
Diferenciación de integrales



UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

Facultad de Ciencias Matemáticas

Universidad Complutense de Madrid

Trabajo de Fin de Grado presentado para optar al doble Grado de

Ingeniería Informática y Matemáticas

Autor: Sergio Miguel García Jiménez

Tutor: F. Javier Soria de Diego

Junio de 2026

Abstract

In this work, we present an overview of the field of differentiation of integrals from a different perspective. We start from Lebesgue's differentiation theorem in its classical version and seek to generalize it with respect to associated families of sets and measures as thoroughly as possible. This process allows us to intuitively familiarize with this area and develop a corresponding rich theoretical framework, sometimes with its own inherent interest, that touches upon various fields of Mathematics: Geometry, Measure Theory, Functional Analysis, among others.

Resumen

En este trabajo presentamos una visión general del campo de diferenciación de integrales desde una perspectiva diferente: partimos del teorema de diferenciación de Lebesgue en su versión clásica y buscamos generalizarlo con respecto a las familias de conjuntos y medidas asociadas hasta donde se pueda llegar. Este proceso nos permite una intuitiva familiarización con esta área y desplegar un rico desarrollo teórico, a veces con interés propio, que toca distintos campos de las Matemáticas: Geometría, Teoría de la Medida, Análisis Funcional, entre otros.

Agradecimientos

Todas las cosas buenas que la vida me ha dado se debe a las personas que directa o indirectamente han formado parte de mi historia. Es imposible que pueda darle nombre a todos ellos, pero mi familia y mis amigos son los más importantes: a ellos van estos agradecimientos. Y para esta fase final de mi aprendizaje de todos estos años, otra de estas personas a las que agradecer es Javier Soria por su gran dedicación y disposición como tutor de este trabajo.

Índice general

Abstract	I
Resumen	I
Introducción	1
Antecedentes	1
Objetivos y plan de trabajo	2
1. Preliminares	5
1.1. Conceptos básicos de Teoría de la Medida	5
1.2. Estudio de los espacios L^p	8
2. Teorema de diferenciación de Lebesgue	9
2.1. Resultados básicos de cubrimiento	9
2.2. Introducción a los operadores maximales de Hardy-Littlewood	11
2.3. Espacios $L^{p,\infty}$ e implicaciones para el operador maximal estándar	15
3. Operador maximal para bolas y medidas arbitrarias	22
3.1. Operadores maximales asociados a normas no euclídeas	22
3.2. Teorema de Besicovitch	26
3.3. Operadores maximales asociados a medidas arbitrarias	30
3.3.1. Caso operador centrado	30
3.3.2. Caso operador no centrado	31
4. Operador maximal fuerte: base de intervalos	35
4.1. Teorema de Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund	35
4.2. Comentarios finales	39
Bibliografía	42

Introducción

Antecedentes

El Teorema Fundamental del Cálculo establece que para una función continua en $\mathbb{R}$, si definimos la función $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ entonces se cumple $F'(x) = f(x)$.

Una prueba intuitiva y rápida para comprender este fenómeno es la siguiente. Partimos de un intervalo centrado en x , $(x - h, x + h)$, podemos encontrarnos en la situación de la Figura 1.

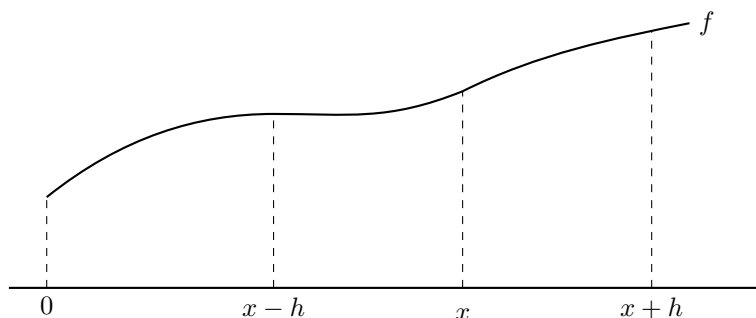


Figura 1: Representación de la función f en el intervalo $(x - h, x + h)$.

Consideramos la derivada de $F(x)$, que denotamos $F'(x)$, desde la siguiente definición equivalente a la tradicional:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h},$$

pero esto es lo mismo que decir

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{x-h}^{x+h} f(t) dt}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt. \quad (*)$$

Bajo esta última expresión, podemos observar que intuitivamente lo que se hace es integrar la función en el intervalo centrado que hemos establecido, dividir esto por la longitud (medida) del intervalo (esto es lo que entenderemos por un promedio), y pasando al límite y por tanto «contrayendo el intervalo sobre x », recuperamos el valor de $f(x)$.

Este célebre resultado establecido bajo la integral de Riemann tiene su análogo en funciones integrables Lebesgue. Siguiendo un modo de proceder muy similar al del primer caso, podríamos enunciar la generalización de (*) en el siguiente teorema, inspirándonos en el enunciado en [12, p. 104]:

Supongamos que f es una función real integrable Lebesgue. Entonces, salvo en un conjunto de medida nula, se cumple

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, h)|} \int_{B(x, h)} f(y) dy = f(x),$$

donde $|B(x, h)|$ es la medida de Lebesgue de la bola euclídea en $\mathbb{R}^n$ de centro x y radio h .

Este resultado y sus versiones similares son conocidas bajo el nombre de Teorema de Diferenciación de Lebesgue. No obstante, el teorema puede generalizarse aún más exigiendo únicamente funciones localmente integrables en espacios reales multidimensionales, y trabajando sobre familias de conjuntos que exhiban ciertas propiedades adecuadas, de las cuales las bolas/intervalos son solo casos particulares. Nosotros entenderemos por «teoremas de diferenciación», en abstracto, las distintas versiones alternativas del Teorema de Diferenciación de Lebesgue sobre diferentes familias de conjuntos, espacios de funciones y espacios de medida. Este tipo de resultados pueden enunciarse en forma general a partir del enunciado en [5, p. 98], que puede escribirse en los siguientes términos accesibles:

Supongamos que f es localmente integrable. Entonces, salvo en un conjunto de medida nula, se cumple

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(E_r)} \int_{E_r} f(y) d\mu(y) = f(x),$$

para toda familia $\{E_r\}_{r>0}$ con ciertas propiedades adecuadas, donde $\mu(E_r)$ es la medida de E_r .

La idea subyacente a este resultado constituye el objetivo principal de todo un campo denominado como teoría de diferenciación de integrales, de la cual Miguel de Guzmán fue uno de sus principales impulsores. Este célebre matemático español, tenido en gran estima entre los miembros de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (donde se inscribe el presente trabajo), contribuyó en gran medida al desarrollo de este campo: gran parte de sus investigaciones se recogen en el trabajo *Differentiation of Integrals* ([7]), al que referiremos continuamente. La capacidad de Miguel de Guzmán de relacionar diversos ámbitos de la matemática en sus trabajos fue clave en el desarrollo de la teoría de diferenciación de integrales, que como hemos podido apreciar en esta introducción, conecta resultados diversos de los campos del análisis matemático y la geometría [8].

Objetivos y plan de trabajo

Una vez introducido el ámbito de estudio en el que se inserta el trabajo, nosotros nos ocuparemos de presentar los resultados principales del área desarrollando por el camino un rico y variado corpus teórico, lo que constituye el ejercicio y la puesta en práctica de todos los conceptos y habilidades adquiridos durante el Grado.

Para ello, nuestro enfoque con fines didácticos será partir del Teorema de Diferenciación de Lebesgue en su versión clásica e ir estudiando hasta dónde podremos generalizar este resultado con respecto a los espacios, medidas y familias de conjuntos de partida; es en ese proceso donde desplegaremos los conceptos y resultados auxiliares de diversas áreas de las Matemáticas.

El proceso ascendente de generalización que nos proponemos articula de forma natural el plan de trabajo. En este sentido los objetivos concretos serán cada una de las generalizaciones que a continuación vamos a presentar y que hemos estructurado en capítulos.

En el Capítulo 1 nos ocupamos de introducir la teoría preliminar básica para manejar la teoría de diferenciación de integrales. Si bien unos preliminares fundamentales son conocimientos de Grado de Análisis Matemático y algunas nociones básicas de Análisis Funcional, un repaso así sería improductivo. Por tanto, los preliminares indispensables de los que se ocupará nuestro capítulo serán otros: primero, en la Sección 1.1, un breve resumen de la asignatura optativa Teoría de la Medida cuyos conceptos se encuentran omnipresentes en todo el trabajo; y segundo, en la Sección 2.3, un estudio de los espacios de Lebesgue L^p y de tipo débil, con el fin de conocer los espacios en los que trabajaremos a lo largo de la memoria.

En el Capítulo 2 nos centramos en desarrollar la teoría necesaria para luego llegar al hito que supone enunciar y demostrar el Teorema de Diferenciación de Lebesgue en su versión clásica, el Teorema 2.13. Esta teoría sobre la que se fundamenta el resultado consiste en, primero, introducir en la Sección 2.1 de un teorema de cubrimiento (Teorema 2.2); y segundo, en la Sección 2.2, presentar los operadores maximales de Hardy-Littlewood y sus respectivas propiedades. Estos operadores, que pueden ser tanto centrados como no centrados en bolas de norma p arbitraria, determinan cada uno su correspondiente familia de conjuntos sobre la que se articularía un respectivo Teorema de Diferenciación de Lebesgue. En este capítulo emprendemos el primer paso natural de ceñirnos inicialmente al operador maximal «estándar», que es el que definiremos como centrado sobre bolas euclídeas. En la Sección 2.3 es cuando gracias al teorema de cubrimiento de este capítulo podremos demostrar en la Sección 2.3 lo que llamaremos la acotación débil $(1, 1)$ de este operador (Teorema 2.12), lo cual supondrá el punto de partida para luego concluir en una demostración del Teorema de Diferenciación de Lebesgue clásico.

En el Capítulo 3 nos encargamos de proporcionar las primeras generalizaciones. En la Sección 3.1 nos ocuparemos primero de demostrar la equivalencia puntual entre todos los operadores maximales vistos hasta el momento: los centrados y no centrados, sobre bolas euclídeas y no euclídeas. Esto supone que gracias a haber demostrado el Teorema de Diferenciación de Lebesgue para el operador maximal estándar, la equivalencia puntual permite que se verifiquen automáticamente los teoremas de diferenciación correspondientes para cada uno del resto de estos operadores.

Posteriormente nos proponemos generalizar el resultado de diferenciación por la vía de las medidas: hasta el momento estábamos trabajando con la tan natural y canónica medida de Lebesgue, haciendo uso de sus respectivas buenas propiedades. Por ello nos preguntamos hasta qué punto podemos generalizar la forma en la que medimos las bolas. Necesitaremos previamente desarrollar en la Sección 3.2 un resultado de cubrimiento conocido como el Teorema de Besicovitch (Teorema 3.8), más poderoso y general que el resultado de cubrimiento del capítulo anterior. A continuación en la Sección 3.3 es donde usamos este teorema y otros auxiliares para demostrar resultados con medidas más generales. Entre otras conclusiones, llegaremos a que el hecho de que una medida sea lo que conoceremos por *doblante* es en general la condición suficiente para obtener resultados de diferenciación sobre bolas. El Cuadro 3.3.2 listará cuáles de los operadores maximales estudiados hasta el momento son débil $(1, 1)$ (y por tanto, cuándo existe un correspondiente teorema de diferenciación en cada caso), concluyendo así el estudio de la diferenciación de integrales sobre familias de bolas de norma p .

Finalmente, en el Capítulo 4 dejamos atrás el estudio bajo las bolas de norma p para adentrarnos en familias de conjuntos más generales. Sin embargo, inmediatamente empieza a haber problemas: para las familias de rectángulos arbitrarios, no existe ninguna acotación satisfactoria del operador maximal asociado. Por tanto, damos un paso atrás y nos restringimos a las familias de intervalos (rectángulos alineados con los ejes): pese a ello, el correspondiente operador maximal sigue sin cumplir la acotación débil $(1, 1)$; o, dicho correctamente, no lo cumple bajo los espacios *localmente integrables* o L^1_{loc} , que son los espacios de funciones donde habíamos estado trabajando durante todo el trabajo. Sin embargo, si nos restringimos a un espacio algo menor, el llamado $L(1 + \log^+ L)$, obtenemos una acotación de tipo débil equivalente en la práctica a ser débil $(1, 1)$, de modo que tendremos un correspondiente teorema de diferenciación de Lebesgue sobre familias de intervalos para funciones $f \in L(1 + \log^+ L)$. Esta acotación de tipo débil constituye el Teorema de Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund (Teorema 4.3), que en la Sección 4.1 nos encargamos de enunciar y demostrar. En la Sección 4.2, finalmente, estudiamos algunas propiedades del operador maximal de intervalos con interés teórico propio. Para un trabajo de estas características podemos decir que hemos finalizado el recorrido de hasta dónde podemos generalizar la diferenciación de integrales; hemos llegado así al final del trabajo y alcanzado los objetivos propuestos.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo incluiremos las definiciones y resultados preliminares necesarios para el desarrollo teórico del Capítulo 2 en adelante.

1.1. Conceptos básicos de Teoría de la Medida

Esta siguiente introducción de conceptos básicos de Teoría de la Medida, así como la Definición 1.14, ha sido elaborada a partir de los apuntes recogidos en la asignatura de Teoría de la Medida impartida en el curso 2024/25 por María del Mar Jiménez Sevilla (Universidad Complutense de Madrid).

Definición 1.1. (σ -álgebra)

Sea X un conjunto, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Decimos que $\mathcal{A}$ es σ -álgebra en X si:

- (a) $X \in \mathcal{A}$.
- (b) Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ es cerrado por complementarios).
- (c) Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ es cerrado por uniones numerables).

Definición 1.2. (Medida)

Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ una σ -álgebra en X . Una medida es una función $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ que verifica:

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) μ es contablemente aditivo (o numerablemente aditivo). Es decir,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

para cada sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ de subconjuntos disjuntos dos a dos.

Definición 1.3. (Espacio medible, espacio de medida)

Bajo las notaciones anteriores, llamamos $(X, \mathcal{A})$ espacio medible y $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida.

Definición 1.4. (Medida exterior)

Sea X un conjunto y $\mathcal{P}(X)$ la familia de los subconjuntos de X . Una medida exterior $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ es una función que cumple:

- i) $\mu^*(\emptyset) = 0$.
- ii) Si $A \subseteq B \subseteq X$ entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (monotonía).

iii) Si $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, entonces $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ (subaditividad).

Definición 1.5. (Medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$)

Definimos la medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ como

$$\lambda_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} V_n(R_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \text{ y cada } R_i \text{ es un intervalo } n\text{-dimensional abierto en } \mathbb{R}^n \right\}$$

con $A \subset \mathbb{R}^n$.

Es fácil demostrar que efectivamente esta es una medida exterior y que asigna a cada intervalo n -dimensional su volumen (n -dimensional).

Definición 1.6. (μ^* -medible y conjunto medible Lebesgue)

Decimos que $B \subset X$ es μ^* -medible (o medible con respecto a μ^*) si cumple la condición de Carathéodory, esto es,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c), \quad \forall A \subset X.$$

En particular, en $\mathbb{R}^n$ diremos que un conjunto es medible Lebesgue si es λ_n^* -medible.

Se puede demostrar que una medida exterior restringida a conjuntos μ^* -medibles es una medida, lo que nos permite llegar a la siguiente definición de medida de Lebesgue.

Definición 1.7. (Medida de Lebesgue)

Si $\lambda_n^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ es la medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, consideramos $M_{\lambda_n^*}$ la σ -álgebra de los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ λ_n^* -medibles (o medibles Lebesgue en $\mathbb{R}^n$). La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ es $\lambda_n := \lambda_n^*|_{M_{\lambda_n^*}}$, y denotaremos la medida de Lebesgue de un conjunto por $|\cdot|$.

Definición 1.8. (Función medible)

Si $(X, \mathcal{A})$ es un espacio medible y $A \in \mathcal{A}$, una función $f : A \rightarrow [-\infty, \infty]$ es medible con respecto a $\mathcal{A}$ (o $\mathcal{A}$ -medible) si $\forall t \in \mathbb{R}, \{x \in A : f(x) > t\} \in \mathcal{A}$.

Definición 1.9. (Integral, existencia de integral, función integrable, integral de Lebesgue)

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \rightarrow [0, \infty]$ una función $\mathcal{A}$ -medible. Entonces se define la integral de f en X como

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X g d\mu : g \in \mathcal{S}^+ \text{ y } g \leq f \right\},$$

donde $g \in \mathcal{S}^+$ son funciones simples no negativas, es decir, $s = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i}$ para algunos $a_1, \dots, a_m \in [0, \infty)$ y $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$ son disjuntos, y donde $\int_X g d\mu := \sum_{i=1}^m a_i \mu(A_i) \in [0, \infty]$.

Se extiende la definición a $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ $\mathcal{A}$ -medible definiendo la integral de f en X como

$$\int_X f d\mu := \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Diremos que existe $\int_X f d\mu$ si al menos una de las integrales $\int_X f^+ d\mu$ ó $\int_X f^- d\mu$ es finita. Si ambas son finitas diremos que f es μ -integrable (o integrable).

Decimos que f es integrable sobre $A \in \mathcal{A}$ si $f \cdot \chi_A$ es integrable (nos referimos a la función que contenida en A sea f , y es 0 fuera de A) y definimos

$$\int_A f d\mu := \int_X f \chi_A d\mu.$$

Si $X = \mathbb{R}^n$ y $\mu = \lambda_n$ (la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$) las anteriores definiciones corresponden a la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ o en $A \in M_{\lambda_n}$.

Ahora introducimos una definición fundamental con la que trabajaremos constantemente.

Definición 1.10. (Propiedades en casi todo punto)

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $A \subset \mathcal{A}$. Diremos que se cumple una determinada propiedad $P(x)$ con $x \in A$ se verifica en μ -casi todo punto (μ -c.t.p.) de A si el conjunto $\{x \in A : P(x) \text{ es falso}\}$ es μ -nulo, es decir, que existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(B) = 0$ y $\{x \in A : P(x) \text{ es falso}\} \subset B$.

El siguiente es un resultado muy poderoso de convergencia ampliamente conocido.

Teorema 1.11. (de la Convergencia Dominada de Lebesgue)

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, $g : X \rightarrow [0, \infty]$ una función $\mathcal{A}$ -medible y μ -integrable, y sean las funciones $f, f_n : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ $\mathcal{A}$ -medibles de manera que

$$(1) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \text{ y}$$

$$(2) \quad |f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

se verifican en μ -c.t.p. $x \in X$. Entonces f y f_n son μ -integrables y

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Finalmente, unas herramientas de las que nos serviremos posteriormente: la primera se conoce como el lema del «layer-cake», que enunciamos de [13].

Lema 1.12. (del «layer-cake»)

Si μ es una medida positiva en un espacio medible X , y $f : X \rightarrow [0, \infty)$ una función μ -medible no negativa, entonces

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_0^\infty \mu(\{x \in X : f(x) > t\}) dt.$$

Finalmente, su versión generalizada.

Corolario 1.13. (Lema del «layer-cake» generalizado)

En las mismas condiciones que en el lema anterior, para $1 \leq p < \infty$ tenemos que

$$\int_X |f(x)|^p d\mu(x) = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}) dt.$$

Demostración.

Partimos de la igualdad del lema anterior, recordando que f es no negativa:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty \mu(\{x \in X : f(x) > t\}) dt.$$

En las condiciones del enunciado tenemos que $f^p \geq 0$, por lo que se le puede aplicar el lema anterior y por tanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^p(x) dx = \int_0^\infty \mu(\{x \in X : f^p(x) > t\}) dt = \int_0^\infty \mu(\{x \in X : f(x) > t^{1/p}\}) dt.$$

Realizando el cambio de variable $u = t^{1/p}$, deducimos $t = u^p \Rightarrow dt = pu^{p-1} du$, de modo que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^p(x) dx = \int_0^\infty \mu(\{x \in X : f(x) > u\}) pu^{p-1} du,$$

con lo que obtenemos la igualdad del enunciado. $\square$

1.2. Estudio de los espacios L^p

Una vez introducidos los preliminares de Teoría de la Medida, vamos a estudiar los espacios L^p .

Definición 1.14. (Espacios L^p , $1 \leq p \leq \infty$)

Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $1 \leq p < \infty$. Definimos

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}^n) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}^n : f \text{ es } \mathcal{A}\text{-medible y } |f|^p \text{ es integrable}\}.$$

En $\mathbb{R}^n$ consideramos la relación de equivalencia $\sim$ tal que $f \sim g$ si $f = g$ en μ -c.t.p. de X . Entonces $L^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}) := \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}) / \sim$.

Para el caso $p = \infty$, primero diremos que una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que es $\mathcal{A}$ -medible es esencialmente acotada si existe $M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ en μ -c.t.p. de X . Entonces definimos

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}^n) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}^n : f \text{ es } \mathcal{A}\text{-medible y esencialmente acotada}\},$$

y asimismo $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}) := \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}) / \sim$.

Introducimos la siguiente definición elaborada a partir de [5, §6.1], que extiende la norma p del contexto de las bolas para ahora las funciones en el espacio L^p .

Definición 1.15. (Norma $\|\cdot\|_p$ asociada a L^p)

Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Se define en el espacio L^p la norma p por

$$\|f\|_p = \begin{cases} (\int_X |f(x)|^p d\mu)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \inf\{a \geq 0 : \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Se puede comprobar que, en efecto, es una norma. Finalmente, introduzcamos los espacios L^1_{loc} a partir de la definición de [5, p. 95].

Definición 1.16. (Espacio L^1_{loc})

Una función medible $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ se dice localmente integrable (con respecto de la medida de Lebesgue) si $\int_K |f(x)| dx < \infty$ para todo conjunto medible y acotado $K \subset \mathbb{R}^n$.

Vemos que es inmediata la inclusión $L^p \subset L^1_{\text{loc}}$ para $1 \leq p \leq \infty$.

Capítulo 2

Teorema de diferenciación de Lebesgue

2.1. Resultados básicos de cubrimiento

En este capítulo trabajamos en el espacio normado $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, con la norma $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, a la que denotamos por simplificar notación por $\|\cdot\|$. Recordamos en este contexto que entendemos por el conjunto $B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|a - x\| < r\}$ la definición de bola centrada en $a \in \mathbb{R}^n$ y de radio $r \in \mathbb{R}$. Introducimos la notación $B^*(x, r) := B(x, 3r)$ la cual será usada en estos resultados de cubrimiento. Empezaremos enunciando el Lema 2.1, al que informalmente aludiremos por «el lema del pez grande que se come al chico». En la Figura 2.1 podemos apreciar el concepto geométrico que motiva a bautizarlo así.

Lema 2.1. («Pez grande que se come al chico»)

Sean $r, s \in \mathbb{R}$ con $r \leq s$. Si $B(x, r) \cap B(y, s) \neq \emptyset$, entonces

$$B^*(y, s) = B(y, 3s) \supset B(x, r).$$

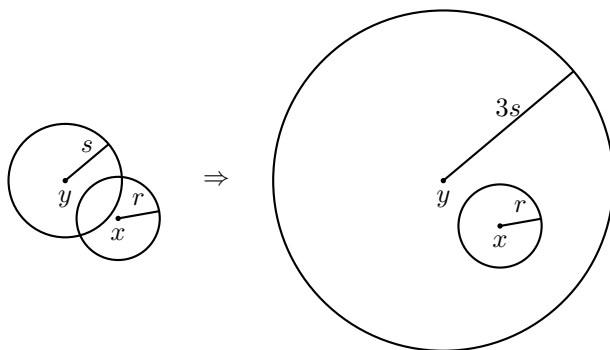


Figura 2.1: Representación visual del Lema 2.1.

Demostración. Sea $a \in B(x, r) \cap B(y, s) \neq \emptyset$. Tenemos por definición $\|y - a\| < s$ y $\|x - a\| = \|a - x\| < r$.

Por tanto,

$$\|y - a\| + \|a - x\| < s + r.$$

Aplicando la desigualdad triangular en la desigualdad izquierda, y $r \leq s$ en la desigualdad derecha,

$$\|y - x\| = \|y - a + a - x\| \leq \|y - a\| + \|a - x\| < s + r \leq s + s = 2s. \quad (2.1)$$

Es decir, $x \in B(y, 2s)$.

Sea $b \in B(x, r)$ genérico. Entonces $\|x - b\| < r$; sumando esta desigualdad a (2.1), obtenemos

$$\|y - x\| + \|x - b\| < 2s + r.$$

Nuevamente, aplicando la desigualdad triangular en la desigualdad izquierda, y $r \leq s$ en la desigualdad derecha,

$$\|y - b\| = \|y - x + x - b\| \leq \|y - x\| + \|x - b\| < 2s + r \leq 3s,$$

por lo que $\|y - b\| < 3r$; es decir, $b \in B(y, 3s)$. Hemos demostrado por tanto que

$$B(x, r) \subset B(y, 3s) =: B^*(y, s).$$

□

Una vez demostrado este lema, estamos en condiciones de demostrar el Teorema 2.2, que nos será de gran utilidad posteriormente. Este resultado de cubrimiento y la idea del lema previo pueden encontrarse en [5, p. 95], [6, p. 88], [12, p. 102]; nosotros proporcionamos demostraciones originales.

Teorema 2.2. (de cubrimiento)

Dada $\mathcal{F} = \{B_j\}_{j=1,\dots,N}$ familia finita de bolas con $B_j \subset \mathbb{R}^n$, existe una subfamilia $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ de manera que $\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_M \in \mathcal{G}$ con $M \leq N$ son disjuntas y

$$\bigcup_{i=1}^M \tilde{B}_i^* \supset \bigcup_{j=1}^N B_j.$$

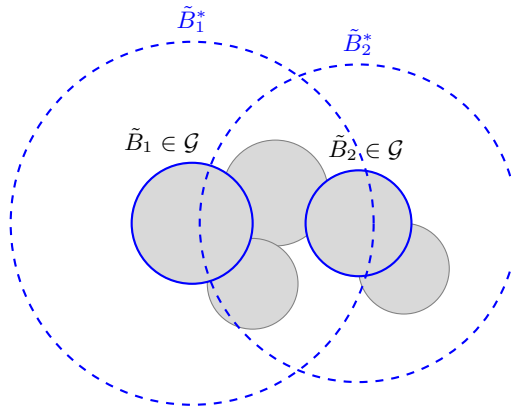


Figura 2.2: Ilustración del Teorema 2.2.

Demostración.

El paso preliminar es ordenar las bolas de la familia finita $\mathcal{F}$ de mayor a menor radio, y las nombramos como $B_1 := B(a_1, r_1), \dots, B_N := B(a_N, r_N)$.

El algoritmo con el que construiremos la familia $\mathcal{G}$ es el siguiente: sea $k \in \mathbb{N}$, con caso base $k = 1$.

Si $k = 1$, partamos de $\mathcal{F}_{k-1}$ un conjunto idéntico a $\mathcal{F}$ que a continuación modificaremos. Si $k > 1$, partamos de $\mathcal{F}_{k-1}$ un conjunto idéntico a $\mathcal{F}_{k-2}$ que a continuación modificaremos.

- Caso $\text{card}(\mathcal{F}_{k-1}) = 0$.

Fin del algoritmo.

- Caso $\text{card}(\mathcal{F}_{k-1}) \neq 0$.

Elegimos $\tilde{B}_k := B(a_k, r_k) \in \mathcal{F}_{k-1}$ (familia finita), que por construcción verifica $r_k \geq r_j$ para todo $j = k, \dots, \text{card}(\mathcal{F})$. Se tiene que la familia de «vecinos» de $\tilde{B}_k$ definida por $\mathcal{V}_k := \{B \in \mathcal{F}_{k-1} : B \cap \tilde{B}_k \neq \emptyset\}$ es un subconjunto no vacío de $\mathcal{F}_{k-1}$ (al menos contiene $\tilde{B}_k$); se tendrá, por el Lema 2.1, que $\tilde{B}_k^* := B^*(a_k, r_k) \supset B$ para todo $B \in \mathcal{V}_k$, de modo que $\tilde{B}_k^* \supset \bigcup_{B \in \mathcal{V}_k} B$. Definiendo $\mathcal{F}_k := \mathcal{F}_{k-1} \setminus \mathcal{V}_k$, hemos visto que en esta iteración se verifica:

1. $\text{card}(\mathcal{F}_k) < \text{card}(\mathcal{F}_{k-1})$.
2. $\tilde{B}_k$ es disjunto con todas las bolas de $\mathcal{F}_k$; eso supone en el proceso iterativo que para todo $j < k$, $\tilde{B}_j$ es disjunto con $\tilde{B}_k$.
3. $\tilde{B}_k^* \supset \bigcup_{B \in \mathcal{V}_k} B$.

Comenzando desde $k = 1$, en cada paso k se verifica $\text{card}(\mathcal{F}_k) < \text{card}(\mathcal{F}_{k-1})$; como partimos de $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}$ conjunto finito, el número de pasos del algoritmo hasta que $\mathcal{F}_k = \emptyset$ es finito; el algoritmo siempre para.

Suponiendo que el algoritmo termina en $k = M$ para algún $M \in \mathbb{N}$, se verificará por construcción que $\bigcup_{i=1}^M \mathcal{V}_i = \mathcal{F}$. Supongamos por reducción al absurdo que no: o sea, que existe un $B \in \mathcal{F}$ que $B \notin \mathcal{V}_j$ para $j = 1, \dots, M$. Como $B \in \mathcal{F}_0 := \mathcal{F}$ y $B \notin \mathcal{F}_M = \emptyset$, necesariamente existe un $i \in \mathbb{N}$ tal que $B \in \mathcal{F}_{i-1}$ y $B \notin \mathcal{F}_i$. Por la construcción del algoritmo, como $\mathcal{F}_i := \mathcal{F}_{i-1} \setminus \mathcal{V}_i$ entonces necesariamente $B \in \mathcal{V}_i$; contradicción con el hecho de que habíamos supuesto que $B \notin \mathcal{V}_j$ para $j = 1, \dots, M$.

Entonces, dado que $\bigcup_{i=1}^M \mathcal{V}_i = \mathcal{F}$ y $\tilde{B}_i^* \supset \bigcup_{B \in \mathcal{V}_i} B$ para todo $i = 1, \dots, M$, podemos deducir

$$\bigcup_{i=1}^M \tilde{B}_i^* \supset \bigcup_{i=1}^M \left(\bigcup_{B \in \mathcal{V}_i} B \right) = \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B = \bigcup_{j=1}^N B_j$$

con $\tilde{B}_i \cap \tilde{B}_j = \emptyset$ para $i \neq j$ con $i, j \in \{1, \dots, M\}$, puesto que como se fue señalando durante el proceso iterativo, para todo $k = 1, \dots, M$, $\tilde{B}_k$ es disjunto con $\tilde{B}_j$ con $j < k$.

Por tanto, hemos construido una subfamilia de $\mathcal{F}$ que verifica el teorema, $\mathcal{G} := \{\tilde{B}_j : j = 1, \dots, M\} \subset \mathcal{F}$. $\square$

2.2. Introducción a los operadores maximales de Hardy-Littlewood

Introducimos ahora los operadores maximales de Hardy-Littlewood, cuyas propiedades nos servirán para demostrar las versiones del teorema de diferenciación de Lebesgue que estudiaremos en este texto.

Definición 2.3. (Operadores maximales de Hardy-Littlewood)

Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ y una norma fijada $\|\cdot\|_p$ en $1 \leq p \leq \infty$. Definimos los siguientes operadores $M_p, M_p^* : L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow M_\mu(\mathbb{R}^n)$, donde $M_\mu(\mathbb{R}^n)$ denota el espacio de todas las funciones $\mathcal{A}$ -medibles en $\mathbb{R}^n$:

- Operador maximal de Hardy-Littlewood centrado:

$$M_p f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B_p(x, r))} \int_{B_p(x, r)} |f(y)| d\mu(y),$$

donde $B_p(x, r)$ constituye la bola de centro x y radio r en norma p .

- Operador maximal de Hardy-Littlewood no centrado:

$$\begin{aligned} M_p^* f(x) &= \sup_{x \in B_p} \frac{1}{\mu(B_p)} \int_{B_p} |f(y)| d\mu(y) \\ &= \sup \left\{ \frac{1}{\mu(B_p)} \int_{\mu(B_p)} |f(y)| d\mu(y) : x \in B_p \text{ para alguna bola } B_p \subset \mathcal{A} \text{ en norma } p \right\}. \end{aligned}$$

Todos los operadores maximales de Hardy-Littlewood tienen las siguientes propiedades, enunciadas a partir de [7, p. 35]:

Proposición 2.4. (Propiedades de los operadores maximales de Hardy-Littlewood)

Todos los operadores maximales de Hardy-Littlewood, denotados de forma genérica por M , verifican:

1. Positividad: para cada $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$, $Mf(x) \geq 0$.

2. Subaditividad: para cada $f_1, f_2 \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$,

$$M(f_1 + f_2)(x) \leq Mf_1(x) + Mf_2(x).$$

3. Positividad homogénea: para cada $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^n$, $M(\lambda f)(x) = |\lambda| Mf(x)$.

Demostración.

1) Trivial por la no negatividad de los valores absolutos y de la medida de un conjunto.

2) Sea $f_1, f_2 \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$. Se tiene $|f_1 + f_2| \leq |f_1| + |f_2|$, en particular punto a punto dentro de una bola.

Integrando y dividiendo por $\mu(B)$ obtenemos por propiedades elementales de la integral de Lebesgue que

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f_1 + f_2| d\mu \leq \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f_1| d\mu + \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f_2| d\mu.$$

Al tomar el supremo sobre todas las bolas que contienen a x se conserva la desigualdad:

$$\begin{aligned} M(f_1 + f_2)(x) &= \sup_{x \in B} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f_1 + f_2| d\mu \\ &\leq \sup_{x \in B} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f_1| d\mu + \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f_2| d\mu \right) \\ &\leq \sup_{x \in B} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f_1| d\mu + \sup_{x \in B} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f_2| d\mu \\ &= Mf_1(x) + Mf_2(x). \end{aligned}$$

Nótese que este argumento sirve tanto para M_p (bolas centradas) como para M_p^* (bolas que contienen a x).

3) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$.

Observemos que $|\lambda f(y)| = |\lambda| |f(y)|$.

Entonces, para cualquier bola B , de nuevo por propiedades de la integral de Lebesgue

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B |\lambda f(y)| d\mu(y) = \frac{1}{\mu(B)} \int_B |\lambda| |f(y)| d\mu(y) = |\lambda| \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| d\mu(y).$$

Al tomar el supremo sobre todas las bolas que contienen a x se obtiene

$$M(\lambda f)(x) = \lambda \sup_{x \in B} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| d\mu(y) = \lambda Mf(x),$$

y nuevamente este mismo argumento es válido para bolas centradas. $\square$

A partir de ahora en todo este capítulo consideraremos, como caso preliminar simplificado, que la medida μ con la que trabajaremos es la medida de Lebesgue, que las bolas corresponden a las bolas euclídeas (reescribiremos la notación de bolas $B := B_1$ en $\mathbb{R}$, $B := B_2$ en $\mathbb{R}^n$ $n > 2$), y trabajaremos con el operador centrado. Nos referiremos de forma abreviada y en un abuso contextual como «el operador maximal estándar» (o, simplemente, «el operador maximal») al operador maximal de Hardy-Littlewood con estas especificaciones:

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy.$$

Más tarde estudiaremos los casos del operador no centrado, y consideraciones en otras normas.

Necesitaremos ahora la propiedad de que el operador maximal sea una función medible. Para el operador maximal que nos concierne, el operador maximal de Hardy-Littlewood centrado, este resultado no es trivial. Partiremos de la idea general que tiende a emplearse para demostrarlo (véase [5, p. 96]).

Teorema 2.5. *El operador maximal de Hardy-Littlewood centrado en bolas euclídeas es una función medible.*

Demostración. Fijemos $r \in \mathbb{R}^+$ y definimos

$$\Phi_r(x) := \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy = \frac{1}{c_n r^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \chi_{B(x, r)}(y) dy,$$

donde $c_n := |B(0, 1)|$ en $\mathbb{R}^n$.

Vamos a demostrar que Φ_r es continua en $x \in \mathbb{R}^n$. Para ello, fijemos $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario y consideramos la sucesión $\{x_k\}_k \subset \mathbb{R}^n$ de manera que $x_k \rightarrow x \in \mathbb{R}^n$; querremos probar que $\Phi_r(x_k) \rightarrow \Phi_r(x) \in \mathbb{R}^n$.

Ciertamente $\chi_{B(x_k, r)}(y) \rightarrow \chi_{B(x, r)}(y)$ en casi todo $y \in \mathbb{R}^n$:

- Si $y \in \text{int}(B(x, r))$, entonces $|y - x| < r$; como $x_k \rightarrow x$ para k mayor o igual que un cierto $k_0 \in \mathbb{N}$ entonces $|y - x_k| < r \Leftrightarrow \chi_{B(x_k, r)}(y) = 1 \forall k \geq k_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{B(x_k, r)}(y) = 1 = \chi_{B(x, r)}(y)$.
- Si $y \notin \text{adh}(B(x, r))$, entonces $|y - x| > r$ como $x_k \rightarrow x$ para k mayor o igual que un cierto $k'_0 \in \mathbb{N}$ entonces $|y - x_k| > r \Leftrightarrow \chi_{B(x_k, r)}(y) = 0 \forall k \geq k'_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \chi_{B(x_k, r)}(y) = 0 = \chi_{B(x, r)}(y)$.
- Si $y \in \partial B(x, r)$ los elementos de la sucesión $\{x_k\}_k$ pueden alternar infinitamente su posición fuera y dentro de la bola, con lo que puede no existir el límite. Pero $\partial B(x, r)$ es un conjunto de medida nula.

Además, existe $R > 0$ tal que para k suficientemente grande $B(x_k, r) \subset B(x, R)$, lo que implica que

$$|f(y)| \chi_{B(x_k, r)}(y) \leq |f(y)| \chi_{B(x, R)}(y),$$

y ciertamente $|f(y)| \chi_{B(x, R)}(y)$ es integrable pues $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Por tanto, por el Teorema 1.11,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \chi_{B(x_k, r)}(y) dy \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \chi_{B(x, r)}(y) dy.$$

Multiplicando por el factor $\frac{1}{c_n r^n}$ se concluye que $\Phi_r(x_k) \rightarrow \Phi_r(x)$; luego Φ_r es continua, y en particular, medible.

Un argumento similar nos proporciona asimismo la continuidad de Φ_x , donde ahora se fija $x \in \mathbb{R}^n$ y se varía $r \in \mathbb{R}^+$: dada una sucesión $\{r_k\}_k \subset \mathbb{R}$, ciertamente $\chi_{B(x, r_k)}(y) \rightarrow \chi_{B(x, r)}(y)$ y asimismo existe $R' > 0$ de manera que $|f(y)|\chi_{B(x, r_k)}(y) \leq |f(y)|\chi_{B(x, R')}(y)$ a partir de un k suficientemente grande.

Ahora, obsérvese que $Mf(x) = \sup_{r>0} \Phi_r(x)$; estas funciones f_r ahora sabemos que son medibles, pero se está tomando un supremo sobre un conjunto no numerable [5, p. 45], y el supremo no numerable de funciones medibles no tiene por qué ser medible. Sin embargo, esta propiedad sí se verifica para cuando hablemos del supremo numerable [5, p. 45]. Por tanto, todo se reducirá a demostrar que

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \Phi_r = \sup_{r \in \mathbb{Q}^+} \Phi_r.$$

Trivialmente $\sup_{r \in \mathbb{Q}^+} \Phi_r \leq \sup_{r>0} \Phi_r$.

Para la desigualdad inversa, fijemos $x \in \mathbb{R}^n$ y $r_0 \in \mathbb{R}^+$. La densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ nos permite considerar una sucesión $\{r_k\}_k \subset \mathbb{Q}^+$ de manera que $r_k \rightarrow r_0$.

El haber probado que $\Phi_x(r)$ es continua nos permite asegurar que $\Phi_{r_k}(x) \rightarrow \Phi_{r_0}(x)$. Pero asimismo tenemos $\Phi_{r_k}(x) \leq \sup_{r \in \mathbb{Q}^+} \Phi_r$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de modo que $\Phi_{r_0}(x) \leq \sup_{r \in \mathbb{Q}^+} \Phi_r$. Como $r_0 \in \mathbb{R}^+$ era arbitrario, se tendrá $\sup_{r>0} \Phi_r \leq \sup_{r \in \mathbb{Q}^+} \Phi_r$, lo que se pretendía demostrar. $\square$

El operador maximal arroja el supremo de los promedios locales de f . Observamos intuitivamente que, para que se verifique el teorema de diferenciación de Lebesgue, se tendrá que verificar que, como mínimo, este supremo deba estar acotado de algún modo. Posteriormente manejaremos un concepto más fino de acotación.

De momento, podemos ver que la acotación en L^∞ es inmediata:

Proposición 2.6. *El operador maximal $Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy$ está acotado de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces para todo x y todo $r > 0$,

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy \leq \|f\|_\infty,$$

por lo que tomando supremos en r , $Mf(x) \leq \|f\|_\infty$ para todo x .

Se tiene entonces que

$$\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty < \infty,$$

luego M es acotado de L^∞ en L^∞ . $\square$

Sin embargo, la acotación en L^∞ es una condición demasiado fuerte para demostrar el teorema fundamental de Lebesgue; necesitaremos movernos en espacios más amplios. Por desgracia, el operador maximal no está acotado de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$, como veremos a continuación. La buena noticia es que sí lo está de $L^p(\mathbb{R}^n)$ a $L^{p, \infty}(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p \leq \infty$, siendo $L^{p, \infty}(\mathbb{R}^n)$ un espacio que posteriormente introduciremos, lo cual nos permitirá demostrar la acotación del operador maximal, precondition para demostrar el teorema de diferenciación de Lebesgue. Procederemos a la forma habitual de demostrar este resultado (es decir, siguiendo las sugerencias en [5, p. 100], [6, p. 87], [12, p. 146]).

Teorema 2.7. *El operador maximal $Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy$ no es acotado de $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración.

Vamos a demostrar, de hecho, un resultado más fuerte: si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $Mf \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $f \equiv 0$; esto implica necesariamente que M no puede ser acotado en L^1 .

Supongamos por reducción al absurdo que $f \not\equiv 0$; entonces, $|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > 0\}| > 0$ y por la propiedad de regularidad de la medida de Lebesgue (véase [2, p. 23]) podemos asegurar que existen constantes $r > 0$ y un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tales que $0 < |K| < \infty$ y $|f(x)| > r$ para todo $x \in K$. Entonces podemos asegurar inmediatamente que $\int_K |f(y)| dy \geq r|K|$.

Sea un $R > 0$ tal que $K \subset B(0, R)$. Consideremos ahora un punto x fuera de esta bola, de modo que $|x| > s$ con un cierto $s \in \mathbb{R}^n$. Entonces, necesariamente se tendrá $\int_K |f(y)| dy \leq \int_{B(x, |x|)} |f(y)| dy$, por lo que podemos establecer la cadena de desigualdades

$$\int_{B(x, |x|)} |f(y)| dy \geq \int_K |f(y)| dy \geq r|K|.$$

Se tiene que $|B(x, |x|)| = |B(0, 1)||x|^n = c_n|x|^n$ para cierto $c_n \in \mathbb{R}^+$, habiéndonos servido de la invarianza por traslaciones de la medida de Lebesgue (véase [2, p. 25]). Dividiendo entre este $|B(x, |x|)|$,

$$Mf(x) \geq \frac{1}{|B(x, |x|)|} \int_{B(x, |x|)} |f(y)| dy \geq \frac{1}{|B(x, |x|)|} \int_K |f(y)| dy \geq \frac{1}{|B(x, |x|)|} r|K|,$$

por lo que

$$Mf(x) \geq \frac{r|K|}{c_n|x|^n} = \frac{C}{|x|^n}$$

para cierta constante $C \in \mathbb{R}^+$. Hemos llegado por tanto a que $Mf(x) \geq \frac{C}{|x|^n}$ para $|x| > s$. Pero en $\mathbb{R}^n$ se cumple $\int_{|x|>s} \frac{C}{|x|^n} dx = \infty$, de modo que necesariamente

$$\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x) dx = \infty,$$

lo cual por definición contradice que $Mf(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, y así hemos llegado a un absurdo. $\square$

Observación 2.8. Esta misma demostración puede emplearse para el mismo resultado en el operador maximal no centrado.

2.3. Espacios $L^{p,\infty}$ e implicaciones para el operador maximal estándar

Como ya hemos adelantado, tendremos sin embargo una acotación de interés del operador maximal en los espacios $L^{p,\infty}$. Introducimos a continuación el desarrollo teórico habitual para presentar estos espacios, en las líneas de [5, p. 198] y [6, p. 5].

Sea $1 \leq p < \infty$ y f una función medible en $\mathbb{R}^n$. Para todo $t > 0$ se tiene

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}| = \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}} 1 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^p}{t^p} dx,$$

donde en este último paso hemos aplicado el resultado conocido como desigualdad de Chebyshev, que podemos encontrar enunciado en [5, p. 193].

Se tiene entonces que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}| \leq \frac{\|f\|_p^p}{t^p}.$$

Multiplicando por t^p y tomando raíces,

$$t \cdot |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}|^{1/p} \leq \|f\|_p.$$

Se tendrá, por tanto, que

$$\|f\|_{p,\infty} := \sup_{t>0} t \cdot |\{x : |f(x)| > t\}|^{1/p} \leq \|f\|_p.$$

Observación 2.9. Este operador $\|\cdot\|_{p,\infty}$ no es una norma, pues no se verifica la propiedad triangular. Analicemos en $p = 1$ el contraejemplo prototípico que suponen las funciones $f(x) = \frac{1}{x}\chi_{(0,1)}(x)$ y $g(x) = \frac{1}{1-x}\chi_{(0,1)}(x)$. Para calcular $\|f\|_{1,\infty}$, fijamos $t > 0$ y observamos que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\} = \left\{x \in (0, 1) : \left|\frac{1}{x}\right| > t\right\} = \left\{x \in (0, 1) : \frac{1}{t} > x\right\}.$$

Cuando $0 < t < 1$, $\{|f| > t\} = (0, 1)$; cuando $t \geq 1$, $\{|f| > t\} = (0, \frac{1}{t})$. Por tanto, deducimos

$$|\{|f| > t\}| = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ 1/t, & t \geq 1, \end{cases}$$

luego

$$t \cdot |\{|f| > t\}| = \begin{cases} t, & 0 < t < 1, \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$$

Tomando supremos en $t \in \mathbb{R}$, $\|f\|_{1,\infty} = 1$. Análogamente, de $g(x) = \frac{1}{1-x}\chi_{(0,1)}(x)$ tendremos que medir

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > t\} = \left\{x \in (0, 1) : \left|\frac{1}{1-x}\right| > t\right\} = \left\{x \in (0, 1) : x > 1 - \frac{1}{t}\right\}.$$

Cuando $0 < t < 1$, $1 - \frac{1}{t} < 0$ y por tanto $\{|g| > t\} = (0, 1)$; cuando $t \geq 1$, $\{|g| > t\} = (1 - \frac{1}{t}, 1)$. Luego

$$|\{|g| > t\}| = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ 1/t, & t \geq 1, \end{cases}$$

de modo que

$$t \cdot |\{|g| > t\}| = \begin{cases} t, & 0 < t < 1, \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$$

Tomando supremos en $t \in \mathbb{R}$, $\|g\|_{1,\infty} = 1$. Se tiene que $(f+g)(x) = \frac{1}{x(1-x)}\chi_{(0,1)}(x)$, y por tanto fijado un $t > 0$ tendremos que medir

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |(f+g)(x)| > t\} = \left\{x \in (0, 1) : \frac{1}{t} > x - x^2\right\}. \quad (2.2)$$

La parábola formada por $y = x - x^2$ en $(0, 1)$ tiene $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ como máximo global, por lo que si $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{4}$ o equivalentemente $t \leq 4$ entonces $|\{|f+g| > t\}| = 1$. Si por el contrario $t > 4$, cortando la recta $y = \frac{1}{t}$ con la parábola $x - x^2$ querremos conocer la medida en el eje de abscisas entre 0 y el primer punto de corte, más entre 1 y el segundo punto de corte, pues será en estos dos intervalos donde se verificará la desigualdad en (2.2). Resolviendo la ecuación de segundo grado pertinente deducimos que $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4/t}}{2}$ y por tanto, para $t > 4$,

$$|\{|f+g| > t\}| = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{t}}}{2} - 0\right) + \left(1 - \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{t}}}{2}\right) = 1 - \sqrt{1 - \frac{4}{t}}.$$

Por tanto,

$$t \cdot |\{f + g > t\}| = \begin{cases} t, & t \leq 4, \\ t - t\sqrt{1 - \frac{4}{t}}, & t > 4. \end{cases}$$

La función $h(t) = t - t\sqrt{1 - \frac{4}{t}}$ está indefinida en $[0, 4)$ y decrece en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$; su máximo global es $h(4) = 4$ y por tanto finalmente deducimos $\|f + g\|_{1,\infty} = 4$; tenemos por tanto que este contraejemplo verifica $2 = \|f\|_{1,\infty} + \|g\|_{1,\infty} < \|f + g\|_{1,\infty} = 4$, luego $\|\cdot\|_{1,\infty}$ no cumple la desigualdad triangular y por tanto no puede ser norma.

Sin embargo, $\|\cdot\|_{p,\infty}$ es cuasinorma, la cual es una propiedad exactamente análoga a la de norma salvo que ahora presenta una desigualdad triangular menos fuerte. Por tanto, estamos hablando de que una cuasinorma constituye un espacio vectorial que verifica, para todos f, g funciones medibles en $\mathbb{R}^n$,

1. No negatividad y definición positiva: $\|\cdot\|_{p,\infty} \geq 0$, y $\|f\|_{p,\infty} = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$ en casi todo punto.
2. Homogeneidad: $\|\lambda f\|_{p,\infty} = |\lambda| \|f\|_{p,\infty}$.
3. Existe una constante $C \geq 1$ tal que $\|f + g\|_{p,\infty} \leq C(\|f\|_{p,\infty} + \|g\|_{p,\infty})$.

En efecto, la tercera propiedad viene a sustituir a aquella de la desigualdad triangular en normas.

Comprobemos que $\|\cdot\|_{p,\infty}$ es cuasinorma en la línea de las sugerencias de [6, p. 6]. Sean f, g funciones medibles en $\mathbb{R}^n$,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) + g(x)| > t\}| \leq |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| + |g(x)| > t\}|.$$

Una propiedad aritmética elemental es que si la suma de dos números es mayor que t , al menos alguno de los dos es mayor que $t/2$. Por tanto,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) + g(x)| > t\}| \leq \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \frac{t}{2} \right\} \right| + \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \frac{t}{2} \right\} \right|,$$

lo cual implica, trabajando en ambos lados de la desigualdad,

$$\left(\frac{|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) + g(x)| > t\}|}{2} \right)^{1/p} \leq \left(\frac{|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \frac{t}{2}\}| + |\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \frac{t}{2}\}|}{2} \right)^{1/p}. \quad (2.3)$$

Las funciones cóncavas g verifican $g(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda g(a) + (1 - \lambda)g(b)$ para todo $\lambda \in [0, 1]$. En particular, aplicando la desigualdad para la función cóncava $g(t) = t^{1/p}$ en el caso $\lambda = \frac{1}{2}$ podremos decir

$$\left(\frac{|\{x : |f(x)| > \frac{t}{2}\}| + |\{x : |g(x)| > \frac{t}{2}\}|}{2} \right)^{1/p} \leq \frac{|\{x : |f(x)| > \frac{t}{2}\}|^{1/p} + |\{x : |g(x)| > \frac{t}{2}\}|^{1/p}}{2}.$$

Retomando la desigualdad (2.3), podemos entonces asegurar

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) + g(x)| > t\}|^{1/p} \leq 2^{1/p} \left(\frac{1}{2} \cdot \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \frac{t}{2} \right\} \right|^{1/p} + \frac{1}{2} \cdot \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \frac{t}{2} \right\} \right|^{1/p} \right).$$

Multiplicando por t obtenemos

$$\begin{aligned} t \cdot |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) + g(x)| > t\}|^{1/p} &\leq 2^{1/p} \left(\frac{t}{2} \cdot \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \frac{t}{2} \right\} \right|^{1/p} + \frac{t}{2} \cdot \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \frac{t}{2} \right\} \right|^{1/p} \right) \\ &\leq 2^{1/p} (\|f\|_{p,\infty} + \|g\|_{p,\infty}), \end{aligned}$$

y tomando supremos sobre $t > 0$ obtenemos finalmente

$$\|f + g\|_{p,\infty} \leq 2^{1/p}(\|f\|_{p,\infty} + \|g\|_{p,\infty}).$$

Por tanto, $2^{1/p}$ es la constante C de la definición de cuasinorma aplicada a $\|\cdot\|_{p,\infty}$. El resto de propiedades de la cuasinorma se verifican rutinariamente.

Finalmente, un último apunte con respecto a las propiedades de $\|\cdot\|_{p,\infty}$ que extraemos de [6, p. 54]. Los espacios $L^{p,\infty}$ son completos con respecto a su cuasinorma y son por tanto son lo que se llaman «cuasi-espacios de Banach». Es más: para $p > 1$, $L^{p,\infty}$ es un espacio normable; en el contexto de este trabajo nos limitamos a señalar que estos espacios pueden ser normados para convertirse «de facto» en espacios de Banach.

Definimos $L^{p,\infty}$ como el espacio $L^{p,\infty} := \{f : f \text{ medible en } \mathbb{R}^n, 1 \leq p < \infty, \|f\|_{p,\infty} < \infty\}$. El haber mostrado que $\|f\|_{p,\infty} \leq \|f\|_p$ nos señala directamente que $L^p \subset L^{p,\infty}$.

Ya sabíamos que no podíamos acotar $M : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^n)$. Sin embargo, sí podremos acotar la medida de los conjuntos $\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$ con $\lambda > 0$ para $Mf : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$; en esto consiste demostrar que Mf es de tipo débil $(1, 1)$. Introducimos la definición de operador de tipo débil (p, p) extraída de [7, p. 35].

Definición 2.10. (Operador de tipo débil (p, p))

Un operador $T : L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \rightarrow M(\mathbb{R}^n)$ subaditivo, donde $M(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de las funciones medibles en $\mathbb{R}^n$, se dice que es de tipo débil (p, p) donde $1 \leq p < \infty$ cuando la siguiente desigualdad se tiene para cada $\lambda > 0$

$$|\{x : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \left(\frac{c\|f\|_p}{\lambda} \right)^p, \quad (2.4)$$

donde c es una constante independiente de f y λ .

Conectando con el desarrollo teórico anterior, T es de tipo débil $(1, 1)$ si y solo si tanto $Tf \in L^{p,\infty}$ como $\|Tf\|_{p,\infty} \leq \left(\frac{c\|f\|_p}{\lambda} \right)^p$ para todo $f \in L^p$.

Introducimos asimismo de [7, p. 36] la definición de operador de tipo fuerte (p, p) , que manejaremos en algunos momentos puntuales.

Definición 2.11. (Operador de tipo fuerte (p, p))

Un operador $T : L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \rightarrow M(\mathbb{R}^n)$ que es subaditivo se dice que es de tipo fuerte (p, p) , donde $1 \leq p \leq \infty$, si para todo $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|Tf\|_p \leq c\|f\|_p,$$

donde c es una constante independiente de f .

La observación inmediata que se hace en [7, p. 36] es que si T es de tipo fuerte (p, p) con p tal que $1 \leq p < \infty$, entonces T es de tipo débil (p, p) . Para ello, utiliza la desigualdad de Chebyshev antes citada, de forma que

$$|\{x : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \left(\frac{\|Tf\|_p}{\lambda} \right)^p \leq \left(\frac{c\|f\|_p}{\lambda} \right)^p.$$

La siguiente demostración del resultado, conocido como el Teorema de Hardy-Littlewood, parte de la prueba en [7, p. 37], a la que únicamente hacemos las adaptaciones pertinentes para poder usar el teorema de cubrimiento visto en este capítulo. Una aproximación similar se da en [6, p. 88].

Teorema 2.12. (de Hardy-Littlewood) *El operador maximal de Hardy-Littlewood centrado en bolas euclídeas es un operador de tipo débil $(1, 1)$.*

Demostración.

Sea un $\lambda > 0$ arbitrario fijo, $A = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$.

Si $|A| = 0$, se verifica la desigualdad deseada (2.4) trivialmente.

Si por el contrario $|A| > 0$, por la propiedad de regularidad de la medida de Lebesgue existe un subconjunto compacto $K \subset A$ de medida no nula.

Sea $x \in K \subset A$ arbitrario. Como en particular $x \in A$ y por la definición del operador maximal, podemos escoger una bola $B(x, r_x)$ para cierto $r_x > 0$ de manera que $\frac{1}{|B(x, r_x)|} \int_{B(x, r_x)} |f(y)| dy > \lambda$.

Consideramos la familia de todas estas bolas $\{B(x, r_x) : x \in A \cap K = K\}$ que recubren a K . Como K es un conjunto compacto, existe un subrecubrimiento finito $\mathcal{F} = \{B(x_i, r_{x_i}) : 1 \leq i \leq N, x_i \in A \cap K\}$.

Por el Teorema 2.2, existe una subfamilia de bolas disjuntas $\mathcal{G} = \{B(x_{i_j}, r_{x_{i_j}}) : 1 \leq j \leq M\} \subset \mathcal{F}$ con $M \leq N$ de manera que

$$\bigcup_{j=1}^M B^*(x_{i_j}, r_{x_{i_j}}) \supset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, r_{x_i}) \supset K. \quad (2.5)$$

Denotamos como $\mathcal{G}^*$ a esta la familia que parte de las bolas de $\mathcal{G}$ con radios triplicados.

La expresión (2.5) nos permite deducir

$$\begin{aligned} |K| &\leq |\bigcup \mathcal{F}| \leq |\bigcup \mathcal{G}^*| \leq \sum_{j=1}^M |B^*(x_{i_j}, r_{x_{i_j}})| = 3^n \sum_{j=1}^M |B(x_{i_j}, r_{x_{i_j}})| \\ &< \frac{3^n}{\lambda} \sum_{j=1}^M \int_{B(x_{i_j}, r_{x_{i_j}})} |f(y)| dy \stackrel{\text{disjuntos}}{=} \frac{3^n}{\lambda} \int_{\mathcal{G}} |f(y)| dy \leq \frac{3^n}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy = \frac{3^n}{\lambda} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Como A es un conjunto medible Lebesgue (por ser Mf medible Lebesgue, Teorema 2.5), de la propiedad de regularidad de la medida de Lebesgue sabemos que $|A| = \sup \{\lambda(K) : K \subset A \text{ subconjunto compacto}\}$, y por tanto deducimos $|A| \leq \frac{3^n}{\lambda} \|f\|_1$, con lo que se cumple la desigualdad (2.4) para Mf en el caso $p = 1$. $\square$

Este último teorema nos permite demostrar el teorema de diferenciación de Lebesgue, que lo enunciaremos y demostraremos a partir de [5, p. 97].

Teorema 2.13. (de diferenciación de Lebesgue)

Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(s) ds = f(x) \quad (2.6)$$

Demostración.

El hecho de que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ implica que f es L^1 sobre el espacio ambiente conformado por cualquier bola, pues son conjuntos medibles y acotados; podemos pues restringir nuestro espacio a una bola lo suficientemente grande sin cambiar nada, gracias a la naturaleza del límite en (2.6). Sea esta bola $B \subset \mathbb{R}^n$ el espacio ambiente durante esta demostración.

Como $f \in L^1(B)$, podemos usar el Teorema 2.41 en [5, p. 70] y por tanto podemos asegurar que, fijado un $\varepsilon > 0$, existe una función continua g sobre B tal que $\int_B |f(y) - g(y)| dy < \varepsilon$.

Dado que g es continua, $\forall \varepsilon' > 0 \exists \delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$ con $x, y \in B$, entonces $|g(y) - g(x)| < \varepsilon'$. Por tanto, podemos asegurar en la misma situación que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{|B(x, \delta)|} \int_{B(x, \delta)} g(s) ds - g(x) \right| &= \frac{1}{|B(x, \delta)|} \cdot \left| \int_{B(x, \delta)} (g(s) - g(x)) ds \right| \\ &< \frac{1}{\delta} \cdot \int_{B(x, \delta)} \varepsilon' ds = \frac{1}{\delta} \cdot \varepsilon' \cdot \delta = \varepsilon'. \end{aligned}$$

con lo que se verifica la identidad (2.6) para g .

Por tanto,

$$\begin{aligned} \limsup_{r \rightarrow 0} \left| \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(s) ds - f(x) \right| &= \limsup_{r \rightarrow 0} \left| \frac{1}{|B(x, r)|} \int f(s) - g(s) ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{|B(x, r)|} \int g(s) ds - g(x) + g(x) - f(x) \right| \\ &\leq \limsup_{r \rightarrow 0} \left| \frac{1}{|B(x, r)|} \int f(s) - g(s) ds \right| \\ &\quad + \limsup_{r \rightarrow 0} \left| \frac{1}{|B(x, r)|} \int g(s) ds - g(x) \right| + \limsup_{r \rightarrow 0} |g(x) - f(x)|. \end{aligned}$$

Estudiemos el valor de cada uno de estos tres últimos términos:

1. $\limsup_{r \rightarrow 0} \left| \frac{1}{|B(x, r)|} \int f(s) - g(s) ds \right| \leq \sup_{r > 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(s) - g(s)| ds = M(f - g)(x).$
2. $\limsup_{r \rightarrow 0} \left| \frac{1}{|B(x, r)|} \int g(s) ds - g(x) \right| = \lim_{r \rightarrow 0} \left| \frac{1}{|B(x, r)|} \int g(s) ds - g(x) \right| = 0.$
3. $\limsup_{r \rightarrow 0} |g(x) - f(x)| = |g(x) - f(x)|.$

Por tanto, prosiguiendo con las desigualdades,

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \left| \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(s) ds - f(x) \right| \leq M(f - g)(x) + |g(x) - f(x)|. \quad (2.7)$$

Para demostrar (2.6), es suficiente ver que para cada $\lambda > 0$ el conjunto

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r \rightarrow 0} \left| \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(s) ds - f(x) \right| > \lambda \right\}$$

es de medida nula. La desigualdad (2.7) nos permite ver que esto se puede obtener verificando que los conjuntos $\{x \in \mathbb{R}^n : |M(f - g)(x)| > \lambda\}$ y $\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x) - f(x)| > \lambda\}$ son ambos de medida nula.

En el caso del primer conjunto, retomando el valor de ε considerado al principio, por el Teorema 2.12 se tiene

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |M(f - g)(x)| > \lambda\}| \leq \frac{c_1}{\lambda} \|f - g\|_1 = \frac{c_1}{\lambda} \int_B |f(y) - g(y)| dy < \frac{c_1 \varepsilon}{\lambda},$$

y en el caso del segundo conjunto, por la desigualdad de Chebychev (véase [5, p. 193]),

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) - g(x)| > \lambda\}| \leq \frac{\|f - g\|_1}{\lambda} < \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

Dado que ε es arbitrario, se sigue que ambos conjuntos son de medida nula. □

Acabamos de demostrar equivalentemente que si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\mathbb{R}^n \setminus \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} (f(y) - f(x)) dy = 0 \right\}$$

es un conjunto de medida nula. Podemos probar algo más fuerte reproduciendo las ideas en [5, p. 97], [7, p. 41] y [12, p. 106]: que lo que se considera como el conjunto de Lebesgue definido por

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y) - f(x)| dy = 0 \right\}$$

verifica que su complementario es de medida nula, o equivalentemente,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y) - f(x)| dy = 0 \text{ para casi todo } x.$$

Corolario 2.14. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, entonces el complementario del conjunto de Lebesgue de f es un conjunto de medida nula.

Demostración. Si $q \in \mathbb{Q}^n$, aplicando el Teorema 2.13 a $g_q(x) = |f(x) - q| \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ obtenemos que, salvo en un conjunto de medida nula E_q , se verifica la identidad

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y) - q| dy = |f(x) - q|.$$

Sea $E = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^n} E_q$, que verifica $|E| = 0$ por ser la unión numerable de conjuntos de medida nula (véase [5, p. 26]). Si $x \in \mathbb{R}^n$ con $x \notin E$ tendremos que para cada $\varepsilon > 0$ podemos escoger un cierto $q_\varepsilon \in \mathbb{Q}^n$ con $|f(x) - q_\varepsilon| < \varepsilon$, de manera que

$$|f(y) - f(x)| = |f(y) - q_\varepsilon + q_\varepsilon - f(x)| < |f(y) - q_\varepsilon| + |f(x) - q_\varepsilon| < |f(y) - q_\varepsilon| + \varepsilon.$$

Entonces podemos afirmar

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y) - f(x)| dy &\leq \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y) - q_\varepsilon| dy \\ &\quad + \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \varepsilon dy \\ &= \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y) - q_\varepsilon| dy + \varepsilon. \end{aligned}$$

Aplicando límites superiores en ambos lados de la ecuación,

$$\begin{aligned} \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y) - f(x)| dy &< \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y) - q_\varepsilon| dy + \varepsilon \\ &= |f(x) - q_\varepsilon| + \varepsilon < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

con lo que hemos concluido la demostración al ser $\varepsilon > 0$ arbitrario. □

Capítulo 3

Operador maximal para bolas y medidas arbitrarias

En el anterior capítulo establecimos el teorema de diferenciación de Lebesgue para un operador maximal muy concreto: el centrado en bolas euclídeas (norma $p = 2$). La Definición 2.3 considera no obstante bolas de norma $1 \leq p \leq \infty$ (siendo el caso $p = \infty$ cubos) y los que hemos llamado «no centrados». Más tarde veremos incluso que podemos no restringirnos únicamente a bolas de norma p sino también a otros tipos de familias de conjuntos más generales.

3.1. Operadores maximales asociados a normas no euclídeas

En esta sección nos ocuparemos de demostrar el resultado de diferenciación para el resto de operadores contemplados en la Definición 2.3. Afortunadamente, la equivalencia puntual que se dará entre estos operadores nos permitirá llegar a algunas propiedades que ya vimos que tenía el operador maximal estándar. Esta es una forma de proceder habitual (véase el comentario en [3, p. 30]).

Definición 3.1. (Equivalencia puntual de operadores)

Diremos que dos operadores T y T' definidos en el mismo espacio de funciones $\mathcal{F}$ son puntualmente equivalentes si existen constantes $c, C > 0$, independientes de $f \in \mathcal{F}$ y de $x \in \text{Dom } f$, tales que

$$c \cdot Tf(x) \leq T'f(x) \leq C \cdot Tf(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Se comprueba fácilmente que esta es una relación de equivalencia, hecho al que haremos referencia posteriormente.

Reproducimos previamente un lema sobradamente conocido y un corolario que recoge unas propiedades que, como veremos, tienen lugar gracias a ciertas características especiales de la medida de Lebesgue que no todas las medidas comparten.

Lema 3.2. (Equivalencia de normas en $\mathbb{R}^n$)

Para todo $1 \leq p, q \leq \infty$ existen constantes $0 < c_{p,q} \leq C_{p,q} < \infty$ tales que

$$c_{p,q} \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq C_{p,q} \|x\|_q \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Corolario 3.3. Para todos $1 \leq p, q \leq \infty$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, se cumple que $B_p(x, r) \subset B_q(x, C_{p,q}r)$ y asimismo $|B_p(x, r)| \leq (C_{p,q})^n |B_q(x, r)|$.

Demostración.

Si $y \in B_p(x, r)$, entonces $\|y - x\|_p < r$. Por el Lema 3.2, tenemos que existe una constante $C_{p,q} > 0$ de manera que $\|z\|_p \leq C_{p,q} \|z\|_q \forall z \in \mathbb{R}^n$; particularizando esta desigualdad para $z := y - x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|y - x\|_q \leq C_{p,q} \|y - x\|_p \leq C_{p,q} r,$$

luego $y \in B_q(x, C_{p,q}r)$.

Finalmente, para demostrar $|B_p(x, r)| \leq (C_{p,q})^n |B_q(x, r)|$ partimos de $B_p(x, r) \subset B_q(x, C_{p,q}r)$, y por la propiedad de monotonía de las medidas (véase [5, p. 25]), $|B_p(x, r)| \leq |B_q(x, C_{p,q}r)|$. La propiedad de invarianza por traslaciones de la medida de Lebesgue nos permite establecer $|B_q(x, C_{p,q}r)| = |B_q(0, C_{p,q}r)|$. Asimismo, por la propiedad de la medida de Lebesgue de «comportamiento simple frente a dilataciones» (véase [5, p. 37]), en $\mathbb{R}^n$ se tiene

$$|B_q(0, C_{p,q}r)| = (C_{p,q})^n |B_q(0, r)|,$$

y por la invarianza por traslaciones de la medida de Lebesgue,

$$(C_{p,q})^n |B_q(0, r)| = (C_{p,q})^n |B_q(x, r)|.$$

Juntando ambas ecuaciones,

$$|B_p(x, r)| \leq (C_{p,q})^n |B_q(x, r)|.$$

□

Llegamos entonces al resultado de equivalencia puntual de los operadores maximales de Hardy-Littlewood presentados en la Definición 2.3. Seguiremos maneras de proceder similares a las de la demostración del Teorema 2.7, junto con las sugerencias habituales presentadas en fuentes como [5, p. 100], [6, p. 87] y [7, p. 44].

Teorema 3.4. Los operadores maximales de Hardy-Littlewood de la Definición 2.3 son todos ellos puntualmente equivalentes entre sí.

Demostración.

Sean $1 \leq p, q \leq \infty$ fijos arbitrarios. Demostraremos que M_p es puntualmente equivalente a M_q y que asimismo M_p lo es a M_p^* . Una vez conseguido esto, las propiedades de simetría y transitividad de la relación de equivalencia puntual nos proporcionan el resultado del enunciado.

- Demostración de la equivalencia puntual de M_p y M_q .

Dado que p, q no poseen ninguna relación de orden establecida, es suficiente demostrar la desigualdad $M_p f(x) \leq C M_q f(x)$.

Sea $r > 0$. Por el Corolario 3.3 podemos asegurar $B_p(x, r) \subset B_q(x, C_{p,q}r)$ y $|B_p(x, r)| \leq (C_{p,q})^n |B_q(x, r)|$ para un cierto $C_{p,q} > 0$, de modo que podemos decir

$$\frac{1}{|B_p(x, r)|} \int_{B_p(x, r)} |f(s)| ds \leq \frac{|B_q(x, C_{p,q}r)|}{|B_p(x, r)|} \frac{1}{|B_q(x, C_{p,q}r)|} \int_{B_q(x, C_{p,q}r)} |f(s)| ds.$$

Denotando $C' := |B_q(x, C_{p,q}r)|/|B_p(x, r)|$ y tomando supremos obtenemos la desigualdad deseada.

■ Demostración de la equivalencia puntual de M_p y M_p^*

La desigualdad $M_p \leq M_p^*$ es trivial. Por otra parte, si $x \in B_p(y, r)$ para algunos $y \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, entonces $B_p(y, r) \subset B_p(x, 2r)$ por la desigualdad triangular de la norma $\|\cdot\|_p$. Usando esta inclusión y la monotonía de la integral, obtenemos

$$\int_{B_p(y, r)} |f(s)| ds \leq \int_{B_p(x, 2r)} |f(s)| ds.$$

Además, usando $|B_p(y, r)| = |B_p(0, 1)| \cdot r^n$ y $|B_p(x, 2r)| = |B_p(0, 1)| \cdot (2r)^n = 2^n \cdot |B_p(y, r)|$ deducimos que

$$\frac{1}{|B_p(y, r)|} \int_{B_p(y, r)} |f(s)| ds \leq \frac{2^n}{|B_p(x, 2r)|} \int_{B_p(x, 2r)} |f(s)| ds.$$

Tomando supremos sobre todas las bolas B_p que contienen a x , concluimos que $M_p^* f(x) \leq 2^n M_p f(x)$. $\square$

Necesitamos demostrar la medibilidad Lebesgue de todos los operadores maximales para que tenga sentido el concepto de ser débil (p, p) .

Proposición 3.5. *Todos los operadores maximales definidos en la Definición 2.3 son medibles Lebesgue.*

Demostración.

■ Demostración para los operadores maximales no centrados

Sea $\lambda > 0$ y definamos

$$A := \{x \in \mathbb{R}^n : M_p^* f(x) > \lambda\}.$$

Queremos ver que A es un conjunto medible Lebesgue. Todo conjunto boreliano en $\mathbb{R}^n$ es medible Lebesgue (por definición, véase [5, p. 37]) y por tanto todos los abiertos de $\mathbb{R}^n$ lo son, por lo que será suficiente ver que A es abierto para concluir que es medible Lebesgue.

Sea $x \in A$. Queremos demostrar que existe una bola que contiene a x y que está contenida en A .

Para lo primero, como $x \in A$, se verifica entonces $\sup_{x \in B_p} \frac{1}{|B_p|} \int_{B_p} |f(s)| ds > \lambda$. Por la definición del supremo existe entonces una bola abierta $B_p(y, r)$ con algunos $y \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, y tal que $x \in B_p(y, r)$ y $\frac{1}{|B_p(y, r)|} \int_{B_p(y, r)} |f(s)| ds > \lambda$.

Ahora solo queda demostrar que $B_p(y, r) \subset A$. Si $z \in B_p(y, r)$, entonces por la definición de operador maximal no centrado $M_p^* f(z) \geq \frac{1}{|B_p(y, r)|} \int_{B_p(y, r)} |f(s)| ds > \lambda$. Por tanto, $z \in A$, luego $B_p(y, r) \subset A$.

■ Demostración para los operadores maximales centrados

El argumento es idéntico al visto en la Proposición 2.5, dado que la demostración proporcionada es realmente independiente del valor de p . $\square$

Una vez hemos verificado la medibilidad ya tiene sentido plantearse la cuestión de la condición de ser débil $(1, 1)$: a continuación veremos que si un operador es débil $(1, 1)$, entonces un operador puntualmente equivalente a aquél también lo es. Eso nos permite deducir automáticamente que todos los operadores maximales de Hardy-Littlewood que hemos definido, con norma $1 \leq p \leq \infty$ centrados o no centrados, son débil $(1, 1)$.

Proposición 3.6. *Dados dos operadores M_1, M_2 puntualmente equivalentes y medibles, si M_2 es de tipo débil $(1, 1)$, entonces M_1 también lo es.*

Demostración.

Por definición, M_2 es de tipo débil $(1, 1)$ si existe $c > 0$ independientes de f y λ tales que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_2 f(x) > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda} \cdot \|f\|_1 \quad \forall \lambda > 0.$$

Al ser M_1 y M_2 puntualmente equivalentes, $M_1 f(x) \leq C M_2 f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por tanto,

$$\{x \in \mathbb{R}^n : M_1 f(x) > \lambda\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : C M_2 f(x) > \lambda\} = \{x \in \mathbb{R}^n : M_2 f(x) > \lambda/C\}.$$

Como la desigualdad se cumple para todo $\lambda > 0$, en particular se verificará para λ/C , de modo que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_1 f(x) > \lambda\}| \leq |\{x \in \mathbb{R}^n : M_2 f(x) > \lambda/C\}| \leq \frac{c}{\lambda/C} \cdot \|f\|_1 = \frac{c \cdot C}{\lambda} \cdot \|f\|_1.$$

y $C' := c \cdot C > 0$ es una constante independiente de f y λ , por lo que M_1 es de tipo débil $(1, 1)$. $\square$

Ahora ya podremos demostrar el Teorema de Diferenciación de Lebesgue considerando ya no solo bolas euclídeas centradas en $x \in \mathbb{R}^n$ y de radio $r \in \mathbb{R}$, sino bolas de norma $1 \leq p \leq \infty$ centradas o no centradas en $x \in \mathbb{R}$.

La demostración es análoga a la del Teorema 2.13: es independiente de la norma $1 \leq p \leq \infty$ que se escoja, y en el caso de los operadores maximales no centrados, siempre podemos reducirlo al caso estándar escogiendo bolas centradas en x de un radio suficiente para cubrir las bolas no centradas en x . En particular, si $x \in B_p(z, r)$ para algunos $z \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, podemos trabajar con las bolas centradas en $x \in B_p(x, 2r)$ pues $B_p(z, r) \subset B_p(x, 2r)$ por la desigualdad triangular. Este argumento no es sino es un caso particular de lo que [5, p. 98] define por familias de conjuntos borelianos que, rebautizándolo en castellano, «se encogen de buena manera», familias mediante las cuales también se llega a un correspondiente teorema de diferenciación.

Observación 3.7. La equivalencia puntual de operadores implica la acotación de todos ellos, y por tanto se cumple el Teorema de Diferenciación de Lebesgue para las familias de conjuntos asociadas a dichos operadores. Sin embargo, se puede demostrar el teorema de diferenciación asociado a las bolas no centradas sin pasar por demostrar la equivalencia puntual, y eso es precisamente lo que se hace en [5, p. 98]. Replicando dicho argumento, sea $x \in B_p(z, r)$. Entonces se puede deducir

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B_p(z, r)|} \int_{B_p(z, r)} |f(y) - f(x)| dy &\leq \frac{1}{|B_p(z, r)|} \int_{B_p(x, 2r)} |f(y) - f(x)| dy \\ &= \frac{|B_p(x, 2r)|}{|B_p(z, r)|} \frac{1}{|B_p(x, 2r)|} \int_{B_p(x, 2r)} |f(y) - f(x)| dy \\ &= 2^n \cdot \frac{1}{|B(x, 2r)|} \int_{B(x, 2r)} |f(y) - f(x)| dy. \end{aligned}$$

Cuando $r \rightarrow 0$ también $2r \rightarrow 0$, y por el Corolario 2.14 la expresión de más a la derecha tiende a cero y por tanto también $\frac{1}{|B_p(z, r)|} \int_{B_p(z, r)} |f(y) - f(x)| dy$, con lo que en particular se sigue el teorema de diferenciación.

En esta sección hemos demostrado que el teorema de diferenciación aplica en $x \in \mathbb{R}^n$ para

- Bolas de norma $1 \leq p \leq \infty$ centradas en $x \in \mathbb{R}^n$,
- bolas de norma $1 \leq p \leq \infty$ no centradas en $x \in \mathbb{R}^n$,

- y usando la medida de Lebesgue.

En efecto, con respecto a lo último, hemos hecho uso en repetidas ocasiones de las propiedades descritas de invarianza por traslaciones y «comportamiento simple frente a dilataciones», algo que no cumplen todas las medidas. Observaremos que la medida de Lebesgue es un caso particular de las medidas doblantes, que son medidas más generales con las que también se verificará el teorema de diferenciación.

3.2. Teorema de Besicovitch

Si bien el primer resultado de cubrimiento que vimos, el Teorema 2.2, destacaba por su sencillez y por ser aplicable en buena cantidad de situaciones, en esta sección mostraremos un resultado más general que nos permitirá establecer en la Sección 3.3 la acotación débil $(1, 1)$ de operadores maximales más generales en cuanto a las medidas de partida. Enunciamos y demostramos lo que se conoce como Teorema de Besicovitch desde [7, p. 2], y nosotros nos hemos encargado de completar los detalles y argumentos que allí se dejan al lector.

Teorema 3.8. (Teorema de Besicovitch versión general)

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado, y para cada $x \in A$ se tiene un cubo cerrado $Q(x)$ centrado en x . Entonces de la familia $\mathcal{F} = \{Q(x) : x \in A\}$ podemos extraer una sucesión $\{Q_k\}_k$ (posiblemente finita) de manera que:

1. $A \subset \bigcup_k Q_k$.
2. Ningún punto de $\mathbb{R}^n$ está en más de $\theta(n)$ (un número que solo depende de n) cubos de la sucesión $\{Q_k\}_k$, es decir, para cada $z \in \mathbb{R}^n$

$$\sum \chi_{Q_k}(z) \leq \theta(n).$$

3. La sucesión $\{Q_k\}$ puede ser distribuida en $\xi(n)$ (un número que solo depende de n) familias de cubos disjuntos.

Demostración.

i) Sea

$$s_0 := \sup\{\ell(Q(x)) : x \in A\}$$

donde $\ell(\cdot)$ es la función que a cada cubo le corresponde su longitud lateral.

Si $s_0 = \infty$ entonces podemos escoger un único cubo $Q(x)$ de manera que $A \subset Q(x)$, con lo que concluiría este apartado i).

Si $s_0 < \infty$, por definición de supremo podemos escoger $Q_1 := Q(x_1) \in \{Q(x) : x \in A\}$ tal que $\frac{s_0}{2} < \ell(Q_1)$. Sea ahora

$$s_1 := \sup\{\ell(Q(x)) : x \in A \setminus Q_1\}$$

Escogemos Q_2 con centro $x_2 \in A \setminus Q_1$ tal que $\frac{s_1}{2} < \ell(Q_2)$. Si tras haber escogido $Q_1, \dots, Q_m$ se tiene que $A \setminus \bigcup_{k=1}^m Q_k = \emptyset$, paramos. Si no, definimos

$$s_m := \sup\left\{\ell(Q(x)) : x \in A \setminus \bigcup_{k=1}^m Q_k\right\}$$

y elegimos $Q_{m+1} := Q(x_{m+1})$ con $x \in A \setminus \bigcup_{k=1}^m Q_k$ tal que $\frac{s_m}{2} < \ell(Q_{m+1})$.

En cada iteración tendremos que $\frac{1}{2}s_{i-1} < \ell(Q_i) \leq s_{i-1}$. Si por el contrario $\ell(Q_i) > s_{i-1}$, eso querría decir que existe un cubo de lado superior al del supremo, es decir, $\ell(Q_i) > \sup \{\ell(Q(x)) : x \in A \setminus \bigcup_{k=1}^m Q_k\}$, absurdo por construcción. En definitiva, obtenemos una sucesión (finita o infinita) $\{Q_k\}_k$ que verifica $\frac{1}{2}s_{i-1} < \ell(Q_i) \leq s_{i-1}$ para $i \geq 1$. Además, otra propiedad inmediata ligada a aplicar supremos sobre estos conjuntos encajados es que s_{kk} es una sucesión no creciente.

Suponiendo por reducción al absurdo que quedara algún $x \in A$ no cubierto (caso solo potencialmente posible si la sucesión de cubos es infinita), entonces $x \in A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$. Por definición de los s_j , se tiene entonces que $0 < \ell(Q(x)) \leq a_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, por lo que $a_m \geq c > 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Pero como $x_i \notin Q(x_j)$ si $i > j$, tenemos una sucesión infinita de puntos (los x_j) separados por una distancia mínima $c > 0$; contradicción con el hecho de que A sea un conjunto acotado. Por tanto, se puede asegurar que $A \subset \bigcup_k Q_k$, lo que se pretendía demostrar.

ii) Primero vamos a demostrar el resultado auxiliar de que si $Q_i, Q_j \in \{Q_k\}_k$ (familia obtenida tal y como en el apartado anterior), entonces $\frac{1}{3}Q_i \cap \frac{1}{3}Q_j = \emptyset$ para $i \neq j$ (denotamos por $\frac{1}{3}Q$ el cubo con mismo centro que Q y longitud lateral reducida a un factor $\frac{1}{3}$).

Supongamos por reducción al absurdo que existen $i \neq j$ de manera que $\frac{1}{3}Q_i \cap \frac{1}{3}Q_j \neq \emptyset$, y sin pérdida de generalidad, supongamos $i > j$. Vamos a probar la relación $\ell(Q_j) > \frac{1}{2}\ell(Q_i)$ para $i > j$, que nos servirá como herramienta.

Por construcción, respectivamente $\ell(Q_j) > \frac{1}{2}s_{j-1}$ y $\ell(Q_i) > \frac{1}{2}s_{i-1}$, y como $s_{j-1} \geq s_{i-1}$ al ser $\{s_n\}_n$ una sucesión no creciente, entonces $\ell(Q_j) > \frac{1}{2}s_{j-1} \geq \frac{1}{2}s_{i-1}$ y por tanto $\ell(Q_j) > \frac{1}{2}s_{i-1}$.

De la relación $\frac{1}{2}s_{i-1} < \ell(Q_i) \leq s_{i-1}$ sabemos $s_{i-1} \geq \ell(Q_i)$ y por tanto, juntándolo todo,

$$\ell(Q_j) > \frac{1}{2}s_{i-1} \geq \frac{1}{2}\ell(Q_i).$$

Por tanto, $\ell(Q_j) > \frac{1}{2}\ell(Q_i)$ para $i > j$.

Supongamos ahora que existe un $y \in \frac{1}{3}Q_i \cap \frac{1}{3}Q_j$. Esto implica necesariamente que

$$\|y - x_i\|_{\infty} \leq \frac{(\ell(Q_i)/3)}{2}, \quad \|y - x_j\|_{\infty} \leq \frac{(\ell(Q_j)/3)}{2}$$

y por la desigualdad triangular,

$$\|x_i - x_j\|_{\infty} \leq \|x_i - y\|_{\infty} + \|y - x_j\|_{\infty} = \|y - x_i\|_{\infty} + \|y - x_j\|_{\infty}.$$

Por tanto,

$$\|x_i - x_j\|_{\infty} \leq \|y - x_i\|_{\infty} + \|y - x_j\|_{\infty} \leq \frac{\ell(Q_i)}{6} + \frac{\ell(Q_j)}{6} <_{\ell(Q_j) > \frac{1}{2}\ell(Q_i) \text{ si } i > j} \frac{2\ell(Q_j)}{6} + \frac{\ell(Q_j)}{6} = \frac{\ell(Q_j)}{2}.$$

Sabiendo que $\ell(Q_j) > \frac{1}{2}\ell(Q_i)$ si $i > j$,

$$\|x_i - x_j\|_{\infty} \leq \frac{\ell(Q_i)}{6} + \frac{\ell(Q_j)}{6} < \frac{2\ell(Q_j)}{6} + \frac{\ell(Q_j)}{6} = \frac{\ell(Q_j)}{2}.$$

Pero entonces la distancia entre x_i y x_j es menor estrictamente que $\frac{\ell(Q_j)}{2}$, por lo que $x_i \in Q_j$. Esto es absurdo por la construcción de la sucesión $\{Q_k\}_k$ pues $i > j$. Por tanto, $\frac{1}{3}Q_i \cap \frac{1}{3}Q_j = \emptyset$.

Una vez probada esta herramienta auxiliar, sea $z \in \mathbb{R}^n$. Proyectemos z sobre el eje $1 \leq k \leq n$ de coordenadas, $(z)_k$. Ahora que ya sabemos que todos los cubos que recubren z verifican $\frac{1}{3}Q_i \cap \frac{1}{3}Q_j = \emptyset$ para $i \neq j$, imaginemos

estos cubos contraídos a un tercio y que no se solapan, proyectados sobre el eje de coordenadas. La situación general podría ser una como la mostrada en la Figura 3.1.

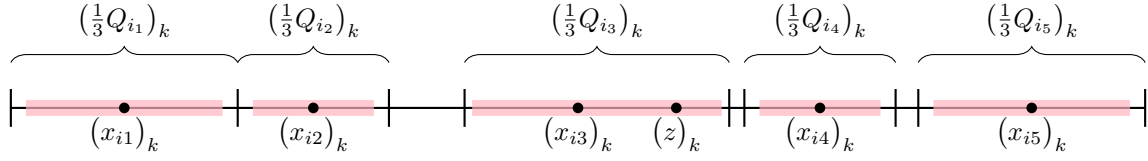


Figura 3.1: Cubos contraídos a un tercio y no solapados sobre el eje k de coordenadas.

El enunciado de ii) se reduce a preguntarnos, en cada eje, ¿cuántos de estos intervalos sin solapar puedo disponer como máximo de manera que multiplicando su longitud de lado por 3 cubran todos ellos a $(z)_k$? Vamos a demostrar que a uno de los lados de z , el número máximo de intervalos son tres.

Supongamos por reducción al absurdo cuatro de estos intervalos dispuestos, sin pérdida de generalidad, a la izquierda de $(z)_k$. Renombremos estos intervalos a $Q'_{i_j} = (\frac{1}{3}Q_{i_j})_k$. Supongamos que los intervalos están dispuestos de izquierda a derecha $Q'_{i_1}, Q'_{i_2}, Q'_{i_3}, Q'_{i_4}$, sin ninguna relación de orden a priori entre los distintos $i_j \in \{1, \dots, 4\}$.

Trabajamos ahora, en lugar de con el operador longitud lateral $\ell(\cdot)$, con el operador radio $r(\cdot)$, que constituye el semilado del cubo. Contraer la longitud de lado del cubo a $\frac{1}{3}$ supone reducir en este mismo factor su radio.

Para que $(Q_{i_1})_k = 3 \cdot Q'_{i_1}$ pueda cubrir a $(z)_k$, deberá verificarse como mínimo que

$$3r(Q'_{i_1}) > 2r(Q'_{i_2}) + 2r(Q'_{i_3}) + 2r(Q'_{i_4}),$$

pues $2r(Q'_{i_2}) + 2r(Q'_{i_3}) + 2r(Q'_{i_4}) < d((x_{i_1})_k, z_k)$.

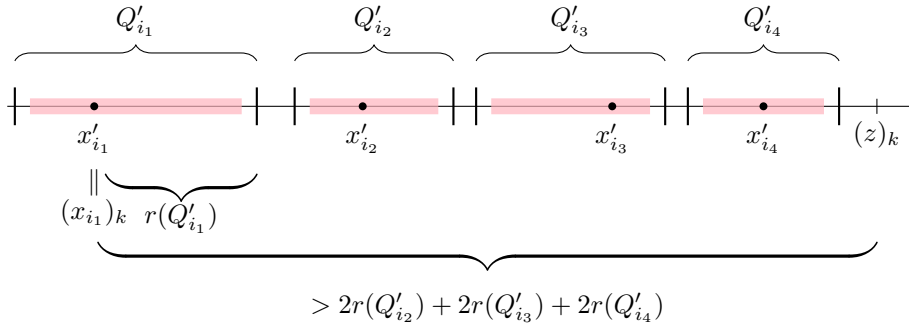


Figura 3.2: Ilustración del argumento que terminará en contradicción.

Sea $j \in \{2, 3, 4\}$.

- Si $i_1 < i_j$,

Si $i_1 < i_j$, entonces

$$\begin{aligned} 2\ell(Q_{i_j}) > \ell(Q_{i_1}) &\Leftrightarrow 2 \cdot 3 \cdot \ell(Q'_{i_j}) > 3 \cdot \ell(Q'_{i_1}) &\Leftrightarrow 2\ell(Q'_{i_j}) > \ell(Q'_{i_1}) \\ &\Leftrightarrow \ell(Q'_{i_1}) < 2\ell(Q'_{i_j}) &\Leftrightarrow r(Q'_{i_1}) < 2r(Q'_{i_j}). \end{aligned}$$

- Si $i_1 > i_j$,

Si $i_1 > i_j$, entonces

$$\ell(Q_{i_1}) \leq s_{i_1-1} \leq s_{i_1-2} \leq \dots \leq s_{i_j+1} \leq s_{i_j} \leq s_{i_j-1},$$

por lo que

$$r(Q_{i_1}) = \frac{\ell(Q_{i_1})}{2} \leq \frac{s_{i_j-1}}{2}.$$

Como $\ell(Q_m) \in (\frac{s_{m-1}}{2}, s_{m-1}]$ se cumple $s_{i_j-1} < 2\ell(Q_{i_j})$ o equivalentemente $\frac{s_{i_j-1}}{2} < 2r(Q_{i_j})$, de modo que finalmente

$$r(Q_{i_1}) < 2r(Q_{i_j}) \Leftrightarrow r(Q'_{i_1}) < 2r(Q'_{i_j}).$$

Por tanto, independientemente de la relación de orden entre los distintos $i_j \in \{1, \dots, 4\}$ se puede asegurar $r(Q_{i_1}) < 2r(Q_{i_j})$ para todo $j \in \{2, 3, 4\}$. Sumando todas estas consecuentes desigualdades,

$$r(Q_{i_1}) = 3r(Q'_{i_1}) < 2r(Q'_{i_2}) + 2r(Q'_{i_3}) + 2r(Q'_{i_4}) < d((x_{i_1})_k, z_k)$$

por lo que $z \notin Q_{i_1}$, absurdo.

Por tanto, solo puede haber tres intervalos contraídos a la izquierda de $(z)_k$, tres a la derecha, y quizás un intervalo contraído que ya contenga a $(z)_k$: en total, una cota superior de siete.

Llevando a cabo el mismo procedimiento en todas las n coordenadas, podemos establecer la cota de que no más de $\theta(n) = 7^n$ cubos de $\{Q_k\}_k$ cubren a z , una cifra que depende únicamente del espacio $\mathbb{R}^n$:

$$\sum \chi_{Q_k}(z) \leq \theta(n) = 7^n.$$

iii) Un cubo interseca con otro si y solo si uno cubre alguno de los vértices del otro. Cojamos cualquiera de los vértices de un cubo $Q_j \in \{Q_k\}_k$. Por el apartado anterior, a lo sumo 7^n cubos de $\{Q_k\}_k$ cubren este vértice. Repitiendo la operación para cada uno de los 2^n vértices de Q_j , se tiene que Q_j tiene alguno de sus vértices cubierto por un número de cubos no superior a $7^n \cdot 2^n = 14^n$.

Se pueden establecer un máximo de $\xi(n) = 14^n + 1$ subfamilias disjuntas de cubos. Si la sucesión $\{Q_k\}_k$ es finita y de número de elementos menor o igual que $\xi(n)$, es trivial. Si no, sean inicialmente $Q_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, Q_{14^n+1} \in \mathcal{F}_{14^n+1}$. Necesariamente Q_{14^n+2} debe ser disjunto con alguna de las familias (unitarias de momento) $\mathcal{F}_{k_0}$ con algún $k_0 = 1, \dots, 14^n + 1$, por la cota establecida y por el principio del palomar. Entonces añadimos $Q_{14^n+2} \in \mathcal{F}_k$ y por tanto $\mathcal{F}_k$ mantiene su propiedad de ser familia disjunta de cubos. Se puede hacer lo propio con $k = 14^n + 3$, $k = 14^n + 4$, y así sucesivamente. $\square$

Observación 3.9.

Es pertinente incluir algunas de las observaciones que en [7, p. 5] se introducen en relación con este resultado, pues nos permite usarlo en más escenarios que los que el enunciado señala. En particular, el teorema precedente es válido para los siguientes escenarios:

1. El teorema es válido si A no es acotado pero el supremo de las medidas de los cubos es finito.
2. El teorema es válido cuando también consideramos cubos $Q(x)$ no cerrados.
3. El teorema es válido si trabajamos con bolas de norma $1 \leq p \leq \infty$.

4. En el teorema los puntos x no tienen por qué estar centrados en $Q(x)$, mientras no estén en la frontera de $Q(x)$ o arbitrariamente cerca de la misma.

3.3. Operadores maximales asociados a medidas arbitrarias

Si queremos estudiar versiones más generales del operador maximal de Hardy-Littlewood, podemos ir por la vía de generalizar los familias de conjuntos, o bien considerar otras medidas diferentes de la de Lebesgue.

La primera opción es corta: hasta ahora hemos trabajado en bolas de norma p , pero si tan solo damos el siguiente paso, en el que pediremos que la familia de conjuntos sean rectángulos de lados paralelos a los ejes de tamaño arbitrarios (el caso que generaliza a los cubos, siendo estas bolas de norma $p = \infty$ en $\mathbb{R}^n$), empezamos a ver comportamientos patológicos que imposibilitan llegar a un teorema de diferenciación. En el Capítulo 4 desarrollaremos en mayor profundidad esta cuestión.

En esta sección estudiaremos qué ocurre partiendo de otras medidas. Recordemos que a lo largo del trabajo hemos usado en todo momento la medida de Lebesgue, obteniendo muchos resultados por medio de usar ciertas de sus propiedades que no comparten todas las medidas. Nuestra tarea será ver hasta qué punto podremos generalizar la medida conservando el teorema de diferenciación.

Empezamos considerando una medida μ en $\mathbb{R}^n$ a la que solo le pediremos las siguientes propiedades básicas: que sea boreliana, regular, σ -finita y $0 < \mu(B) < \infty$ para toda bola B .

Consideremos, sobre bolas de norma p , el operador maximal centrado

$$M_\mu f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y)| d\mu(y),$$

y el operador maximal no centrado

$$M_\mu^* f(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| d\mu(y).$$

Notemos inmediatamente que $M_\mu f(x) \leq M_\mu^* f(x)$ para todo $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $x \in \text{Dom} f$.

Recordemos que la manera de proceder que seguimos es demostrar que el operador con el que estemos trabajando esté acotado adecuadamente para controlar el tamaño de los promedios locales; en el contexto del teorema de diferenciación de Lebesgue en $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, esto se traducía a verificar que se cumple que el operador sea de tipo débil $(1, 1)$. La pregunta a resolver será para qué operadores y bajo qué circunstancias esto ocurre. Las siguientes secciones se ocuparán de dar las respuestas.

3.3.1. Caso operador centrado

Afortunadamente, el operador centrado es débil $(1, 1)$ sin necesidad de exigir nada más de las premisas genéricas que hemos planteado. Para probar este hecho procederemos de una manera muy similar a la demostración del Teorema 2.12. Esta demostración es independiente de la norma p que se escoja para las bolas, y la medida μ comparte con la de Lebesgue las propiedades de regularidad y σ -finitud que se usan de esta. No obstante, como veremos a continuación, en la cadena de desigualdades que concluyen en el resultado se usa la propiedad $|B(x, 3r)| = 3^n |B(x, r)|$ para $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$; ciertamente esta característica de la medida de Lebesgue no la comparten todas las medidas, y es un caso particular de la propiedad que ya hemos presentado con el nombre de «comportamiento simple frente a dilataciones». Esta vez deberemos emplear un cubrimiento de tipo Besicovitch.

Teorema 3.10. *El operador maximal de Hardy-Littlewood centrado en bolas de norma $1 \leq p \leq \infty$ es un operador de tipo débil $(1, 1)$.*

Demostración.

Sea un $\lambda > 0$ arbitrario fijo, $A = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$.

Si $|A| = 0$, se verifica la desigualdad deseada (2.4) trivialmente.

Si por el contrario $|A| > 0$, por la propiedad de regularidad de la medida de Lebesgue existe un subconjunto compacto $K \subset A$ de medida no nula.

Sea $x \in K \subset A$ arbitrario. Como en particular $x \in A$ y por la definición del operador maximal, podemos escoger una bola $B(x, r_x)$ para cierto $r_x > 0$ de manera que $\frac{1}{|B(x, r_x)|} \int_{B(x, r_x)} |f(y)| dy > \lambda$.

Consideramos la familia de todas estas bolas $\{B(x, r_x) : x \in A \cap K = K\}$ que recubren a K . Como K es un conjunto compacto, existe un subrecubrimiento finito $\mathcal{F} = \{B(x_i, r_{x_i}) : 1 \leq i \leq N, x_i \in A \cap K\}$.

Por el Teorema 3.8 existe una subfamilia (finita) de bolas $\mathcal{H}$ de manera que $K \subset \cup \mathcal{H}$ y $\sum_{B \in \mathcal{H}} \chi_B(z) \leq \theta(n)$ para todo $z \in \mathbb{R}^n$. Tenemos pues que, empleando la forma de argumentar en [7, p. 37],

$$\begin{aligned} |K| &\leq |\cup \mathcal{H}| \leq \sum_{B \in \mathcal{H}} |B| < \frac{1}{\lambda} \sum_{B \in \mathcal{H}} \int_B |f(y)| dy = \frac{1}{\lambda} \int_{\cup \mathcal{H}} |f(y)| \sum_{B \in \mathcal{H}} \chi_B(z) dy \\ &\leq \frac{\theta(n)}{\lambda} \int_{\cup \mathcal{H}} |f(y)| dy \leq \frac{\theta(n)}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy = \frac{\theta(n)}{\lambda} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Como A es un conjunto medible Lebesgue (por ser Mf medible Lebesgue, Teorema 2.5), de la propiedad de regularidad de la medida de Lebesgue sabemos que $|A| = \sup \{\lambda(K) : K \subset A \text{ subconjunto compacto}\}$, y por tanto deducimos $|A| \leq \frac{\theta(n)}{\lambda} \|f\|_1$, con lo que se cumple la desigualdad (2.4) para Mf en el caso $p = 1$. $\square$

3.3.2. Caso operador no centrado

Desafortunadamente el operador no centrado M_μ^* sin plantear ninguna hipótesis adicional sobre μ no es débil $(1, 1)$. La demostración que se utiliza para el operador centrado no puede ser adaptada sin más; el teorema de Besicovitch solo aplica a bolas «más o menos centradas» (véase la sexta observación de [7, p. 7]).

Por otra parte, ciertamente nuestro primer teorema de cubrimiento, el Teorema 2.2, no exige bolas centradas. ¿Podremos llegar a una acotación con ella a pesar de que nuestra medida μ pueda no ser una medida con «comportamiento simple por dilataciones»? En realidad, en el caso de $\mathbb{R}^n$ en general, basta con pedir algo ligeramente más débil que esto: que sea doblante. Transcribimos gran parte de la definición de [11], modificándola para nuestros fines.

Definición 3.11. Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, donde μ es una medida boreliana y regular, se llama doblante si existe una constante $C_\mu \geq 1$ de manera que, para todo $x \in X$ y $r > 0$,

$$\mu(B_p(x, 2r)) \leq C_\mu \mu(B_p(x, r))$$

para algún $1 \leq p \leq \infty$.

Nótese que en $X := \mathbb{R}^n$, la equivalencia de normas (Lema 3.2) entraña que si una medida es doblante para algún p en $1 \leq p \leq \infty$, lo es para todos estos p . Como antes, esto nos permite en adelante aligerar la notación prescindiendo del p .

Si μ es doblante podremos seguir usando el cubrimiento del Teorema 2.2 de la siguiente manera, nuevamente reutilizando la estructura del Teorema 2.12.

Teorema 3.12. *Consideramos en $\mathbb{R}^n$ una medida μ boreliana, regular, σ -finita y $0 < \mu(B) < \infty$ para toda bola B . Si μ además es doblante, el operador maximal de Hardy-Littlewood no centrado en bolas de norma $1 \leq p \leq \infty$ es un operador de tipo débil $(1, 1)$.*

Demostración.

Sea un $\lambda > 0$ arbitrario fijo, $A = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$. Si $\mu(A) = 0$, se verifica la desigualdad deseada (2.4) trivialmente.

Si por el contrario $\mu(A) > 0$, por la propiedad de regularidad de μ existe un subconjunto compacto $K \subset A$ de medida no nula.

Sea $x \in K \subset A$ arbitrario. Como en particular $x \in A$ y por la definición del operador maximal, podemos escoger una bola $B(x, r_x)$ para cierto $r_x > 0$ de manera que $\frac{1}{\mu(B(x, r_x))} \int_{B(x, r_x)} |f(y)| dy > \lambda$.

Consideramos la familia de todas estas bolas $\{B(x, r_x) : x \in A \cap K = K\}$ que recubren a K . Como K es un conjunto compacto, existe un subrecubrimiento finito $\mathcal{F} = \{B(x_i, r_{x_i}) : 1 \leq i \leq N, x_i \in A \cap K\}$.

Por el Teorema 2.2, existe una subfamilia de bolas disjuntas $\mathcal{G} = \{B(x_{i_j}, r_{x_{i_j}}) : 1 \leq j \leq M\} \subset \mathcal{F}$ con $M \leq N$ de manera que

$$\begin{aligned} \mu(K) &\leq \mu(\cup \mathcal{F}) \leq \mu(\cup \mathcal{G}^*) \leq \sum_{j=1}^M \mu(B(x_{i_j}, 3r_{x_{i_j}})) \leq \sum_{j=1}^M \mu(B(x_{i_j}, 4r_{x_{i_j}})) \\ &\leq C_\mu \sum_{j=1}^M \mu(B(x_{i_j}, 2r_{x_{i_j}})) \leq C_\mu^2 \sum_{j=1}^M \mu(B(x_{i_j}, r_{x_{i_j}})) \leq \dots \leq \frac{C_\mu^2}{\lambda} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Como A es un conjunto μ -medible, podemos afirmar que de la propiedad de regularidad de μ establecemos $\mu(A) = \sup \{\mu(K) : K \subset A \text{ subconjunto compacto}\}$, y por tanto deducimos $|A| \leq \frac{C_\mu^2}{\lambda} \|f\|_1$, con lo que se cumple la desigualdad (2.4) para Mf en el caso $p = 1$. $\square$

Para el caso particular de $n = 1$, en $\mathbb{R}$, no es necesario que la medida μ sea doblante. Un lema de cubrimiento sencillo y directo que nos permite llegar a ello es el siguiente, que puede encontrarse en [3, p. 31].

Lema 3.13. *Dado un conjunto C , donde para cada $x \in C$ se tiene además una familia finita de intervalos $\mathcal{I}_x = \{I \subset \mathbb{R} : x \in I\}$ que cubren a x , podemos extraer una subfamilia (finita por tanto) $\mathcal{I}'_x$ que verifica $\text{card}(\mathcal{I}'_x) = 2$ y $\bigcup_{I \in \mathcal{I}_x} I = \bigcup_{I' \in \mathcal{I}'_x} I'$.*

Demostración. Esto se consigue sin más que escogiendo el intervalo con extremo izquierdo más alejado de x , y el intervalo con el extremo derecho más alejado de x ; la unión de estos dos intervalos cubren a todos los demás y a x .

Formalmente, si $\mathcal{I}_x = \{[a_i, b_i] : a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$ familia finita (asumiendo sin pérdida de generalidad que estos intervalos son cerrados), existen $j, k \in \mathbb{N}$ tales que valores $a_j = \min\{a_i : i = 1, \dots, n\} \in \mathbb{R}$ y $b_k = \max\{b_i : i = 1, \dots, n\} \in \mathbb{R}$. Si establecemos $\mathcal{I}'_x := \{[a_j, b_j], [a_k, b_k]\}$, tendremos que $x \in I$ para todo $I \in \mathcal{I}'_x$, y asimismo $\cup \mathcal{I}'_x = \cup \mathcal{I}_x$. Veamos esto último:

- $\cup \mathcal{I}'_x \subset \cup \mathcal{I}_x$: trivial por cómo hemos construido $\mathcal{I}'_x$.
- $\cup \mathcal{I}_x \subset \cup \mathcal{I}'_x$:

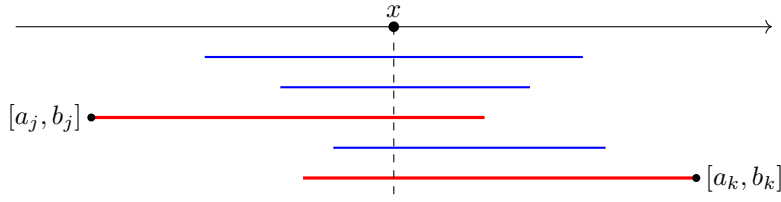


Figura 3.3: Ilustración del argumento de la demostración del Lema 3.13.

Si $y \in [a_l, b_l] \in \mathcal{I}_x$ para algún $l \in \mathbb{N}$, entonces necesariamente $a_j \leq a_l$ y $b_l \leq b_k$. Puede ocurrir bien que $y \leq x$ o que $y > x$; en el primer caso, como $a_j \leq a_l$ y $x \in [a_j, b_j]$ entonces $y \in [a_j, x] \subset [a_j, b_j]$; en el segundo caso, como $b_l \leq b_k$ y $x \in [a_k, b_k]$ entonces $y \in (x, b_k] \subset [a_k, b_k]$. Por tanto, en cualquiera de los dos casos, $y \in I$ para algún $I \in \mathcal{I}'_x$. $\square$

Nuevamente llegamos al resultado correspondiente reutilizando la estructura de los teoremas previos.

Teorema 3.14. *Consideramos en $\mathbb{R}$ una medida μ boreliana, regular, σ -finita y $0 < \mu(B) < \infty$ para toda bola B . Entonces el operador maximal de Hardy-Littlewood no centrado en bolas de norma $1 \leq p \leq \infty$ es un operador de tipo débil $(1, 1)$.*

Demostración.

Sea un $\lambda > 0$ arbitrario fijo, $A = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$. Si $\mu(A) = 0$, se verifica la desigualdad deseada (2.4) trivialmente.

Si por el contrario $\mu(A) > 0$, por la propiedad de regularidad de la medida de Lebesgue existe un subconjunto compacto $K \subset A$ de medida no nula.

Sea $x \in K \subset A$ arbitrario. Como en particular $x \in A$ y por la definición del operador maximal, podemos escoger una bola $B(x, r_x)$ para cierto $r_x > 0$ de manera que $\frac{1}{\mu(B(x, r_x))} \int_{B(x, r_x)} |f(y)| dy > \lambda$.

Consideramos la familia de todas estas bolas $\{B(x, r_x) : x \in A \cap K = K\}$ que recubren a K . Como K es un conjunto compacto, existe un subrecubrimiento finito $\mathcal{F} = \{B(x_i, r_{x_i}) : 1 \leq i \leq N, x_i \in A \cap K\}$.

Por el Lema 3.13 existe una subfamilia (finita) de bolas $\mathcal{H}$ de manera que $K \subset \cup \mathcal{H}$ y $\sum_{B \in \mathcal{H}} \chi_B(z) \leq 2$ para todo $z \in \mathbb{R}$. Entonces, empleando la forma de argumentar en [7, p. 37],

$$\begin{aligned} \mu(K) &\leq \mu(\cup \mathcal{H}) \leq \sum_{B \in \mathcal{H}} \mu(B) < \frac{1}{\lambda} \sum_{B \in \mathcal{H}} \int_B |f(y)| dy = \frac{1}{\lambda} \int_{\cup \mathcal{H}} |f(y)| \sum_{B \in \mathcal{H}} \chi_B(z) dy \\ &\leq \frac{2}{\lambda} \int_{\cup \mathcal{H}} |f(y)| dy \leq \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy = \frac{2}{\lambda} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Como A es un conjunto μ -medible, podemos afirmar que de la propiedad de regularidad de μ establecemos $|A| = \sup \{\lambda(K) : K \subset A \text{ subconjunto compacto}\}$, y por tanto deducimos $|A| \leq \frac{2}{\lambda} \|f\|_1$, con lo que se cumple la desigualdad (2.4) para Mf en el caso $p = 1$. $\square$

Para $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$ el operador no tiene por qué ser débil $(1, 1)$ cuando se deja de imponer que la medida sea doblante. En [14] se provee la caracterización de que este operador es débil $(1, 1)$ cuando a la medida se le pide que sea doblante en un sentido algo menos estricto, y que además sea invariante por rotaciones; además, en este trabajo se referencia el contraejemplo clásico de [10], que demuestra que en $\mathbb{R}^2$ el operador maximal no centrado en bolas con la medida gaussiana estándar $d\mu(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$ (no doblante), con la función $f(x, y) = \delta_{(0, a+1)}$ (delta de Dirac en el punto $(0, a+1)$) para $a > 0$ suficientemente grande, no es de tipo débil $(1, 1)$.

Tipo de op. max./Dimensión	$n = 1$	$n \geq 2$		
Centrado en bolas $1 \leq p \leq \infty$	Débil (1, 1) (Teorema 3.10)	Débil (1, 1) (Teorema 3.10)		
No centrado en bolas $1 \leq p \leq \infty$	Débil (1, 1) (Tma. 3.14)	Medida doblante	Medida no doblante	
		Débil (1, 1) (Teorema 3.12)	General	Invariante por rotaciones
			No débil (1,1) [10]	Caracterización de débil (1,1) bajo algunas pocas premisas adicionales [14]

Cuadro 3.1: Tabla esquemática que determina si los operadores maximales son de tipo débil (1, 1) según tipo, dimensión y medida.

Capítulo 4

Operador maximal fuerte: base de intervalos

Durante el trabajo hemos estado empleando en todo momento familias de bolas; nos preguntamos ahora qué ocurre si damos el siguiente paso inmediato y, en vez de cubos (bolas de norma $p = \infty$), partimos de rectángulos o intervalos.

Entendiendo por rectángulos en $\mathbb{R}^n$ el producto cartesiano de n intervalos unidimensionales rotados en cualquier dirección, en esta base el operador maximal asociado (denominado a veces como el *operador maximal universal*), además de no ser de tipo débil $(1, 1)$ ni estar acotado en L^p para p finito, ni siquiera es capaz de diferenciar funciones características [4, p. 10]. Demostrar esto en detalle requiere el desarrollo de un corpus teórico adicional que en conjunto excedería la longitud razonable de un trabajo de estas características.

En este capítulo nos restringimos entonces a un tipo de rectángulos: la base de intervalos (en $\mathbb{R}^n$ el producto cartesiano de n intervalos unidimensionales paralelos a los ejes).

Definición 4.1. (Operador maximal basado en intervalos)

Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. El operador maximal basado en intervalos de $\mathbb{R}^n$ se define como

$$M_{\mathcal{I}_n} f(x) = \sup_{\substack{R \subset \mathbb{R}^n \\ x \in R}} \int_R |f(y)| dy.$$

Este operador maximal, denominado a veces *operador maximal fuerte*, seguirá verificando el teorema de diferenciación aunque bajo algunas nuevas restricciones que estudiaremos en la siguiente sección.

4.1. Teorema de Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund

El operador maximal de intervalos no es débil $(1, 1)$ ni en $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ni en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Sin embargo, la situación será distinta en los espacios de tipo $L(1 + \log^+ L)$, cuya definición extraemos de [7, p. 60].

Definición 4.2. (Espacio $L(1 + \log^+ L)$)

Es el espacio de todas las funciones medibles $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(s)|(1 + \log^+ |f(s)|) ds < \infty,$$

donde recordemos que $\log^+ a = 0$ si $0 \leq a \leq 1$ y $\log^+ a = \log a$ si $a > 1$.

En estos espacios el operador maximal de intervalos sigue sin ser de tipo débil $(1, 1)$ tal y como hemos ido estudiando a partir de la Definición 2.11, pero la situación aquí no obstante será distinta. El Teorema de Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund, también llamado *teorema maximal fuerte*, establece que los operadores maximales sobre intervalos en $\mathbb{R}^n$ están acotados bajo una determinada desigualdad débil que a la postre nos proporcionará los resultados de diferenciación esperados. Vamos a enunciarlo y demostrarlo extrayéndolo de [7, p. 45], que presenta una prueba para el caso $n = 2$, más sencillo. Nos limitamos a reescribir nosotros las notaciones e introducir las explicaciones pertinentes.

Teorema 4.3. (Teorema de Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund)

Sea $M_{\mathcal{I}_2}$ el operador maximal basado en familias de intervalos de $\mathbb{R}^2$. Entonces, para cada $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ y cada $\lambda > 0$ tenemos

$$|\{x \in \mathbb{R}^2 : M_{\mathcal{I}_2}f > \lambda\}| \leq c \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(s)|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f(s)|}{\lambda}\right) ds$$

donde c es una constante positiva, independiente de f y de λ .

Demostración.

Sea $f \geq 0$ sin pérdida de generalidad, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Dado $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ definimos

$$T_1f(x_1, x_2) := \sup_{\substack{I \subset \mathbb{R} \\ x_1 \in I}} \left\{ \frac{1}{|I|} \int_I f(s, x_2) ds \right\}, \quad T_2f(x_1, x_2) := \sup_{\substack{J \subset \mathbb{R} \\ x_2 \in J}} \left\{ \frac{1}{|J|} \int_J \chi_{A_{T_1f, \frac{\lambda}{2}}}(x_1, s) T_1f(x_1, s) ds \right\}.$$

Dado $\alpha > 0$, consideramos la notación $A_{g, \alpha} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |g(x, y)| > \alpha\}$.

El primer paso consiste en demostrar

$$A_{M_{\mathcal{I}_2}f, \lambda} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : M_{\mathcal{I}_2}f(x, y) > \lambda\} \subset \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : T_2f(x, y) > \frac{\lambda}{2} \right\} = A_{T_2f, \frac{\lambda}{2}}.$$

Si probamos esto, tendremos que $|A_{M_{\mathcal{I}_2}f, \lambda}| \leq |A_{T_2f, \frac{\lambda}{2}}|$; por tanto, podemos trabajar desde $|A_{T_2f, \frac{\lambda}{2}}|$ para la desigualdad del enunciado y por tanto la heredará $|A_{M_{\mathcal{I}_2}f, \lambda}|$.

Fijemos un punto $(x_1, x_2) \in A_{M_{\mathcal{I}_2}f, \lambda}$. Queremos probar que $(x_1, x_2) \in A_{T_2f, \frac{\lambda}{2}}$. Dado que $(x_1, x_2) \in A_{M_{\mathcal{I}_2}f, \lambda}$, existe un intervalo $I \times J$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $x_1 \in I$, $x_2 \in J$ y

$$\frac{1}{|I \times J|} \int_{I \times J} f(s) ds > \lambda. \quad (4.1)$$

Ahora dividimos el intervalo $I \times J$ en dos conjuntos C_1, C_2 , cada uno siendo una unión de segmentos del tamaño de I paralelos al eje x de la siguiente manera. Sea $I \times \{y_0\}$ con $y_0 \in J$ uno de esos segmentos. Si para cada punto $(x, y_0) \in I \times \{y_0\}$ tenemos $T_1f(x, y_0) > \frac{\lambda}{2}$ establecemos $I \times \{y_0\} \subset C_1$. De lo contrario, es decir, si hay algún punto $(x, y_0) \in I \times \{y_0\}$ tal que $T_1f(x, y_0) \leq \frac{\lambda}{2}$ establecemos $I \times \{y_0\} \subset C_2$. Por tanto,

$$C_1 := \bigcup_{y \in J} \left\{ I \times \{y\} : \forall x \in I, T_1f(x, y) > \frac{\lambda}{2} \right\},$$

$$C_2 := \bigcup_{y \in J} \left\{ I \times \{y\} : \exists x \in I, T_1f(x, y) \leq \frac{\lambda}{2} \right\}.$$

Procedamos a calcular la integral

$$\int_{C_2} f(s) ds = \int_H \left(\int_I f(x, y) dx \right) dy,$$

donde $H \subset J$ son todos los $y \in J$ tales que $I \times \{y\} \subset C_2$. Observemos que $I \times \{y_0\} \subset C_2$ implica en particular que

$$\frac{1}{|I|} \int_I f(s, y_0) ds \leq \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \int_I f(s, y_0) ds \leq \frac{\lambda}{2} |I|,$$

por lo que

$$\int_{C_2} f(s) ds = \int_H \left(\int_I f(x, y) dx \right) dy \leq \int_H \frac{\lambda}{2} |I| dy = \frac{\lambda}{2} |C_2| \leq \frac{\lambda}{2} |I \times J|.$$

Por (4.1),

$$\int_{C_1} f(s) ds + \int_{C_2} f(s) ds = \int_{I \times J} f(s) ds > \lambda |I \times J|,$$

por lo que necesariamente deducimos que $\int_{C_1} f(s) ds > \frac{\lambda}{2} |I \times J|$.

Podemos además escribir, gracias a $T_1 f(x_1, y)$ y la definición de T_2 , que

$$\begin{aligned} T_2 f(x_1, x_2) &\geq \frac{1}{|J|} \int_J \chi_{A_{T_1 f, \frac{\lambda}{2}}}(x_1, y) T_1 f(x_1, y) dy \\ &\geq \frac{1}{|J|} \int_J \chi_{A_{T_1 f, \frac{\lambda}{2}}}(x_1, y) \frac{1}{|I|} \int_I f(x, y) dx dy \\ &\geq \frac{1}{|I \times J|} \int_H \chi_{A_{T_1 f, \frac{\lambda}{2}}}(x_1, y) \int_I f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Por la definición de C_1 y $A_{T_1 f, \frac{\lambda}{2}}$, si $(x, y) \in C_1$ entonces $(x_1, y) \in A_{T_1 f, \frac{\lambda}{2}}$ y entonces partiendo del último miembro de la cadena de desigualdades anteriores obtendríamos

$$T_2 f(x_1, x_2) \geq \frac{1}{|I \times J|} \int_{C_1} f(x, y) dx dy > \frac{\lambda}{2},$$

por tanto, $(x_1, x_2) \in A_{T_2 f, \frac{\lambda}{2}}$, de modo que acabamos de probar $A_{M_{T_2} f, \lambda} \subset A_{T_2 f, \frac{\lambda}{2}}$. Ahora vamos a ver que $A_{T_2 f, \frac{\lambda}{2}}$ satisface la desigualdad que estamos buscando.

Podemos asumir $f \in L(1 + \log^+ L)$, puesto que de otro modo no hay nada que probar. En el siguiente argumento c será una constante absoluta no siempre la misma en cada ocurrencia, independiente en particular de f y λ .

Gracias al tipo débil $(1, 1)$ de la base unidimensional $\mathcal{I}_1$ de intervalos (véase el Teorema 3.14), para casi todo punto $x_0 \in \mathbb{R}$ fijo podemos escribir

$$\left| \left\{ y \in \mathbb{R} : T_2 f(x_0, y) > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| \leq \frac{c}{\lambda/2} \int_{\mathbb{R}} \chi_{A_{T_1 f, \frac{\lambda}{2}}}(x_0, y) T_1 f(x_0, y) dy$$

Por tanto, si integramos sobre todo $x \in \mathbb{R}$ e intercambiamos el orden de integración, tenemos

$$\left| A_{T_2 f, \frac{\lambda}{2}} \right| = \left| \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : T_2 f(x, y) > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| \leq c \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_{A_{T_1 f, \frac{\lambda}{2}}}(x, y) T_1 f(x, y)}{\lambda/2} dx dy.$$

La expresión de dentro del integrando es o bien cero o bien un valor superior a $\frac{\lambda/2}{\lambda/2} = 1 > 0$; en definitiva, son valores no negativos; por tanto, podemos aplicar el lema del «layer-cake» (Lema 1.12) para así obtener

$$\begin{aligned} \left| A_{T_2 f, \frac{\lambda}{2}} \right| &\leq c \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \left| \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{\chi_{A_{T_1 f, \frac{\lambda}{2}}}(x, y) T_1 f(x, y)}{\lambda/2} > \sigma \right\} \right| d\sigma dy \\ &= \left[c \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 [\cdot \cdot] \right] + \left[c \int_{\mathbb{R}} \int_1^\infty [\cdot \cdot] \right] \stackrel{\text{def}}{=} S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Si $(x, y) \in A_{T_1 f, \frac{\lambda}{2}}$, entonces $T_1 f(x, y) > \frac{\lambda}{2}$; por tanto, si $0 < \sigma \leq 1$, tenemos

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{\chi_{A_{T_1 f, \frac{\lambda}{2}}}(x, y) T_1 f(x, y)}{\lambda/2} > \sigma \right\} \right| = \left| \left\{ x \in \mathbb{R} : T_1 f(x, y) > \frac{\lambda}{2} \right\} \right|.$$

Así, por el tipo débil $(1, 1)$ para $\mathcal{I}_1$ en $\mathbb{R}$, obtenemos

$$S_1 = c \int_{\mathbb{R}} \left| \left\{ x \in \mathbb{R} : T_1 f(x, y) > \frac{\lambda}{2} \right\} \right| dy \leq c \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x, y)}{\lambda} dx dy.$$

Para estimar S_2 definimos para un $\sigma > 0$ fijo,

$$f_{*}^{\sigma}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{si } f(x, y) \leq \frac{\lambda\sigma}{4} \\ 0, & \text{si } f(x, y) > \frac{\lambda\sigma}{4} \end{cases}, \quad f_{\sigma}^{*}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } f(x, y) \leq \frac{\lambda\sigma}{4} \\ f(x, y), & \text{si } f(x, y) > \frac{\lambda\sigma}{4} \end{cases}$$

de modo que, trivialmente, $f(x, y) = f_{\sigma}^{*}(x, y) + f_{*}^{\sigma}(x, y)$ para todo $\sigma > 0$. Para ser breves denotemos $f = f_{\sigma}^{*} + f_{*}^{\sigma}$.

Es claro que $T_1 f \leq T_1 f_{\sigma}^{*} + T_1 f_{*}^{\sigma}$ y $T_1 f_{*}^{\sigma} \leq \frac{\lambda\sigma}{4}$.

Para $\sigma \geq 1$, $\chi_{A_{T_1 f, \frac{\lambda}{2}}}(x, y) T_1 f(x, y) > \frac{\lambda}{2}$ y por tanto

$$\begin{aligned} \left| \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{\chi_{A_{T_1 f, \frac{\lambda}{2}}}(x, y) T_1 f(x, y)}{\lambda/2} > \sigma \right\} \right| &= \left| \left\{ x \in \mathbb{R} : \chi_{A_{T_1 f, \frac{\lambda}{2}}}(x, y) T_1 f(x, y) > \frac{\lambda\sigma}{2} \right\} \right| \\ &\leq \left| \left\{ x \in \mathbb{R} : \chi_{A_{T_1 f, \frac{\lambda}{2}}}(x, y) T_1 f(x, y) > \frac{\lambda\sigma}{4} \right\} \right|. \end{aligned}$$

Para $\sigma \geq 1$ asimismo $\chi_{A_{T_1 f, \frac{\lambda}{2}}}(x, y) T_1 f(x, y) > \frac{\lambda}{2}$ y por tanto podemos decir

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{\chi_{A_{T_1 f, \frac{\lambda}{2}}}(x, y) T_1 f(x, y)}{\lambda/2} > \sigma \right\} \right| \leq \left| \left\{ x \in \mathbb{R} : \chi_{A_{T_1 f, \frac{\lambda}{2}}}(x, y) T_1 f(x, y) > \frac{\lambda\sigma}{4} \right\} \right|.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} S_2 &\leq c \int_{\mathbb{R}} \int_1^{\infty} \left| \left\{ x \in \mathbb{R} : T_1 f_{\sigma}^{*}(x, y) > \frac{\lambda\sigma}{4} \right\} \right| d\sigma dy \leq c \int_{\mathbb{R}} \int_1^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{f_{\sigma}^{*}(x, y)}{\lambda\sigma/4} dx \right) d\sigma dy \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}} \int_1^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{4f_{\sigma}^{*}(x, y)}{\lambda\sigma} dx \right) d\sigma dy \end{aligned}$$

El integrando es no nulo solo cuando $\sigma < \frac{4f(x, y)}{\lambda}$; por tanto, podemos evaluar $1 \leq \sigma < \frac{4f(x, y)}{\lambda}$. Asimismo, como el integrando es no negativo, podemos usar el teorema de Tonelli y así intercambiar el orden en el que aplicamos las integrales. Tendremos entonces

$$\begin{aligned} S_2 &\leq c \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_1^{\frac{4f(x, y)}{\lambda}} \frac{4f(x, y)}{\lambda\sigma} d\sigma \right) dx dy = c \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{4f(x, y)}{\lambda} \left(\int_1^{\frac{4f(x, y)}{\lambda}} \frac{d\sigma}{\sigma} \right) dx dy \\ &= c \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x, y)}{\lambda} \underbrace{\log^+ \frac{4f(x, y)}{\lambda}}_{\log^+ \frac{f(x, y)}{\lambda} + \log^+ 4} dx dy \\ &= c \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x, y)}{\lambda} \log^+ \frac{f(x, y)}{\lambda} + \log^+ 4 dx dy. \end{aligned}$$

Sumando S_1 y S_2 obtenemos finalmente

$$|A_{T_2 f, \frac{\lambda}{2}}| \leq C \int \frac{f(s)}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{f(s)}{\lambda} \right) ds,$$

para cierta constante $C > 0$, y esto implica la desigualdad del teorema según lo comentado. $\square$

Observación 4.4. La demostración asume por simplificación la medibilidad de ciertos conjuntos; sin embargo, puede comprobarse que esto es cierto en [7, p. 49].

4.2. Comentarios finales

Tal y como se observa en [7, p. 51], a partir del Teorema de Jessen-Marcinkiewicz-Zygmund (Teorema 4.3), se puede llegar a un teorema de diferenciación de Lebesgue en los espacios $L(1 + \log^+ L)$ bajo la familia de intervalos en $\mathbb{R}^n$. De hecho, en el trabajo original de Jessen, Marcinkiewicz y Zygmund se muestra que $L(1 + \log^+ L)$ es el mayor espacio en el que podemos obtener este resultado de diferenciación [9, p. 197].

Ahora, sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. El operador maximal de Hardy-Littlewood M (centrado o no centrado, sobre bolas o cubos; hemos visto que son equivalentes) verifica por el Teorema 2.12, la acotación de tipo débil $(1, 1)$: es decir, $M : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$; por otra parte, se verifica además la acotación en el espacio L^∞ , es decir $M : L^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (Proposición 2.6). La pregunta natural que surge en este punto es ¿qué ocurre en los espacios intermedios?

La respuesta es que tendremos acotación de tipo fuerte $M : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 < p \leq \infty$. Este hecho se prueba con lo que se conoce como el Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz; no obstante, para el caso que nos ocupa seguiremos un argumentario similar pero más simplificado. En concreto, reproducimos la demostración de [1, Lema 12] completando nosotros los detalles.

Partimos de $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ la desigualdad de tipo débil $(1, 1)$ proporcionada por el Teorema de Hardy-Littlewood:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy. \quad (4.2)$$

Consideremos la descomposición $f = f \cdot \chi_{\{f > \lambda/2\}} + f \cdot \chi_{\{f \leq \lambda/2\}} \stackrel{\text{def}}{=} f_{>\lambda/2} + f_{\leq \lambda/2}$. Usando la subaditividad del operador maximal (Proposición 2.4), se sigue que

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf_{>\lambda/2}(x) > \lambda/2\}| + |\{x \in \mathbb{R}^n : Mf_{\leq \lambda/2}(x) > \lambda/2\}|.$$

Notemos que, por la definición de la acotación fuerte en $p = \infty$, $\|Mf_{\leq \lambda/2}\|_\infty \leq \|f_{\leq \lambda/2}\|_\infty \leq \lambda/2$. De esta forma, el último término en la desigualdad superior es igual a 0, puesto que por la Definición 1.15,

$$\|Mf_{\leq \lambda/2}(x)\|_\infty = \inf\{a \geq 0 : \mu(\{x : |Mf_{\leq \lambda/2}(x)| > a\}) = 0\} \leq \lambda/2.$$

Por tanto, hemos «automejorado» la desigualdad (4.2), que ahora supone una acotación donde partimos de un conjunto más pequeño,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\}} |f(y)| dy.$$

Ahora, para probar la acotación fuerte en L^p con $1 < p < \infty$, mostraremos siguiendo su definición que se verifica $\|Mf\|_p \leq C_p \|f\|_p$. Sea entonces $1 < p < \infty$ fijo, y partamos de

$$\|Mf\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Esto es equivalente a decir

$$\|Mf\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p dx.$$

Ahora, aplicando el lema del «layer-cake» en su versión general (Corolario 1.13), tenemos

$$\|Mf\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p dx \leq Cp \int_0^\infty \lambda^{p-2} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \frac{\lambda}{2}\}} |f(y)| dy d\lambda.$$

Con unos pasos inmediatos dejamos esta última desigualdad como

$$\|Mf\|_p^p \leq Cp \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \lambda^{p-2} |f(y)| \cdot \chi_{\{x \in \mathbb{R}^n : 2|f(x)| > \lambda\}} dy d\lambda.$$

Por el Teorema de Tonelli, intercambiando el orden en el que se aplican las integrales,

$$\begin{aligned} \|Mf\|_p^p &\leq Cp \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \lambda^{p-2} |f(y)| \cdot \chi_{\{x \in \mathbb{R}^n : 2|f(x)| > \lambda\}} d\lambda dy \\ &= Cp \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left(\int_0^\infty \lambda^{p-2} \cdot \chi_{\{x \in \mathbb{R}^n : 2|f(x)| > \lambda\}} d\lambda dy \right) \\ &= Cp \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left(\int_0^{2|f(y)|} \lambda^{p-2} d\lambda \right) dy \\ &= Cp \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \frac{(2|f(y)|)^{p-1}}{p-1} dy = \frac{Cp2^{p-1}}{p-1} \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^p dy = \frac{Cp2^{p-1}}{p-1} \|f\|_p^p, \end{aligned}$$

y estableciendo $C_p := \frac{Cp2^{p-1}}{p-1}$ obtenemos que M es un operador de tipo fuerte (p, p) .

Asimismo en [1, Lema 13] se demuestra que el operador maximal basado en intervalos verifica una acotación de tipo fuerte para $p > 1$ usando un argumento de interpolación análogo al que acabamos de ver. Sin embargo, también podemos verlo directamente con el siguiente argumento en $\mathbb{R}^2$. Sea entonces

$$M_{\mathcal{I}_2} f(x, y) := \sup_{\substack{I \subset \mathbb{R}, J \subset \mathbb{R} \\ x \in I, y \in J}} \frac{1}{|I \times J|} \int_{I \times J} |f(s)| ds = \sup_{\substack{I \subset \mathbb{R}, J \subset \mathbb{R} \\ x \in I, y \in J}} \frac{1}{|I||J|} \int_I \int_J |f(u, v)| dv du.$$

Consideremos asimismo $M_{\mathcal{I}_1} f(x) := \sup_{\substack{I \subset \mathbb{R} \\ x \in I}} \frac{1}{|I|} \int_I |f(s)| ds$. No obstante, emplearemos la notación anterior $M := M_{\mathcal{I}_1}$ pues los intervalos en $\mathbb{R}$ son bolas, por lo que podemos usar la propiedad que acabamos de probar. Vamos a ver que $M_{\mathcal{I}_2} f(x, y) \leq M(Mf)(x, y)$. Esto es directo por lo siguiente: sean $x, y \in \mathbb{R}$ e $I, J \subset \mathbb{R}$ tales que $x \in I, y \in J$. Tenemos

$$\frac{1}{|I||J|} \int_I \int_J |f(u, v)| dv du = \frac{1}{|I|} \int_I \left(\frac{1}{|J|} \int_J |f(u, v)| dv \right) du.$$

Para cada $u \in I$,

$$\frac{1}{|J|} \int_J |f(u, v)| dv \leq Mf(u, y).$$

Por tanto,

$$\frac{1}{|I||J|} \int_I \int_J |f(u, v)| dv du \leq \frac{1}{|I|} \int_I Mf(u, y) du \leq M(Mf_y)(x, y).$$

Tomando supremos sobre I y J , obtenemos finalmente

$$M_{\mathcal{I}_2} f(x, y) \leq M(Mf)(x, y).$$

Con esta desigualdad observamos que, como M es acotado en $L^p(\mathbb{R})$ para $1 < p \leq \infty$, se tiene la acotación fuerte $M_{\mathcal{I}_2} : L^p(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$ para $1 \leq p \leq \infty$.

Vamos a probar no obstante que $M_{\mathcal{I}_2}$ no es débil $(1, 1)$ (en general, en toda dimensión $n \geq 2$); para ello, reproducimos la demostración en [1, Proposición 9] completando nosotros los detalles. Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$, vamos a

ver que no existe $c > 0$ tal que

$$|\{x \in \mathbb{R}^2 : M_{\mathcal{I}_2} f(x) > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^2} f(y),$$

donde $f = \chi_{[0,1] \times [0,1]}$. Consideremos el conjunto $A := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 > 1\}$ y escojamos un $x = (x_1, x_2) \in A$. Obtenemos de esta manera que

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{I}_2} f(x) &= \sup_{\substack{R \subset \mathbb{R}^2 \\ x \in R}} \int_R |f(y)| dy = \sup_{\substack{R \subset \mathbb{R}^2 \\ x \in R}} \int_{[0,1] \times [0,1]} |\chi_{[0,1] \times [0,1]}(y)| dy \\ &= \sup_{\substack{R \subset \mathbb{R}^2 \\ x \in R}} \frac{|[0,1] \times [0,1]|}{|R|} = \sup_{\substack{R \subset \mathbb{R}^2 \\ x \in R}} \frac{1}{|R|}. \end{aligned}$$

Podemos observar que $[0, x_1] \times [0, x_2] \subset \mathbb{R}^2$, que verifica $(x_1, x_2) \in [0, x_1] \times [0, x_2]$, cumple $\frac{1}{|R|} = \frac{1}{x_1 x_2}$. Entonces necesariamente $M_{\mathcal{I}_2} f(x) \geq \frac{1}{x_1 x_2}$.

Ahora, para $0 < \lambda < 1$, sea $E_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^2 : M_{\mathcal{I}_2} f(x) > \lambda\}$. Como $x_1, x_2 > 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} |E_\lambda| &> \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \lambda > \frac{1}{x_1 x_2} \right\} \right| = \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 < \frac{1}{\lambda} \right\} \right| \\ &= \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : 1 < x_1 < \frac{1}{\lambda x_2}, 1 < x_2 < \frac{1}{\lambda} \right\} \right| = \int_{\{1 < x_1 < \frac{1}{\lambda x_2}, 1 < x_2 < \frac{1}{\lambda}\}} dx_1 dx_2 \\ &= \int_1^{1/\lambda} \left(\frac{1}{\lambda x_2} - 1 \right) dx_2 = \frac{1}{\lambda} \int_1^{1/\lambda} \frac{1}{x_2} dx_2 - (1/\lambda - 1) = \frac{1}{\lambda} \left(\log \frac{1}{\lambda} \right) + 1 - \frac{1}{\lambda} \simeq \frac{1}{\lambda} \log \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}$$

donde en el último paso las funciones en ambos lados de $\simeq$ son comparables para $\lambda \rightarrow 0^+$: ciertamente

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\lambda} \left(\log \frac{1}{\lambda} \right) + 1 - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} \log \frac{1}{\lambda}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} 1 + \frac{1 - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} \log \frac{1}{\lambda}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} 1 + \frac{\lambda - 1}{\log \frac{1}{\lambda}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} 1 + \frac{1 - \lambda}{\log \lambda} = 1 \in (0, \infty).$$

Obtenemos finalmente que una desigualdad de tipo débil $(1, 1)$ no puede ser posible; de lo contrario, tendríamos

$$\frac{1}{\lambda} \log \frac{1}{\lambda} \leq \frac{c}{\lambda},$$

lo cual es absurdo si $\lambda \rightarrow 0^+$. Por tanto, $M_{\mathcal{I}_2}$ no es de tipo débil $(1, 1)$.

Finalmente se indica en [1, p. 104] que este contraejemplo se podría generalizar a $\mathbb{R}^n$ considerando ahora el cubo unitario n -dimensional $[0, 1]^n$.

Bibliografía

- [1] A. A. ALMIRALL, C. C. GÓMEZ, H. JARDÓN-SÁNCHEZ, C. M. MURILLO, A. QUILIS, P. R. BARAUT Y I. PARISSIS, *Maximal averaging operators: from geometry to boundedness through duality*, TEMat monográficos **1** (2020), 97–111.
- [2] D. L. COHN, *Measure Theory: Second Edition*. New York, NY: Springer New York, 2013.
- [3] J. DUOANDIKOETXEA, *Fourier analysis*, Amer. Math. Soc. **29** (2024).
- [4] J. DUOANDIKOETXEA, *The Hardy-Littlewood maximal function and some of its variants*, Adv. Cour. of Math. Anal. **II** (2007), 37–56.
- [5] G. B. FOLLAND, *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications* (2ª ed.). John Wiley & Sons, Inc, 1999.
- [6] L. GRAFAKOS, *Classical Fourier Analysis* (3ª ed.). New York, NY: Springer New York, 2014.
- [7] M. DE GUZMÁN, *Differentiation of Integrals in $\mathbb{R}^n$* . **Vol. 481**. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1975.
- [8] E. HERNÁNDEZ Y F. SORIA, *Miguel de Guzmán y la teoría de diferenciación de integrales*, Gac. R. Soc. Mat. Esp. **7** (2004), 49–66.
- [9] L. MALIGRANDA, *Józef Marcinkiewicz (1910-1940) – on the centenary of his birth*, Banach Cent. Publ. **95** (2011), 133–234.
- [10] P. SJÖGREN, *A remark on the maximal function for measures in $\mathbb{R}^n$* , Amer. J. Math. **105** (1983), 1231–1233.
- [11] J. SORIA Y P. TRADACETE, *The least doubling constant of a metric measure space*, Ann. Fenn. Math. **44** (2019), 1015–1030.
- [12] E. M. STEIN Y R. SHAKARCHI, *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*. Princeton Lectures in Analysis III, 2005.
- [13] K. TZANAVARIS, *An Elementary Proof of the Layer Cake Representation Theorem*, Amer. Math. Mon. **133** (2026), 181–184.
- [14] A. VARGAS, *On the maximal function for rotation invariant measures in $\mathbb{R}^n$* , Studia Math. **110** (1994), 9–17.