Universidad Complutense de Madrid

Doble Grado en Matemáticas y
Estadística-Economía

El operador maximal de Hardy-Littlewood y el Teorema de Diferenciación de Lebesgue

Trabajo de Fin de Grado

Javier Esteban Romero

Director:

F. Javier Soria de Diego

30 de enero de 2023

Resumen:

Este trabajo tiene como objetivo desarrollar el tema de diferenciación de integrales de Lebesgue, que extiende el Teorema Fundamental del Cálculo (para funciones continuas), a la clase de funciones localmente integrables (sin ningún tipo de regularidad). Tendremos diferenciabilidad de la integral pero ahora para casi todo punto, es decir, en todo punto considerado exceptuando un conjunto de medida cero.

Para demostrarlo, estudiaremos las principales características del operador maximal de Hardy-Littlewood, el cual nos facilitará la prueba del teorema de diferenciación de Lebesgue. Será necesario el estudio de teoremas de cubrimiento y de resultados para medidas más generales (no necesariamente la medida de Lebesgue), profundizando principalmente en las medidas doblantes.

Abstract:

This paper aims to develop the topic of differentiation of integrals of Lebesgue, which extends the Fundamental Theorem of Calculus (for continuous functions), to the class of locally integrable functions (without any kind of regularity). We will have differentiability of the integral but now for almost every point, that is, at every point considered except for a set of measure zero.

To demonstrate it, we will study the main characteristics of the Hardy-Littlewood maximal operator, which will facilitate the proof of Lebesgue's differentiation theorem. It will be necessary to study coverage theorems and results for more general measures (not necessarily the Lebesgue measure), focusing mainly on doubling measures.

geometric covering

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Dada una función f continua e integrable según Riemann sobre $\mathbb{R}$, si consideramos

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy,$$

el teorema fundamental del cálculo afirma que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Este teorema podríamos expresarlo afirmando que la velocidad con que varía el área bajo la curva de la función f es igual al valor de la función en el punto considerado, si la función es continua. Este panorama cambiaría si solo le pedimos a f que sea Riemann integrable, al existir funciones que no tienen derivada en algunos puntos.

Si consideramos

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ y } m.c.d(m,n) = 1 \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Sea $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$, entonces $F'(x) = 0$ en todos los puntos, pero f no, porque tiene valor distinto de 0 en los racionales. Este ejemplo nos permite sospechar que la relación tal vez se puede extender al caso para casi todo punto, pues tenemos $F'(x) = f(x)$ salvo en un conjunto de medida 0. El objetivo de este trabajo es demostrar el Teorema de Diferenciación de Lebesgue, extendiendo el Teorema Fundamental del Cálculo a funciones medibles (que contienen a las funciones continuas) y a funciones localmente integrables. De esta forma, tendremos que una función f medible sobre $\mathbb{R}^n$ y localmente integrable, cumplirá

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x) \text{ para casi toda } x \in \mathbb{R}^n.$$

Para llegar a este resultado estudiaremos como principal herramienta el operador maximal de Hardy-Littlewood, analizando sus principales características.

Hemos dividido el trabajo en cinco capítulos, además de la introducción. El primero lo dedicamos a estudiar aspectos de la teoría de la medida necesarios para desarrollar el resto del trabajo. Cabe destacar que en cuarto curso del actual grado de Matemáticas se imparte la asignatura obligatoria de seis créditos, Teoría de la Medida, pero al ser estudiante de un Doble Grado, no la he cursado. Los conocimientos que tenía de Teoría de la Medida eran los vistos en Ampliación de Probabilidad. Es por ello que en este primer capítulo estudiamos los principales resultados de Teoría de la Medida.

Grado

En segundo lugar, estudiamos lemas de cubrimiento, cuyo estudio es muy importante en la teoría de diferenciación. Por medio de estos lemas, dado un conjunto arbitrario del espacio euclídeo, encontramos una familia con ciertas características que cubre el conjunto. Nos hemos centrado en un teorema de recubrimiento elemental, que conoceremos como el pez grande se come al chico, el teorema de cubrimiento de Besicovitch y un teorema de cubrimiento de una famila de intervalos en $\mathbb{R}$, los cuales nos ayudarán a acotar los operadores maximales que veremos en los siguientes capítulos.

Posteriormente estudiaremos el operador maximal de Hardy-Littlewood, viendo diferentes generalizaciones, en función de si es centrado o no centrado, y para bolas o para cubos, viendo que los anteriores operadores son equivalentes. Después veremos ciertas propiedades caracterizan al operador maximal de Hardy-Littlewood.

El operador maximal de Hardy-Littlewood nos facilitará en el siguiente capítulo la prueba del teorema de diferenciación de Lebesgue. En ese capítulo estudiaremos también el conjunto de puntos de Lebesgue y el Teorema de densidad de Lebesgue.

Finalmente, veremos diferentes resultados, considerando medidas más generales (puesto que el operador maximal de Hardy-Littlewood considera la medida de Lebesgue). Estudiaremos el significado de que una medida sea doblante, y cómo se puede acotar el operador maximal (ya sin considerar la medida de Lebesgue) en función de si la medida considerada es doblante o no, y en función de si nos encontramos en dimensión $n = 1$ o no.

superiores

Capítulo 2

Definición y propiedades funcionales de los espacios de Lebesgue L^p

En este capítulo veremos conceptos de teoría de la medida. Primero de todo, daremos la noción de función medible para, a continuación, definir la integral de una función medible. Veremos la integral como una medida. Estos conceptos son la base para definir los espacios de Lebesgue, por lo que desarrollaremos la teoría fundamental entorno a los mismos. Los espacios de Lebesgue constituyen una clase fundamental en el ámbito del análisis funcional. Además de poseer interesantes propiedades en sí mismos, son la base de muchos conceptos en matemáticas. Primero, veremos el espacio de Lebesgue L^1, es decir, las funciones integrables. Después, generalizamos este concepto a otros valores, L^p, tratando con funciones cuyo valor absoluto tiene potencia p-integrable. Los espacios L^p serán clases de funciones medibles definidas en términos de integración.

Por tanto, el principal objetivo en este capítulo es analizar la estructura de los espacios de Lebesgue y sus principales características, lo que servirá para abordar el estudio de la acotación de operadores.

2.1. Conceptos introductorios de teoría de la medida

La teoría de la medida es una rama del análisis y de la geometría que investiga las medidas, las funciones medibles y la integración. En esta sección, vemos conceptos básicos de la teoría de la medida. Definimos a continuación espacio medible.

Definición 2.1. Sea X un conjunto. Una σ-álgebra de X es una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X tal que:

1. $X \in \mathcal{A}$.
2. Si $E_k \in \mathcal{A}$ para $k = 1, 2, ...$, entonces $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$.
3. Si $P \in \mathcal{A}$ y $Q \in \mathcal{A}$, entonces $P \setminus Q \in \mathcal{A}$.

Al par $(X, \mathcal{A})$ se le llama espacio medible.

Ya definido espacio medible, podemos hablar de medida.

Definición 2.2. Sea (X,$\mathcal{A}$) un espacio medible. Una aplicación $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ se dice que es una medida si:

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. μ es completamente aditiva, es decir, para cada sucesión E_k de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $E_i \cap E_j = \varnothing$ si $i \neq j$, se verifica

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

La terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se denomina espacio de medida.

Consideraremos ahora un espacio medible $(X, \mathcal{A})$ o un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, tal que μ es no negativa y completa (subconjuntos de conjuntos de medida cero de la σ-álgebra pertenecen a la σ-álgebra), y funciones definidas en X con valores en la recta ampliada [-∞,∞]. Dado el espacio medible $(X, \mathcal{A})$, de entre todas las funciones definidas, tienen gran interés las funciones reales f definidas en X tal que $f^{-1}(G)$ es medible, esto es, pertenece a $\mathcal{A}$ para cada abierto G de los reales. Esta idea nos conduce a definir función medible.

Definición 2.3. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible, y f una función definida en X con valores en [-∞,∞]. Se dice que f es $\mathcal{A}$-medible si $f^{-1}([-\infty, \alpha]) \in \mathcal{A}$, para $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sea un espacio de medida completo $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Diremos que dos funciones medibles f y g son equivalentes si existe un conjunto Z de medida cero tal que

$$f(x) = g(x), \text{ si } x \in X \setminus Z.$$

Se expresa entonces que f y g son iguales para casi todo punto, lo escribimos abreviadamente:

$$f = g \text{ c.t.p. en } X.$$

Esta equivalencia define un conjunto cociente en la familia de funciones medibles. Así, en casi cualquier contexto nos fijaremos en el conjunto cociente más que en la función, pudiéndose sustituir la misma por otra de su clase. Cada clase queda entonces determinada por una función definida en casi todo punto de X, es decir, en un subconjunto cuyo complementario tiene medida nula.

2.2. Integración y Teorema de Radon-Nikodym

En esta sección, queremos definir ahora la integral de una función medible. Empezamos definiendo la integral en funciones simples. Consideremos una medida μ σ-finita (X es la unión numerable de conjuntos medibles con medida finita), completa y no negativa, definida en una σ-álgebra de un conjunto X. Se designa $\mathcal{J}$ el conjunto de funciones simples

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_{E_k}$$

tales que $\mu(E_k) < \infty$, para $k = 1, 2, ..., n$. Para cada elemento de $\mathcal{J}$ se define su integral mediante

$$\int_X \Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_{E_k}\Big) d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(E_k).$$

Es fácil ver que $\mathcal{J}$ es un espacio vectorial real y la integral es una forma lineal positiva definida en $\mathcal{J}$. Continuamos viendo la definición de integral, para ello, aproximamos una función mediante funciones simples, esto es, de $\mathcal{J}$.

Proposición 2.4. *Sea f una función medible tal que $0 \leq\ f(x) \leq \infty$ para casi todo $x \in X$. Existe una sucesión monótona no decreciente $\{a_k\}$ de funciones de $\mathcal{J}$ no negativas que verifica*

$$\lim\{a_k\} = f \text{ c.t.p. en } X \tag{2.1}$$

Si $\{b_k\}$ es una sucesión con las mismas propiedades que $\{a_k\}$, los límites de

$$\left\{\int_X a_k d\mu\right\} \text{ y } \left\{\int_X b_k d\mu\right\}$$

existen y son iguales.

Su demostración puede verse en el Teorema 4.2.1 de [3]. De esta forma, este teorema nos permite definir la integral de cada función medible

$$f : X \longrightarrow [0, \infty]$$

mediante

$$\int_X f d\mu = \lim \int_X a_k d\mu$$

siendo $\{a_k\}$ una sucesión monótona que cumple (2.1). Tienen la misma integral, por tanto, dos funciones que son iguales en casi todo punto de X. Por ello, la integral antes definida puede considerarse como un funcional sobre el conjunto cociente de las funciones medibles no negativas respecto de la relación de equivalencia definida anteriormente "$f = g$ c.t.p. en X".

Es posible extender la definición de integral a algunas funciones medibles f que tienen valores positivos y negativos, considerando:

$$f^+ = \text{máx}\{0, f\}, f^- = -\text{mín}\{0, f\}.$$

De esta forma, la integral de una función medible arbitraria f se define como:

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu. \tag{2.2}$$

cuando esta diferencia tiene significado, es decir, cuando no son infinito las dos integrales de la derecha.

Ya definida la integral, diremos que una función es integrable cuando (2.2) no es ∞. El conjunto de las funciones medibles con integral finita, o más concretamente, el conjunto cociente respecto de la equivalencia "$f = g$ c.t.p. en X" se designa $L^1(\mu)$. Esto quiere decir que $f \in L^1(\mu)$, si, y solo si, $\int_X |f| d\mu < \infty$, puesto que

$$\int_X |f| d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu.$$

Proposición 2.5. *$L^1(\mu)$ es un espacio vectorial, la integral es una forma lineal en él, y la aplicación $\|\cdot\|_1$ definida por*

$$\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu$$

para $f \in L^1(\mu)$ es una norma.

Su demostración puede verse en el Teorema 4.2.3 de [3]. De esta forma, con la anterior proposición concluimos que $L^1(\mu)$ es un espacio vectorial, y hemos definido una forma lineal y una norma en el mismo. Ahora veremos la integral como medida. Dada una función integrable f, dado un conjunto medible E, la integral en E de f es:

$$\int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu.$$

La función de conjunto que así se tiene es acotada si, y solo si, $f \in L^1(\mu)$, y en otro caso tomará alguno de los valores -∞ o $+\infty$. Además, puede tomar valores positivos y también negativos. Puede, por tanto, ser una medida con signo definida sobre la misma σ-álgebra que μ.

Teorema 2.6. *Sea μ medida σ-finita, que sea no negativa y completa definida en una σ-álgebra $\mathcal{A}$ de X, y una f función integrable respecto de μ. Para cada medible E sea*

$$v(E) = \int_E f d\mu.$$

Entonces, v es una medida con signo, σ-finita y continua respecto de μ.

Su demostración puede verse en el Teorema 4.3.1 de [3]. Por tanto, tenemos lo que queríamos, y vemos la integral como medida, si se dan las condiciones necesarias del teorema anterior.

Planteamos ahora un problema inverso. Dada v medida σ-finita continua respecto de μ, existe f tal que

$$v(E) = \int_E f d\mu$$

para cada E medible. Lo vemos en el Teorema de Radon Nikodym.

Teorema 2.7. *Sean μ medida no negativa y v medida con signo continua respecto de μ, ambas σ-finitas definidas en una σ-álgebra A de un conjunto X. Existe entonces una función medible f tal que*

$$v(E) = \int_E f d\mu \tag{2.3}$$

para cada $E \in A$.

Su demostración puede verse en el Teorema 4.3.3 de [3].

2.3. Espacios L^p

Los espacios de funciones juegan un papel muy importante dentro del análisis matemático y, entre ellos, los espacios de Lebesgue constituyen una clase fundamental en el ámbito del análisis funcional. Ya en la anterior sección definimos el espacio de Lebesgue L^1. Ahora generalizamos este concepto a otros valores de p y tratamos con funciones cuyo valor absoluto tiene potencia p-integrable. Por ello, nuestro objetivo en esta sección será analizar los espacios de Lebesgue, y sus características principales.

Podemos ver que existen funciones medibles f que no pertenecen a $L^1(\mu)$, y $|f|^p$ sí pertenece para algún $p > 0$. Un ejemplo de esto sería la función f definida por $f(x) = x^{-1}$ en el intervalo real $[1, \infty)$, siendo μ la medida de Lebesgue en dicho intervalo. Además, puede pasar que f pertenezca a $L^1(\mu)$, y que alguna potencia $|f|^p$ con $p > 1$ no pertenezca. Un ejemplo de esto sería la función f definida por $f(x) = x^{-1/2}$ en el intervalo real $(0, 1]$, siendo μ la correspondiente medida de Lebesgue, con $|f|^2$ no perteneciendo a $L^1(\mu)$.

Definición 2.8. Sea μ una medida σ-finita no negativa definida en una σ-álgebra de un conjunto X, y sea una función f tal que $f(x) < \infty$. Se designa $L^p(\mu)$ el conjunto de las clases de equivalencia de funciones medibles f tales que $|f|^p \in L^1(\mu)$.

$L^\infty(\mu)$ es el conjunto de clases de funciones medibles esencialmente acotadas, es decir, funciones f tal que existe real α que verifica $\mu\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} = 0$. Las clases de equivalencia se refieren a la relación "$f = g$ c.t.p. en X".

Es fácil comprobar que $L^p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, es un espacio vectorial.

Cuando la medida μ es finita, existen algunas relaciones de inclusión entre estos espacios.

Proposición 2.9. *Sea μ una medida finita y $1 \leq p < q < \infty$. Se verifica entonces que $L^p(\mu) \supset L^q(\mu) \supset L^\infty(\mu)$.*

Demostración. Si $f \in L^\infty(\mu)$ y α es una cota esencial para f, resulta entonces $\int_E |f|^p d\mu \leq \int_E \alpha^q d\mu = \alpha^q \mu < \infty$ y así, $f \in L^q(\mu)$.

Suponemos ahora que $f \in L^q(\mu)$, y se consideran los conjuntos A y B tal que $A = \{x \in X : |f(x)| \leq 1\}$, $B = \{x \in X : |f(x)| > 1\}$.

Se obtiene

$$\int_X |f|^p d\mu = \int_A |f|^p d\mu + \int_B |f|^q d\mu \leq \int_A 1 d\mu + \int_B |f|^q d\mu = \mu(A) + ||f^q||_1 < \infty$$

lo cual prueba que $f \in L^p(\mu)$. □

Las normas para $f \in L^p(\mu)$ con $1 \leq p \leq \infty$ se definen así:

$$\|f\|_p = \||f|^p\|_1^{1/p}$$

y

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\{\alpha > 0 : \mu\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} = 0\}.$$

Ya definidas las normas, definimos ahora una relación simétrica que desempeña un papel muy importante. Dos elementos p y $p' \in [1, \infty]$ son conjugados entre sí si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

El siguiente resultado, la desigualdad de Hölder, es una propiedad asociada a esa conjugación.

Teorema 2.10. *Si p y p' son conjugados, $f \in L^p(\mu)$ y $g \in L^{p'}(\mu)$, entonces $fg \in L^1(\mu)$ y $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$*

Demostración. El caso $p = 1$, $p' = \infty$ se prueba fácilmente. Para $p > 1$ la desigualdad de Hölder está basada en la siguiente:

$$a^{1/p} b^{1/p'} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{p'}$$

en donde a y b son números reales no negativos. Para probarla se considera la siguiente función $v(t) = t^s - st - 1$ con $0 < s < 1$. Esta función verifica $v(1) = v'(1) = 0$, $v'(t) > 0$ para $0 < t < 1$, y $v'(t) < 0$ para $t > 1$.

De esto resulta que $v(t) \leq 0$ para $0 \leq t$, y poniendo $t = ab^{-1}$ y $s = p^{-1}$, se obtiene el resultado.

Sean ahora $f \in L^p(\mu)$ y $g \in L^{p'}(\mu)$. Si $\|f\|_p$ o $\|g\|_{p'}$ son cero, la desigualdad de Hölder es trivial. En otro caso, para casi todo $x \in X$ se puede utilizar la desigualdad obtenida anteriormente poniendo $a = |f(x)|^p \|f\|_p^{-p}$ y $b = |g(x)|^{p'} \|g\|_{p'}^{-p'}$ y resulta

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^{p'}}{p'\|g\|_{p'}^{p'}}$$

Como $|f|^p$ y $|g|^{p'}$ tienen integral finita en X, la desigualdad anterior prueba que así resulta también para $|fg|$, y

$$\frac{\|fg\|}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

$\square$

De esta forma, si f y g pertenecen a espacios $L^p(\mu)$ conjugados, fg es integrable, y la integral la podemos acotar por $\|f\|_p \|g\|_{p'}$.

2.4. La dualidad en los espacios $L^p(\mu)$

Recordamos que un espacio de Banach es un espacio vectorial normado y completo en la métrica definida por su norma. Esto quiere decir que es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales o complejos con una norma tal que toda sucesión de Cauchy con respecto a la norma tiene un límite en el espacio vectorial.

Sean dos espacios de Banach reales E y F, y una aplicación lineal T de E en F. La norma en ambos espacios se designa $\|\cdot\|$. Una aplicación T es acotada si existe un número real M positivo tal que $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$. La propiedad de que T es acotada, es equivalente a que es continua.

Sea T una aplicación lineal continua de E en F. El ínfimo del conjunto de los números positivos M que verifican $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$ se llama norma de T, y se designa $\|T\|$. Esta definición es equivalente a decir que $\|T\| = M = \sup\{\|T(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\}$.

Se comprueba fácilmente que así se define una norma en el espacio vectorial $\mathcal{L}(E,F)$, de las aplicaciones lineales y continuas de E en F.

Además, $\mathcal{L}(E,F)$ es un espacio de Banach respecto de la norma antes definida. En efecto, si $\{T_k\}$ es una sucesión de Cauchy, para cada $x \in E$ resulta

$$\|T_i(x) - T_j(x)\| = \|(T_i - T_j)(x)\| \leq \|T_i - T_j\|\|x\|$$

y así $\{T_k(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en F. Si se define $T(x) = \text{lím}\{T_k(x)\}$, se comprueba fácilmente que T pertenece a $\mathcal{L}(E, F)$ y que $\{T_k\}$ converge a T en la norma $\mathcal{L}(E, F)$.

Es particularmente interesante el caso en que $F = \mathbb{R}$. El espacio de Banach $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ se designa entonces E* y se llama dual de E, y sus elementos se llaman formas lineales continuas en E.

Describimos a continuación la teoría elemental de los espacios de Hilbert. Estos son un tipo especial de espacios de Banach en los que la norma se obtiene a partir de un producto escalar.

Definición 2.11. Un espacio vectorial H sobre $\mathbb{R}$ es un espacio de Hilbert real cuando a cada par ordenado de elementos $x, y \in H$ se asocia un número real (x, y), llamado producto escalar de x e y, que verifica las siguientes propiedades:

1. Para cada $y \in H$, la aplicación $x \to [(x, y)]$ es una forma lineal en H.
2. $(x, y) = (y, x)$ para todo $x, y \in H$.
3. $(x, x) > 0$ si $x \neq 0$.
4. H es completo respecto de la norma definida mediante $\|x\| = (x, x)^{1/2}$.

El espacio $L^2(\mu)$ es un ejemplo interesante de espacio de Hilbert.

Teorema 2.12. *Sea H un espacio de Hilbert. Fijado $z \in H$, la aplicación $T_z(x) = (x, z)$ es una forma lineal y continua en H y su norma es $\|z\|$. Recíprocamente, para cada forma lineal y continua T definida en H, existe un único $z \in H$ tal que $T = T_z$. En consecuencia, H es isomorfo e isométrico a su dual H^*.*

Su demostración puede verse en el Teorema 7.1.4 de [3]. Ya se ha indicado que $L^2(\mu)$ es un espacio de Hilbert. Por serlo, y por el teorema anterior, sabemos que es isomorfo e isométrico a su dual. Si p y p' son conjugados, a cada $f \in L^p(\mu)$ se puede asociar la forma lineal definida en $L^{p'}(\mu)$ mediante

$$T(g) = \int_X fg d\mu.$$

Este resultado se conoce como el recíproco del teorema de Hölder.

Teorema 2.13. Sea f una función medible tal que la forma lineal T dada por

$$T(g) = \int_X fg d\mu$$

está definida y es continua en $L^{p'}(\mu)$, siendo $1 \leq p' \leq \infty$. Entonces, si p y p' son conjugados, resulta que $f \in L^p(\mu)$ y $\|f\|_p = \|T\|$.

Su demostración puede verse en el Teorema 7.1.6 de [3]. De esta forma, únicamente cuando $f \in L^p(\mu)$ la forma lineal

$$T(g) = \int_X fgd\mu$$

es continua en $L^{p'}(\mu)$. Si queremos ver que $L^p(\mu)$ es isomorfo e isométrico al dual de $L^{p'}(\mu)$, habrá que ver si cada forma lineal y continua en $L^{p'}(\mu)$ es de la forma

$$T(g) = \int_X fgd\mu$$

para alguna función medible f, la cual pertenecerá a $L^p(\mu)$ según el teorema anterior.

Teorema 2.14. Sean p y p' conjugados, y $1 \leq p < \infty$. La aplicación que a cada $f \in L^{p'}(\mu)$ asocia la forma lineal T definida en L^p por

$$T(g) = \int_X fgd\mu$$

es un isomorfismo isométrico entre $L^{p'}(\mu)$ y el dual de $L^p(\mu)$.

Su demostración puede verse en el Teorema 7.1.7 de [3].

Capítulo 3

Lemas de cubrimiento

La teoría de la diferenciación es una combinación de lemas de cubrimiento y propiedades de diferenciación de ciertas familias. Ahora hablaremos de algunos resultados de cubrimiento. Estos resultados nos ayudarán a encontrar una familia numerable de cubos o bolas que recubren un conjunto arbitrario del espacio euclídeo. Si se tiene una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e integrable sobre $\mathbb{R}$ y se considera $F(x)$ definida para $x \in \mathbb{R}$ como

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy,$$

el teorema fundamental del cálculo afirma que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto significa que

$$\lim_{h\to 0} \frac{[F(x+h) - F(x)]}{h} = f(x) \text{ para c.t.p,}$$

o equivalentemente

$$\lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f d\mu}{h} = f(x) \text{ c.t.p.}$$

Esta relación $F'(x) = f(x)$ c.t.p. se puede expresar mediante la contracción de una sucesión de intervalos a x en los cuales x es un extremo, pues de este modo estamos haciendo tender h a 0, y tomar el límite de la medida de estos intervalos. Es decir, lo expresamos como:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\int_{I_k} f(t)dt}{|I_k|} = f(x), \text{ c.t.p.}$$

donde (I_k) es una sucesión arbitraria de intervalos, de cada uno de los cuales x es un extremo, tal que $|I_k|$, medida de Lebesgue (forma estándar de asignar una medida a subconjuntos del espacio euclidiano n-dimensional, siendo para $n = 1, 2, 3$, coincidente con la medida estándar de longitud , área o volumen) de I_k, tiende a 0 cuando k tiende a infinito. Se dice entonces que (I_k) se contrae a x , y se denota

$$(I_k) \to x.$$

Para generalizar el teorema a funciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ que sean localmente integrables, un camino que parece correcto es elegir una clase $\mathcal{V}$ de conjuntos abiertos y acotados de $\mathbb{R}^n$ que jueguen el papel de los intervalos acotados de antes y, por otro lado, dar sentido a la convergencia $(R_k) \to x$, con $R_k \in \mathcal{V}$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Una clase así, $\mathcal{V}$, junto con la definición de convergencia, constituirá una base de diferenciación para $\mathbb{R}^n$. Ejemplos de bases importantes serán las de cuadrados y discos en $\mathbb{R}^2$. De esta forma, dada una base de diferenciación, podemos definir la derivada, en sentido puntual, de la integral de la función. Dadas una base de diferenciación $\mathcal{V}$ y una función f de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ que sea localmente integrable, y fijado un x de $\mathbb{R}^n$, puede considerarse el

$$\sup \limsup_{k \to \infty} \frac{\int_{R_k} f(t)dt}{|R_k|},$$

donde el supremo está considerado sobre las sucesiones (R_k) tales que $R_k \in \mathcal{V}$ y (R_k) se contrae a x. Este supremo se designa derivada superior en x, respecto de $\mathcal{V}$, de la integral de f, y sustituyendo supremo por ínfimo y límite superior por inferior tendremos la definición de derivada inferior. Si coinciden, este valor común se llamará derivada en x, respecto de $\mathcal{V}$, de la integral de f, y se designa

$$D\Big(\int f, x\Big)$$

Definición 3.1. Sea f una función localmente integrable, y $\mathcal{V}$ una base de diferenciación. Que f tiene la propiedad de Lebesgue respecto de $\mathcal{V}$ significa que para casi todo punto x de $\mathbb{R}^n$ existe la derivada, respecto de $\mathcal{V}$, de la integral, y $F'(x) = f(x)$, con $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$.

Vista la definición de la propiedad de Lebesgue, veamos los teoremas de recubrimiento de Vitali. Los teoremas de recubrimiento de Vitali están muy vinculados a la teoría de diferenciación de integrales.

Definición 3.2. Sea $\mathcal{V}$ una base de diferenciación, y A un conjunto medible de $\mathbb{R}^n$. Un subconjunto $V \in \mathcal{V}$ es un recubrimiento de Vitali para A si para cada $x \in A$ existe una sucesión de elementos de V que se contrae a x.

Diremos que $\mathcal{V}$ tiene la propiedad fuerte de Vitali si para cada conjunto medible A, cada recubrimiento V de Vitali para A extraído de $\mathcal{V}$, y para cada $\epsilon > 0$, existe una sucesión disjunta (R_k) de elementos de $\mathcal{V}$ tal que

1. $|A \setminus \bigcup R_k| = 0.$

2. $|\bigcup R_k \setminus A| < \epsilon$.

La propiedad fuerte de Vitali implica que se cumple la propiedad de Lebesgue para las funciones localmente integrables.

Diremos que $\mathcal{V}$ tiene la propiedad débil de Vitali si para cada conjunto A de medida finita, cada recubrimiento V de Vitali para A extraído de $\mathcal{V}$, y para cada α positivo menor que 1, existe una sucesión (R_k) de elementos de $\mathcal{V}$ tal que

1. $\mu(A \setminus \bigcup R_k) = 0$.

2. $\sum \mu(\bigcup R_k) < \dfrac{1}{\alpha}\mu(A)$,

en donde μ designa la medida del espacio abstracto considerado.

La propiedad débil de Vitali tiene su importancia, pues es condición necesaria y suficiente para que una base de diferenciación satisfaga el teorema de densidad de Lebesgue (que veremos en el tema 5).

3.1. Teorema de recubrimiento elemental

Veamos ahora otra propiedad de cubrimiento. Nos referiremos a ella como "el pez grande se come al chico". En este teorema de recubrimiento elemental, vemos que si 2 bolas tienen intersección no vacía, siempre podemos encontrar un radio que será igual a 3 veces el radio de la bola con mayor medida, tal que una bola centrada en donde lo estaba la grande y con este radio contendrá la totalidad de la pequeña.

Proposición 3.3. *Sean $B(x_1, r_1)$, $B(x_2, r_2)$, donde $B(x, r)$ es la bola abierta de centro x y radio r, tal que $B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2) \neq \emptyset$, y sea $|B(x_1, r_1)| \geq |B(x_2, r_2)|$, es decir, mayor la medida de Lebesgue de la primera que de la segunda. En ese caso se tiene que $B(x_1, 3r_1) \supset B(x_2, r_2)$.*

Demostración. Por ser $|B(x_1, r_1)| \geq |B(x_2, r_2)|$, se tiene que $r_2 \leq r_1$. De esta forma, se tiene que $B(x_2, r_1) \supset B(x_2, r_2)$. Por ser intersección no vacía, la distancia a lo sumo entre x_1 y x_2 es de $2r_1$. Es por ello que la bola $B(x_1, 3r_1) \supset B(x_1, r_1) \cup B(x_2, r_1)$, pues sea un $z \in B(x_2, r_1)$, y sea d un punto que pertenezca a $B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$, entonces

$$\|x_1 - z\| \leq \|x_1 - d\| + \|d - z\| \leq r_1 + 2r_2 \leq r_1 + 2r_1 = 3r_1$$

y como $r_2 \leq r_1$, $B(x_1, 3r_1) \supset B(x_1, r_1) \cup B(x_2, r_1) \supset B(x_2, r_2)$.

$\square$

A continuación probaremos otra proposición, la cual nos ayudará, junto a la proposición anterior, a demostrar el Teorema de Hardy-Littlewood.

Proposición 3.4. *Sea $\{B_j\}$ una sucesión finita de bolas. Existe entonces una sucesión de bolas $\{R_h\}$ tal que $\{R_h\} \subset \{B_j\}$, tal que se cumple que $R_k \cap R_l = \emptyset$, para $k \neq l$, y que*

$$\bigcup B_j \subset \bigcup R_h^*,$$

siendo R_h^* la bola R_j a la que se le ha triplicado el radio.

Demostración. Sea el conjunto $\{B_j\}$ de bolas. Cogemos de todas ellas la de mayor radio. Como sabemos por la proposición anterior que si dos bolas intersecan el triple de la grande contendrá a las pequeña, en nuestro conjunto final $\{R_h\}$ no consideraremos las bolas pequeñas que intersecan con la grande. Sea $\{S_t\}$ la sucesión de las bolas tal que intersecan con la bola grande considerada. De esta forma, ahora consideramos el conjunto $\{B_j\} \setminus \{S_t\}$, y del mismo seleccionamos la bola con el segundo radio más grande. Volvemos a realizar el procedimiento anterior, con $\{T_i\}$ la sucesión de las bolas que intersecan con la bola con el segundo radio más grande. De esta forma, ahora consideraríamos $\Big(\{B_j\} \setminus \{S_t\}\Big) \setminus \{T_i\}$. Si seguimos recursivamente, quedará un conjunto de bolas $\{R_h\}$ que no intersecan (pues hemos ido eliminando las bolas que intersecan con una de un radio mayor), que $\{R_h\} \subset \{B_j\}$, y que por la proposición anterior, $\bigcup B_j \subset \bigcup R_h^*$.

□

3.2. Teorema de cubrimiento de Besicovitch

A continuación, presentaremos el Teorema de Cubrimiento de Besicovitch. Para probarlo, primero demostramos una versión más elemental cuya prueba contiene la principal idea del teorema.

Teorema 3.5. *Sea $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de cubos cerrados centrados en el origen de $\mathbb{R}^n$. Asumamos también que $\cap_{k=1}^{\infty} Q_k = 0$. Sea A un conjunto acotado de $\mathbb{R}^n$. Para cada $x \in A$ tomamos un entero positivo $i(x)$ y escribimos $Q(x) = x + Q_{i(x)}$. Entonces existe una sucesión $\{x_k\} \subset A$ posiblemente finita tal que:*

1. *El conjunto A está cubierto por la sucesión $\{Q(x_k)\}$, esto es,*

$$A \subset \bigcup Q(x_k).$$

2. *Cada punto $z \in \mathbb{R}^n$ está como mucho en 2^n de los conjuntos $Q(x_k)$, esto es,*

$$\sum \chi_k(z) \leq 2^n,$$

donde χ_k es la función característica de $Q(x_k)$.

3. La sucesión $\{Q(x_k)\}$ puede ser distribuida en $4^n + 1$ familias disjuntas.

Demostración. Cogemos un x_1 tal que $Q(x_1)$ es de máximo tamaño. Asumimos que $x_1, x_2, ...x_m$ han sido ya escogidas. Si

$$A \setminus \bigcup_{k=1}^{m} Q(x_k) = \emptyset,$$

entonces el proceso de selección se ha acabado. En otro caso seleccionamos un punto $x_{m+1} \in A \setminus \bigcup_{k=1}^{m} Q(x_k)$ tal que $Q(x_{m+1})$ es de máximo tamaño. La sucesión $\{Q(x_{m+1})\}$ que hemos obtenido entonces satisface las siguientes propiedades:

1. Si $i \neq j$, entonces $x_i \notin Q(x_j)$.

2. La sucesión $\{\delta(Q(x_k))\}$ de diámetros de los conjuntos $Q(x_k)$ es o finita o tiende a 0 cuando k tiende a ∞, desde que los conjuntos $x_k + \frac{Q_{i(x_k)}}{2}$ son disjuntos.

Si el proceso de selección para, entonces la primera propiedad es trivial. Si $\{Q(x_k)\}$ es una sucesión infinita y hay un $x \in A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} Q(x_k)$ entonces existe un j_0 tal que el diámetro de $Q(x)$ es mayor que el de $Q(x_{j_0})$. Esto significaría que $Q(x)$ ha sido infravalorado en nuestra selección. Luego tenemos $A \subset \bigcup Q(x_k)$. Probamos ahora que cada $z \in \mathbb{R}^n$ está como mucho en 2^n de los conjuntos $Q(x_k)$. Para hacerlo consideramos sobre z n hiperplanos paralelos a la coordenada n del hiperplano y consideramos 2^n hipercuadrantes cerrados sobre z determinados por ellos. En cada hipercuadrante hay como mucho un punto x_j tal que $z \in Q(x_j)$. Si hubiese dos puntos x_i, x_j, el mayor de los dos conjuntos $Q(x_1), Q(x_2)$, contendría el centro del pequeño y este lo hemos excluido en nuestra construcción. Queremos ahora probar el tercer punto del teorema. Para ello, sea un $Q(x_j)$ de los $\{Q(x_k)\}$, debido al punto 2 demostrado, como mucho 2^n miembros de la sucesión contienen un vértice fijo de $Q(x_j)$. Cada cubo $Q(x_k)$ con $k < j$ es de un volumen mayor o igual que $Q(x_j)$ y entonces si

$$Q(x_k) \cap Q(x_j) \neq \emptyset$$

con $k < j$, entonces $Q(x_k)$ contiene como mínimo uno de los 2^n vértices de $Q(x_j)$. Así, para cada $Q(x_j)$ hay como mucho $2^n \times 2^n$ conjuntos de la colección

$$\{Q(x_1), Q(x_2), ..., Q(x_{j-1}\}$$

con intersección no vacía con $Q(x_j)$. Este hecho nos permite distribuir los conjuntos $Q(x_k)$ en $4^n + 1$ sucesiones disjuntas de la siguiente forma: Establecemos $Q(x_i) \in I_i$ para $i = 1, 2, ..., 4^n+1$. Como $Q(x_{4^n+2})$ es disjunto con $Q(x_{k_0})$ para algún $k_0 \leq 4^n+1$, estableceríamos $Q(x_{4^n+2}) \in I_{k_0}$. De la misma forma $Q(x_{4^n+3})$ es disjunto con todos los conjuntos en algún I_{k*}, luego podemos establecer $Q(x_{4^n+3}) \in I_{k*}$. Esto prueba la tercera parte, y con ello el teorema.

□

De esta forma, ya podemos probar el Teorema de Besicovitch. Este teorema tiene gran importancia en teoría de la diferenciación y en muchos otros campos de Análisis. El teorema original de Besicovitch trata con bolas euclídeas de $\mathbb{R}^n$, pero la siguiente versión es más simple y elemental.

Teorema 3.6. *Sea A un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$. Para cada $x \in A$, sea Q_x un cubo cerrado con centro x y lados paralelos a los ejes coordenados. Entonces, uno puede elegir, de los anteriores Q_x considerados, una colección $\{Q_k\}$ posiblemente finita tal que:*

1. *El conjunto A está cubierto por la sucesión $\{Q_k\}$, esto es,*
$$A \subset \bigcup Q_k.$$
2. *Ningún punto está en más de K_n cubos de la sucesión $\{Q_k\}$, esto es,*
$$\sum \chi_{Q_k}(z) \leq K_n.$$
3. *La sucesión $\{Q_k\}$ puede ser distribuida en ϵ_n familias de cubos disjuntos.*

Demostración. El proceso natural de selección consistiría, como en la prueba anterior, en elegir primero los conjuntos más grandes y excluir la parte de A ya cubierta por ellos. El hecho de que el supremo de los diámetros de los cubos puede ser inalcanzable nos obliga a elegir los cubos entre los más grandes. Sea
$$a_0 = \sup\{\delta(Q(x)) : x \in A\}.$$
Si $a_0 = \infty$ entonces un cubo $Q(x)$ convenientemente elegido es suficiente para cubrir A. Si $a_0 < \infty$ elegimos $Q_1 \in (Q(x))_{x \in A}$ con centro $x_1 \in A$ tal que $\delta(Q_1) > \frac{a_0}{2}$. Sea ahora
$$a_1 = \sup\{\delta(Q(x)) : x \in A \setminus Q_1\}.$$
Elegimos Q_2 con centro $x_2 \in A \setminus Q_1$ tal que $\delta(Q_2) > \frac{a_1}{2}$. Y así sucesivamente. Obsérvese que no podemos afirmar que si $i \neq j$ entonces $x_i \notin Q(x_j)$. Esto ciertamente pasa si $i > j$, pero no necesariamente si $i < j$. Por el contrario podemos siempre garantizar que
$$\frac{1}{3}Q_i \cap \frac{1}{3}Q_j = \emptyset,$$
donde $\frac{1}{3}Q_k$ es el cubo con mismo centro que Q_k y cuyo tamaño es $1/3$ el tamaño de Q_k. De hecho, si por ejemplo $i > j$, entonces $x_i \notin Q_j$ y $\delta(Q_j) > \frac{1}{2}Q_i$, y esto implica la afirmación precedente. De esta forma obtenemos el primer punto que queríamos demostrar. Los puntos 2 y 3 son esencialmente lo mismo que el Teorema 3.5 usando el mismo argumento que hemos usado para probar el punto 1. □

Veremos entonces una serie de observaciones: En primer lugar, el teorema de Besicovitch demostrado puede ser válido para A no acotado. Si A no es acotado, pero

$$\sup\{\delta(Q(x)) : x \in A\} = M < \infty$$

el teorema demostrado sigue siendo válido cambiando convenientemente las constantes K_n, ϵ_n. Para mostrarlo, es suficiente con particionar $\mathbb{R}^n$ en cubos disjuntos I_i de tamaño M y aplicar el teorema de Besicovith a la intersección de A con cada uno de estos cubos I_i.

Además, en el teorema de Besicovitch podemos considerar $Q(x)$ no cerrados. Obsérvese que el hecho de que $Q(x)$ es cerrado es irrelevante para la prueba del teorema. Asumir que $Q(x)$ es un cubo centrado en x con parte del perímetro cambio solo las constantes calculadas K_n, ϵ_n.

En tercer lugar, podemos definir el teorema original de Besicovitch. Sea A un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$. Para cada $x \in A$, sea $\bar{B}(x, r(x)$ una bola cerrada con centro x y un radio $r(x)$ dado. Entonces, uno puede elegir, de las anteriores $\bar{B}(x, r(x)$ considerados, una colección $\{B_k\}$ posiblemente finita tal que:

1. El conjunto A está cubierto por la sucesión $\{B_k\}$, esto es,

$$A \subset \bigcup Q_k.$$

2. Ningún punto está en más de K_n cubos de la sucesión $\{Q_k\}$, esto es,

$$\sum \chi_{Q_k}(z) \leq K_n.$$

3. La sucesión $\{Q_k\}$ puede ser distribuida en ϵ_n familias de cubos disjuntos.

3.3. Cubrimiento de una familia finita de intervalos en $\mathbb{R}$

Para acabar este capítulo de lemas de cubrimiento, vemos un último teorema, el cual nos dice que dada una familia finita de intervalos, podemos un extraer un subconjunto de intervalos de la misma familia, de forma que cada punto contenido en la unión de todos los intervalos está contenido en el subconjunto considerado, y está como mucho en 2 intervalos de este subconjunto considerado. Lo vemos a continuación.

Teorema 3.7. *Dada una colección finita de intervalos de* $\mathbb{R}$, $\{I_j\}_{j=1,\ldots,l}$; *existe una subcolección* $\{R_k\}_{k=1,\ldots,m} \subset \{I_j\}_{j=1,\ldots,l}$ *tal que* $\sum_{k=1}^{m} \chi_{R_k}(x) \leq 2$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $I = \bigcup_{j=1}^{l} I_j$, y esta unión de intervalos puede verse como una unión de intervalos disjuntos, supongamos $I = (a_1, b_1) \cup (a_2, b_2) \cup ... \cup (a_k, b_k)$. De esta forma, llevamos a cabo un proceso de recubrimiento para cada intervalo. Consideramos el primer intervalo de I, esto es, (a_1, b_1). El proceso de recubrimiento es el siguiente. Como queremos recubrir el intervalo completo, en primer lugar consideramos los intervalos de la forma (a_1, d), de los cuales seleccionamos el que tenga $\square$

Capítulo 4

Operador maximal de Hardy-Littlewood

En el siguiente capítulo hablaremos del Operador maximal de Hardy-Littlewood. Este operador está definido sobre el espacio de las funciones localmente integrables $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Veremos diferentes generalizaciones de este operador, en función de si está definido en bolas o en cubos, y en función de si está centrado o no centrado en los mismos. Veremos que dada una función con estas características, el operador sobre esta función es medible. Definiremos que un operador sea de tipo débil y de tipo fuerte, y veremos que el operador maximal de Hardy-Littlewood es de tipo fuerte (p, p) cuando $1 < p < \infty$, para lo cual se necesitará ver que es de tipo débil $(1, 1)$. El análisis del operador maximal de Hardy-Littlewood es importante, pues el mismo nos facilitará, en el siguiente capítulo, la prueba del Teorema de Diferenciación de Lebesgue.

Definición 4.1. Se define el espacio $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ de las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ localmente integrables como el conjunto de funciones Lebesgue medibles que verifican

$$\int_A |f(x)|dx < \infty,$$

para todo conjunto acotado A en $\mathbb{R}^n$.

Dada esta definición, vemos el siguiente teorema.

Teorema 4.2. *Toda función f del espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$, para $1 \leq p \leq \infty$, es localmente integrable.*

Demostración. Para ver esto, basta considerar la función característica χ_K de un conjunto compacto K de $\mathbb{R}^n$, entonces se tiene

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_K| dx \Big|^{1/q} = \Big| \int_K 1 dx \Big|^{1/q} = |\mu(K)|^{1/q} < \infty,$$

donde q es el número positivo que cumple la desigualdad de Hölder,esto es,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

y $\mu(K)$ es la medida de Lebesgue de K. Entonces, por la desigualdad de Hölder se tiene que:

$$\int_K |f|dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f\chi_K|dx \leq \Big| \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx \Big|^{1/p} \Big| \int_K 1dx \Big|^{1/q} = \|f\|_p |\mu(K)|^{1/q} < \infty,$$

y por tanto f es localmente interable. □

Téngase en cuenta que en el anterior teorema, se puede realmente considerar $L^p(X)$ en vez de $L^p(\mathbb{R}^n)$, siendo X abierto.

En definitiva, visto el espacio $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, para una función $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ Hardy y Littlewood introdujeron una nueva función Mf, que juega un rol fundamental en la teoría de variable real:

$$Mf(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(y)|dy.$$

Existen diferentes generalizaciones de este operador, cuyo comportamiento es muy informativo en la teoría de la diferenciación. La generalización más natural consiste en definir, para $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, con $x \in \mathbb{R}^n$,

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |f(y)|dy,$$

donde $Q(x,r)$ denota el intervalo cúbico abierto de centro x y lado $2r$ y $|Q(x,r)|$ denota su medida de Lebesgue.

4.1. Propiedades del operador maximal de Hardy-Littlewood

El operador M definido así satisface las siguientes propiedades:

i) $Mf(x) \geq 0 \ \forall f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), \forall x \in \mathbb{R}^n$.

ii) $M(f_1 + f_2)(x) \leq Mf_1(x) + Mf_2(x) \ \forall f_1, f_2 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

iii) $M(\lambda f)(x) = |\lambda| Mf(x) \ \forall f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$.

Nos referiremos a estas propiedades diciendo que M es positivo (i), subaditivo (ii) y positivamente homogéneo (iii). Definiremos ahora el Operador Maximal de Hardy-Littlewood centrado en bolas, y no centrado para cubos y para bolas. A continuación, vemos que son equivalentes, esto es, dos operadores T y T' son equivalentes ($T \sim T'$) si $\exists c, C > 0$ tales que $cT \leq T' \leq CT$.

1. Operador Maximal de Hardy-Littlewood Centrado en Bolas, $M_B^c f(x)$:
$$M_B^c f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy,$$
donde $B(x,r)$ es la bola abierta de centro x y radio r.

2. Operador Maximal de Hardy-Littlewood no centrado para Cubos, $M_Q f(x)$:
$$M_Q f(x) := \sup_{x \in Q(z,r)} \frac{1}{|Q(z,r)|} \int_{Q(z,r)} |f(y)| dy.$$

3. Operador Maximal de Hardy-Littlewood no centrado para Bolas, $M_B f(x)$:
$$M_B f(x) := \sup_{x \in B(z,r)} \frac{1}{|B(z,r)|} \int_{B(z,r)} |f(y)| dy.$$

Vemos ahora que tanto $Mf(x)$, como $M_B^c f(x)$, $M_Q f(x)$ y $M_B f(x)$, son equivalentes.

Demostración. Primero, veamos que $M \sim M_B^c$. $B(x,r) \subset Q(x,r)$, luego
$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy \leq \frac{|Q(x,r)|}{|B(x,r)|} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |f(y)| dy.$$
Por otro lado, sabemos que $|Q(x,r)| = r^n$ y $|B(x,r)| = C_n r^n$. Sustituyendo en el término de la derecha,
$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy \leq C_n \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |f(y)| dy.$$
Tomando supremos llegamos a que $M_B^c \leq C_n M$. Razonando de un modo parecido, como $Q(x, \frac{\sqrt{2}}{2} r) \subset B(x,r)$, se demuestra $c_n M \leq M_B^c$. De esta forma, $M \sim M_B^c$.

Pasamos a ver que $M_B^c \sim M_B$. Es fácil ver que $M_B^c f \leq M_B f$, pues el conjunto de bolas que contienen a un punto es más grande que las bolas centradas en el punto. Sea ahora un $x \in B(z,r)$, se tiene que $B(z,r) \subset B(x,2r)$, y además $|B(x,2r)| = 2^n |B(z,r)|$, luego
$$\frac{1}{|B(z,r)|} \int_{B(z,r)} |f(y)| dy \leq \frac{2^n}{|B(x,2r)|} \int_{B(x,2r)} |f(y)| dy.$$
Concluimos $M_B f \leq 2^n M_B^c f$ y, por tanto, $M_B^c \sim M_B$. De forma análoga se puede ver que $M \sim M_Q$, lo que dejaría demostrado la equivalencia de operadores. $\square$

De esta forma, vemos que los diferentes operadores son equivalentes, por lo que se pueden intercambiar. Operaremos con uno u otro según convenga.

Por otro lado, la función Mf es medible, si el conjunto $\{Mf > \lambda\}$ es abierto para cada $\lambda > 0$. Las generalizaciones del operador maximal son medibles. Es sencillo ver que los operadores no centrados M_Q y M_B son medibles, pues los conjuntos $\{x : M_B f(x) > \lambda\}$ y $\{x : M_Q f(x) > \lambda\}$ son abiertos. Lo vemos para M_B, la demostración para M_Q es análoga.

Proposición 4.3. *Dado $f \in L^1_{\text{loc}}$, $M_B f$ es medible, siendo M_B el operador no centrado.*

Demostración. Sea $z \in \{x : M_B f(x) > \lambda\}$, por la definición de una función maximal, existe una bola P tal que z es punto interior de P y cumple

$$\frac{1}{|P|}\int_P |f(y)|dy > \lambda.$$

Por lo tanto, el conjunto $\{x : M_B f(x) > \lambda\}$ es abierto. $\square$

Comprobar que los operadores centrados M y M_B^c son medibles requiere más esfuerzo. Lo vemos para M, la demostración para M_B^c es análoga.

Proposición 4.4. *Dado $f \in L^1_{\text{loc}}$, Mf es medible, siendo M el operador centrado.*

Demostración. En primer lugar, vemos que en la definición del Operador Maximal de Hardy-Littlewood el supremo se puede tomar sobre los números racionales. Por la propiedad del supremo, $\exists R > 0$ tal que

$$Mf(x) - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{|Q(x,R)|}\int_{Q(x,R)} |f(y)|dy \leq Mf(x). \tag{4.1}$$

Sabemos que existe una sucesión $\{q_k\} \subset \mathbb{Q}^+$ creciente tal que $\lim_{k\to\infty} q_k = R$. Entonces, $|Q(x,q_k)| \to |Q(x,R)|$, y las funciones $\chi_{Q(x,q_k)}$ forman una sucesión monótonamente creciente que converge a $\chi_{Q(x,R)}$. De esta forma,

$$Mf(z) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(z,r)|}\int_{B(z,r)} |f(y)|dy = \sup_{r\in\mathbb{Q}^+} \frac{1}{|B(z,r)|}\int_{B(z,r)} |f(y)|dy.$$

Sabemos que $\mathbb{Q}$ es un conjunto numerable y que la función

$$\frac{1}{|Q(x,q_k)|}\int_{Q(x,q_k)} |f(y)|dy$$

es medible. Entonces, aplicamos que el supremo de una colección numerable de funciones medibles es medible, cuya demostración puede verse en el Teorema 4.1.3 de [3], concluimos que

$$\sup_{r\in\mathbb{Q}^+>0} \frac{1}{|B(z,r)|}\int_{B(z,r)} |f(y)|dy$$

es medible. □

Acabamos de ver que los operadores maximales de Hardy-Littlewood son medibles, luego podemos escribir

$$M : L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^n).$$

4.2. Acotación del operador maximal de Hardy-Littlewood

Sea M el operador maximal asociado a una base de diferenciación $\mathcal{V}$. Queremos ver qué relación existe entre desigualdades de la forma $|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) \geq \lambda\}| \leq C(\lambda, f)$, en donde C cumple que para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ se verifica que tiende a 0 cuando λ tiende a ∞, con el hecho de que las funciones de $L^p(\mathbb{R}^n)$ tienen la propiedad de Lebesgue respecto de $\mathcal{V}$. Miguel de Guzmán prueba que son equivalentes que:

i) Cada función $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tiene la propiedad de Lebesgue respecto de $\mathcal{V}$.

ii) el operador maximal M de Hardy-Littlewood asociado a $\mathcal{V}$ es de tipo débil (1,1) en $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Vemos ahora para ello la definición de que un operador sea de tipo débil.

Definición 4.5. Sean $T : L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ un operador y $1 \leq p < \infty$. Decimos que T es de tipo débil (p,p) si y solo si $\forall\lambda > 0$ se tiene

$$|\{x \in : Tf(x) \geq \lambda\}| \leq \left(\frac{c\|f\|_p}{\lambda}\right)^p,$$

con c siendo independiente de f y λ.

Veamos que el operador maximal de Hardy-Littlewood es de tipo débil (1,1).

Teorema 4.6. *El operador maximal de Hardy-Littlewood es de tipo débil (1,1).*

Demostración. Tenemos que ver que

$$|\{x : |Mf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_1.$$

Sea K cualquier conjunto compacto de $\{|Mf(x)| > \lambda\}$. Si lo demostramos para este K arbitrario, por la regularidad de la medida de Lebesgue, quedará demostrado el teorema. Para cada $x \in K$, escogemos una $B(x, r_x)$,

$$\frac{1}{|B(x,r_x)|}\int_{B(x,r_x)} |f(y)|dy > \lambda.$$

K está contenido en la unión de estas bolas $B(x, r_x)$. Por la proposición 3.4 podemos encontrar un recubrimiento Q_j, de bolas disjuntas, a partir de las anteriores bolas consideradas B_j, tal que $\bigcup B_j \subset \bigcup Q_j^*$ y se tiene, por tanto:

$$\begin{aligned}|K| &\leq |\cup B_j| \leq |\cup Q_j^*| \leq \sum_k |Q_j^*| = 3^n \sum_k |Q_j| \leq \frac{3^n}{\lambda}\sum_k \int_{Q_k} |f(y)|dy \\ &= \frac{3^n}{\lambda}\int_{\cup Q_k} |f(y)|dy = \frac{3^n}{\lambda}\int_{\cup Q_k} |f(y)|dy = \frac{3^n}{\lambda}\|f\|_1.\end{aligned}$$

De esta forma, haciendo $3^n = C$ queda demostrado. $\square$

A continuación definimos lo que es que sea de tipo fuerte. Veremos también que el operador maximal es de tipo fuerte (p, p) para cada p tal que $1 < p \leq \infty$

Definición 4.7. Sean $T : L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ un operador y $1 \leq p \leq \infty$. Decimos que T es de tipo fuerte (p, p) si $\forall f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) > 0$ se verifica

$$\|Tf\|_p \leq c\|f\|_p$$

donde c es una constante independiente de f.

Recordamos que

$$\begin{aligned}\|f\|_p &= \||f|^p\|_1^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}};\\ \|f\|_\infty &= \text{ínf}\{\alpha > 0 : \mu\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} = 0\}.\end{aligned}$$

Como estamos trabajando en el espacio $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, los valores $\|f\|_p$ y $\|f\|_\infty$ podrían no ser finitos.

Para la siguiente proposición usaremos la desigualdad de Chebyshev, que nos dice que para toda función medible f, $t > 0$ y $p > 0$,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}| \leq \frac{1}{t^p}\int_{|\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|>t\}|} |f(y)|^p dy.$$

Proposición 4.8. *Si T es de tipo fuerte (p,p), entonces T es de tipo débil (p,p).*

Demostración. Para cada $f \in L^1_{\text{loc}}(R^n)$ y $\lambda > 0$,

$$|A_\lambda| = |\{x : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \int \frac{|Tf(x)|}{\lambda} dx \leq \int \frac{|Tf(x)|^p}{\lambda^p} dx \leq \left(\frac{c\|f\|_p}{\lambda}\right)^p.$$

□

Teorema 4.9. *M es de tipo fuerte (p,p) para $1 < p \leq \infty$.*

Demostración. Comenzamos viendo que es de tipo fuerte (∞, ∞). Se cumple que

$$\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty,$$

pues $|f| \leq \|f\|_\infty$ en casi todo punto, y por ello:

$$\frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |f(y)| dy \leq \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} \|f\|_\infty dy = \|f\|_\infty \ \forall r > 0.$$

Tomando supremos queda demostrado entonces para $p = \infty$. Tenemos ahora que demostrar que podemos obtener

$$\|Mf(x)\|_p \leq C_p \|f\|_p \text{ con } 1 < p < \infty.$$

Para hacerlo, de ahora en adelante lo realizaremos mediante la división de f en dos funciones, siendo nuestra prueba un caso sencillo del Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz. Definimos $f = f_1 + f_2$, tal que

$$f_1 = f\chi_{\{|f| > \frac{t}{2}\}},$$

y f_2 queda definido por $f - f_1$. Es claro que $Mf(x) \leq Mf_1(x) + Mf_2(x)$, luego

$$\{Mf(x) > t\} \subset \left\{Mf_1(x) > \frac{t}{2}\right\} \cup \left\{Mf_2(x) > \frac{t}{2}\right\}.$$

$\{Mf_2(x) > \frac{t}{2}\} = \emptyset$, por lo que

$$|\{Mf(x) > t\}| \leq \left|\left\{Mf_1(x) > \frac{t}{2}\right\}\right| \leq \frac{C}{t} \int_{|f| > \frac{t}{2}} |f|.$$

Aplicamos ahora el teorema de Fubini que nos dice que dado un $f \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^p = \int_0^\infty p t^{p-1} \lambda_f(t) dt,$$

(x) dx

siendo $\lambda_f(t) = |\{x : |f| > t\}|$. Veámoslo.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty pt^{p-1}\lambda_f(t)dt &= \int_0^\infty pt^{p-1}\int_{|f|>t} dxdt \\ &= p\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_0^{|f(x)|} t^{p-1}dt\Big)dx = \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p dx.\end{aligned}$$

De esta forma combinando las dos ecuaciones anteriores se tienen que

$$\begin{aligned}\|Mf\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p dx = p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_{Mf}(t)dt \leq pC\int_0^\infty t^{p-2}\int_{|f|>\frac{t}{2}}|f(x)|dxdt \\ = pC\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|\int_0^{2|f(x)|} t^{p-2}dtdx = \frac{Cp}{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} 2^p|f(x)|^p dx = C_p\|f\|_p^p\end{aligned}$$

Esto se verifica para todo $p > 1$, pues de lo contrario el denominador se anula. □

Veamos ahora un contraejemplo para ver que el operador maximal no es de tipo fuerte (1,1). Sea en $\mathbb{R}$ la función característica del intervalo [0,1].

Sea $x \geq 1$. Para ese x,

$$Mf(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)}|f(y)|dy = \sup_{r>0}\frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r}|f(y)|dy.$$

Sea un $x - 1 \geq r > 0$, al valer $f(y) = 0$ para $y \in (x - r, x + r)$, en ese caso el valor de la integral $\int_{x-r}^{x+r}|f(y)|dy = 0$ y del promedio es 0.

Si $x - 1 < r \leq x$, $\int_{x-r}^{x+r}|f(y)|dy = r - x + 1$, luego el valor promedio sería $\frac{r-x+1}{2r}$, cuyo valor es creciente respecto de r, y valor máximo se alcanza en $x = r$, siendo $\frac{1}{2x}$.

Por último, si consideramos un $r > x$, el valor promedio es decreciente, al ser $\int_{x-r}^{x+r}|f(y)|dy = 1$, luego el valor promedio al ser el valor de la integral constante decrecerá a medida que aumenta el intervalo considerado r. El valor máximo de los promedios se da entonces en $r = x$, siendo $Mf(x) = \frac{1}{2x}$. Por último, $Mf(x) = \frac{1}{2x}$ para $x \geq 1$ y

$$\int_1^\infty |Mf(x)|dx = \int_1^\infty \frac{1}{2x}dx = \infty.$$

Capítulo 5

Teorema de diferenciación de Lebesgue

Ya estudiado el análisis del comportamiento de los promedios mediante la función maximal de Hardy-Littlewood, tenemos lo necesario para demostrar nuestro teorema de diferenciación de Lebesgue. Después de demostrar este teorema, definiremos el conjunto de los puntos de Lebesgue, y definiremos el teorema de densidad de Lebesgue, que es un caso particular del teorema de diferenciación de Lebesgue.

Teorema 5.1. *Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x) \text{ para casi toda } x \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. Dado $N \in \mathbb{N}$, notemos que si $|x| \leq N$ y $r \leq 1$, los valores de $\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy$ dependen de las y que cumplen $|y| \leq N+1$. Así, no hay pérdida de generalidad al suponer que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ puesto que podemos reemplazar f por $f\chi_{B(0,N+1)}$.

Para $\epsilon > 0$ podemos encontrar una función continua g de soporte compacto tal que $\|f - g\|_1 < \epsilon$. Además, por continuidad de g obtenemos

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} g(y)dy \to g(x)$$

si $r \to 0$. De aquí vemos

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r\to 0}\left|\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy - f(x)\right| \\
&= \limsup_{r\to 0}\left|\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} [f(y)-g(y)]dy + \left[\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} g(y)dy - g(x)\right]\right. \\
&\quad \left. + g(x) - f(x)\right| \leq M(f-g)(x) + 0 + |f(x)-g(x)|.
\end{aligned}$$

Para $\alpha > 0$ sean

$$E_\alpha = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r\to 0}\left|\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy - f(x)\right| > \alpha\right\}$$

$$F_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)-g(x)| > \alpha\},$$

entonces

$$E_\alpha \subset F_{\alpha/2} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : M(f-g)(x) > \alpha/2\}$$

y como

$$\frac{\alpha}{2}|F_{\alpha/2}| \leq \int_{F_{\alpha/2}} |f(x)-g(x)|dx < \epsilon,$$

aplicando el Teorema 4.6 con $C = 3^n$ se tiene que

$$|E_\alpha| \leq \frac{2\epsilon}{\alpha}(1+3^n).$$

Al ser ϵ arbitrario llegamos a que $|E_\alpha| = 0$ para todo α, y de aquí se deduce el resultado para casi todo x. □

Veamos ahora un ejemplo de lo que nos quiere decir el teorema anterior. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por la expresión

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

y analicemos lo que sucede en $x = 0$. En este caso el límite del valor promedio en el punto $x = 0$, esto es,

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|[-r,r]|}\int_{-r}^{r} f(y)dy = \lim_{r\to 0}\frac{1}{|2r|}\left(\int_0^r f(y)dy + \int_{-r}^0 f(y)dy\right) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{|2r|}(r-r) = 0,$$

cuyo valor es distinto a $f(0) = 1$. Sin embargo, veamos qué sucede para cualquier otro punto. Sea un $x > 0$, se tiene que

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|[-r,r]|} \int_{-r}^{r} 1dy = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|2r|} 2r = 1 = f(x).$$

Sea un $x < 0$, se tiene que

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|[-r,r]|} \int_{-r}^{r} (-1)dy = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|2r|} (-2r) = -1 = f(x).$$

De esta forma, en el ejemplo anterior la igualdad del Teorema de Diferenciación de Lebesgue se cumple para casi todo punto, pues en $x = 0$ falla.

A partir de este teorema, podemos llegar a ver una serie de observaciones:

p.

- Del teorema de diferenciación de Lebesgue se sigue que: $|f(x)| \leq Mf(x)$ c.t.p x, pues

  $$f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy \leq Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |f(y)|dy,$$

  con la primera igualdad para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$.

- $\|Mf(x)\|_\infty = \|f\|_\infty$. Vimos que M era de tipo fuerte (∞, ∞), y se cumplía que $\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Hay que ver que $\|Mf\|_\infty \geq \|f\|_\infty$. Esto es claro pues $\|f\|_\infty = \inf\{\alpha > 0 : \mu\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} = 0\}$ y $|f(x)| \leq Mf(x)$,luego combinando lo anterior

  $$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \inf\{\alpha > 0 : \mu\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} = 0\} \\ &\leq \|Mf\|_\infty = \inf\{\alpha > 0 : \mu\{x \in X : |Mf(x)| > \alpha\} = 0\} \end{aligned}$$

Podemos ahora probar un resultado un poco más fino.

Proposición 5.2. *Sea $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, para casi toda $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|dy = 0.$$

Demostración. Sea un $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ una enumeración de números racionales. Para cada k consideramos la función $|f(y) - q_k|$, que obviamente está en $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Entonces si para cada k excluimos un E_k tal que $|E_k| = 0$, se tiene para cada x no perteneciente a E_k que

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - q_k|dy = |f(x) - q_k|.$$

Sea $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Obviamente, $|E| = 0$ y si z no pertenece a E, entonces, para cada k

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(z,r)|} \int_{B(z,r)} |f(y) - q_k| dy = |f(z) - q_k|.$$

Sea ahora

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| = \infty\}.$$

Claramente $|A| = 0$. Sea ahora un v que no pertenezca a $A \cup E$. Sea q_k un número racional tal que $|f(v) - q_k| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Ahora podemos escribir

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r\to 0} \frac{1}{|B(v,r)|} \int_{B(v,r)} |f(y) - f(v)| dy \\
&\leq \limsup_{r\to 0} \frac{1}{|B(v,r)|} \int_{B(v,r)} |f(y) - q_k| dy + \limsup_{r\to 0} \frac{1}{|B(v,r)|} \int_{B(v,r)} |f(v) - q_k| dy \\
&= 2|f(v) - q_k| \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Como podemos observar, si para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy = 0,$$

entonces se cumple para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) dy = f(x).$$

Esta conclusión se tiene de manera inmediata, pues

$$\begin{aligned}
\left| \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) dy - f(x) \right| &= \left| \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} (f(y) - f(x)) dy \right| \\
&\leq \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy = 0
\end{aligned}$$

Ahora vamos a probar que la implicación de regreso no es verdadera. Definiremos primero el conjunto de los puntos de Lebesgue.

Definición 5.3. Sea una $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ una $x \in \mathbb{R}^n$. Diremos que x es un punto en el conjunto de Lebesgue de f si existe un número A tal que

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - A| dy = 0$$

Realizamos una serie de observaciones. En primer lugar, solo existe un A que cumple la condición. Esto se sigue del teorema de diferenciación de Lebesgue, pues

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x).$$

Por lo tanto, A es único y el límite de la izquierda existe. En segundo lugar, si x pertenece al conjunto de Lebesgue de f esto es independiente del valor de $f(x)$. En efecto, f no tiene que estar definida en el punto x. Más aún, si $f = g$ en casi todo punto, entonces el conjunto de Lebesgue de f es igual al conjunto de Lebesgue de g. Por tanto, el conjunto de Lebesgue está bien definido para cada elemento de $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. En tercer lugar, por el teorema de diferenciación de Lebesgue, si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, entonces casi todos los puntos de $\mathbb{R}^n$ pertenecen al conjunto de Lebesgue de f. Para casi toda x, el número A es justo $f(x)$. Así, f puede ser modificada en los conjuntos de medida cero de tal manera que toda x que esté en el conjunto de Lebesgue de f

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|dy = 0.$$

Veamos ahora un contraejemplo de lo mencionado, viendo que el punto 0 no está en el conjunto de puntos de Lebesgue de f, y, sin embargo,

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(0,r)|}\int_{B(0,r)} f(y)dy = f(0).$$

Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{si } x = 0 \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Mostraremos que para toda $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} f(y)dy$$

y que el 0 no está en el conjunto de Lebesgue. Sea $x > 0$, observemos que podemos tomar un radio r suficientemente pequeño tal que $(x-r, x+r) \subset (0, \infty)$, así

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} f(y)dy = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} 1dy = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2r} y\Big|_{x-r}^{x+r} = 1 = f(x).$$

Análogamente, si $x < 0$, podemos encontrar un radio r suficientemente pequeño tal que $(x-r, x+r) \subset (-\infty, 0)$, por lo cual

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} f(y)dy = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} 0dy = 0 = f(x).$$

Ahora si $x = 0$, entonces

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} f(y)dy = \lim_{r\to 0}\frac{1}{2r}\Big(\int_{-r}^{0} 0dy + \int_{0}^{r} 1dy\Big) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{2r}y\Big|_0^r = \frac{1}{2} = f(x).$$

Ahora probaremos que el 0 no está en el conjunto de Lebesgue de f. Supongamos existe un A tal que

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{+r} |f(y) - A|dy = 0,$$

entonces

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2r}\Big(\int_{-r}^{0} |0-A|dy + \int_{0}^{r} |1-A|dy\Big) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{2r}[|A|r+|1-A|r] = \lim_{r\to 0}\frac{1}{2}[|A|+|1-A|] = 0,$$

lo que implica que $[|A|+|1-A|] = 0$, que no es posible. De este modo, 0 no está en el conjunto de Lebesgue de f. Definiremos ahora el Teorema de densidad de Lebesgue, que es un caso particular del teorema de diferenciación de Lebesgue.

Definición 5.4. Se define la densidad aproximada de E en un punto $x \in \mathbb{R}^n$, como:

$$\lim_{r\to 0}\frac{|E\cap B(x,r)|}{|B(x,r)|}.$$

Teorema 5.5. *Para casi todos los puntos x de un conjunto medible de Lebesgue $E \in \mathbb{R}^n$, se cumple que la densidad aproximada del conjunto es 1 en casi todo punto, esto es,*

$$\lim_{r\to 0}\frac{|E\cap B(x,r)|}{|B(x,r)|} = 1 \ \ c.t.p.\ x\in E.$$

Demostración. Se cumple que

$$\frac{|E\cap B(x,r)|}{|B(x,r)|} = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} \chi_E(y)dy.$$

Haciendo tender r a 0, aplicando el Teorema de Diferenciación de Lebesgue, esto es, el Teorema 5.1, se tiene para casi todo punto x:

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} \chi_E(y)dy = \chi_E(x).$$

□

De esta forma, vemos que para cada conjunto medible E, su densidad es 0 o 1 en casi todos los puntos de $\mathbb{R}^n$, y su densidad es 1 en casi todo punto de E. Esto nos indica que el borde de E, esto es, el conjunto de puntos en E cuyas bolas están parcialmente en E y parcialmente fuera de E, es despreciable.

Sin embargo, si $|E| > 0$, entonces siempre hay puntos de $\mathbb{R}^n$ donde la densidad no es 0 ni 1. Sea un cuadrado en el plano, la densidad de cada punto interior es 1, pero de cada punto de la esquina del cuadrado la densidad valdrá $1/4$ y en el resto de bordes del cuadrado $1/2$.

Capítulo 6

Resultados para medidas más generales

En este capítulo, en primer lugar definiremos el significado de que una medida sea doblante, y veremos una serie de propiedades de estas medidas. En la segunda parte del capítulo, definiremos las funciones maximales centrada M_μ^c y no centrada M_μ para medidas μ cualquiera (téngase en cuenta que cuando considerábamos el operador maximal de Hardy-Littlewood considerábamos la medida de Lebesgue). Posteriormente, analizaremos la acotación débil $(1,1)$ y con ello fuerte (p,p) para $p > 1$ de dichos operadores aplicados sobre cierta función, y veremos como afecta el hecho de que la medida considerada μ sea doblante.

6.1. Medidas doblantes

Para realizar la acotación del operador maximal necesitaremos definir antes las medidas doblantes, esto es, medidas para las cuales la medida de la bola de radio doble está controlada por la medida de la bola. La medida de Lebesgue es un tipo de medida doblante. Sin embargo, las medidas doblantes son menos restrictivas que la medida de Lebesgue. Por ejemplo, la medida de Lebesgue es invariante por traslaciones, mientras que esta afirmación no es cierta en general para medidas doblantes.

Definición 6.1. Dado un espacio métrico (X,d) diremos que una medida boreliana y regular μ en X es doblante si existe una constante m tal que para todo $x \in X$ se verifica que

$$\mu(B(x,2r)) \leq m\mu(B(x,r)),$$

donde las bolas consideradas son de medida finita y positiva.

Si la medida es doblante, diremos que el espacio de medida métrico (X, d, μ) es homogéneo. De esta forma, si una medida es doblante diremos que la medida de la bola de radio doble está controlada por la medida de la bola. A partir de ahora, nos referiremos a $m(\mu)$ como la menor constante que satisface la anterior igualdad, esto es,

$$m(\mu) = \sup_{x\in X, r>0} \frac{\mu(B(x,2r))}{\mu(B(x,r))}.$$

La constante m de una medida doblante ha de ser siempre mayor que 1 porque la bola de radio $2r$ mide al menos lo mismo que la bola de radio r. De esta forma, ya tenemos una restricción sobre m, pero existen otras.

Teorema 6.2. *Sea (X, d, μ) un espacio métrico dotado de una medida doblante μ, si X tiene al menos dos puntos, entonces $m(\mu) \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$, la razón áurea.*

Demostración. Sea una medida doblante μ con constante $m = m(\mu)$. Sean a y b dos puntos en X, con $r = d(a, b)$. Sea $\lambda > 0$. Puede que $\mu(B(a, 2r/3)) \leq \lambda\mu(B(b, r/3))$, en ese caso, puesto que las bolas son disjuntas y están contenidas en $\mu(B(a, 4r/3))$, tendremos

$$\mu(B(a, 2r/3)) + \mu(B(b, r/3)) \leq \mu(B(a, 4r/3)).$$

Luego se tendrá

$$\begin{aligned}\Big(1 + \frac{1}{\lambda}\Big)\mu(B(a, 2r/3)) &\leq \mu(B(a, 2r/3)) + \mu(B(b, r/3))\\ &\leq \mu(B(a, 4r/3)) \leq m\mu(B(a, 2r/3)).\end{aligned}$$

De manera que en este caso $m \geq 1 + \lambda^{-1}$. Por tanto, o bien $m \geq 1 + \lambda^{-1}$ o en caso contrario $\mu(B(a, 2r/3)) > \lambda\mu(B(b, r/3))$, y $\mu(B(b, 2r/3)) > \lambda\mu(B(a, r/3))$, luego en este caso

$$\begin{aligned}\lambda(\mu(B(a, r/3)) + \mu(B(a, r/3))) &< \mu(B(a, 2r/3)) + \mu(B(b, r/3))\\ &\leq m(\mu(B(b, r/3)) + \mu(B(a, r/3))).\end{aligned}$$

Por tanto, obtenemos $m \geq \lambda$. En definitiva, para todo $\lambda > 0$ hemos probado que $m \geq \min(\lambda, 1 + \lambda^{-1})$. Optimizando en $\lambda > 0$, el valor más favorable se da en $\lambda = 1 + \lambda^{-1}$, y optimizando la anterior ecuación, se obtiene el resultado. □

Pero podemos ir más aún, y ver que dado un espacio con más de un punto, $m(\mu) \geq 2$. Su demostración puede verse en el desarrollo de [8].

Teorema 6.3. *Sea (X, d, μ) un espacio métrico dotado de una medida doblante μ, si X tiene al menos dos puntos, entonces $m(\mu) \geq 2$.*

Para finalizar la sección de medidas doblantes, vemos una última propiedad de estas medidas.

Proposición 6.4. *Sea una medida μ doblante. Se verifica que $\mu(\mathbb{R}^n) = \infty$.*

Demostración. Sea una bola tal que $B(0,R)$ y sea una bola centrada en un punto x de radio $R/2$ tal que

$$B(0,R) \cap B\Big(x, \frac{R}{2}\Big) = \emptyset,$$

$$B(0,R) \cup B\Big(x, \frac{R}{2}\Big) \subset B(0,2R).$$

De esta forma, se tiene que

$$\mu(B(0,2R)) \geq \mu(B(0,R)) + \mu(B\Big(x, \frac{R}{2}\Big)).$$

Además, se tiene que

$$B(0,R) \subset B\Big(x, \frac{5R}{2}\Big),$$

pues dado un $a \in B(0,R)$, $|a-x| \leq |a| + |x| < R + \frac{3R}{2} = \frac{5R}{2}$, y con ello

$$\mu(B(0,R)) \leq \mu(B\Big(x, \frac{5R}{2}\Big)) \leq C^3 \mu(B\Big(x, \frac{R}{2}\Big)),$$

por ser μ doblante. De esta forma,

$$\mu(B(0,2R)) \geq \mu(B(0,R)) + \mu(B\Big(x, \frac{R}{2}\Big)) \geq \big(1 + \frac{1}{C^3}\big)\mu(B(0,R)).$$

Haciendo $R = 2^{k-1}$, se tiene que

$$\mu(B(0,2^k)) \geq \Big(1 + \frac{1}{C^3}\Big)\mu(B(0,2^{k-1})) \geq \Big(1 + \frac{1}{C^3}\Big)^k \mu(B(0,1)).$$

Así, haciendo tender k a ∞, se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \mu(B(0,2^k)) = \mu(\mathbb{R}^n) \geq \lim_{k\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{C^3}\Big)^k \mu(B(0,1)) = \infty,$$

luego $\mu(\mathbb{R}^n) = \infty$. $\square$

6.2. Acotación del operador maximal para diferentes medidas

Para una función localmente integrable f, en el Capítulo 4 definimos el operador maximal de Hardy-Littlewood como

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|Q(x,r)|} \int_{Q(x,r)} |f(y)|dy,$$

donde $Q(x,r)$ denotaba el intervalo cúbico abierto de centro x y lado $2r$ y $|Q(x,r)|$ denotaba su medida de Lebesgue. En esta sección, definiremos el operador maximal centrado y no centrado para bolas considerando medidas borelianas no negativas, esto es, sin considerar la medida de Lebesgue como hacíamos cuando trabajábamos con el operador maximal de Hardy-Littlewood. La acotación débil $(1,1)$ nos conducía a la acotación fuerte (p,p) para $p > 1$ de este operador, independientemente de si lo considerábamos para bolas o para cubos, y si lo considerábamos centrado o no centrado. Pues bien, buscaremos acotar el operador maximal para esta medida boreliana no negativa cualquiera, y veremos la relevancia en esta acotación de si estamos en dimensión $n = 1$ o no y si estamos considerando una medida doblante o no.

Definimos ahora la función maximal M_μ, aplicada sobre una $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Definición 6.5. Sea μ una medida boreliana no negativa en $\mathbb{R}^n$, si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, definimos la función maximal como

$$M_\mu f(x) = \sup \frac{1}{\mu(B(x))} \int_{B(x)} |f(y)|d\mu,$$

donde el supremo es cogido sobre las bolas $B(x)$ que contienen a x. Si en vez de bolas que contienen a x hablamos de bolas centradas en x, hablaríamos del operador maximal centrado M^c_μ, definido como:

$$M^c_\mu f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|d\mu.$$

Por aplicación del lema de cubrimiento de Besicovitch, probamos fácilmente que el operador maximal $M^c_\mu f$ satisface que es de tipo débil $(1,1)$ y de tipo fuerte (p,p), para $p > 1$, sin ninguna condición sobre la medida μ. Sin embargo, estas propiedades solo las tiene M_μ para la dimensión $n = 1$ sin ninguna hipótesis sobre μ.

Teorema 6.6. *Sea μ una medida boreliana y regular. Entonces, el operador maximal $M^c_\mu f$ satisface que es de tipo débil $(1,1)$ y de tipo fuerte (p,p), para $p > 1$. Más precisamente, las siguientes estimaciones se verifican. Si $f \in L^1(\mu)$, entonces*

$$\mu(\{x : M^c_\mu f(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int |f|d\mu.$$

Si $p > 1$, entonces

$$\int_X |M^c_\mu f|^p d\mu \leq c \int_X |f|^p d\mu.$$

Demostración. Tenemos que ver que

$$\mu(\{x : M^c_\mu f(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1.$$

Sea K cualquier conjunto compacto de $\{|M^c_\mu f(x)| > \lambda\}$. Si lo demostramos para este K arbitrario, por la regularidad de la medida μ, quedará demostrado el teorema. Para cada $x \in K$, escogemos una $B(x, r_x)$,

$$\frac{1}{\mu(B(x, r_x))} \int_{B(x,r_x)} |f(y)| d\mu > \lambda.$$

Aplicamos ahora el teorema de Besicovitch 3.6 obteniendo $\{B_k\}$ del conjunto de las $B(x, r_x)$, tal que K está contenido en la unión de estas bolas $\{B_k\}$, y si χ_k es la función característica de B_k, tenemos que $\sum \chi_k \leq K_n$, donde K_n es la constante del teorema. Así

$$\begin{aligned}\mu(K) \leq \mu(\cup B_j) &\leq \sum_k \mu(B_j) \leq \frac{1}{\lambda} \sum_k \int_{B_k} |f(y)| d\mu \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{\cup B_k} |f(y)| \sum_k \chi_k d\mu \leq \frac{K_n}{\lambda} \int_{\cup B_k} |f(y)| d\mu = \frac{K_n}{\lambda} \|f\|_1.\end{aligned}$$

De esta forma queda demostrada la acotación débil de tipo (1,1). Vemos ahora la acotación fuerte para $p > 1$. Dado $f \in L^p(\mu)$, definimos $f = f_1 + f_2$, tal que

$$f_1 = f \chi_{\{|f| > \frac{t}{2}\}},$$

y f_2 queda definido por $f - f_1$. Es claro que $M^c_\mu f(x) \leq M^c_\mu f_1(x) + M^c_\mu f_2(x)$, luego

$$\{M^c_\mu f(x) > t\} \subset \left\{M^c_\mu f_1(x) > \frac{t}{2}\right\} \cup \left\{M^c_\mu f_2(x) > \frac{t}{2}\right\}.$$

$\{M^c_\mu f_2(x) > \frac{t}{2}\} = \emptyset$, por lo que

$$\mu(\{M^c_\mu f(x) > t\}) \leq \mu(\{M^c_\mu f_1(x) > \frac{t}{2}\}) \leq \frac{C}{t} \int_{|f| > \frac{t}{2}} |f|.$$

Aplicamos ahora el teorema de Fubini. El teorema de Fubini nos dice que dado un $f \geq 0$,

$$\int_X f^p d\mu = \int_0^\infty p t^{p-1} \lambda_f(t) dt,$$

siendo $\lambda_f(t) = |\{x : |f| > t\}|$. De esta forma combinando las dos ecuaciones anteriores se tiene que

$$\begin{aligned}\int_X |M_\mu^c f(x)|^p d\mu &= p\int_0^\infty t^{p-1}\mu(\{M_\mu^c f > t\})dt \\ &\leq p\int_0^\infty t^{p-1}\mu(\{M_\mu^c f > \frac{t}{2}\})dt \\ &\leq Cp\int_0^\infty t^{p-2}\int_{|f|>\frac{t}{2}} |f(x)|d\mu dt \\ &= C\int_X |f|\int_0^{2|f|} t^{p-2}dtd\mu \\ &\leq \frac{Cp}{p-1}\int_X 2^p|f|^p d\mu.\end{aligned}$$

Esto se verifica para todo $p > 1$, pues de lo contrario el denominador se anula. □

De esta forma, hemos probado la acotación débil (1,1) y la acotación fuerte (p, p) para $p > 1$, del operador M_μ^c centrado. Sin embargo, M_μ no centrado solo tiene estas propiedades en dimensión igual a 1. Sin embargo, si μ es una medida doblante boreliana y regular, entonces M_μ cumple la acotación débil de tipo (1,1).

Teorema 6.7. *Sea μ una medida doblante boreliana y regular. Entonces, el operador maximal $M_\mu f$ satisface que es de tipo débil $(1, 1)$. Más precisamente, la siguiente estimación se verifica. Si $f \in L^1(\mu)$, entonces*

$$\mu(\{x : M_\mu f(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda}\int |f|d\mu.$$

Demostración. Dado $f \in L^1(X)$, ver que

$$\mu(\{x : M_\mu f(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda}\int |f|d\mu$$

es una simple aplicación de la Proposición 3.4. Sea K cualquier conjunto compacto de $\{M_\mu f(x) > \lambda\}$. Para cada $x \in K$, escogemos una $B(x)$, esto es, una bola que contenga a x, tal que

$$\frac{1}{\mu(B(x)}\int_{B(x)} |f(y)|d\mu > \lambda.$$

y aplicando la proposición mencionada, podemos encontrar un recubrimiento Q_j, de bolas disjuntas, a partir de las anteriores bolas consideradas B_j, de forma que $\bigcup B_j \subset \bigcup Q_j^*$. Recordemos que dado $Q_j = B_j(z, r)$, se tiene que $Q_j^* = B_j(z, 3r)$. Además, sabemos que μ es doblante. De esta forma,

$$\mu(B(x, 4r)) \leq C\mu(B(x, 2r)) \leq C^2\mu(B(x, r))$$

y como $2 \le 3 \le 4$, $\mu(Q_j^*) \le C^2 \mu(Q_j)$, por tanto:

$$\mu(K) \le \mu(\cup B_j) \le \mu(\cup Q_j^*) \le \sum_k \mu(Q_j^*) \le C^2 \sum_k \mu(Q_j) \le \frac{C^2}{\lambda} \sum_k \int_{Q_k} |f(y)| d\mu$$
$$= \frac{C^2}{\lambda} \int_{\cup Q_k} |f(y)| d\mu = \frac{C^2}{\lambda} \int_{\cup Q_k} |f(y)| d\mu = \frac{C^2}{\lambda} \int |f| d\mu.$$

Nótese que hemos usado tanto la propiedad de medida doblante como el que los Q_j son disjuntos.

□

Mencionemos que en el caso de $X = \mathbb{R}$, la estimación de la inecuación de tipo débil $(1,1)$, y de tipo fuerte (p,p) para $p > 1$ se mantiene sin ninguna hipótesis de μ, esto es, si μ no es doblante. Veámoslo.

Teorema 6.8. *En dimensión $n = 1$, el operador M_μ es siempre de tipo débil (1,1) y de tipo fuerte (p,p) para $p > 1$.*

Demostración. Sea $f \in L^1(\mu)$, con μ arbitraria y consideremos el operador maximal no centrado

$$M_\mu f(x) = \sup \frac{1}{\mu(I)} \int_I |f(y)| d\mu(y),$$

donde el supremo es cogido sobre los intervalos I que contienen a x, y consideremos un compacto K, tal que $K \subset \{M_\mu f > \lambda\}$. Para todo $x \in K$, existe un intervalo I_x que cumple $\frac{1}{\mu(I_x)} \int_{I_x} |f(y)| d\mu(y) > \lambda$, con $x \in I_x$. El compacto K está contenido en la unión de intervalos I_x.

Ahora aplicamos un lema básico de cubrimiento de intervalo, que nos dice que dada una colección finita de intervalos de $\mathbb{R}$, $\{I_j\}_{j=1,\dots,l}$; existe una subcolección $\{R_k\}_{k=1,\dots,m} \subset \{I_j\}_{j=1,\dots,l}$ tal que $\sum_{k=1}^m \chi_{R_k}(x) \le 2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Así, usando el lema:

¿Está en el capítulo 2?

$$\mu(K) \le \sum_{k=1}^m \mu(R_k) \le \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \chi_{R_k}(y) d\mu(y) = \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_{k=1}^m \chi_{R_k}(y) \Big) |f(y)| d\mu(y)$$
$$\le \frac{2}{\lambda} \|f\|_{L^1_\mu(\mathbb{R})}.$$

Ya teniendo la acotación débil, llegamos a la acotación de tipo fuerte (p,p) para $p > 1$, con la división de f, de forma que $f = f_1 + f_2$,

$$f_1 = f \chi_{\{|f| > \frac{t}{2}\}},$$

y f_2 queda definido por $f - f_1$, siendo esta prueba un caso sencillo del Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz. □

P. Sjögren en [7] nos muestra que si hablamos de una medida μ no doblante, y nos encontramos en una dimensión $n \geq 2$, la función M_μ no tiene por qué ser débil de tipo (1,1). Concretamente, en el ejemplo demuestra que el operador maximal asociado a la medida Gaussiana, una medida radial que es claramente no doblante, no es de tipo débil (1,1). Considera en el caso $n = 2$, la medida μ Gaussiana estándar,

$$d\mu(x, y) = e^{-x^2/2-y^2/2}dxdy.$$

De esta forma, hacemos un cuadro resumen de acotaciones de los operadores maximales centrado y no centrado.

Tabla resumen acotación débil (1,1) de los operadores maximales M_μ y M_μ^c .		
Dimensión n y medida μ	M_μ	M_μ^c
$n = 1$ y medida μ arbitraria	Sí, véase el Teorema 6.8	Sí,véase el Teorema 6.6
$n \in \mathbb{N}$ y medida μ doblante	Sí, véase el Teorema 6.7	Sí,véase el Teorema 6.6
$n \geq 2$ y medida μ arbitraria	No, véase P. Sjögren en [7]	Sí, véase el Teorema 6.6

Recordemos que si tenemos la acotación débil $(1, 1)$, tenemos la acotación fuerte (p, p) para $p > 1$, por la aplicación de un caso sencillo del Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz.

Bibliografía

[1] M. Bruckner, *Differentiation of Integrals*, The twelfth Herbert Ellsworth Slaught Memorial Paper, 1971.

[2] M. de Guzmán, *Differentiation of Integrals in* $\mathbb{R}^n$, Lecture Notes in Mathematics 481, 1975.

[3] M. de Guzmán y B. Rubio, *Integración, Teoría y Técnicas*, Alhambra, 1979.

[4] J. Duandikoetxea *Fourier analysis*, Graduate Studies in Mathematics 29, 2001.

[5] J. Heinonen, *Lectures on Analysis on Metric Spaces*, Springer Verlag, 2001.

[6] B. Rubio, *The Hardy-Littlewood maximal function and derivation of integrals*, Collect. Math. 26 (1975), no. 3, 219–238.

[7] P.Sjögren *A Remark on the maximal function for measures in* $\mathbb{R}^n$, American Journal of Mathematics Vol. 105, No. 5, 1983, pp. 1231-1233.

[8] J. Soria y P. Tradacete *The least doubling constant of a metric measure space*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math, 2019, 1015-1030..