f \in C(\Omega)$ . Entonces existe un polinomio trigonométrico  $T(x)$  tal que  $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$ , es decir, los polinomios trigonométricos son densos en  $C(\Omega)$ .*

*Demostración.* Fijemos  $\varepsilon > 0$  arbitrario y sea  $x \in \mathbb{T}$ , y definamos  $T(x)$  de la siguiente manera:

$$T(x) = a_n \int_{\mathbb{T}} \cos^{2n}(u/2) f(x+u) du$$

Ahora tomamos  $a_n$  para que cumpla:

$$a_n \int_{\mathbb{T}} \cos^{2n}(u/2) f(x+u) du = 1 \quad (3.2)$$

Donde, evaluando en la integral se tiene que:

$$a_n = \frac{2n \cdot (2n-2) \cdots 4 \cdot 2}{2\pi \cdot (2n-1) \cdots 5 \cdot 3} < n$$

De (3.2) se deduce que  $c_n \int_{\mathbb{T}} \cos^{2n}(u/2) f(x) du = f(x)$ . Por lo tanto se tiene que para algún  $0 < \delta < \pi$  se tiene que:

$$\begin{aligned} |T(x) - f(x)| &= \left| a_n \int_{\pi}^{\pi} \cos^{2n}(u/2) f(x+u) - f(u) du \right| \\ &\leq a_n \int_{-\delta}^{\delta} \cos^{2n}(u/2) |f(x+u) - f(u)| du \\ &\quad + a_n \int_{-\pi}^{-\delta} \cos^{2n}(u/2) |f(x+u) - f(u)| du \\ &\quad + a_n \int_{\delta}^{\pi} \cos^{2n}(u/2) |f(x+u) - f(u)| du = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Ahora vamos a estimar por separado cada  $I_i$ . En primer lugar, por ser  $f$  continua en  $\mathbb{T}$  tenemos que para todo  $x \in \mathbb{T}$ :

$$|f(x+u) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto,

$$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} a_n \int_{-\delta}^{\delta} \cos^{2n}(u/2) du < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora vamos a ver que ocurre con  $I_2$ . La continuidad de  $f$  garantiza que existe una constante  $M > 0$  tal que  $|f| < M$  en  $\mathbb{T}$ , entonces:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 2Ma_n \left( \int_{-\pi}^{-\delta} \cos^{2n}(u/2) |f(x+u) - f(u)| du \right. \\ &\quad \left. + a_n \int_{\delta}^{\pi} \cos^{2n}(u/2) |f(x+u) - f(u)| du \right) < 4Mn \int_{\delta}^{\pi} \cos^{2n}(u/2) du, \end{aligned}$$

por ser  $c_n < n$ . Ahora, para  $\delta < |u| < \pi$  se tiene que:

$$\cos^{2n}(u/2) \leq \cos^{2n}(\delta/2) = \sigma^{2n}$$

para algún  $0 < \sigma < 1$ . Como  $n\sigma^{2n} \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , para un  $n$  suficientemente grande se tiene que  $I_2 \leq 4M\pi n\sigma^{2n} < \varepsilon/2$ . Finalmente se tiene que para todo  $x \in \mathbb{T}$ :

$$|T(x) - f(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Por lo que tenemos  $|T(x) - f(x)| < \varepsilon$  como queríamos probar.  $\square$

Para establecer otro criterio, vamos a introducir la siguiente definición.

**Definición 3.3.** Denotaremos por  $w_1(f, x)$  al  $L$ -módulo de continuidad de  $f$  y se define como:

$$w_1(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x+t) - f(t)| dt.$$

**Teorema 3.4.** Teorema de Marcinkiewicz: Supongamos que  $f \in L^1(\mathbb{T})$  y que:

$$\int_{[0, \pi]} w_1(f, t) \frac{dt}{t} < \infty.$$

Entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f, x) = f(x)$  en casi todo  $\mathbb{T}$ .

*Demostración.* Sea:

$$I(x) = \int_{[0, \pi]} |f(x+t) - f(x)| \frac{dt}{t} \geq 0.$$

Ahora utilizando el Teorema de Tonelli 1.2:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} I(x) dx &= \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{2\pi} \left( \int_{[0, \pi]} |f(x+t) - f(x)| dx \right) \frac{dt}{t} \\ &= \int_{[0, \pi]} \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\mathbb{T}} |f(x+t) - f(x)| dx \right) \frac{dt}{t} \\ &= \int_{[0, \pi]} w_1(f, t) \frac{dt}{t} < \infty. \end{aligned}$$

Por lo que  $I(x) < \infty$  en casi todo punto de  $\mathbb{T}$  y por lo tanto:

$$\int_{[0, \pi]} |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \frac{dt}{t} < \infty \quad \text{en casi todo } \mathbb{T}$$

Concluimos utilizando el teorema de Dini con  $A = f(x)$ , y llegamos a que  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f, x) = f(x)$  en casi todo  $\mathbb{T}$ .  $\square$

A continuación vamos a ver otro resultados relevantes sobre la convergencia puntual de las series de Fourier

**Teorema 3.5.** *Teorema de Dirichlet-Jordan:* Sea  $f \in L^1(\mathbb{T})$  una función creciente en un entorno de un punto  $x_0 \in \mathbb{T}$ , entonces se verifica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f, x) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

*Demostración.* Supongamos  $\mathbb{T} = (-\pi, \pi)$  y sea  $\delta > 0$  tal que  $f$  es creciente en el intervalo  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , entonces por (2.3) se tiene:

$$\begin{aligned} s_n(f, x_0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) D_n(x_0 - t) dt - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x_0 - t) D_n(t) dt - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x_0 + t) D_n(t) dt - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x_0 + t) - f(x_0^+)] D_n(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 [f(x_0 + t) - f(x_0^-)] D_n(t) dt = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Ahora acotemos  $I_1$ , y para  $I_2$  se realizaría de manera análoga:

$$|I_1| \leq \frac{1}{\pi} \left( \left| \int_0^\delta [f(x_0 + t) - f(x_0^+)] D_n(t) dt \right| + \left| \int_\delta^\pi [f(x_0 + t) - f(x_0^+)] D_n(t) dt \right| \right) = \frac{1}{\pi} (|A| + |B|)$$

donde  $|B| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  por el Teorema de Riemann-Lebesgue 2.6. Ahora, aplicando el Teorema del Valor Medio para Integrales 1.1 tenemos que existe  $\nu \in (0, \delta)$  tal que:

$$|A| = |f(x_0 + \delta) - f(x_0^+)| \left| \int_\nu^\delta D_n(t) dt \right| \leq C |f(x_0 + \delta) - f(x_0^+)|,$$

donde la última desigualdad se obtiene del Teorema 2.8. Finalmente bastaría tomar  $\delta > 0$  tal que  $|f(x_0 + \delta) - f(x_0^+)| < \varepsilon/2C$  para algún  $\varepsilon > 0$  y de esta forma tenemos que  $|A| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

## Capítulo 4

# $L^2(\mathbb{T})$ : Espacio de Hilbert

En el contexto de las series de Fourier, el espacio  $L^2(\mathbb{T})$  juega un papel crucial por razones que veremos a continuación. Para dar comienzo a esta sección comenzaremos definiendo lo que es un producto interno y un espacio de Hilbert:

**Definición 4.1.** Un espacio vectorial  $V$  sobre  $K$  se dice un espacio con producto interior si existe una función  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$  que satisface las siguientes condiciones para todo  $x, y, z \in V$  y  $\lambda \in K$ .

i)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  y  $\langle x, x \rangle = 0$  solo si  $x = 0$ .

ii)  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ .

iii)  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ .

iv)  $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \langle y, x \rangle$ . A la función  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  se le llama un producto interno o producto escalar en  $V$ .

**Definición 4.2.** Un espacio de Hilbert es un espacio con producto interior que es completo para la norma que induce el producto

Trabajaremos en un espacio de Hilbert con el siguiente producto interior:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Además, en este espacio de Hilbert las exponenciales  $\{e^{ijt}\}_{j=-\infty}^{\infty}$  forman una base ortonormal. A continuación, vamos a ver algunas propiedades básicas de las series de Fourier en el espacio de Hilbert.

**Definición 4.3.** Sea  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$  una base ortonormal, definimos el coeficiente de Fourier de  $x$  como:

$$x(\alpha) = \langle x, x_\alpha \rangle$$

**Lema 4.4.** Sea  $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$  es una base ortonormal y  $x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j x_j$ , entonces  $c_j = \langle x, x_j \rangle$  con  $1 \leq j \leq \infty$ , y  $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2$ .

*Demostración.* Para la primera parte como  $x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j x_j$  tenemos que:

$$\langle x, x_k \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n c_j x_j, x_k \right\rangle = c_k \langle x_k, x_k \rangle = c_k.$$

Para la segunda parte tenemos:

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_j \overline{c_k} \langle x_j, x_k \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \overline{c_j} = \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2.$$

□

**Corolario 4.5.** Si  $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$  es una base ortonormal en  $H$  y  $c_j$  es una sucesión de números complejos tal que  $\sum |c_j|^2 < \infty$ , entonces  $\sum c_j x_j$  converge en  $H$ . Además se tiene que  $c_n = x(n)$ .

*Demostración.* Para ver la convergencia del sumatorio es suficiente ver que  $s_N = \sum_{j=1}^N c_j x_j$  es de Cauchy en  $H$ , ya que los espacios de Hilbert son completos. Por el Lema 4.4 se tiene:

$$\|s_N - s_M\|^2 = \sum_{j=N+1}^M |c_j|^2, \quad N < M.$$

Por el Teorema de Riemann-Lebesgue 2.6 tenemos que  $c_j$  tiende a 0 cuando  $N, M \rightarrow \infty$ . Además se tiene que  $x(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle s_N, x_n \rangle = c_n$ . □

**Teorema 4.6.** *Teorema de Mejor Aproximación:* Sea  $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$  una base ortonormal y sea  $x \in H$  se tiene:

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{\infty} x(j) x_j \right\| \leq \left\| x - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j \right\|. \quad (4.1)$$

La igualdad solo se cumple si  $\lambda_j = x(j)$ ,  $1 \leq j < \infty$ , y en este caso:

$$0 \leq \left\| x - \sum_{j=1}^{\infty} x(j) x_j \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{\infty} |x(j)|^2.$$

*Demostración.* g Se tiene:

$$\left\| x - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\lambda_j} x(j) - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \overline{x(j)} + \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2,$$

sea  $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$  y  $x(j) = a_j + ib_j$  entonces:

$$\|x\|^2 - \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j(2a_j - \alpha_j) + \beta_j(2b_j - \beta_j)).$$

Es fácil ver que la función  $f(t) = t(a - t)$  tiene un máximo en  $t = a/2$ , entonces tenemos que el máximo del sumatorio se alcanza en  $\alpha_j = a_j$  y  $\beta_j = b_j$ , es decir:

$$\lambda_j = x(j), \quad 1 \leq j \leq n. \quad (4.2)$$

Por lo que la igualdad en (4.1) se alcanza cuando se cumple (4.2).  $\square$

**Teorema 4.7.** *Desigualdad de Bessel: Sea  $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$  una base ortonormal entonces:*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, x_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \|x - \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, x_j \rangle x_j\|^2 &= \|x\|^2 - \langle x, \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, x_j \rangle x_j \rangle - \langle \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, x_j \rangle x_j, x \rangle \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, x_j \rangle^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, x_j \rangle^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, x_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

$\square$

**Teorema 4.8.** *Teorema de Riesz-Fischer: Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una base ortonormal en  $H$  y supongamos  $\sum_n |\lambda_n|^2 < \infty$ , entonces se tiene que existe  $x \in H$  tal que  $x = \sum_n \lambda_n x_n$ .*

*Demostración.* Como  $\sum_n |\lambda_n|^2 < \infty$  basta aplicar el Corolario 4.5.  $\square$

**Teorema 4.9.** *Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una base ortonormal en  $H$ , entonces cada una de las siguientes propiedades implica otra:*

1.  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una base ortonormal de  $H$ .
2. Si  $\langle x, x_n \rangle = 0$  para  $n = 1, 2, \dots$ , entonces  $x = 0$ .
3.  $\text{span}\{s_n = n \in \mathbb{N}\}$  es denso en  $H$ , es decir, todo vector de  $H$  es el límite de una sucesión de vectores de  $\text{span}\{s_n = n \in \mathbb{N}\}$ .
4. *Identidad de Parseval:* Para  $x \in H$  se tiene que  $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$ .
5. Para todo  $x \in H$  se tiene:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle \overline{\langle y, x_n \rangle}.$$

*Demostración.* 1)  $\rightarrow$  5). Pongamos  $s_m = \sum_{n=1}^m \langle x, x_n \rangle x_n$ ,  $r_m = \sum_{n=1}^m \langle y, x_n \rangle x_n$ . Ahora utilizando la continuidad del producto interior obtenemos lo siguiente:

$$\langle x, y \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle s_m, r_m \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \langle x, x_n \rangle \overline{\langle y, x_n \rangle} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle \overline{\langle y, x_n \rangle}.$$

5)  $\rightarrow$  4). Resulta de tomar en v)  $x=y$ .

4)  $\rightarrow$  3). Dado cualquier  $x \in H$ , usando iv) deducimos que:

$$\|x - \sum_{n=1}^m \langle x, x_n \rangle x_n\|^2 = \sum_{n=m+1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \rightarrow 0 \text{ cuando } m \rightarrow \infty.$$

3)  $\rightarrow$  2). Si  $\langle x, x_n \rangle = 0$  para  $n = 1, 2, \dots$  se tiene que  $x \perp \text{span}\{x_n = n \in \mathbb{N}\}$ . Por la continuidad del producto interior, deducimos entonces que  $x$  es ortogonal al cierre del  $\text{span}\{x_n = n \in \mathbb{N}\}$  que es  $H$ . Luego  $x \perp x$  y así  $x = 0$ .

2)  $\rightarrow$  1). Sea  $z \in H$  arbitrario. Pongamos  $w = \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, x_n \rangle x_n$  que es una serie convergente por la desigualdad de Bessel 4.7 y el Corolario 4.5. Para cada  $k \in \mathbb{N}$  se tiene:

$$\langle x - w, x_k \rangle = \langle z, x_k \rangle - \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \sum_{n=1}^m \langle z, x_n \rangle x_n, x_k \rangle = \langle z, x_k \rangle - \langle z, x_k \rangle = 0.$$

Por 2) deducimos que:

$$z = w = \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, x_n \rangle x_n.$$

□

Una de las conexiones más profundas entre el análisis funcional y el análisis de Fourier es la existencia de un isomorfismo isométrico entre el espacio de funciones  $L^2(\mathbb{T})$  y el espacio de sucesiones  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Esta que asocia a cada función  $f \in L^2(\mathbb{T})$  su secuencia de coeficientes de Fourier  $c_n$ . Dicho isomorfismo no solo es lineal y biyectivo, sino que además preserva el producto interno y la norma, es decir, la estructura completa de espacio de Hilbert y es un isomorfismo isométrico. A continuación definiremos  $\ell^2(\mathbb{Z})$ :

**Definición 4.10.** Definimos el espacio  $\ell^2(\mathbb{Z})$  al conjunto de sucesiones de números complejos tal que:

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

Este conjunto, provisto del producto interno,

$$\langle a_n, b_n \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n}.$$

Forma un espacio de Hilbert, es decir, un espacio vectorial completo con respecto a la norma inducida por ese producto interno:

$$\|a_n\| = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2}.$$

**Definición 4.11.** Dos espacios de Hilbert  $H_1$  y  $H_2$  son isométricamente isomorfos si existe un operador lineal biyectivo  $T : H_1 \rightarrow H_2$  tal que:

$$\langle Tf, Tg \rangle_{H_2} = \langle f, g \rangle_{H_1}, \quad \text{para todo } f, g \in H.$$

Este conjunto, provisto del producto interno,

$$\langle a_n, b_n \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n}.$$

Ahora, con estas definiciones por demostrar el Teorema del Isomorfismo Isométrico entre  $L^2(\mathbb{T})$  y  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .

**Teorema 4.12.** Teorema del Isomorfismo Isométrico entre  $L^2(\mathbb{T})$  y  $\ell^2(\mathbb{Z})$ : Sea  $F$  la siguiente aplicación:

$$F : L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \quad f \rightarrow c_n(f),$$

es un isomorfismo isométrico de espacios de Hilbert.

*Demostración.* 1. Linealidad: La aplicación  $F$  es lineal por la linealidad de la integral.

2. Preservación del producto interno: Se tiene aplicando la Identidad de Parseval 4.

3. Inyectiva: Sean  $f, g \in L^2(\mathbb{T})$  y que  $F(f) = F(g)$ , es decir, los coeficiente de Fourier son iguales. Queremos demostrar que esto implica que  $f = g$  en  $L^2(\mathbb{T})$ . Para ello definimos la diferencia de las funciones  $f - g$ . Como  $F(f) = F(g)$ , entonces se tiene que:

$$c_n(f - g) = c_n(f) - c_n(g) = 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, la serie de Fourier de  $f - g$  es la secuencia de coeficientes  $c_n = 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Ahora por la Identidad de Parseval 4, tenemos:

$$\|f - g\|_{L^2}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f - g)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0 = 0.$$

Entonces se tiene que  $\|f - g\|_{L^2}^2 = 0$  lo que implica  $f = g$  en  $L^2(\mathbb{T})$ , por lo que tenemos la inyectividad

4. Suprayectiva: Dado cualquier  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , se tiene que la serie:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

y por el Teorema de Riesz-Fischer 4.8  $f(x)$  converge en  $L^2(\mathbb{T})$ , por lo que se tiene que  $f$  está definida en  $L^2(\mathbb{T})$  y finalmente  $F$  es suprayectiva.  $\square$



## Capítulo 5

# Fenómeno de Gibbs

El contenido de este capítulo ha sido principalmente obtenido de [6]. Las Series de Fourier permiten aproximar funciones periódicas mediante combinaciones de funciones trigonométricas. El problema de estas aproximaciones aparece en los puntos de discontinuidad, donde, en general, el valor aproximado de  $s_n(f, x)$  según el Teorema de Dirichlet-Jordan 3.5 converge al punto medio del salto. Usualmente, las oscilaciones de las Series de Fourier disminuyen a medida que se incrementa el número de términos, es decir, al aumentar  $s_n(f, t)$ . Sin embargo, esto no sucede en los puntos de discontinuidad ni en sus proximidades, donde los picos de las oscilaciones persisten incluso al aumentar el número de términos. Este comportamiento se conoce como el fenómeno de Gibbs. A continuación, observaremos este fenómeno en la llamada función salto definida en  $\mathbb{T}$ :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi \leq x < 0, \\ 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

La serie de Fourier asociada a  $f$  es

$$s_n(f, x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}((2n-1)x)}{2n-1}$$

A continuación en la Figura 5.1 podemos ver un gráfico que muestra en azul la función salto y en rosa su serie de Fourier. Se puede apreciar las protuberancias de las que antes hemos hablado y además vemos que nos disminuye cuando hacemos más y más iteraciones.

Derivando término a término la serie  $s_n(f)(x)$  tenemos:

$$s'_n(f)(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos((2n-1)x).$$

Ahora reordenando y multiplicando por  $\text{sen}(x)$  a ambos lados de la ecuación:

$$\pi \text{sen } x s'_n(f)(x) = 4 \text{sen } x \sum_{j=1}^n \cos((2j-1)x) = 4 \text{sen } x \sum_{j=0}^{n-1} \cos((2j+1)x)$$

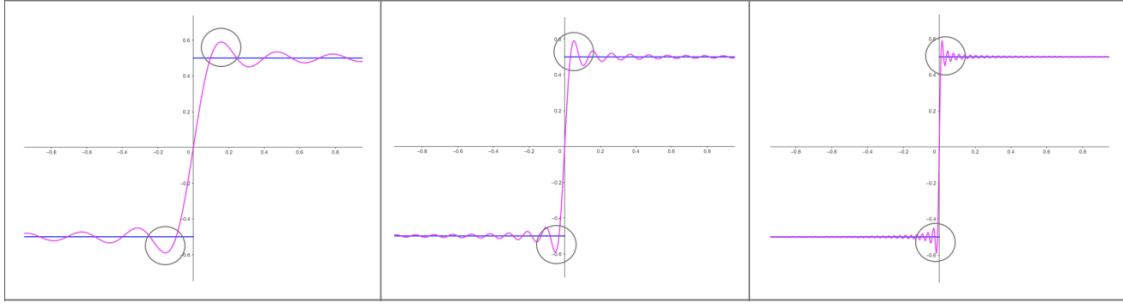


Figura 5.1: Representación de  $f$  y  $s_n(f, x)$  para  $n = 10, 30, 100$  respectivamente. Los círculos señalan dónde ocurre el fenómeno de Gibbs.

Ahora usando la fórmula de suma de cosenos con argumentos en progresión aritmética dada por:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos(a + jd) = \frac{\operatorname{sen}(\frac{nd}{2}) \cos(a + \frac{(n-1)d}{2})}{\operatorname{sen}(d/2)},$$

entonces aplicando esto a nuestra serie:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos((2j+1)x) = \frac{\operatorname{sen}(nx) \cos(nx)}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen}(2nx)}{2 \operatorname{sen} x}.$$

Con esto hemos llegado a la siguiente expresión:

$$\pi \operatorname{sen} x s'_n(f)(x) = 2 \operatorname{sen}(2nx),$$

por lo que el máximo de la función  $S_n(f)(x)$  se alcanza en  $x = \pi/2n$ , donde tiene el siguiente valor:

$$s_n(f)(\pi/2n) = \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^N \frac{\operatorname{sen}((2j-1)\pi/2n)}{2j-1}.$$

Con esto observamos que la Serie de Fourier de la función  $f$  alcanza picos cerca de los puntos de discontinuidad como se puede apreciar en la Figura 5.1.

## Capítulo 6

# Núcleo de Fejér

En este capítulo trataremos el método de sumación de Fejér, el cual consiste en tomar los promedios de las sumas parciales y luego pasar al límite. De este modo, se obtiene una nueva sucesión de funciones que converge, incluso en algunos casos donde la serie de Fourier original no lo hace.

**Definición 6.1.** La suma de Fejér de orden  $n$  de  $f \in L^1(\mathbb{T})$  se define como:

$$\sigma_n(f, x) = \frac{s_0(f, x) + \cdots + s_n(f, x)}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

A continuación, vamos a ver otra forma de expresar  $\sigma_n(f, x)$ . A continuación vamos a expresar cada sumando del numerador de  $\sigma_n(f, x)$ :

$$\begin{aligned} s_0(f, x) &= c_0 \\ s_1(f, x) &= c_{-1}e^{-ix} + c_0 + c_1e^{ix} \\ &\vdots \\ s_n(f, x) &= c_{-n}e^{-inx} + \cdots + c_0 + \cdots + c_n e^{inx}. \end{aligned}$$

Si hacemos la suma de todos estos sumando obtenemos que es igual a:

$$c_{-n}e^{-inx} + 2c_{-n+1}e^{-i(n-1)x} + \cdots + (n+1)c_0 + \cdots + c_n e^{inx},$$

ahora dividiendo por  $(n+1)$  llegamos a:

$$\sigma_n(f, x) = \sum_{|j| \leq n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) c_j e^{ijx}, \quad (6.1)$$

por (2.3)

$$\begin{aligned} \sigma_n(f, x) &= \frac{f * 2D_0(x) + \cdots + f * 2D_n(x)}{n+1} \\ &= \frac{f * (2 \sum_{j=0}^n D_j(x))}{n+1} = f * 2K_n(x). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Esto permite introducir la siguiente definición:

**Definición 6.2.** El núcleo de Fejér de orden  $n$  de  $f \in L^1(\mathbb{T})$  se define como:

$$K_n(t) = \frac{\sum_{j=0}^n D_j(t)}{n+1}$$

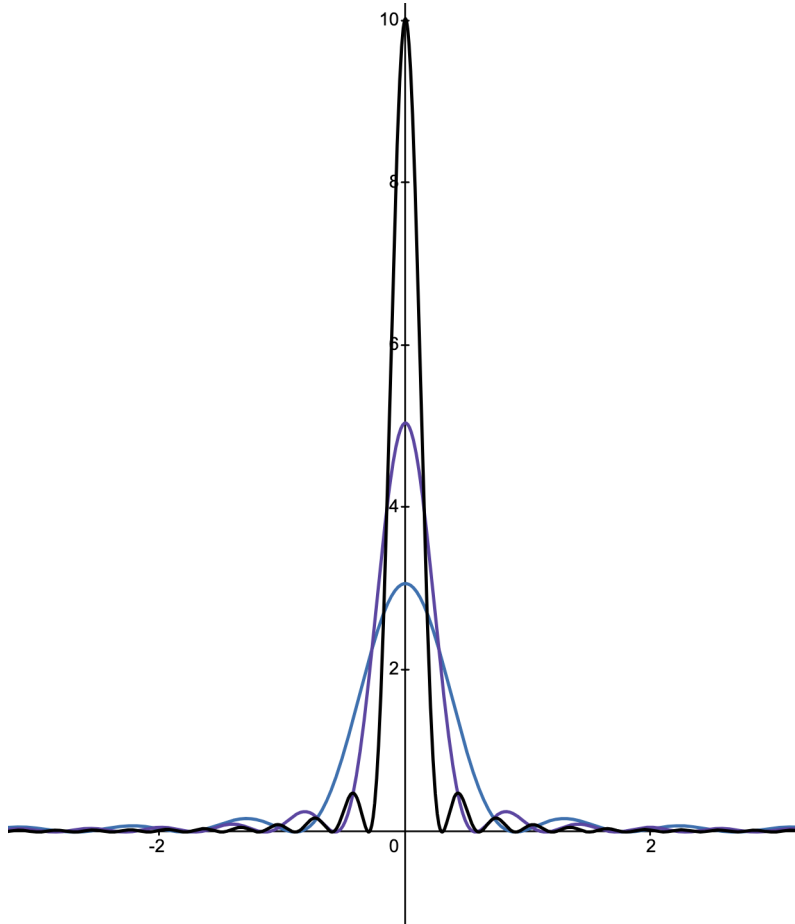


Figura 6.1: Representación de  $K_n(t)$  para los valores  $n = 3, 5$  y  $10$ .

Utilizando (6.1) y (6.2) tenemos que el núcleo de Fejér se puede escribir de la siguiente forma:

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{2} \sum_{|j| \leq n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijx}.$$

A continuación vamos a ver algunas propiedades del núcleo de Fejér, en primer lugar tenemos que por (2.2):

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} K_n(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_{[0, \pi]} K_n(t) dt = 1. \quad (6.3)$$

También es inmediato estimar  $K_n(t)$ , ya que utilizando (2.7) tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} K_n(t) &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} |D_j(t)| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \left(j + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2}(n+1)\right) = \frac{n+1}{2}. \end{aligned}$$

Similarmente como calculamos en (2.8), se tiene:

$$K_n(t) \leq \frac{2\pi}{2(n+1)t^2}, \quad 0 < |t| < \pi. \quad (6.4)$$

Ahora vamos a ver otra forma de expresar  $K_n(t)$  utilizando la definición de convolución, de que es una función y (6.2):

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}\right) K_n(t) dt \quad \circ \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t)) K_n(t) dt. \quad (6.5)$$

Con estas propiedades de  $K_n(t)$  podemos obtener el siguiente resultado.

**Teorema 6.3.** *Teorema de Fejér:* Sea  $f \in L^1(\mathbb{T})$ ,  $f \sim \sum c_j e^{ijt}$ . Si el límite  $f(x+0)$  existe, entonces:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ijt} = \left(\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}\right).$$

En particular, si  $f$  es continua en todo punto de un intervalo  $I \subseteq \mathbb{T}$ , entonces la convergencia es uniforme en  $I$ .

*Demostración.* Podemos asumir  $f(x) = (f(x+0) + f(x-0))/2$ . Entonces por (6.3) y (6.5) se tiene:

$$\sigma_n(f, x) - f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{[0, \pi]} \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - f(x)\right) K_n(t) dt.$$

Entonces, para  $0 < \eta < \pi$ , vemos que:

$$|\sigma_n(f, x) - f(x)| = \frac{2}{\pi} \left( \int_{[0, \eta]} + \int_{[\eta, \pi]} \right) \left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - f(x) \right| K_n(t) dt = I_1 + I_2 \quad (6.6)$$

Primero vamos a estimar  $I_1$ , sabemos que dado un  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que:

$$\left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - f(x) \right| \leq \varepsilon \quad \text{para } 0 \leq t < \delta.$$

Si ponemos  $\eta = \delta$  en (6.6), se tiene:

$$I_1 \leq \varepsilon \frac{2}{\pi} \int_{[0, \delta]} K_n(t) dt \leq \varepsilon.$$

Para aproximar  $I_2$  introducimos  $M_n(\delta) = \max_{\delta < t < \pi} K_n(t)$ , entonces utilizando (6.4) tenemos que:

$$M_n(\delta) \leq \frac{c}{(N+1)\delta^2}.$$

Ahora como  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(\delta) = 0$ , para cada  $\delta > 0$  se tiene:

$$I_2 \leq M_n(\delta) \frac{2}{\pi} \int_{[0, \pi]} (|f(x+t)| + |f(x-t)| + 2|f(x)|) dt = o(1) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (6.7)$$

Esto completa la demostración. Pero además si  $f$  es continua e un intervalo cerrado  $I \subseteq T$ , entonces (6.7) se cumple uniformemente sobre  $I$ .  $\square$

**Corolario 6.4.** *Sea  $f \in C(\mathbb{T})$ , entonces dado un  $\varepsilon > 0$  existe un polinomio trigonométrico  $p$  tal que:*

$$|f(x) - p(x)| \leq \varepsilon \quad \text{para todo } x \in \mathbb{T}.$$

*Demostración.* El candidato para ser  $p$  es el polinomio trigonométrico  $\sigma_n(f, x)$  para un  $n$  suficientemente grande. Por el Teorema 6.3  $\sigma_n(f, x)$  lo cumple.  $\square$

**Proposición 6.5.** *Sea  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , entonces dado un  $\varepsilon > 0$  existe un polinomio trigonométrico  $p$  tal que:*

$$\|f - p\|_1 \leq \varepsilon$$

*Demostración.* Por [2, Teorema de Tonelli, pg.8] se tiene que para toda  $f \in C(\mathbb{T})$ ,  $\varepsilon > 0$  existe un polinomio trigonométrico  $p$  tal que  $|f(x) - p(x)| \leq \varepsilon$  para todo  $x \in \mathbb{T}$ . En particular:

$$\|f - p\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - p(x)| dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon dx = \varepsilon.$$

Ahora, sea  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , como  $C(\mathbb{T})$  es denso en  $L^1(\mathbb{T})$ , dado un  $\varepsilon > 0$  podemos encontrar  $g \in C(\mathbb{T})$  tal que  $\|f - g\|_1 < \varepsilon/2$ , entonces por 3.2 existe polinomio trigonométrico  $p$  tal que  $\|g - p\|_1 < \varepsilon/2$ . Por último:

$$\|f - p\|_1 \leq \|f - g\|_1 + \|g - p\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

## Capítulo 7

# Aplicaciones y resolución de EDP's

Las series de Fourier han demostrado ser una herramienta fundamental en el análisis y la resolución de ecuaciones en derivadas parciales (EDP's), especialmente en el contexto de problemas físicos que involucran fenómenos como la difusión del calor, la propagación de ondas o la distribución de potenciales. Este capítulo se enfoca en explorar cómo pueden emplearse las series de Fourier para obtener soluciones a ciertas EDP's clásicas, bajo condiciones específicas de contorno e iniciales. El contenido presentado ha sido extraído de [1].

### 7.1. Ecuación del calor en un rectángulo

En esta sección resolveremos el problema que motivó a Fourier a desarrollar su teoría. Se trata de encontrar una solución a:

$$u_t - c^2 u_{xx} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < L, t > 0\} \quad (7.1)$$

con  $c^2$  un coeficiente constante, el problema consiste en encontrar una solución de la forma  $u(x, t)$  que sea  $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  en la variable  $x$  y  $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  en la variable  $t$ , para que así (7.1) tenga sentido. Si suponemos que  $u(x, t)$  se puede expresar como producto de  $X(x)$  y  $T(t)$  se tiene que la ecuación (7.1) es:

$$\begin{aligned} X(x)T'(t) - c^2 X''(x)T(t) &= 0 \\ \frac{T'(t)}{c^2 T(t)} &= \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \end{aligned}$$

para cierto  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Resolviendo ambas ecuaciones se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{T'(t)}{c^2 T(t)} = -\lambda &\implies T'(t) + \lambda c^2 T(t) = 0 \implies T(t) = K e^{-\lambda c^2 t} \\ \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda &\implies X''(x) + \lambda X(x) = 0.\end{aligned}$$

Por tanto, el polinomio característico de la ecuación es  $P(z) = z^2 + \lambda$  cuyas soluciones son  $z_1 = \sqrt{\lambda}i$  y  $z_2 = -\sqrt{\lambda}i$ , por lo que la solución general es:

$$X(x) = B e^{\sqrt{\lambda}ix} + A e^{-\sqrt{\lambda}ix}. \quad (7.2)$$

A continuación, analizaremos los distintos problemas en función de sus respectivas condiciones de contorno.

### Condiciones de tipo Dirichlet

Las condiciones de Dirichlet nos proporcionan información sobre el valor de la función en las fronteras de  $\Omega$ , de la siguiente manera:

$$\begin{cases} u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{para todo } t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{para todo } t \in (0, L), \end{cases}$$

con  $u_0 \in L^2(0, L)$ . Ahora si sustituimos en la primera ecuación del sistema por  $X(x)$  y  $T(t)$  se tiene un nuevo sistema tal que así:

$$\begin{cases} X(0)T(t) = 0 \implies X(0) = 0 \\ X(L)T(t) = 0 \implies X(L) = 0. \end{cases}$$

Ahora sustituyendo esta información por (7.2), y utilizando la propiedad trigonométrica  $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \operatorname{sen}(i\theta)$  se tiene:

$$\begin{aligned}X(0) = B + A = 0 &\implies A = -B \implies X(x) = B(e^{-\sqrt{\lambda}ix} - e^{\sqrt{\lambda}ix}) = B^* \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x), \text{ con } B^* = 2iB \\ X(L) = B^* \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0 &\implies \sqrt{\lambda}L = n\pi \implies \lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \text{ con } n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Así, obtenemos que las soluciones son de la forma:

$$u_n(x, t) = B_n e^{(\frac{n\pi}{L})^2 c^2 t} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x) \text{ con } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces como  $u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ , se tiene que  $B_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$ . Ahora aplicando el principio de superposición se tiene que la solución es:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{(\frac{n\pi}{L})^2 c^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Llegados a este punto nos podríamos preguntar si la serie  $u(x, t)$  converge, pero utilizando la desigualdad de Bessel 4.7 y que  $B_n = \langle u_0, \text{sen} \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \rangle$  se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \leq \|u_0\|_{L^2}^2 < \infty.$$

Por tanto, concluimos que  $u(x, t)$  converge y esta es la solución.

### Condiciones de tipo Neumann

Ahora estudiemos el problema (7.1) con las condiciones tipo Neumann dadas por el siguiente sistema:

$$\begin{cases} u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 & \text{para todo } t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{para todo } t \in (0, L), \end{cases}$$

con  $u_0 \in L^2(0, L)$ . Ahora sustituyendo por las funciones unidimensionales  $X(x)$  y  $T(t)$  se tiene:

$$\begin{cases} X'(0)T(t) = 0 \implies X'(0) = 0 \\ X(L)T(t) = 0 \implies X'(L) = 0. \end{cases}$$

Con un simple cálculo tenemos  $X'(x) = \sqrt{\lambda}i e^{\sqrt{\lambda}ix} + \sqrt{\lambda}i e^{-\sqrt{\lambda}ix}$ , por lo que:

$$X'(0) = \sqrt{\lambda}i(B - A) = 0 \implies B = A \implies X(x) = C \cos(\sqrt{\lambda}x),$$

con  $C$  como variable libre. De la misma manera:

$$X'(L) = -C\sqrt{\lambda} \text{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0 \implies \sqrt{\lambda}L = n\pi \implies \lambda = \sqrt{\lambda}_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, llegamos a que las soluciones del problema son de la forma:

$$u_n(x, t) = A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 c^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

Ahora, aplicando de nuevo el principio de superposición tenemos que la solución general al problema (7.1) con condiciones de tipo Neumann es:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 c^2 t} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Al igual que hicimos en el caso del problema con condiciones tipo Riemann, aplicamos el mismo procedimiento aquí para determinar los valores de  $A_n$ , dado que:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right),$$

entonces:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

De nuevo, aplicando la desigualdad de Bessel 4.7 tenemos que  $u_n(x, 0)$  converge. En ambos tipos de condiciones debemos añadir la condición de que exista el límite de  $\sum_{n=1}^{\infty} B_n n^2$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n n^2$  para asegurar la existencia de  $u_t$  y  $u_{xx}$ .

## 7.2. Ecuación de onda

Uno de los ejemplos clásicos del uso de las series de Fourier en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales es la ecuación de onda. Este modelo surge de analizar cómo se propaga una perturbación en una cuerda sujeta por sus extremos dados por  $x = 0$  y  $x = L$ . Si desplazamos ligeramente la cuerda en algún punto y luego la soltamos, esta comenzará a vibrar. Lo que queremos modelar es cómo se propaga esa perturbación a lo largo de la cuerda con el tiempo, que vendrá dado por  $u(x, t)$ , esta función nos dará el desplazamiento vertical de la cuerda en el punto  $x$  en el tiempo  $t$ . A continuación veamos cómo es el problema:

$$\begin{cases} u_{xx} - c^2 u_{tt} = 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ u_t(x, 0) = v_0(x). \end{cases} \quad (7.3)$$

Donde  $u_0(x)$  es la forma inicial de la cuerda y  $v_0(x)$  es su velocidad inicial. Entonces el objetivo consistirá en encontrar una función  $u(x, t)$  que sea  $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  en ambas variables.

Para resolver el problema, usamos el método de separación de variables, asumiendo una solución de la forma  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . Sustituyendo en (7.3) se tiene:

$$X''(x)T(t) = c^2 X(x)T''(t) \rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -\lambda.$$

Lo que nos lleva a:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0.$$

Busquemos soluciones no triviales lo que ocurre cuando  $\lambda > 0$ , es decir,  $\lambda = \mu^2$ . Por las condiciones de contorno tenemos que  $X(0) = 0$  y  $X(L) = 0$ , o y supongamos que  $X(x) = A \cos(\mu x) + B \sen(\mu x)$ , entonces:

$$\begin{aligned} X(0) = A = 0 &\implies A = 0, \\ X(L) = B \sen(\mu L) = 0 &\implies \mu = \frac{n\pi}{L}. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$X_n(x) = \sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Ahora resolvamos la ecuación asociada a  $T(t)$ , es decir:

$$T''(t) + \lambda_n c^2 T(t) = 0 \implies T''(t) + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 T(t) = 0.$$

La solución general será entonces  $T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)$ . Por lo que se tiene que las soluciones son de la forma:

$$u_n(x, t) = \left[ A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Ahora como  $u_n(x, t)$  converge cuando  $n \rightarrow \infty$  por la desigualdad de Bessel 4.7, si aplicamos el principio de superposición tenemos que la solución general es:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (7.4)$$

Por lo que solo faltaría dar los valores de  $A_n$  y  $B_n$  para que  $u(x, t)$  cumpla las condiciones  $u(x, 0) = u_0(x)$  y  $u_t(x, 0) = v_0(x)$ . Sustituyendo en (7.4) por  $t = 0$  se tiene:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Por lo que:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Ahora como:

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -A_n \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \frac{n\pi c}{L} \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Esto hace añadir la condición de que  $\sum_{n=1}^{\infty} B_n n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n n$  converjan y evaluando en  $t = 0$ :

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Entonces se tiene que  $B_n$  es:

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L v_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Con esto hemos conseguido dar una solución general al problema de onda (7.3).



# Bibliografía

- [1] J. FERNÁNDEZ BONDER, *Ecuaciones Diferenciales Parciales*, Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2015.
- [2] C. CARATHÉODORY, *Teoría de funciones reales*, Reverté, 1968.
- [3] G. B. FOLLAND, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1999.
- [4] P. R. HALMOS, *Measure Theory*, Springer-Verlag, 1974.
- [5] S. LANG, *Análisis Complejo*, Springer-Verlag, 1999.
- [6] R. RODRÍGUEZ DEL RÍO Y E. ZUAZUA, *Series de Fourier y Fenómeno de Gibbs*, Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid, 2003.
- [7] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1987.
- [8] E. STADE, *Fourier Analysis*, John Wiley & Sons, 2005.
- [9] A. TORCHINSKY, *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis*, Academic Press, 1986.