

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS



Series de Fourier y Funciones Armónicas

Trabajo de fin de grado del Grado en Matemáticas

Curso 2025/2026

REALIZADO POR:

Marcos Sierra Estesó

DIRIGIDO POR:

F. Javier Soria de Diego

Fecha: 15 de abril de 2026

Resumen

Este trabajo es un estudio teórico que analiza la convergencia de la serie de Fourier de una función periódica. Para ello se han utilizado diversos enunciados y técnicas de Teoría de la Medida, de Análisis Real y de Análisis Complejo, además de recursos bibliográficos. Los resultados principales que se han visto son el Teorema de Dirichlet-Jordan y el test de Dini. Ambos abordan la convergencia puntual de las series bajo hipótesis adecuadas. En el transcurso de este escrito se ha desarrollado también demostraciones sobre la convergencia de las series en el espacio L^2 y se han explorado los métodos generalizados de Cesàro y Abel. Finalmente, también se han estudiado las funciones armónicas y se ha visto la conexión entre ambos conceptos. Esta recopilación de resultados permitirá tener una visión general de esta teoría, con gran utilidad tanto en el ámbito matemático como en otras áreas de la ciencia e ingeniería.

Palabras clave: espacio L^p , transformada de Fourier, coeficientes de Fourier, test de Dini, Teorema de Dirichlet-Jordan, convergencia de Cesàro, convergencia de Abel, función armónica.

Abstract

This work is a theoretical study analyzing the convergence of the Fourier series of a periodic function. To this end, various statements and techniques from Measure Theory, Real Analysis, and Complex Analysis have been used, in addition to bibliographic resources. The main results presented are the Dirichlet-Jordan Theorem and Dini's test. Both address the pointwise convergence of series under appropriate assumptions. Throughout this paper, proofs of the convergence of series in L^2 space have also been developed, and the generalized methods of Cesàro and Abel have been explored. Finally, harmonic functions have also been studied, and the connection between these two concepts has been examined. This compilation of results will provide a general overview of this theory, which is highly useful in mathematics as well as in other areas of science and engineering.

Keywords: L^p space, Fourier transform, Fourier coefficients, Dini test, Dirichlet-Jordan theorem, Cesàro convergence, Abel convergence, harmonic function.

Índice general

Resumen	I
Abstract	I
Introducción	1
1. Preliminares	3
1.1. Un repaso de Teoría de la Medida	3
1.2. Resultados de Análisis Funcional	7
1.3. Resultados de Análisis Real y Análisis Complejo	11
2. Series de Fourier	13
2.1. Transformada de Fourier	13
2.2. Núcleo de Dirichlet	15
3. Convergencia de las series de Fourier	17
3.1. Convergencia puntual de las series de Fourier	17
3.2. Convergencia en media de las series de Fourier	24
3.3. Convergencia de las series de Fourier en L^2	30
4. Convergencia de Abel y funciones armónicas	33
4.1. Convergencia de Abel	33
4.2. Núcleo de Poisson	34
4.3. Funciones armónicas	37
Bibliografía	41

Introducción

En el año 1822 el matemático y físico francés Jean-Baptiste Joseph Fourier (Auxerre, 1768 - París, 1830) publicó su obra más célebre: *Théorie analytique de la chaleur* (Teoría analítica del calor). En dicha memoria dedujo la expresión de la ecuación del calor, una de las ecuaciones en derivadas parciales más conocidas y logró encontrar sus soluciones explícitas en forma de una serie infinita de funciones trigonométricas. Pero no sólo se centró en la resolución del dicho problema, sino que también sentó las bases de lo que se conoce actualmente como análisis de Fourier. Él planteó que toda función se puede representar como una serie convergente de senos y cosenos, aunque no logró mostrar una demostración rigurosa de la convergencia de dicha serie, ni que la función sea el propio límite. Es más, ni siquiera enunció las condiciones bajo las cuales la función se pueda escribir de esa manera.

Más adelante, numerosos matemáticos (entre los cuales se encuentran Dirichlet o Jordan) trataron de desarrollar criterios de convergencia para las series de Fourier. Durante el siglo XX se realizaron grandes avances en dicha tarea gracias a la aparición de la teoría de la medida y la integral de Lebesgue. En esta época se definió la noción de conjunto de medida nula, el concepto de convergencia en casi todo punto (a.e.) y se establecieron las propiedades de los espacios L^p . De este modo, el estudio de las series de Fourier se llevó a cabo desde un nuevo enfoque que ayudó a extender el análisis de Fourier desarrollado hasta entonces a funciones que se encuentran en dichos espacios.

Uno de nuestros principales objetivos para este trabajo es estudiar algunos de esos criterios de convergencia para las series de Fourier: puntual, en media, en norma o a.e., además de explorar los métodos generalizados de Cesàro y Abel. Por otra parte, también queremos establecer una relación entre las series de Fourier y el otro tema importante de nuestro trabajo: las funciones armónicas (que desempeñan un gran papel en el estudio de funciones complejas o de las ecuaciones en derivadas parciales y en otras disciplinas como la física o la ingeniería). Y, por último, aunque no aparezca como un capítulo de nuestra memoria, hemos visto a lo largo del trabajo algunas de las aplicaciones de las series de Fourier y las funciones armónicas (el cálculo de sumas de series de números reales o la resolución de ecuaciones en derivadas parciales).

Esta memoria se estructura de la siguiente manera: consta de cuatro capítulos, el primero de preliminares y los tres siguientes de desarrollos teóricos. Para su realización se ha hecho una revisión bibliográfica, donde se han utilizado principalmente las referencias [6] y [7]. Por otra parte, a lo largo del desarrollo se han presentado ejemplos y gráficas (elaboradas con el software de GeoGebra) para comprobar la aplicación de enunciados teóricos y el comportamiento de algunas funciones definidas durante el transcurso del trabajo.

En el primer capítulo se desarrollan preliminares que serán de gran importancia durante el desarrollo de la memoria. Principalmente, se explica la teoría de los espacios L^p , aunque también hemos definido los distintos tipos de convergencia que se explorarán a lo largo del trabajo y hemos introducido resultados de Análisis Real y Complejo que se usarán para la demostración de los teoremas principales que se verán en los capítulos siguientes. En el segundo capítulo definimos los conceptos de transformada de Fourier, coeficientes de Fourier y núcleo de Dirichlet y vemos algunas primeras propiedades. También se definen las sumas parciales de una serie de Fourier de una función f en $L^1([-\pi, \pi])$, que serán nuestro objeto de estudio durante los siguientes capítulos.

En el tercer capítulo estudiamos uno de los temas principales de nuestro trabajo: la convergencia de las series de Fourier, o mejor dicho, la convergencia de la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de una función. En las distintas secciones se estudian diferentes tipos de convergencia. En la primera sección se explora la convergencia puntual de las series de Fourier. El primer criterio que se introduce en el texto es el principio de localización (véase el Teorema 3.4) y, posteriormente, se presentan dos de los resultados más importantes del trabajo: el Teorema de Dirichlet-Jordan (véase el Teorema 3.13) y el test de Dini (véase el Teorema 3.5). En esta sección también desarrollamos algunos ejemplos del cálculo de la serie de Fourier de una función. En particular, se aborda un posible caso que puede ocurrir al trabajar con una función con una discontinuidad de salto: el fenómeno de Gibbs. Por otro lado, en la segunda sección se estudia la convergencia en medias de Cesàro, analizando este método de convergencia generalizada para las series de Fourier. En este caso, el resultado más importante que veremos es el Teorema de Fejér (véase el Teorema 3.20). Y en la tercera sección se desarrolla la convergencia de las series de Fourier en el espacio $L^2([-\pi, \pi])$. Los resultados más importantes de esta sección son el Teorema de convergencia en L^2 (véase el Teorema 3.31) y la Identidad de Bessel-Parseval (véase la Proposición 3.32). Además, se presenta también una aplicación de este último resultado: el cálculo de la suma de series de números reales.

Por último, el cuarto capítulo comienza con la definición de la convergencia en el sentido de Abel de una serie. En la segunda sección se define el núcleo de Poisson y se establece la convergencia en el sentido de Abel de la serie de Fourier de una función en $L^1([-\pi, \pi])$ a la propia función en casi todo punto (para ello, véase el Teorema 4.7). En particular, el Teorema de Poisson (véase el Teorema 4.6) garantiza que dicha convergencia es uniforme para funciones continuas en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Para acabar, en la última sección se introduce el concepto de función armónica, se ven algunas de sus propiedades y relacionamos este concepto con las series de Fourier a través de la Proposición 4.14 y del Teorema 4.15. Finalmente, usando la teoría que se ha desarrollado a lo largo del capítulo, hemos logrado demostrar la unicidad de soluciones de uno de los problemas más importantes del campo de las ecuaciones en derivadas parciales: el problema de Dirichlet asociado a la ecuación de Laplace en el disco.

Capítulo 1

Preliminares

Este primer capítulo del trabajo pretende introducir conceptos de otras disciplinas que se estarán utilizando a lo largo del trabajo debido a su relación con el tema principal.

1.1. Un repaso de Teoría de la Medida

Definición 1.1. Dado un espacio medible $(X, \mathcal{A})$ diremos que una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es medible si la preimagen de todo boreliano es un conjunto $\mathcal{A}$ -medible.

Proposición 1.2. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y sea $f : X \rightarrow [0, \infty]$ medible. Entonces existe una sucesión no decreciente $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones simples, medibles, con $s_n : X \rightarrow [0, \infty)$ y tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$ (en particular, que cumpla que $s_n(x) \leq f(x)$ para cada $x \in X$).

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos los conjuntos

$$E_{n,k} = \left\{ x \in X : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, n2^n - 1$$

$$E_{n,\infty} = \{x \in X : f(x) \geq n\}.$$

Puesto que f es medible, estos conjuntos son todos medibles para cualquier n y k . De esa forma, definimos la función $s_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \chi_{E_{n,k}} + n \chi_{E_{n,\infty}}$. Claramente es una función simple y medible por su definición. A continuación vamos a probar que $s_n = \min\{n, \frac{\lfloor 2^n f(x) \rfloor}{2^n}\}$ donde $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos en primer lugar que $f(x) = \infty$. De esa manera, obtenemos que $s_n(x) = n = \min\{n, \frac{\lfloor 2^n f(x) \rfloor}{2^n}\}$. En caso de que $f(x) < \infty$, entonces o bien $f(x) \geq n$ o bien $f(x) < n$. Si ocurre la primera situación, entonces se verifica que $s_n(x) = n = \min\{n, \frac{\lfloor 2^n f(x) \rfloor}{2^n}\}$. En caso contrario, existe un cierto $k \in \{0, 1, \dots, n2^n - 1\}$ tal que $\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}$, de tal manera que $k = \lfloor 2^n f(x) \rfloor$. Y así es cierto que $s_n(x) = \frac{k}{2^n} = \min\{n, \frac{\lfloor 2^n f(x) \rfloor}{2^n}\}$.

Comprobemos que dicha sucesión de funciones simples es no decreciente. Si $k = \lfloor 2^n f(x) \rfloor$ entonces obtendríamos fácilmente que $2k \leq \lfloor 2^{n+1} f(x) \rfloor$. Por lo tanto, ocurre así que

$$s_n(x) = \min\left\{n, \frac{\lfloor 2^n f(x) \rfloor}{2^n}\right\} \leq \min\left\{n+1, \frac{\lfloor 2^{n+1} f(x) \rfloor}{2^{n+1}}\right\} = s_{n+1}(x)$$

y la sucesión es, en efecto, creciente.

Por último, comprobemos la convergencia puntual. Distinguimos dos casos: si $f(x) = \infty$ o $f(x) < \infty$. En el primer caso, se cumple que $s_n(x) = n$ y tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$. Mientras tanto, si $f(x)$ es finito entonces se verifica que existe un natural n_0 tal que $f(x) < n_0$. De esa forma, ocurre que $s_n(x) = \frac{\lfloor 2^n f(x) \rfloor}{2^n} = \frac{k}{2^n}$ y, utilizando que $\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}$, obtenemos que $|s_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n}$. Por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n(x) - f(x)| = 0$ y así finaliza la demostración. $\square$

Teorema 1.3 (Teorema de la convergencia dominada). Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles tales que existe una función integrable $g \geq 0$ que cumple que $|f_n| \leq g$ a.e. y $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ a.e.

Entonces tanto las f_n como f son funciones integrables y además se satisface que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Demostración. Para esta demostración se recomienda la lectura del capítulo 2 de [2]. $\square$

Definición 1.4. Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ diremos que una sucesión de funciones $(f_n)_n$ converge en casi todo punto a una función f si la convergencia puntual a la misma se da en μ -casi todo punto, o lo que es lo mismo, que $\{x \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq f(x)\} \subseteq N$ con $\mu(N) = 0$.

Definición 1.5. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sean $(f_n)_n$ y f funciones medibles. Diremos que $(f_n)_n$ converge en medida a f si para cada $\epsilon > 0$ se satisface que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) = 0.$$

Definición 1.6. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sean $(f_n)_n$ y f funciones integrables. Se dice que $(f_n)_n$ converge en media a f si se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

Definición 1.7. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea $1 \leq p < \infty$. Se define $\mathcal{L}^p(\mu)$ como el conjunto de funciones medibles $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que cumplen que $\int_X |f|^p d\mu$ es finito.

Definición 1.8. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea $1 \leq p < \infty$. Se define el espacio $L^p(\mu)$ como el resultante de tomar el espacio cociente en $\mathcal{L}^p(\mu)$ dado por la relación de equivalencia $f \sim g \iff f = g$ en μ -casi todo punto.

Proposición 1.9 (Desigualdad de Young). Sean $p, q \in (1, \infty)$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y sean $a, b \geq 0$. Entonces $ab \leq a^p \frac{1}{p} + b^q \frac{1}{q}$.

Demostración. Si $a = 0$ o $b = 0$ entonces el resultado es trivial, así que vamos a suponer que ambos son no nulos. Sea $f(x) = \frac{x^p}{p} - x + \frac{1}{q}$, $x \geq 0$. Esta función satisface que $f'(x) = x^{p-1} - 1$, $f''(x) = (p-1)x^{p-2}$ de tal manera que $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$ y $f''(1) = p-1 > 0$. De esta forma, en el punto $x = 1$ hay un mínimo relativo, que es de hecho absoluto.

Luego $f(x) = \frac{x^p}{p} - x + \frac{1}{q} \geq f(1) = 0$ para cada $x \geq 0$. Por lo tanto, sustituyendo $x = \frac{a}{b^{\frac{1}{q}}}$, multiplicando por $b^q > 0$ y considerando que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ obtenemos el siguiente resultado:

$$\frac{a^p}{pb^q} - \frac{a}{b^{\frac{q}{p}}} + \frac{1}{q} \geq 0 \longrightarrow \frac{a^p}{p} - ab^{q-\frac{q}{p}} + \frac{b^q}{q} \geq 0 \longrightarrow \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab^{q(1-\frac{1}{p})} = ab.$$

$\square$

Proposición 1.10 (Desigualdad de Hölder). Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sean dos valores $p, q \in (1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ y $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ entonces $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y

$$\|fg\|_1 = \int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.1)$$

Demostración. Si $\|f\|_p = 0$ entonces tenemos que la función f es nula en μ -casi todo punto, de tal manera que $\|fg\|_1 = 0$ y la desigualdad es cierta. Este mismo razonamiento sirve también para el caso en que $\|g\|_q = 0$, por lo que vamos a suponer que ambas cantidades son no nulas.

Definimos a continuación las funciones $F(x) = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ y $G(x) = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$ para $x \in X$, que satisfacen debido a su definición que $\|F\|_p = 1 = \|G\|_q$. De esa forma, $\forall x \in X$ aplicamos la desigualdad de Young a $F(x) \geq 0$, $G(x) \geq 0$ y así obtenemos que $F(x)G(x) \leq \frac{(F(x))^p}{p} + \frac{(G(x))^q}{q}$.

Integrando en la desigualdad que hemos obtenido, tenemos así que

$$\frac{\int_X FG d\mu}{\|F\|_p \|G\|_q} = \int_X FG d\mu \leq \frac{1}{p} \int_X F^p d\mu + \frac{1}{q} \int_X G^q d\mu = \frac{1}{p} \|F\|_p^p + \frac{1}{q} \|G\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

y lo hemos logrado demostrar. $\square$

Teorema 1.11 (Desigualdad de Minkowski). *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $1 \leq p < \infty$ y $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Entonces $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.*

Demostración. En el caso de $p = 1$ tenemos que gracias a la desigualdad triangular y a que $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ se cumple que

$$\begin{aligned} \|f + g\|_1 &= \int_X |f(x) + g(x)| d\mu(x) \leq \int_X (|f(x)| + |g(x)|) d\mu(x) \\ &= \int_X |f(x)| d\mu(x) + \int_X |g(x)| d\mu(x) = \|f\|_1 + \|g\|_1. \end{aligned}$$

Dado $1 < p < \infty$, consideramos $q = \frac{p}{p-1}$ y así ocurre que gracias a la desigualdad (1.1) vista en la proposición anterior

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_X |f + g|^p d\mu = \int_X |f + g| |f + g|^{p-1} d\mu \leq \int_X |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| |f + g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f + g|^{q(p-1)} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f + g|^{q(p-1)} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_X |f + g|^{q(p-1)} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} (\|f\|_p + \|g\|_p). \end{aligned}$$

Usando la definición de q obtenemos que

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &\leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_X |f + g|^{q(p-1)} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

y de esa forma resulta que $\|f + g\|_p = \|f + g\|_p^{\frac{p-p}{q}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$, lo cual concluye la prueba. $\square$

A continuación, vamos a ver la desigualdad integral de Minkowski en el intervalo $[-\pi, \pi]$, que será relevante para la demostración del Teorema 3.22 y que se puede probar usando exclusivamente el Teorema de Fubini y la Proposición 1.10.

Proposición 1.12. *Dada $f \in L^p([-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi])$ para $1 \leq p < \infty$, se verifica que*

$$\frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x, t)| dx \right)^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x, t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} dx.$$

Demostración. Para $p = 1$ el resultado es cierto gracias al Teorema de Fubini. Veamos qué ocurre para $p > 1$. Para ello, definimos $F(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x, t)| dx$. El objetivo es probar la desigualdad $\|F\|_p \leq \int_{-\pi}^{\pi} \|f(x, \cdot)\|_p dx$.

En primer lugar, consideremos que

$$\|F\|_p^p = \int_{-\pi}^{\pi} F(t) F(t)^{p-1} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x, t)| dx \right) F(t)^{p-1} dt.$$

De esa forma, al emplear el Teorema de Fubini, logramos intercambiar el orden de integración, resultando

$$\|F\|_p^p = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x, t)| F(t)^{p-1} dt \right) dx.$$

Sea $q = \frac{p}{p-1} \in \mathbb{R}$ de tal modo que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. De esa manera, si aplicamos la Proposición 1.10 a la integral respecto de t obtenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x, t)| F(t)^{p-1} dt \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x, t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} (F(t)^{p-1})^q dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Así, como $q(p-1) = p$, el segundo término del producto es $\|F\|_p^{\frac{p}{q}}$. Por lo tanto, tenemos la desigualdad

$$\|F\|_p^p \leq \int_{-\pi}^{\pi} \|f(x, \cdot)\|_p \|F\|_p^{\frac{p}{q}} dx = \|F\|_p^{\frac{p}{q}} \int_{-\pi}^{\pi} \|f(x, \cdot)\|_p dx.$$

Y si dividimos por $\|F\|_p^{\frac{p}{q}}$, lograríamos la desigualdad que buscábamos (ya que $p - \frac{p}{q} = 1$), terminando la prueba. $\square$

Lema 1.13 (Lema de Fatou). Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones medibles y positivas. Entonces $f = \liminf_n f_n$ es una función medible y se cumple que $\int_X f d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu$.

Demostración. Para una demostración véase el capítulo 2 de [2]. $\square$

Definición 1.14. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Se define $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ como el conjunto de funciones medibles de la forma $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que tienen supremo esencial finito, donde

$$\text{ess sup}_{x \in X} |f(x)| = \inf \{M \geq 0 : \mu\{x \in X : |f(x)| > M\} = 0\}.$$

Definición 1.15. Dado $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, se denomina espacio $L^\infty(\mu)$ como aquel que se obtiene a través del cociente del conjunto $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ por la relación de equivalencia que viene definida por $f \sim g \iff f = g$ en μ -casi todo punto.

Definición 1.16. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sean $(f_n)_n \subset \mathcal{L}^p(\mu)$, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ (donde $1 \leq p < \infty$). Decimos que $(f_n)_n$ converge a f en norma p si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

En particular, la convergencia en norma 1 es lo mismo que la convergencia en media.

Definición 1.17. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ (respecto a la medida de Lebesgue). Entonces la convolución de f y g en x es la función $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t) dt$.

Proposición 1.18. Si $f, g \in L^1([-\pi, \pi])$ entonces se verifica que $f * g = g * f$.

Demostración. Si aplicamos un cambio de variable $x-t = y$, tenemos así que

$$f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t) dt = - \int_{x+\pi}^{x-\pi} f(y)g(x-y) dy = \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(y)g(x-y) dy.$$

Para comprobar que dicha integral es igual a $g * f(x)$ vamos a demostrar un resultado auxiliar. Definamos $I(\theta) = \int_{\theta-\pi}^{\pi+\theta} h(t) dt - \int_{-\pi}^{\pi} h(t) dt$ para una función $h \in L^1([-\pi, \pi])$. Esta función cumple que $I(0) = 0$ y que $I'(\theta) = h(\pi+\theta) - h(\theta-\pi) = 0$, luego es constantemente 0. De esa forma, ocurre que $\int_{\theta-\pi}^{\pi+\theta} h(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} h(t) dt$ para $\theta \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, obtenemos que $\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(y)g(x-y) dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y) dy = g * f(x)$ y la demostración está completa. $\square$

Proposición 1.19. Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ entonces $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ y $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Demostración.

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f * g(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t) dt \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)g(t)| dt \right) dx.$$

Por el Teorema de Fubini se cumple que el término a la derecha de la desigualdad queda

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)g(t)| dt \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)g(t)| dx \right) dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)| dx \right) |g(t)| dt$$

y de esa forma, haciendo el cambio de variable $x-t = y$, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)| dx \right) |g(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)| dy \right) |g(t)| dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| dy \int_{\mathbb{R}} |g(t)| dt = \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned}$$

Así ya hemos probado la segunda parte del enunciado. Y como $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ entonces $\|f\|_1 < \infty$ y $\|g\|_1 < \infty$, por lo que $\|f * g\|_1 < \infty$ y eso concluye la demostración. $\square$

Proposición 1.20. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida con $\mu(X) < \infty$ y sean $1 \leq q \leq p < \infty$. Entonces $L^p(\mu) \subseteq L^q(\mu)$. En particular se cumple que $L^\infty(\mu) \subseteq L^p(\mu)$.

Demostración. Supongamos que $f \in L^p(\mu)$ y consideremos $r = \frac{p}{q}$, $r' = \frac{r}{r-1} \in (1, \infty)$. De esa forma, gracias a la Proposición 1.10 aplicada a las funciones f y $g = 1$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \|f\|_q^q &= \int_X |f|^q d\mu \leq \| |f|^q \|_r \|1\|_{r'} = \left(\int_X (|f|^q)^r d\mu \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_X 1^{r'} d\mu \right)^{\frac{1}{r'}} \\ &= \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{q}{p}} \left(\mu(X) \right)^{1-\frac{q}{p}} = \|f\|_p^q (\mu(X))^{1-\frac{q}{p}}. \end{aligned}$$

Si aplicamos la raíz q -ésima a ambos lados de la desigualdad, obtenemos así como resultado que $\|f\|_q \leq \|f\|_p (\mu(X))^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$. Como $\|f\|_p < \infty$ (debido a que $f \in L^p(\mu)$) y $\mu(X) < \infty$ hemos comprobado que $f \in L^q(\mu)$.

A continuación, para ver la segunda parte de la proposición consideremos $\|f\|_\infty = M < \infty$. De esa manera, tenemos que $\|f\|_p^p \leq M^p \mu(X)$ gracias a las propiedades de la integral de Lebesgue y a la definición de la norma $\|\cdot\|_\infty$. Por lo tanto, tenemos así que $f \in L^p(\mu)$ y eso concluye la prueba. $\square$

1.2. Resultados de Análisis Funcional

Teorema 1.21. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea $1 \leq p < \infty$. En el espacio $L^p(\mu)$ se define $\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$. Entonces se cumple que el par $(L^p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach.

Demostración. En primer lugar, vamos a comprobar que dicho par se trata de un espacio normado.

Claramente, dada $f \in L^p(\mu)$ se cumple por definición que $\|f\|_p \geq 0$ y que $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ para $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\|f\|_p = 0 \iff \int_X |f|^p d\mu = 0 \iff f = 0$ a.e. (como consecuencia, la clase de f y la del 0 coinciden).

La desigualdad triangular es cierta gracias al Teorema 1.11.

A continuación, sea $(f_n)_n \subset L^p(\mu)$ (se puede tomar en $L^p(\mu)$ también identificando los f_n con sus clases) una sucesión de Cauchy. Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n, m \geq N$ se cumple que $\|f_n - f_m\|_p < \epsilon$. De esa forma, se satisface que existen unos naturales $n_1 < n_2 < \dots$ tal que $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sea $f_{n_0} = 0$. De esa manera, tenemos que $f_{n_{k+1}} = \sum_{j=0}^k (f_{n_{j+1}} - f_{n_j})$ y así consideramos la función $f = \sum_{n=0}^\infty (f_{n_{j+1}} - f_{n_j})$ allí donde esté definida. Las funciones f_{n_k} son medibles y así f también lo es en su dominio por la definición que hemos dado como límite de funciones medibles.

Además, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se tiene que

$$\|f_{n_{k+1}}\|_p \leq \sum_{j=0}^k \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \leq \sum_{j=0}^k \frac{1}{2^j} < 2$$

y en consecuencia, por el Lema 1.13:

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p d\mu = \int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} |f_{n_{k+1}}|^p d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_{n_{k+1}}|^p d\mu \leq 2^p.$$

Por lo tanto, $\|f\|_p \leq 2$ y se cumple que $f \in L^p(\mu)$. De esa forma, f está bien definida y es finita en μ -casi todo punto.

Ahora vamos a comprobar que la sucesión $(f_n)_n$ converge en norma p a la función f . Para ello, veamos en primer lugar que $(f_{n_k})_k$ converge a f en norma p . Tenemos que

$$\|f_{n_{k+1}} - f\|_p = \left\| \sum_{j=k+2}^{\infty} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j}) \right\|_p \leq \sum_{j=k+2}^{\infty} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \leq \sum_{j=k+2}^{\infty} \frac{1}{2^j},$$

donde este último término converge a 0 cuando k crece (gracias a la aplicación del Lema 1.13 obtenemos la penúltima desigualdad).

Finalmente, vamos a ver que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe un natural $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$ se cumple que $\|f_n - f_m\|_p < \frac{\epsilon}{2}$. Si $n_k > N$ ya hemos visto que $\|f_{n_k} - f\|_p < \frac{\epsilon}{2}$ y así obtenemos que $\|f_n - f\|_p \leq \|f_n - f_{n_k}\|_p + \|f_{n_k} - f\|_p < \epsilon$, lo que termina la demostración. $\square$

Teorema 1.22. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Dada una función $f \in L^\infty$ definimos así $\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in X} |f(x)|$. De esa forma el par $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Al igual que en la demostración del teorema 1.21 vamos a comprobar inicialmente que se trata de un espacio normado.

Por definición es cierto que $\|f\|_\infty \geq 0$ para cualquier $f \in L^\infty(\mu)$.

Si suponemos que $\|f\|_\infty = 0$ entonces para cada $\epsilon > 0$ ocurre que $\mu(\{x \in X : |f(x)| > \epsilon\}) = 0$. Por lo tanto, tomando $\epsilon = \frac{1}{n}$ y considerando la unión numerable de esos conjuntos es cierto que $f = 0$ fuera de un conjunto de medida nula. Y si $f = 0$ a.e. entonces claramente $\|f\|_\infty = 0$ por definición.

Si $M = \|f\|_\infty$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces sabemos que $|f| \leq M$ a.e. y así $|f\lambda| \leq |\lambda|M$ a.e., luego $\|f\lambda\|_\infty \leq |\lambda|M$. De esa manera, si tomamos el ínfimo sobre los M sacamos que $\|f\lambda\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty$.

Sean $M = \|f\|_\infty$ y $N = \|g\|_\infty$. Así ocurre que $|f| \leq M$ y $|g| \leq N$ a.e., luego se satisface que $|f + g| \leq |f| + |g| \leq M + N$ a.e. y $\|f + g\|_\infty \leq M + N$. De esa forma, al tomar el ínfimo sobre M y N se cumple la desigualdad triangular.

Comprobemos ahora que el espacio es completo. Consideremos $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^\infty(\mu)$ una sucesión de Cauchy en la norma $\|\cdot\|_\infty$. Así para cada $\epsilon > 0$ existe un natural N tal que para todo $n, m \geq N$ se cumpla que $\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$. Por ello $\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \epsilon\}) = 0$ para cada $n, m \geq N$, debido a la definición de la norma $\|\cdot\|_\infty$. Definimos para cada $k \in \mathbb{N}$ $Z_k = \bigcup_{n,m} A_{n,m}^k$ y consideremos el conjunto $Z = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$. Puesto que los conjuntos Z_k son uniones numerables de conjuntos de medida nula estos conjuntos también tienen medida nula y entonces $\mu(Z) = 0$.

Sea $\epsilon_k = \frac{1}{k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Debido a lo que hemos visto para cada k existe un natural N_k tal que para todo $n, m \geq N_k$ se satisfaga que $\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{1}{k}$. Vamos a considerar pues para cada $n, m \geq N_k$ el conjunto $A_{n,m}^k = \{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \frac{1}{k}\}$, que satisface que $\mu(A_{n,m}^k) = 0$.

De esa forma para cada $x \notin Z$ y para cada k natural tenemos que si $n, m \geq N_k$ entonces $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k}$. Luego para todo $x \notin Z$ la sucesión $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ (que es completo) y entonces $\exists f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ para cada $x \notin Z$. Definimos $f = 0$ en Z y así ya tenemos una función definida en todo X . Como cada función f_n es medible y $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ a.e. entonces f también es medible.

Como $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en la norma $\|\cdot\|_\infty$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ $\|f_{n_0} - f_n\|_\infty < 1$. Por lo tanto $\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_{n_0}(x)| > 1\}) = 0$ para $n \geq n_0$ y, en consecuencia, $|f_n(x)| \leq |f_{n_0}(x)| + 1$ para μ -casi todo x . De esa forma tenemos pues que se satisface que $\sup_{n \geq n_0} \|f_n\|_\infty \leq \|f_{n_0}\|_\infty + 1 < \infty$.

A continuación, si consideramos $x \notin Z$ $(f_n(x))_n$ converge a $f(x)$ y está acotada por $\|f_{n_0}\|_\infty + 1$, luego $|f(x)| \leq \|f_{n_0}\|_\infty + 1$ para todo $x \notin Z$. Por ello f es acotada en su dominio salvo en un conjunto contenido en un conjunto de medida nula y $\|f\|_\infty \leq \|f_{n_0}\|_\infty + 1 < \infty$. Por lo tanto, $f \in L^\infty(\mu)$.

Por último, veamos la convergencia en norma $\|\cdot\|_\infty$. Consideremos $\epsilon > 0$ y sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \epsilon$. Así, para dicho k se cumple que existe un natural N_k tal que para todo $n, m \geq N_k$

$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k}$ para cada $x \notin Z$. Fijemos $n \geq N_k$. Así dado $x \notin Z$ y tomando el límite cuando m tiende al infinito en la desigualdad anterior se obtiene que $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$. Por lo que $\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\}) \leq \mu(Z) = 0$ y $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{k} < \epsilon$ para todo $n \geq N_k$ y eso termina la prueba. $\square$

Proposición 1.23. Dado $1 \leq p < \infty$ el conjunto de funciones simples en $[-\pi, \pi]$ es denso en el espacio $L^p([-\pi, \pi])$.

Demostración. Este resultado lo vamos a comprobar para funciones que toman valores reales. La demostración para funciones complejas es muy similar, trabajando de forma separada con las partes real e imaginaria.

Sea $f \in L^p([-\pi, \pi])$. Si consideramos las funciones f^+ y f^- , se cumple por la Proposición 1.2 que existen dos sucesiones $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones positivas, medibles y simples tales que $f^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ y $f^- = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$. Definimos así una nueva sucesión $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $r_n = s_n - t_n$.

Dichas funciones son también medibles, simples y satisfacen que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = f(x)$ para todo $x \in [-\pi, \pi]$. Además, se verifica que

$$|r_n(x)| = |s_n(x) - t_n(x)| \leq |s_n(x)| + |t_n(x)| \leq f^+(x) + f^-(x) \leq |f(x)|.$$

De esa forma, si aplicamos el Teorema 1.3 a la potencia p -ésima de las funciones r_n y f tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|r_n - f\|_p = 0.$$

De esa manera, se da por terminada la prueba. $\square$

Definición 1.24. Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado y acotado en $\mathbb{R}$. Una función de paso (ya sea real o compleja) en el intervalo I es una función f para la cual existen números reales $c_0, \dots, c_n$ tales que $a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b$ y f sea constante en cada subintervalo (c_i, c_{i+1}) para $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Proposición 1.25. Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces el conjunto de funciones de paso en el intervalo $[-\pi, \pi]$ es denso en $L^p([-\pi, \pi])$.

Demostración. Es claro que si f es una función de paso entonces $f \in \mathcal{L}^p([-\pi, \pi])$. Gracias a la Proposición 1.23, sabemos que el conjunto de funciones simples en $[-\pi, \pi]$ forma un conjunto denso en $L^p([-\pi, \pi])$. De esa forma, si comprobamos que dada una función simple g y un $\epsilon > 0$ arbitrario existe una función de paso f tal que $\|f - g\|_p < \epsilon$, habríamos demostrado este resultado.

Para ello, será suficiente con probar que si $B \subset [-\pi, \pi]$ es un boreliano y $\delta > 0$ es arbitrario entonces existe una función de paso f tal que $\|f - \chi_B\|_p < \delta$. Sea pues $\delta > 0$ arbitrario y $B \subset [-\pi, \pi]$ boreliano.

Utilizando la definición de la medida exterior de Lebesgue, consideremos una sucesión de intervalos abiertos (a_n, b_n) tales que $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \lambda(B) + \delta$. Además, esa desigualdad nos indica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ es convergente, por lo que existe un número natural $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} (b_n - a_n) < \delta$.

Sean f y h las funciones características correspondientes de los conjuntos $[-\pi, \pi] \cap (\bigcup_{n=1}^{n_0} (a_n, b_n))$ y $[-\pi, \pi] \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n))$. De ese modo, la función f es una función de paso que satisface que

$$\begin{aligned} \|\chi_B - f\|_p &\leq \|\chi_B - h\|_p + \|h - f\|_p \\ &\leq \left(\lambda \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) - B \right) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\lambda \left(\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} (a_n, b_n) \right) \right)^{\frac{1}{p}} < \delta^{\frac{1}{p}} + \delta^{\frac{1}{p}} = 2\delta^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Y como δ era una cantidad arbitraria, eso prueba el resultado y concluye así la demostración. $\square$

Proposición 1.26. Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces el conjunto de funciones continuas en el intervalo $[-\pi, \pi]$ es denso en $L^p([-\pi, \pi])$.

Demostración. Claramente, toda función continua en el intervalo $[-\pi, \pi]$ pertenece a $\mathcal{L}^p([-\pi, \pi])$. Gracias a la Proposición 1.25, lo único que haría falta comprobar para ver la veracidad del resultado es que, dada una función de paso f y un $\epsilon > 0$ arbitrario, existe una función continua g tal que $\|f - g\|_p < \epsilon$.

Sea f una función de paso en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y consideremos $M = \sup\{|f(x)| : x \in [-\pi, \pi]\}$, $\delta > 0$ arbitrario. La idea es construir una función g continua en el intervalo $[-\pi, \pi]$ de tal manera que $\sup\{|g(x)| : x \in [-\pi, \pi]\} \leq M$ y $\lambda(\{x \in [-\pi, \pi] : f(x) \neq g(x)\}) < \delta$. Para ello, basta con considerar una función lineal definida a trozos adecuada respecto a la definición de f .

De esa manera, se cumple que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f - g|^p d\lambda \leq (2M)^p \lambda(\{x \in [-\pi, \pi] : f(x) \neq g(x)\}) \leq (2M)^p \delta,$$

por lo que $\|f - g\|_p \leq 2M\delta^{\frac{1}{p}}$. Por lo tanto, como el δ es arbitrario y la constante M sólo depende de la función f (que hemos tomado arbitrariamente en el conjunto de funciones de paso), la prueba ya está completada. $\square$

Proposición 1.27. Sea $f \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$. Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico T tal que $|f(x) - T(x)| < \epsilon$ para todo $x \in \mathbb{T}$.

Demostración. La idea de esta demostración se basa en considerar polinomios trigonométricos positivos Q_n tales que $\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t) dt = 1 \forall n \in \mathbb{N}$ y que cumplan que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} Q_n(t) dt = 0$ para cada $\delta > 0$. De esa forma, si definimos $T_n(x) = f * Q_n(x)$ tenemos un nuevo polinomio trigonométrico.

Como $f \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$, entonces f es uniformemente continua en dicho intervalo y así ocurriría que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - t| < \delta$ entonces $|f(x) - f(t)| < \frac{\epsilon}{2}$.

Por lo tanto, dado $x \in [-\pi, \pi]$ obtenemos que

$$\begin{aligned} |T_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) Q_n(t) dt - f(x) \right| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x)) Q_n(t) dt \right| \\ &\leq \int_{|t| < \delta} |f(x-t) - f(x)| Q_n(t) dt + \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |f(x-t) - f(x)| Q_n(t) dt. \end{aligned}$$

Utilizando las propiedades de Q_n y la continuidad uniforme de f sobre el miembro de la derecha de la desigualdad se deduce que, dado $\epsilon > 0$ arbitrario, se verifica que $|T_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para cada $x \in [-\pi, \pi]$, lo cual termina la demostración. $\square$

Observación 1.28. Más adelante en la Proposición 3.19 vamos a ver un polinomio trigonométrico que cumple dichas condiciones que se dan en el polinomio trigonométrico Q_n de la demostración anterior. Sin embargo, la demostración está hecha para un polinomio cualquiera que cumpla esas propiedades.

Teorema 1.29. Sea $f \in L^1([-\pi, \pi])$. Entonces para cada $\epsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico T tal que $\|f - T\|_1 < \epsilon$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Por la Proposición 1.26 se cumple que existe una función $g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ tal que $|f(t) - g(t)| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $t \in [-\pi, \pi]$.

Mediante un argumento similar, por la Proposición 1.27 se verifica que existe un polinomio trigonométrico T tal que $|g(t) - T(t)| < \frac{\epsilon}{2}$ para cada $t \in [-\pi, \pi]$.

De esa forma, dado $t \in [-\pi, \pi]$ se satisface que

$$|f(t) - T(t)| \leq |f(t) - g(t)| + |g(t) - T(t)| < \epsilon.$$

Así, aplicando esta desigualdad, se demuestra el resultado de forma muy sencilla. $\square$

Definición 1.30. Sea V un espacio vectorial complejo. Un producto interior o escalar es una aplicación de la forma

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ (x, y) &\longrightarrow \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

que cumple las siguientes propiedades:

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$ y se cumple que $\langle x, x \rangle = 0$ si y solo si $x = 0$.

Proposición 1.31. *En el espacio de funciones $L^2([-\pi, \pi])$ se verifica que el producto funcional dado por $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \bar{g}(t) dt$ define un producto interior.*

Demostración. La segunda y tercera propiedad que caracterizan el producto interior se satisfacen gracias a la linealidad de la integral. Para la prueba de la cuarta, basta con utilizar la definición para concluir que $\langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2$. De esa forma, usando el Teorema 1.21 se cumple el resultado al ser $\|\cdot\|_2$ una norma.

Por último, comprobemos la primera propiedad mediante un cálculo sencillo.

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \bar{g}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\bar{f}(t) g(t)} dt = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t) g(t) dt} = \overline{\langle g, f \rangle}.$$

□

Corolario 1.32. *El espacio $(L^2([-\pi, \pi]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Es consecuencia directa del Teorema 1.21 y de la Proposición 1.31. □

1.3. Resultados de Análisis Real y Análisis Complejo

Teorema 1.33 (Segundo teorema del valor medio). *Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones reales tales que g es monótona y f sea integrable Riemann en $[a, b]$. Entonces se verifica que existe un punto $\xi \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x) dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x) dx.$$

Demostración. Para una demostración véase el capítulo 6 de [5]. □

Proposición 1.34. *Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^1([-\pi, \pi])$ y sean g y h dos funciones tales que se satisface que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = g(x_0)$ para un cierto $x_0 \in [-\pi, \pi]$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = h(x)$ uniformemente en $[-\pi, \pi]$.*

Entonces se verifica que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = g(x)$ uniformemente en $[-\pi, \pi]$, de tal modo que $g \in C^1([-\pi, \pi])$ y $g' = h$.

Demostración. Para una demostración véase el capítulo 8 de [1]. □

Definición 1.35. Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Por otra parte, una función holomorfa en Ω es una función de la forma $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ para la cual existe el límite

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

para todo $z_0 \in \Omega$. Dicha cantidad se denota por $f'(z_0)$ en caso de que exista. El conjunto de las funciones holomorfas en Ω se denota por $\mathcal{H}(\Omega)$.

Lema 1.36. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Entonces se verifica que*

$$f'(z) = f'(x + iy) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = -iu_y(x, y) + v_y(x, y).$$

En tal caso, las funciones u y v cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Demostración.

$$\begin{aligned}
u_x(x, y) + iv_x(x, y) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{u(x+h, y) - u(x, y) + i(v(x+h, y) - v(x, y))}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\
&= f'(x+iy) = f'(z) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} \\
&= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{u(x, y+h) - u(x, y) + i(v(x, y+h) - v(x, y))}{ih} = -iu_y(x, y) + v_y(x, y).
\end{aligned}$$

Así queda demostrado el resultado. $\square$

Definición 1.37. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino cerrado y z un punto que no está en la imagen de γ . La función índice de z respecto de γ es la función que viene dada por

$$\text{Ind}(z, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z}.$$

Definición 1.38. Un camino nulo en un abierto Ω de $\mathbb{C}$ es un camino cerrado $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ contenido en él que cumple que $\{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b]) : \text{Ind}(z, \gamma) \neq 0\} \subset \Omega$.

Un conjunto simplemente conexo es un conjunto abierto, conexo y en el que todo camino cerrado contenido en él es nulo.

Proposición 1.39. Un conjunto abierto y conexo Ω es simplemente conexo si y solo si para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ existe una función $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F' = f$.

Demostración. Para una demostración, véase [3]. $\square$

Lema 1.40. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ para $z = x + iy$ en un abierto Ω , donde u y v son dos funciones reales y tienen primeras derivadas parciales continuas en Ω . Si u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann ($u_x = v_y$, $u_y = -v_x$) en Ω , entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Demostración. Sea $z = x + iy \in \Omega$. Puesto que Ω es abierto, existe un $r > 0$ tal que $D(z, r) \subset \Omega$. A continuación, consideremos $h = p + iq \in \mathbb{C}$ tal que $|h| < r$. De esa forma, como u y v verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se obtiene (tras aplicar el Teorema del Valor Medio) que

$$\begin{aligned}
\frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{p}{h} \left(\frac{u(x+p, y+q) - u(x, y+q)}{p} + i \frac{v(x+p, y+q) - v(x, y+q)}{p} \right) \\
&\quad + \frac{q}{h} \left(\frac{u(x, y+q) - u(x, y)}{q} + i \frac{v(x, y+q) - v(x, y)}{q} \right) \\
&= \frac{p}{h} \left(u_x(x + \alpha p, y + q) + iv_x(x + \beta p, y + q) \right) \\
&\quad + \frac{q}{h} \left(-v_x(x, y + \delta q) + iu_x(x, y + \epsilon q) \right) \\
&= u_x(x + \alpha p, y + q) + i \frac{q}{h} \left(u_x(x, y + \delta q) - u_x(x + \alpha p, y + q) \right) \\
&\quad + iv_x(x + \beta p, y + q) + \frac{q}{h} \left(v_x(x + \beta p, y + q) - v_x(x, y + \delta q) \right)
\end{aligned}$$

donde $0 < \alpha, \beta, \epsilon, \delta < 1$. En consecuencia, como $\left| \frac{q}{h} \right|$ y las derivadas parciales de u y v son continuas, al hacer el límite cuando h tiende a 0 se saca que la expresión anterior converge a $u_x(x, y) + iv_x(x, y)$. Por lo tanto, la función f es holomorfa en z y así concluye la prueba. $\square$

Capítulo 2

Series de Fourier

El objetivo principal de este capítulo es definir el concepto de serie de Fourier y estudiar sus principales propiedades, las cuales se utilizarán a lo largo del trabajo.

2.1. Transformada de Fourier

A lo largo del trabajo se van a emplear esencialmente funciones f que sean 2π -periódicas, por lo que vamos a utilizar principalmente el intervalo $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ para trabajar con ellas a no ser que se indique lo contrario.

También será recurrente el uso de sucesiones, por lo que comenzaremos introduciendo espacios que serán relevantes a lo largo del trabajo.

Definición 2.1. Dado $1 \leq p < \infty$, el espacio $\ell^p(\mathbb{Z})$ viene dado por

$$\ell^p(\mathbb{Z}) = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}.$$

En particular, el espacio $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ es aquel compuesto por las sucesiones $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ acotadas.

Definición 2.2. La transformada de Fourier es la aplicación definida por

$$\begin{aligned} L^1(\mathbb{T}) &\xrightarrow{\wedge} \ell^\infty(\mathbb{Z}), \\ f &\longrightarrow (c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

donde para cada $k \in \mathbb{N}$ el número $c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$ es el coeficiente n -ésimo de Fourier de la función f .

Observación 2.3. Los coeficientes de Fourier de una función L^1 en el intervalo $\mathbb{T}$ están bien definidos, puesto que $|c_k(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_1 < \infty$.

Proposición 2.4. Los coeficientes de Fourier dados en la Definición 2.2 cumplen las siguientes propiedades:

1. $c_k(\lambda f + \mu g) = \lambda c_k(f) + \mu c_k(g)$, $\forall f, g \in L^1(\mathbb{T})$ y $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
2. $c_k(f * g) = c_k(f) c_k(g)$, $\forall f, g \in L^1(\mathbb{T})$.
3. Si $f \in \mathcal{C}^m(\mathbb{T})$ ($m \in \mathbb{N}$) entonces se cumple que $c_k(D^m f) = i^m k^m c_k(f)$, donde $D^m f$ denota la derivada m -ésima de la función f .

Demostración. La primera propiedad es cierta gracias a la linealidad de la integral.

Para ver la veracidad de la segunda propiedad basta con hacer cálculos análogos a los realizados en la Proposición 1.19 en las operaciones con las integrales.

A continuación, vamos a comprobar el tercer apartado utilizando inducción. Consideremos el caso $m = 1$. Si usamos la periodicidad de la función f , las propiedades de la exponencial y la integración por partes obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} c_k(f') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} [f(t) e^{-ikt}]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} ik \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} ik \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt = ik c_k(f). \end{aligned}$$

Finalmente, si suponemos que se cumple la hipótesis para un cierto $m \in \mathbb{N}$ vamos a ver que también se satisface para $m+1$. Tenemos que $c_k(f^{(m+1)}) = c_k((f^{(m)})')$. De esa forma, si aplicamos el mismo procedimiento que en el caso base, obtenemos que $c_k(f^{(m+1)}) = ik c_k(f^{(m)})$. Por lo tanto, aplicando la hipótesis de inducción, se obtiene el resultado que buscábamos. $\square$

Como consecuencia directa de este resultado podemos enunciar las primeras propiedades de la transformada de Fourier.

Corolario 2.5. *La transformada de Fourier tiene las siguientes propiedades:*

1. *La transformada de Fourier es una aplicación lineal.*
2. *Dadas dos funciones $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ se cumple que $\widehat{(f * g)} = (c_k(f) c_k(g))_{k \in \mathbb{Z}}$.*
3. *Sea f una función de clase k en el intervalo $\mathbb{T}$. Entonces $\widehat{(D^m f)} = (i^m k^m c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$.*

A continuación, vamos a proceder a enunciar uno de los resultados principales de este trabajo: el Teorema de Riemann-Lebesgue. Para ello, vamos a considerar el espacio $\mathcal{C}_0(\mathbb{Z})$ de sucesiones $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ que convergen a 0.

Teorema 2.6 (Teorema de Riemann-Lebesgue). *La imagen de la transformada de Fourier $L^1(\mathbb{T}) \xrightarrow{\Delta} \ell^\infty(\mathbb{Z})$ está contenida en el espacio $\mathcal{C}_0(\mathbb{Z})$. Por lo tanto, se cumple que $c_n(f) \rightarrow 0$ cuando $|n| \rightarrow \infty$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Gracias al Teorema 1.29 sabemos que para dicho ϵ existe un polinomio trigonométrico T tal que $\|f - T\|_1 < \frac{\epsilon}{2}$. De esa forma, podemos expresar $c_n(f)$ como sigue:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - T(t)) e^{-int} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(t) e^{-int} dt.$$

Puesto que T es un polinomio trigonométrico (luego está acotado en $\mathbb{T}$) y se cumple que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} dt = 0$ si $n \neq 0$ se satisface que $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(t) e^{-int} dt = 0$. Si logramos comprobar que se cumple que $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - T(t)) e^{-int} dt = 0$ así habríamos verificado que ambas cantidades tienden a 0 cuando $|n|$ tiende a ∞ .

Si n_0 es el grado de T y consideramos $n > n_0$ tenemos así que

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - T(t)) e^{-int} dt \right| \leq \|f - T\|_1 < \epsilon.$$

Y eso prueba lo que buscábamos, terminando así la demostración. $\square$

Definición 2.7. Un polinomio trigonométrico de grado m es una función con una expresión de la forma $T(z) = \sum_{n=-m}^m a_n e^{inz}$, donde $a_m \neq 0$ o $a_{-m} \neq 0$.

Definición 2.8. La suma parcial de la serie de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{T})$ es el polinomio trigonométrico de grado n dado por

$$S_n(f, t) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikt},$$

para un cierto $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{T})$ es una función real. Entonces se verifica que $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$, de tal manera que podemos obtener la siguiente expresión para $S_n(f, t)$:

$$\begin{aligned} S_n(f, t) &= c_0(f) + \sum_{k=1}^n \left(c_k(f) e^{ikt} + c_{-k}(f) e^{-ikt} \right) \\ &= c_0(f) + \sum_{k=1}^n \left((c_k(f) + c_{-k}(f)) \cos kt + (c_k(f) - c_{-k}(f)) \operatorname{sen} kt \right) \\ &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k(f) \cos kt + b_k(f) \operatorname{sen} kt), \end{aligned}$$

donde $a_k(f)$ y $b_k(f)$ son cantidades reales. Esta expresión de la suma parcial de la serie de Fourier de f se denomina suma parcial de la serie de Fourier de senos y cosenos de f .

Además, dichas cantidades $a_k(f)$ y $b_k(f)$ cumplen la relación $2c_k(f) = a_k(f) - ib_k(f)$ (para funciones complejas también), donde

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} kt \, dt.$$

Si la función f fuera par entonces se cumpliría que $b_k(f) = 0$ para k natural y la integral en la definición de los coeficientes $a_k(f)$ estaría definida entre 0 y π . Un caso similar ocurre si la función f es impar, salvo que en este caso se invertirían los papeles de $a_k(f)$ y de $b_k(f)$.

Observación 2.9. A través del Teorema 2.6 y de la igualdad $2c_k(f) = a_k(f) - ib_k(f)$ podemos deducir que ambas sucesiones $(a_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$ y $(b_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$ son convergentes a 0.

Observación 2.10. A lo largo del siguiente capítulo del trabajo vamos a estudiar si la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{T})$ es convergente. En caso de que así sea, también comprobaremos a qué función converge y analizaremos los distintos tipos de convergencia que hemos introducido en el Capítulo 1 para dicha sucesión.

2.2. Núcleo de Dirichlet

Consideremos la suma parcial de la serie de Fourier $S_n(f, \theta) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ik\theta}$ para una cierta función $f \in L^1([-\pi, \pi])$ y un cierto $n \in \mathbb{N}$. Si desarrollamos la expresión nos resulta que

$$S_n(f, \theta) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ik\theta} = \sum_{k=-n}^n \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \, dt \right) e^{ik\theta} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ik(\theta-t)} \right) f(t) \, dt.$$

Definición 2.11. Dado $n \in \mathbb{N}$ el polinomio trigonométrico $D_n(s) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{iks}$ se denomina núcleo de Dirichlet de orden n .

Observación 2.12. De esa forma, usando la definición y el desarrollo que hemos hecho previamente de S_n tenemos que $S_n(f, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\theta - t) f(t) \, dt = D_n * f(\theta)$.

Proposición 2.13. Dado $n \geq 1$ el núcleo de Dirichlet D_n cumple las siguientes propiedades:

1. Para cada $s \in \mathbb{R}$ se cumple que $D_n(s) = \frac{1}{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(ns + \frac{s}{2})}{\operatorname{sen} \frac{s}{2}}$.
2. Para cada $s \in \mathbb{R}$ se tiene que $|D_n(s)| \leq \frac{1}{\pi} (n + \frac{1}{2})$.
3. $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(s) \, ds = 1$.

Demostración. Consideramos la expresión del núcleo de Dirichlet $D_n(s) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{iks}$. Entonces se cumple que

$$2 \operatorname{sen} \frac{s}{2} D_n(s) = D_n(s) e^{\frac{is}{2}} - D_n(s) e^{-\frac{is}{2}} = \frac{1}{2\pi} \left(e^{is(n+\frac{1}{2})} - e^{is(n-\frac{1}{2})} \right) = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \left(ns + \frac{s}{2} \right).$$

De esa forma, queda probado (1).

Además, al considerar la definición de D_n podemos obtener la desigualdad dada en (2).

$$|D_n(s)| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n |e^{iks}| = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n 1 = \frac{1}{2\pi} (2n+1) = \frac{1}{\pi} \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

En último lugar, para demostrar (3) consideremos que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{iks} ds = 0$ si $k \in \mathbb{Z}$ y $k \neq 0$. Por tanto, se obtiene de esa forma que

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^n e^{iks} ds = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{iks} ds = 1.$$

□

A continuación, vamos a comprobar en las siguientes imágenes el comportamiento del núcleo de Dirichlet conforme aumenta el valor de n .

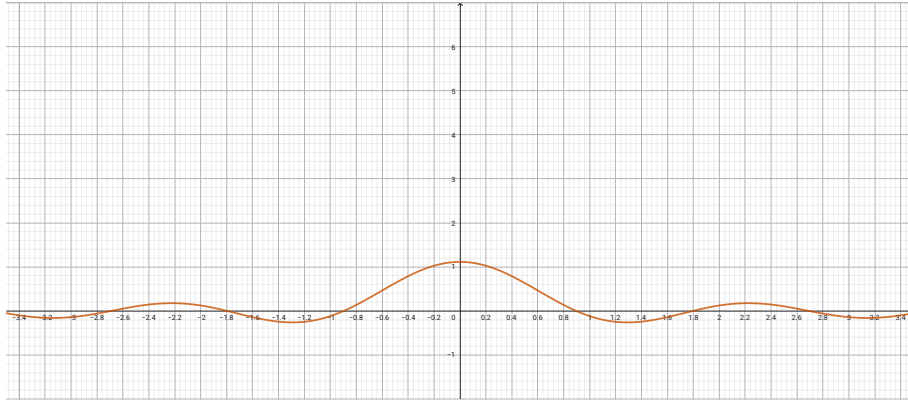


Figura 2.1: D_3

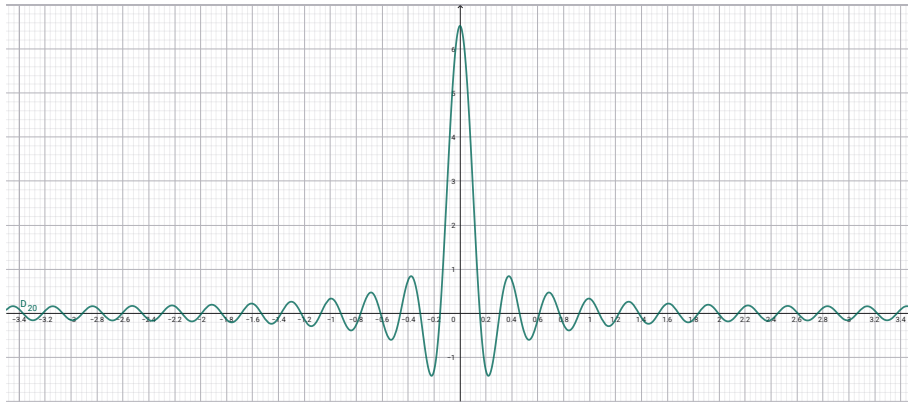


Figura 2.2: D_{20}

Capítulo 3

Convergencia de las series de Fourier

En este capítulo (como ya se adelantó en la Observación 2.10) vamos a estudiar la convergencia de la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{T})$. Para empezar veremos la convergencia puntual, considerando como resultados importantes el test de Dini y el Teorema de Dirichlet-Jordan. A continuación, vamos a estudiar criterios relativos a la convergencia en media. Y en el final del capítulo vamos a estudiar la convergencia en $L^2(\mathbb{T})$, viendo resultados como la identidad de Bessel-Parseval o propiedades de la transformada de Fourier al restringir a dicho espacio.

3.1. Convergencia puntual de las series de Fourier

Volvamos a considerar el núcleo de Dirichlet D_n visto en el capítulo anterior.

Definición 3.1. Dado $n \in \mathbb{N}$ el núcleo de Dirichlet modificado de orden n es el polinomio trigonométrico que viene dado por la expresión $D_n^* = \frac{D_n + D_{n-1}}{2}$. De forma similar, podemos definir la suma parcial modificada de la serie de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{T})$ como $S_n^*(f, x) = D_n^* * f(x)$.

Proposición 3.2. La función D_n^* cumple las siguientes propiedades:

1. Para cada $s \in \mathbb{R}$ se tiene que $D_n^*(s) = \frac{1}{4\pi} \frac{\sin(ns + \frac{s}{2}) + \sin(ns - \frac{s}{2})}{\sin \frac{s}{2}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin ns}{\tan \frac{s}{2}}$.
2. Para cada $s \in \mathbb{R}$ se verifica que $|D_n^*(s)| \leq \frac{n}{\pi}$.
3. $\int_{-\pi}^{\pi} D_n^*(s) ds = 1$.

Demostración. Para la demostración de estas propiedades es suficiente usar la definición que hemos dado de la función, las fórmulas del seno de la suma y de la resta de ángulos y las propiedades vistas en la Proposición 2.13 del núcleo de Dirichlet. $\square$

Lema 3.3. Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ una función tal que $\int_{-\pi}^{\pi} |\frac{f(t)}{t}| dt < \infty$. Entonces se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, 0) = 0.$$

Demostración. Por lo visto en la Observación 2.12 y la Proposición 2.13 tenemos que

$$\begin{aligned} S_n(f, 0) &= D_n * f(0) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(-t) f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(nt + \frac{t}{2})}{\sin \frac{t}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \sin nt dt. \end{aligned}$$

Sin embargo, gracias a la hipótesis del enunciado se satisface que $g(t) = f(t) \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \in L^1(\mathbb{T})$. Vamos a comprobarlo rápidamente. Tenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)| dt = \int_{-\pi}^{-1} |g(t)| dt + \int_{-1}^1 |g(t)| dt + \int_1^{\pi} |g(t)| dt.$$

Si consideramos la primera y la tercera integral, ambas son finitas puesto que la función g es continua en dichos intervalos (al no anularse la función $\sin \frac{t}{2}$ en ellos). Y en la segunda integral basta con aplicar la hipótesis del enunciado y las desigualdades $|\cos x| \leq 1$ y $|\sin x| \geq \frac{2}{\pi}|x|$ para probar que $\int_{-1}^1 |g(t)| dt < \infty$.

Por ello y por el Teorema 2.6 tenemos que ambos sumandos convergen a 0, terminando así la demostración. $\square$

Teorema 3.4 (Principio de localización). Sean $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ tal que existe un intervalo abierto $I \subset \mathbb{T}$ donde $f(x) = g(x)$ en todo $x \in I$. Entonces se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f - g, x) = 0, \quad x \in I.$$

Demostración. Consideremos la función $h = f - g$. Dicha función cumple por hipótesis que h es idénticamente 0 en todo punto del intervalo I . Consideremos un punto $x_0 \in I$ arbitrario. De esa manera, existe un $\epsilon > 0$ tal que $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset I$. Por tanto, y usando la expresión de $S_n(h, x)$ dada en la Observación 2.12, obtenemos que

$$\begin{aligned} S_n(h, x_0) &= D_n * h(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \frac{\sin(n(x_0 - t) + \frac{x_0 - t}{2})}{\sin \frac{x_0 - t}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{x_0 - \epsilon} h(t) \frac{\sin(n(x_0 - t) + \frac{x_0 - t}{2})}{\sin \frac{x_0 - t}{2}} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{x_0 + \epsilon}^{\pi} h(t) \frac{\sin(n(x_0 - t) + \frac{x_0 - t}{2})}{\sin \frac{x_0 - t}{2}} dt. \end{aligned}$$

Consideremos así la función $F(t) = \frac{h(t)}{\sin \frac{x_0 - t}{2}}$. Como la función $\sin \frac{x_0 - t}{2}$ no se anula en los intervalos $[-\pi, x_0 - \epsilon]$ y $[x_0 + \epsilon, \pi]$ y está acotada por cantidades no nulas en ellos, tenemos que $F \in L^1(\mathbb{T})$. Por lo tanto, y usando la Observación 2.9 en las dos integrales, obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(h, x_0) = 0.$$

Como el $x_0 \in \mathbb{T}$ era arbitrario, la hipótesis se cumple para todo punto de I y eso termina la demostración. $\square$

Teorema 3.5 (Test de Dini). Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ y para un cierto $x \in \mathbb{T}$ existe una constante A para la cual

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - A \right| \frac{dt}{t} < \infty,$$

entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x) = A$.

Demostración. Recordemos la definición que dimos del núcleo de Dirichlet modificado de orden n y de la suma parcial modificada de la serie de Fourier de f . Si consideramos la suma parcial de la serie de Fourier de f , podemos escribirla como

$$S_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n^*(x - t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n(x - t) dt = S_n^*(f, x) + A_n$$

gracias a que $D_n(t) - D_n^*(t) = \frac{D_n(t) - D_{n-1}(t)}{2} = \frac{\cos nt}{2\pi}$.

Por el Teorema 2.6, A_n tiene límite 0 cuando n tiende a infinito, por lo que vamos a demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^*(f, x) = A$ y así el resultado será cierto.

Un sencillo cálculo nos proporciona una expresión equivalente de la suma parcial modificada (mediante el cambio de variable $s = -t$, homogeneizando las variables y utilizando que D_n^* es un polinomio trigonométrico):

$$\begin{aligned} S_n^*(f, x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n^*(t) dt = \int_0^{\pi} f(x-t) D_n^*(t) dt + \int_{-\pi}^0 f(x-t) D_n^*(t) dt \\ &= \int_0^{\pi} f(x-t) D_n^*(t) dt - \int_{\pi}^0 f(x+s) D_n^*(-s) ds \\ &= \int_0^{\pi} f(x-t) D_n^*(t) dt + \int_0^{\pi} f(x+t) D_n^*(t) dt = \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) D_n^*(t) dt. \end{aligned}$$

Haciendo uso de la primera y la tercera propiedad del núcleo de Dirichlet modificado (dadas en la Proposición 3.2), obtenemos que

$$S_n^*(f, x) - A = \int_0^{\pi} \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - A \right) \frac{\sin nt}{\pi \tan \frac{t}{2}} dt.$$

A continuación, definimos la función

$$g_x(t) = \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - A \right) \frac{1}{\pi \tan \frac{t}{2}},$$

que cumple que $g_x \in L^1(\mathbb{T})$. Eso es fácil de demostrar usando la desigualdad $|\tan \frac{t}{2}| \geq |\frac{t}{2}|$ (que se satisface para todo $t \in (-\pi, \pi)$) y la hipótesis del enunciado.

Por ello, si utilizamos el Teorema 2.6, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n^*(f, x) - A) = 0$ y eso concluye la prueba. $\square$

Teorema 3.6 (Teorema de Marcinkiewicz). Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ y se cumple que la integral

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+s) - f(s)| ds \right) \frac{dt}{t}$$

es finita entonces se verifica que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x) = f(x)$ a.e. en $\mathbb{T}$.

Demostración. En primer lugar, consideremos la función

$$I(x) = \int_0^{\pi} |f(x+t) - f(x)| \frac{dt}{t} \geq 0.$$

Utilizando el teorema de Fubini tenemos que, gracias a la hipótesis del enunciado

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} I(x) dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| dx \right) \frac{dt}{t} < \infty.$$

Por lo tanto, la función I es finita en casi todo punto de $\mathbb{T}$ y también lo será la integral $\int_0^{\pi} |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \frac{dt}{t}$. En consecuencia, el Teorema 3.5 con $A = f(x)$ se cumple en casi todo $x \in \mathbb{T}$ y así concluye la demostración. $\square$

Definición 3.7. Una función f definida en un intervalo cerrado de la forma $[a, b]$ es de variación acotada (y se denota por $f \in VA([a, b])$) si se cumple que existe un número $M > 0$ tal que

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| : \{t_i\}_{i=0}^n \in \mathcal{P} \right\} \leq M$$

(donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de particiones del intervalo $[a, b]$). Además, definimos la variación de f en el intervalo $[a, b]$ como la cantidad $V_{[a, b]}(f) = \sup \{ \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| : \{t_i\}_{i=0}^n \in \mathcal{P} \}$.

Ejemplo 3.8. Claramente, toda función constante es de variación acotada cuya variación en cualquier intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ es 0.

Ejemplo 3.9. Consideremos a continuación la siguiente función definida en el intervalo $[-2, 2]$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 1 \text{ o } x = -1 \\ 0, & \text{si } x \in [-2, 2] \text{ y } x \neq 1, -1. \end{cases}$$

El supremo de las sumas $\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|$ se alcanza con una partición que cumple que $t_i = -1$ y $t_j = 1$ para $i, j \in \{2, \dots, n-1\}$ con $j > i+1$. De esa forma, al realizar los cálculos, el resultado es 4. Así, definiendo $M = 4$, f es una función de variación acotada por la definición.

Ejemplo 3.10. Toda función g monótona en un intervalo cerrado $[a, b]$ es de variación acotada. Se puede sacar de la definición que si $\{t_i\}_{i=0}^n$ es una partición de $[a, b]$ entonces todas las diferencias $g(t_i) - g(t_{i-1})$ para $i = 1, \dots, n$ serán todas con el mismo signo. Luego la serie $\sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})|$ será una serie telescópica y su suma será $g(b) - g(a)$ o $g(a) - g(b)$. Y como dicha función es monótona en un intervalo cerrado, ocurre que alcanza el máximo y el mínimo en $[a, b]$, por lo que esa diferencia es finita y entonces g será una función de variación acotada.

Además, como ya se ha podido ver en el razonamiento, su variación en dicho intervalo es el valor absoluto de la diferencia entre las imágenes de los extremos del intervalo.

Proposición 3.11. Dada una función $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, se cumple que $u \in VA([a, b])$ si y solo si se puede escribir como la diferencia de dos funciones reales, acotadas y crecientes.

Demostración. Para demostrar la primera implicación, consideremos la función $V(x, u) = V_{[a, x]}(u)$ y definamos así las funciones

$$u_1(x) = \frac{V(x, u) + u(x)}{2}, \quad u_2(x) = \frac{V(x, u) - u(x)}{2}.$$

Estas dos funciones son acotadas (gracias a que $u \in VA([a, b])$ y a que la variación de u siempre será acotada), cumplen que $u = u_1 - u_2$ y son ambas reales. Si probamos que son crecientes eso bastará para demostrar el resultado.

Utilizando que $V_{[x, y]}(u) = V(y, u) - V(x, u)$ (la demostración de esta igualdad es muy sencilla usando propiedades del valor absoluto y la definición de supremo) se obtiene, gracias a la definición de variación, que $u(y) - u(x) \leq |u(y) - u(x)| \leq V_{[x, y]}(u)$. De esa forma

$$u_1(y) - u_1(x) = \frac{V(y, u) - V(x, u) + u(y) - u(x)}{2} \geq 0.$$

De manera similar, y considerando que $u(y) - u(x) \leq |u(y) - u(x)|$, se prueba que se satisface la desigualdad $u_2(y) - u_2(x) \geq 0$. Por lo tanto, ambas funciones son crecientes y así termina la prueba de esta parte.

Comprobemos la implicación contraria. Ya hemos visto en el Ejemplo 3.10 que toda función monótona es de variación acotada. Así, consideremos u_1 y u_2 son las funciones reales, acotadas y crecientes tales que $u = u_1 - u_2$. Dichas funciones serán, pues, funciones de variación acotada en el intervalo $[a, b]$. En consecuencia, utilizando la desigualdad triangular ($|u(x)| \leq |u_1(x)| + |u_2(x)|$) para cada $x \in [a, b]$ y este hecho, se deduce que $V_{[a, b]}(u) \leq V_{[a, b]}(u_1) + V_{[a, b]}(u_2)$ y que $u \in VA([a, b])$. Así concluye la demostración. $\square$

Corolario 3.12. Dada una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de la forma $f(x) = u(x) + iv(x)$, se cumple que $f \in VA([a, b])$ si y solo si u y v se pueden escribir como la diferencia de dos funciones reales, acotadas y crecientes.

Demostración. Si suponemos que $f \in VA([a, b])$, entonces se cumple que u y v son también funciones de variación acotada (se puede probar fácilmente usando la definición de función de variación acotada, que $f \in VA([a, b])$ y que $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$). De esa manera, por la Proposición 3.11 es cierta la primera implicación.

Para ver la otra implicación, basta con volver a aplicar la Proposición 3.11. Por ese resultado y las hipótesis, tenemos que tanto u como v son funciones de variación acotada. Por tanto, y usando la desigualdad triangular, se obtiene que $V_{[a, b]}(f) \leq V_{[a, b]}(u) + V_{[a, b]}(v)$. Por ello, $f \in VA([a, b])$ y eso termina la demostración. $\square$

Teorema 3.13 (Teorema de Dirichlet-Jordan). Sea $f \in VA(\mathbb{T})$. Entonces en cada punto $x \in \mathbb{T}$ la sucesión $(S_n(f, x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$. En particular, si la función f es continua en un punto x_0 se cumple que el límite de la sucesión es $f(x_0)$.

Demostración. Inicialmente, si procedemos como hicimos con la suma parcial modificada de la serie de Fourier de f en la demostración del Teorema 3.5 llegaríamos a la igualdad

$$S_n(f, x) = \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t))D_n(t) dt.$$

Utilizando la tercera propiedad del núcleo de Dirichlet vista en la Proposición 2.13 y que D_n es un polinomio trigonométrico (luego es una función par), obtendríamos que

$$\begin{aligned} S_n(f, x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} &= \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t))D_n(t) dt - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \int_{-\pi}^\pi D_n(t) dt \\ &= \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t) - f(x^+) - f(x^-))D_n(t) dt. \end{aligned}$$

Gracias a la Proposición 3.12 se verifica que si $f(x) = u(x) + iv(x)$, entonces u y v se pueden expresar como la diferencia de dos funciones reales, crecientes y acotadas ($u = u_1 - u_2$ y $v = v_1 - v_2$). De esa forma, podríamos descomponer la integral de manera que quede como una suma de integrales de la forma $\int_0^\pi (g(x+t) + g(x-t) - g(x^+) - g(x^-))D_n(t) dt$, donde g es una función real, monótona y acotada. Debido a esto, si comprobamos que el resultado se satisface para esta clase de funciones ya habríamos finalizado la demostración.

Queremos comprobar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi (g(x+t) + g(x-t) - g(x^+) - g(x^-))D_n(t) dt = 0$. Por comodidad, denotemos $\phi_x(t) = (g(x+t) - g(x^+)) - (g(x^-) - g(x-t)) = \phi_{x,1}(t) - \phi_{x,2}(t)$. Ambas funciones $\phi_{x,1}$ y $\phi_{x,2}$ cumplen ser de variación acotada (al serlo g) en $\mathbb{T}$, monótonas y con $\lim_{t \rightarrow 0^+} \phi_{x,1}(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \phi_{x,2}(t) = 0$.

Vamos a probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \phi_{x,1}(t)D_n(t) dt = 0$. Para $\phi_{x,2}$ el resultado se podría ver de forma totalmente análoga, así que si comprobamos que dicho límite es 0 entonces sería cierto que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \phi_x(t)D_n(t) dt = 0$ y ya habríamos terminado.

Para hacerlo, vamos a dividir la integral en dos sumandos. Dado $\pi > \delta > 0$ pequeño, podemos escribir

$$\int_0^\pi \phi_{x,1}(t)D_n(t) dt = \int_0^\delta \phi_{x,1}(t)D_n(t) dt + \int_\delta^\pi \phi_{x,1}(t)D_n(t) dt.$$

Dado $t \in (\delta, \pi]$, tendríamos que la función $\frac{\phi_{x,1}(t)}{2\pi \sin \frac{t}{2}}$ es una función del espacio $L^1(\mathbb{T})$. Luego, por el Teorema 2.6, ocurriría que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\delta^\pi \phi_{x,1}(t)D_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_\delta^\pi \frac{\phi_{x,1}(t)}{2\pi \sin \frac{t}{2}} \sin\left(nt + \frac{t}{2}\right) dt = 0.$$

Falta comprobarlo para el intervalo $[0, \delta]$. Pero gracias al Teorema 1.33 existe un punto $\xi \in [0, \delta]$ tal que

$$\int_0^\delta \phi_{x,1}(t)D_n(t) dt = \phi_{x,1}(0) \int_0^\xi D_n(t) dt + \phi_{x,1}(\delta) \int_\xi^\delta D_n(t) dt = \phi_{x,1}(\delta) \int_\xi^\delta D_n(t) dt.$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\xi > 0$. De esa manera, gracias al Teorema 2.6 y a que la función $\frac{1}{\sin \frac{t}{2}}$ está en $L^1(\mathbb{T})$, se obtiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{x,1}(\delta) \int_\xi^\delta D_n(t) dt = 0$$

y así finaliza la demostración. $\square$

Antes de pasar a la siguiente sección del capítulo, vamos a ver algunos ejemplos de series de Fourier a los que les podamos aplicar los resultados que hemos enunciado.

Ejemplo 3.14. Sea g la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x}{\pi}, & \text{si } x \in [-\pi, 0) \\ 1 - \frac{x}{\pi}, & \text{si } x \in [0, \pi] \end{cases}.$$

Puesto que esta función es par, tenemos que los coeficientes $b_k(g)$ son todos nulos. Calculemos los coeficientes $a_k(g)$ para obtener la suma parcial de la serie de Fourier de g .

$$\begin{aligned} a_0(g) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \left(1 - \frac{t}{\pi}\right) dt + \int_{-\pi}^0 \left(1 + \frac{t}{\pi}\right) dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[t - \frac{t^2}{2\pi} \right]_0^{\pi} + \left[t + \frac{t^2}{2\pi} \right]_{-\pi}^0 \right) = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n(g) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \left(1 - \frac{t}{\pi}\right) \cos nt dt + \int_{-\pi}^0 \left(1 + \frac{t}{\pi}\right) \cos nt dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left(- \int_0^{\pi} t \cos nt dt + \int_{-\pi}^0 t \cos nt dt \right) = -\frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} t \cos nt dt \\ &= -\frac{2}{\pi^2} \left(\left[\frac{t \sin nt}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nt dt \right) = \frac{2}{\pi^2 n} \int_0^{\pi} \sin nt dt = \frac{2 - 2(-1)^n}{\pi^2 n^2}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la suma parcial de la serie de Fourier de g viene dada por

$$S_n(g, x) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^n a_k(g) \cos kx = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{2 - 2(-1)^k}{\pi^2 k^2} \cos kx.$$

Gracias al Teorema 3.13 y a que la función g es continua en $\mathbb{T}$ la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de g converge a la propia función g puntualmente.

Gracias a este resultado, somos capaces de obtener la suma de series de números reales para las cuales no existe un procedimiento con el que calcularlas. Por ejemplo, para el punto $x = 0$ se verifica que

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 - 2(-1)^k}{\pi^2 k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(g, 0) = 1 \iff \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 - 2(-1)^k}{\pi^2 k^2} = \frac{1}{2}.$$

Con las siguientes imágenes vamos a ver cómo se aproxima la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de g a la función que hemos determinado como su límite puntual.

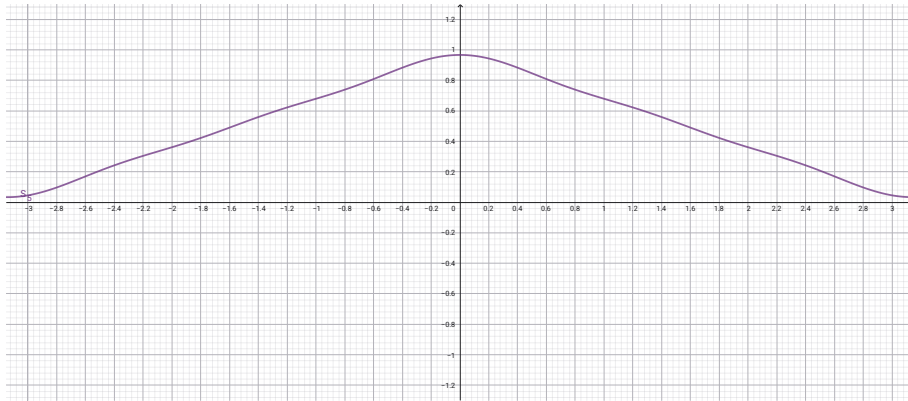
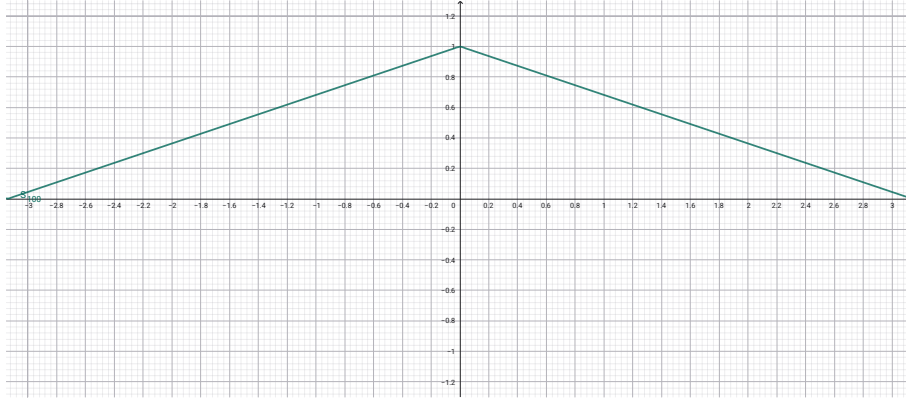


Figura 3.1: $S_5(g)$


 Figura 3.2: $S_{100}(g)$

Ejemplo 3.15. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x \in [-\pi, 0) \\ 1, & \text{si } x \in [0, \pi] \end{cases}.$$

A continuación, vamos a calcular los coeficientes de Fourier de f .

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} dt - \int_{-\pi}^0 dt \right) = 0.$$

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} e^{-int} dt - \int_{-\pi}^0 e^{-int} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{e^{-int}}{-in} \right]_0^{\pi} - \left[\frac{e^{-int}}{-in} \right]_{-\pi}^0 \right) = \frac{(-1)^n - 1}{-in\pi}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Como la función f es impar entonces, al considerar los coeficientes $a_k(f)$ (que son nulos) y $b_k(f)$, tenemos que $S_n(f, x) = \sum_{k=1}^n b_k(f) \sin kx$, donde $b_k(f) = -\frac{2}{i} c_k(f)$. Por lo tanto, la suma parcial de la serie de Fourier de f viene dada por

$$S_n(f, x) = \sum_{k=1}^n b_k(f) \sin kx = \sum_{k=1}^n \frac{2 - 2(-1)^k}{k\pi} \sin kx.$$

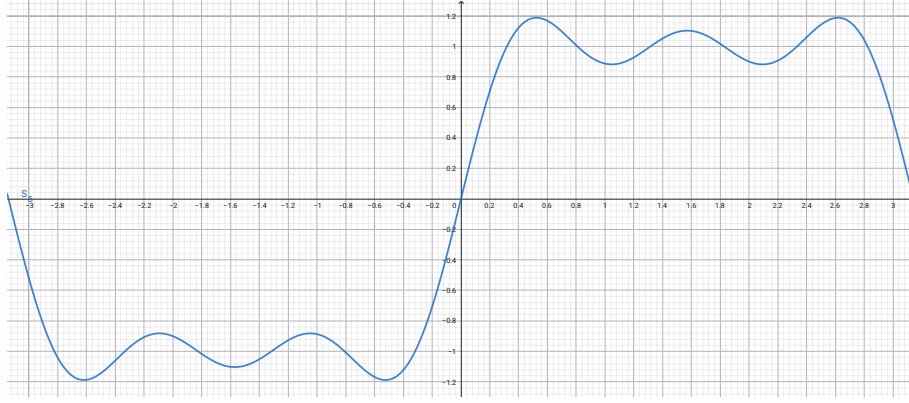
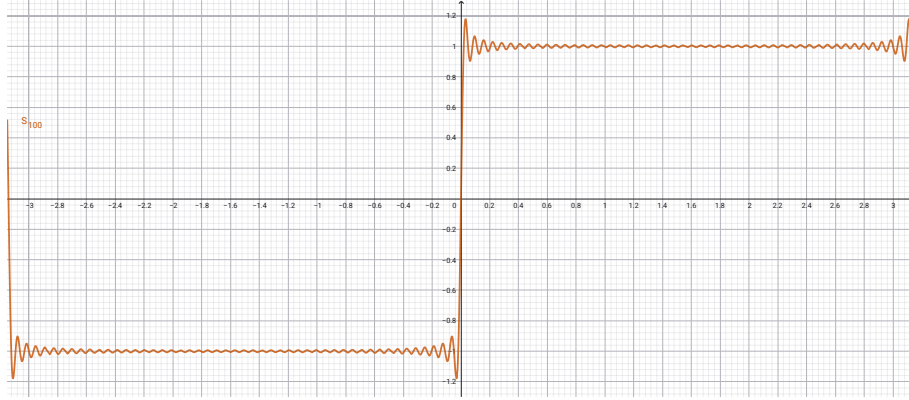
Calcular el límite puntual de la suma parcial de la serie de Fourier de f sería complicado. Sin embargo, la función f es monótona en el intervalo $\mathbb{T}$, luego es de variación acotada. En consecuencia, por el Teorema 3.13, se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \begin{cases} -1, & \text{si } x \in [-\pi, 0) \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x \in (0, \pi] \end{cases}.$$

De nuevo podemos utilizar el resultado que hemos obtenido para calcular la suma de series de números reales. Por ejemplo, si consideramos el punto $x = 1$ entonces se cumple que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 - 2(-1)^k}{k\pi} \sin k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, 1) = 1.$$

Al igual que en el ejemplo anterior vamos a enseñar cómo evoluciona la sucesión de las sumas parciales y cómo se va aproximando a la función límite.

Figura 3.3: $S_5(f)$ Figura 3.4: $S_{100}(f)$

Como se ha podido ver en las imágenes anteriores del último ejemplo, estamos ante un caso singular que tiene lugar al calcular series de Fourier de funciones con discontinuidades de salto en un punto. Ese comportamiento oscilatorio cerca del 0 de la suma parcial de la serie de Fourier de f se debe al denominado fenómeno de Gibbs, que vamos a describir a continuación.

Supongamos que una sucesión $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $x_0 < x \leq x_0 + h$ a $f(x)$ y que existe $f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$. Si al hacer el límite cuando n tiende a infinito y x tiende a x_0 se verifica que $\limsup f_n(x) > f(x_0^+)$ o que $\liminf f_n(x) < f(x_0^+)$ entonces se dice que $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ presenta el fenómeno de Gibbs en un entorno a la derecha de $x = x_0$. De forma análoga, se puede describir para un entorno a la izquierda de $x = x_0$.

En particular, si existe $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ y f es continua en x_0 entonces el hecho de que el fenómeno de Gibbs no se produzca en el punto x_0 es equivalente a que la sucesión converja uniformemente en x_0 .

Para más información, véase [4] o [8].

3.2. Convergencia en media de las series de Fourier

Definición 3.16. Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ converge en el sentido de Cesàro a L si se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = L.$$

En tal caso, lo denotaremos por $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L(C, 1)$.

Definición 3.17. Dada una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ consideremos las sucesiones $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dadas por $a_n = \sum_{i=1}^n x_i$ y $b_n = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}$. Si $s = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ entonces diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es sumable Cesàro a s y lo escribiremos como $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s(C, 1)$.

Sea $S_n(f, \cdot)$ la suma parcial de la serie de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{T})$. Definimos de esa forma para cada $n \in \mathbb{N}$ la siguiente función:

$$\sigma_n(f, \theta) = \frac{S_0(f, \theta) + \dots + S_n(f, \theta)}{n+1}.$$

Utilizando la expresión dada en la Observación 2.12 tenemos así que dicha función se puede expresar como sigue:

$$\sigma_n(f, \theta) = \frac{D_0 * f(\theta) + \dots + D_n * f(\theta)}{n+1} = \frac{(\sum_{j=0}^n D_j) * f(\theta)}{n+1}.$$

Definición 3.18. El núcleo de Fejér de orden n es el polinomio trigonométrico que viene dado por la expresión $K_n(s) = \frac{\sum_{j=0}^n D_j(s)}{n+1}$, donde D_j representa el núcleo de Dirichlet de orden j .

Proposición 3.19. El núcleo de Fejér satisface las siguientes propiedades:

1. Para cada $s \in \mathbb{R}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $K_n(s) = \frac{1}{2(n+1)\pi} \left(\frac{\sin(ns + \frac{s}{2})}{\sin \frac{s}{2}} \right)^2$. Por lo tanto, el núcleo de Fejér K_n es positivo para todo n natural.
2. Para todo $s \in \mathbb{R}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $K_n(s) \leq \frac{n+1}{2\pi}$.
3. $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(s) ds = 1$.
4. Para cada $\delta > 0$ se satisface que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} K_n(s) ds = 0$.

Demostración. La demostración de la tercera propiedad es sencilla utilizando lo que vimos en la Proposición 2.13. Usando que $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(s) ds = 1$, la definición del núcleo de Fejér y la linealidad de la integral se deduce el resultado.

Para probar 2) vamos a usar de nuevo dicha proposición. Como $D_n(s) \leq \frac{1}{\pi}(n + \frac{1}{2})$, si usamos la definición de K_n tenemos así que

$$K_n(s) \leq \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n |D_j(s)| \leq \frac{1}{(n+1)\pi} \sum_{j=0}^n \left(j + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{(n+1)\pi} \left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n+1}{2} \right) = \frac{n+1}{2\pi}.$$

A continuación, comprobemos que se satisface la primera propiedad. Consideremos la cantidad $\text{Im}(\sum_{j=0}^n e^{i(j+\frac{1}{2})s})$. Se trata de la parte imaginaria de una serie geométrica finita, luego podemos calcular su valor:

$$\begin{aligned} \text{Im} \left(\sum_{j=0}^n e^{i(j+\frac{1}{2})s} \right) &= \text{Im} \left(e^{\frac{is}{2}} \frac{1 - e^{is(n+1)}}{1 - e^{is}} \right) = \text{Im} \left(e^{\frac{is(n+1)}{2}} \frac{e^{-\frac{is(n+1)}{2}} - e^{\frac{is(n+1)}{2}}}{e^{-\frac{is}{2}} - e^{\frac{is}{2}}} \right) \\ &= \frac{\sin(ns + \frac{s}{2})}{\sin \frac{s}{2}} \text{Im}(e^{i(n+1)\frac{s}{2}}) = \frac{(\sin(ns + \frac{s}{2}))^2}{\sin \frac{s}{2}}. \end{aligned}$$

De esa forma, obtenemos la siguiente expresión para el núcleo de Fejér:

$$\begin{aligned} K_n(s) &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n D_n(s) = \frac{1}{2(n+1)\pi} \sum_{j=0}^n \frac{\sin(js + \frac{s}{2})}{\sin \frac{s}{2}} \\ &= \frac{1}{2\pi(n+1)\sin \frac{s}{2}} \text{Im} \left(\sum_{j=0}^n e^{i(j+\frac{1}{2})s} \right) = \frac{1}{2(n+1)\pi} \left(\frac{\sin(ns + \frac{s}{2})}{\sin \frac{s}{2}} \right)^2. \end{aligned}$$

Por último, probemos la última propiedad. Gracias a 1) tenemos que

$$\int_{\delta \leq |s| \leq \pi} K_n(s) ds = \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} \left(\frac{\sin(ns + \frac{s}{2})}{\sin \frac{s}{2}} \right)^2 ds \leq \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{s}{2}} ds.$$

Como la función $\sin \frac{s}{2}$ es continua y no se anula en el intervalo $[\delta, \pi]$ para cada $\delta > 0$, la integral que aparece a la derecha de la desigualdad es finita. Y así ocurre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{s}{2}} ds = 0,$$

por lo que el resultado es cierto y así termina la prueba. $\square$

Al igual que con el núcleo de Dirichlet, vamos a comprobar cómo evoluciona la gráfica del núcleo de Dirichlet a medida que aumenta el valor de n . Para ello, véanse las siguientes imágenes:

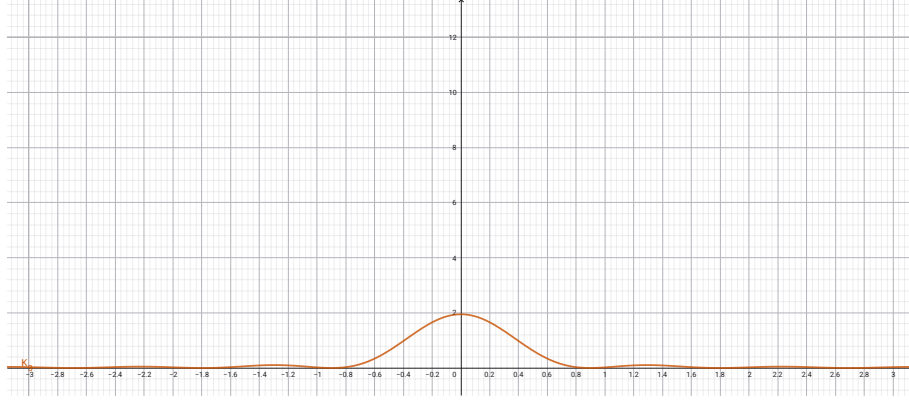


Figura 3.5: K_3

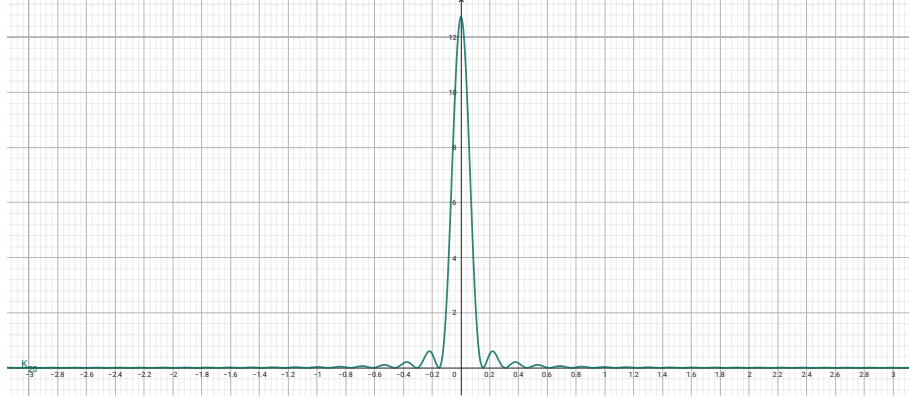


Figura 3.6: K_{20}

Teorema 3.20 (Teorema de Fejér). Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ y sea $x \in \mathbb{T}$. Si existen los límites laterales $f(x^+)$ y $f(x^-)$ entonces se cumple que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} = \left(\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right) (C, 1).$$

Si f cumple adicionalmente ser continua en un intervalo $I \subset \mathbb{T}$, entonces dicha convergencia es uniforme en I .

Demostración. Inicialmente, definamos $f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$. Consideremos la tercera propiedad de K_n vista en la Proposición 3.19 y la expresión siguiente (obtenida a partir del cambio de variable $s = -t$, homogeneizando las variables y por la paridad del núcleo de Fejér al tratarse de un polinomio trigonométrico)

$$\begin{aligned} \sigma_n(f, x) &= (f * K_n)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t) dt = \int_{-\pi}^0 f(x-t) K_n(t) dt + \int_0^{\pi} f(x-t) K_n(t) dt \\ &= \int_0^{\pi} f(x+t) K_n(t) dt + \int_0^{\pi} f(x-t) K_n(t) dt = \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) K_n(t) dt. \end{aligned}$$

De esa manera, se obtiene que

$$\sigma_n(f, x) - f(x) = 2 \int_0^{\pi} \left(\frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} - f(x) \right) K_n(t) dt,$$

$$|\sigma_n(f, x) - f(x)| \leq 2 \int_0^\pi \left| \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} - f(x) \right| K_n(t) dt.$$

Además, como existen los límites laterales $f(x^+)$ y $f(x^-)$, dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $0 \leq t < \delta$ se cumple que $\left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - f(x) \right| < \epsilon$. Consideremos la siguiente descomposición de la integral de la derecha:

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f, x) - f(x)| &\leq 2 \int_0^\delta \left| \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} - f(x) \right| K_n(t) dt \\ &\quad + 2 \int_\delta^\pi \left| \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} - f(x) \right| K_n(t) dt = A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Para estimar A_1 basta con emplear lo anterior que hemos comentado y en consecuencia, gracias a las propiedades de K_n dadas en la Proposición 3.19, ocurre que

$$A_1 \leq 2\epsilon \int_0^\delta K_n(t) dt \leq 2\epsilon \int_0^\pi K_n(t) dt = \epsilon \int_{-\pi}^\pi K_n(t) dt = \epsilon.$$

Ahora intentemos aproximar A_2 . Para ello, introducimos el valor $M_n(\delta) = \max_{\delta < t < \pi} K_n(t)$. Dado $s \in (\delta, \pi)$, si utilizamos la expresión de K_n dada en la Proposición 3.19 y la desigualdad $\frac{t}{\pi} \leq \sin \frac{t}{2}$ para $0 < t < \pi$, obtenemos que

$$K_n(s) = \frac{1}{2(n+1)\pi} \left(\frac{\sin(ns + \frac{s}{2})}{\sin \frac{s}{2}} \right)^2 \leq \frac{\pi}{2(n+1)s^2} < \frac{\pi}{2(n+1)\delta^2}.$$

De esa forma, se verifica que $M_n(\delta) \leq \frac{\pi}{2(n+1)\delta^2}$. Luego $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(\delta) = 0$ para cada $\delta > 0$ y, usando que

$$A_2 \leq \frac{M_n(\delta)}{\pi} \int_0^\pi (|f(x+t)| + |f(x-t)| + 2|f(x)|) dt$$

se puede comprobar el resultado deseado.

Para la segunda parte del teorema, si consideramos f una función continua en un intervalo $I \subset \mathbb{T}$, la demostración sería similar a la de la primera parte. La única diferencia está en la desigualdad que hemos visto para A_2 , que se cumple uniformemente para los puntos de I . Por ello, el resultado es cierto y así concluye la prueba. $\square$

Lema 3.21. Dada $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$, se verifica que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi |f(t+h) - f(t)|^p dt = 0.$$

Demostración. Dado $\epsilon > 0$ arbitrario sabemos que, gracias a la Proposición 1.26, existe una función $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ tal que $|f(t) - g(t)| < \frac{\epsilon}{3}$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Además, esa función g es uniformemente continua en el intervalo $\mathbb{T}$. De esta manera, existe un $\delta > 0$ tal que si $x, y \in \mathbb{T}$ con $|x - y| < \delta$ entonces $|g(x) - g(y)| < \frac{\epsilon}{3}$.

Por lo tanto, si h es tal que $t, t+h \in \mathbb{T}$ y $|h| < \delta$, al juntar estos resultados se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi |f(t+h) - f(t)|^p dt &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi |f(t+h) - g(t+h)|^p dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi |g(t+h) - g(t)|^p dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi |g(t) - f(t)|^p dt < \frac{\epsilon^p}{3^{p-1}}. \end{aligned}$$

Puesto que ϵ era arbitrario, el resultado está probado. $\square$

Teorema 3.22. Si $f \in L^p(\mathbb{T})$ para un cierto $1 \leq p < \infty$ entonces se verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_n(f, \cdot) - f\|_p = 0.$$

Demostración. Consideremos la función

$$g(t) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dicha función es continua en el punto $t = 0$ por el Lema 3.21. Por ello, gracias al Teorema 3.20 se verifica que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(g, 0) = g(0) = 0$.

Utilizando la tercera propiedad del núcleo de Fejér vista en la Proposición 3.19 y el siguiente desarrollo de $\sigma_n(f, x)$ (obtenido por el cambio de variable $s = -t$)

$$\sigma_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t) dt = - \int_{\pi}^{-\pi} f(x+s)K_n(-s) ds = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s)K_n(s) ds,$$

tenemos así que

$$\sigma_n(f, x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x))K_n(t) dt.$$

De esa forma, utilizando la Proposición 1.12 obtenemos que

$$\|\sigma_n(f, \cdot) - f\|_p \leq \int_{-\pi}^{\pi} g(t)K_n(t) dt = \sigma_n(g, 0).$$

Por lo tanto, se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_n(f, \cdot) - f\| = 0$ y eso termina la demostración. $\square$

Proposición 3.23. Sea $f \in L^p(\mathbb{T})$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces se verifica que $\|\sigma_n(f, \cdot)\|_p \leq \|f\|_p$.

Demostración. Consideremos la definición de $\sigma_n(f, x) = (f * K_n)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t) dt$. Si aplicamos la Proposición 1.12 y la tercera propiedad del núcleo de Fejér vista en la Proposición 3.19 entonces tenemos que

$$\|\sigma_n(f, \cdot)\|_p \leq \int_{-\pi}^{\pi} \|f(\cdot - t)\|_p K_n(t) dt \leq \|f\|_p.$$

Así concluye la demostración. $\square$

Lo siguiente que vamos a hacer es enunciar un criterio para comprobar si una serie convergente de la forma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ es la serie de Fourier de una función en $L^p(\mathbb{T})$ con $1 < p < \infty$. Este resultado será de utilidad para la demostración del Teorema 4.15.

Teorema 3.24. Una serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ es la serie de Fourier de una función $f \in L^p(\mathbb{T})$ (para $1 < p < \infty$) si y solo si existe una constante $K > 0$ tal que $\|\sigma_n\|_p \leq K$, donde $\sigma_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n s_j$ con $s_n = \sum_{k=1}^n c_k e^{ikt}$. Además, en este caso, se verifica que $\|f\|_p \leq K$.

Demostración. Para una demostración, véase la sección 3 del capítulo 2 de [7]. $\square$

Proposición 3.25. La transformada de Fourier $L^1(\mathbb{T}) \xrightarrow{\Lambda} \ell^\infty(\mathbb{Z})$ es un operador inyectivo.

Demostración. Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ y se cumple que $c_n(f) = 0$ para cada n natural, entonces tenemos que $\sigma_n(f, \theta) = 0$ para todo $\theta \in \mathbb{T}$. De esa forma, si utilizamos el Teorema 3.22 se obtiene que $\|f\|_1 = 0$ y el resultado está probado. $\square$

Corolario 3.26. Sea $f \in L^1(\mathcal{T})$. Si $(S_n(f, t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en $t \in \mathbb{T}$ a una función g entonces se cumple que $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{int}$ uniformemente en t .

Demostración. Puesto que la sucesión $(S_n(f, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función g , se satisface que $g \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$.

De esa forma, si logramos demostrar que $c_n(f) = c_n(g)$ para todo n entero entonces por la Proposición 3.25 se cumpliría que $f = g$ y ya estaría probado el resultado. Pero eso se deduce de la siguiente operación:

$$\begin{aligned} 2c_n(g)\pi &= \int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-int} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(f, t) \right) e^{-int} dt = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_m(f, t) e^{-int} dt \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=-m}^m c_j(f) e^{ijt} e^{-int} dt = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=-m}^m c_j(f) \int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt-int} dt = 2c_n(f)\pi \end{aligned}$$

(gracias a que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{iks} ds = 0$ si $k \in \mathbb{Z}$ y $k \neq 0$). $\square$

Proposición 3.27. Si los coeficientes de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{T})$ verifican que $c_n(f) = \mathcal{O}(\frac{1}{|n|^m})$ para $m \geq 2$ entonces se cumple que $f \in \mathcal{C}^{m-2}(\mathbb{T})$.

Demostración. Esta demostración la vamos a realizar por inducción.

Veamos en primer lugar que el resultado es cierto para $m = 2$. Como $c_n(f) = \mathcal{O}(\frac{1}{|n|^2})$, se cumple que existe una constante $C > 0$ para la cual se satisface que $c_n(f) \leq \frac{C}{n^2}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De esa manera, ocurre que dado $t \in \mathbb{T}$

$$|S_n(f, t)| \leq \sum_{k=-n}^n |c_k(f)| \leq |c_0(f)| + C \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^n \frac{1}{k^2}.$$

De esa forma, como $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ es convergente, se verifica que la suma parcial de la serie de Fourier de f converge uniformemente en $\mathbb{T}$. Así, por el Corolario 3.26, se cumple que dicha convergencia uniforme es a la función f y, por lo tanto, f es continua.

Vamos a ver qué ocurre para $m = 3$. Razonando como en el caso base anterior, ocurre que

$$|S_n(f, 0)| \leq |c_0(f)| + C \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^n \frac{1}{|k|^3}.$$

Si consideramos la derivada de la suma parcial de la serie de Fourier de f entonces obtenemos que

$$S'_n(f, t) = i \sum_{k=-n}^n k c_k(f) e^{ikt},$$

$$|S'_n(f, t)| \leq |c_0(f)| + C \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^n \frac{1}{|k|^2}.$$

Por lo tanto, razonando como en el caso $m = 2$ y aplicando la Proposición 1.34, tenemos que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$. Supongamos que la hipótesis se cumple para un cierto $m \in \mathbb{N}$ y veamos que también es cierta para $m + 1$. Puesto que $c_n(f) = \mathcal{O}(\frac{1}{|n|^{m+1}})$, entonces se cumple que, particularmente, $c_n(f) = \mathcal{O}(\frac{1}{|n|^m})$. Por lo tanto, ya sabemos que $f \in \mathcal{C}^{m-2}(\mathbb{T})$ y falta comprobar que $f \in \mathcal{C}^{m-1}(\mathbb{T})$.

Eso es lo mismo que comprobar que $D^{m-2}f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$. Para ello, consideremos la tercera propiedad de los coeficientes de Fourier que dimos en la Proposición 2.4. De esa manera, sabemos que el coeficiente n -ésimo de Fourier de $D^{m-2}f$ viene dado por

$$c_n(D^{m-2}f) = i^{m-2} n^{m-2} c_n(f).$$

En consecuencia, obtenemos que

$$S_n(D^{m-2}f, t) = i^{m-2} \sum_{k=-n}^n k^{m-2} c_k(f) e^{ikt},$$

$$|S_n(D^{m-2}f, 0)| \leq |c_0(f)| + C \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^n \frac{1}{|k|^3}.$$

Si repetimos el procedimiento que hemos llevado a cabo en el caso de $m = 3$ para la función $D^{m-2}f$, se muestra así que dicha función es de clase 1 en $\mathbb{T}$, y eso concluye la prueba. $\square$

Gracias al resultado visto en la Proposición 3.27 y a la tercera propiedad de los coeficientes de Fourier que aparece en la Proposición 2.4 podemos enunciar una nueva propiedad relativa al orden de los coeficientes de Fourier.

Corolario 3.28. Dada una función $f \in L^1(\mathbb{T})$, se verifica que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ si y solo si sus coeficientes de Fourier cumplen que $c_n(f) = \mathcal{O}(\frac{1}{|n|^m})$ (con $n \neq 0$) para todo natural $m \in \mathbb{N}$.

3.3. Convergencia de las series de Fourier en L^2

Definición 3.29. Sea un espacio vectorial complejo V . Un subconjunto $W = \{v_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ que cumple que $\langle v_\alpha, v_\alpha \rangle = 1$ y $\langle v_\alpha, v_\beta \rangle = 0$ si $\alpha \neq \beta$ es un sistema ortonormal.

Ejemplo 3.30. En particular, se verifica que $\{e^{in\theta}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal respecto del producto interior definido en la Proposición 1.31, gracias a la siguiente propiedad:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} dt = \begin{cases} 2\pi, & \text{si } n = 0 \\ 0, & \text{si } n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \end{cases}.$$

Recordemos el producto interior que definimos en la Proposición 1.31. De esa forma, para los resultados siguientes que enunciaremos en breve vamos a definir una nueva norma en el espacio $L^2(\mathbb{T})$ (que lo es gracias al Teorema 1.21):

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_2.$$

Teorema 3.31 (Teorema de convergencia en L^2). Sea $S_n(f, \theta) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ik\theta}$ la suma parcial de la serie de Fourier de una función $f \in L^2(\mathbb{T})$. Entonces se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(f, \cdot) - f\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0.$$

Demostración. En primer lugar, consideremos un polinomio trigonométrico $T_n(\theta) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ik\theta}$ arbitrario. De esa manera, usando lo visto en el Ejemplo 3.30, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |T_n(t) - f(t)|^2 dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-n}^n a_k e^{ikt} - f(t) \right) \left(\sum_{k=-n}^n \overline{a_k} e^{-ikt} - \overline{f(t)} \right) dt \\ &= 2\pi \sum_{k=-n}^n |a_k|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n a_k \overline{c_k(f)} - 2\pi \sum_{k=-n}^n \overline{a_k} c_k(f) + \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

En el caso particular de la suma parcial de la serie de Fourier de f ocurre que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f, t) - f(t)|^2 dt = -2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2 + \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

De esa manera, si consideramos un polinomio trigonométrico $P_n(t) = \sum_{k=-n}^n b_k e^{ikt}$ distinto de $S_n(f, t)$, se verifica que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |P_n(t) - f(t)|^2 dt - \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f, t) - f(t)|^2 dt &= 2\pi \sum_{k=-n}^n (b_k - c_k(f))(\overline{b_k} - \overline{c_k(f)}) \\ &= 2\pi \sum_{k=-n}^n |b_k - c_k(f)|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

A continuación, por el Teorema 1.29 dado $\epsilon > 0$ arbitrario se cumple que existe un polinomio trigonométrico $P_n(t)$ tal que $|P_n(t) - f(t)| < \epsilon$ uniformemente en $t \in \mathbb{T}$. De esa forma, para cada $m \geq n$ ocurre que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_m(f, t) - f(t)|^2 dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f, t) - f(t)|^2 dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} |P_n(t) - f(t)|^2 dt < 2\pi\epsilon^2.$$

Como el $\epsilon > 0$ era arbitrario, eso demuestra el resultado. $\square$

Proposición 3.32 (Identidad de Bessel-Parseval). Sea $f \in L^2(\mathbb{T})$. Entonces se verifica que $\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \|\{c_k(f)\}_{k \in \mathbb{Z}}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2$.

Demostración. Consideremos la fórmula

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f, t) - f(t)|^2 dt = -2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2 + \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

que obtuvimos en la demostración del Teorema 3.31. Si aplicamos dicho resultado a la igualdad, al hacer el límite cuando n tiende a ∞ resulta lo siguiente:

$$0 = -2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 + \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

De esa forma, obtenemos la igualdad deseada y así termina la demostración. $\square$

Observación 3.33. Recordemos la expresión que vimos en el capítulo 2 sobre la expresión de los coeficientes de Fourier de $f \in \mathbb{T}$ en función de los coeficientes $a_n(f)$ y $b_n(f)$. Utilizando que $2c_n(f) = a_n(f) - ib_n(f)$ y que $a_n(f) = a_{-n}(f)$, $b_n(f) = -b_{-n}(f)$ podemos expresar la Identidad de Bessel-Parseval de la siguiente manera:

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f)^2 + b_n(f)^2).$$

Una de las aplicaciones más importantes de este resultado es el cálculo de series de números reales. Vamos a ver a continuación algunos ejemplos sencillos.

Ejemplo 3.34. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x \in [-\pi, 0) \\ 1, & \text{si } x \in [0, \pi] \end{cases}.$$

Utilizando dicha función vamos a ser capaces de calcular el valor de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ utilizando la Proposición 3.32.

Mediante un cálculo sencillo obtenemos que $\|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = 1$. Sus coeficientes de Fourier ya se obtuvieron con anterioridad en el Ejemplo 3.14.

Así, por la identidad de Bessel-Parseval obtenemos que

$$\begin{aligned} 1 &= \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| -\frac{(-1)^n - 1}{in\pi} \right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n - 1}{in\pi} \right|^2 \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(-1)^n - 1|^2}{n^2} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{\pi^2}{8},$$

y concluimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ejemplo 3.35. A partir la función $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{T}$ vamos a obtener el valor de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Tenemos que $\|g\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = \frac{\pi^4}{5}$. Por otro lado, los coeficientes de Fourier vienen dados por

$$c_0(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3},$$

$$\begin{aligned} c_n(g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{t^2 e^{-int}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2t \frac{e^{-int}}{-in} dt \right) = \frac{1}{in\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-int} dt = \\ &= \frac{1}{in\pi} \left(\left[\frac{t e^{-int}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-int}}{-in} dt \right) = \frac{2(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} dt = \frac{2(-1)^n}{n^2}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

De nuevo, al utilizar la Proposición 3.32 tenemos que

$$\frac{\pi^4}{5} = \|g\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(g)|^2 = \frac{\pi^4}{9} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2(-1)^n}{n^2} \right|^2 = \frac{\pi^4}{9} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

De esa forma, hemos obtenido que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Teorema 3.36 (Teorema de Bessel-Parseval-Riesz-Fischer). *La restricción de la transformada de Fourier*

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{T}) &\xrightarrow{\wedge} \ell^2(\mathbb{Z}), \\ f &\longrightarrow (c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

es un isomorfismo isométrico.

Demostración. El hecho de que sea una aplicación isométrica es cierto gracias a la Proposición 3.32. Vamos a comprobar que, efectivamente, es un isomorfismo.

La inyectividad ya ha sido comprobada en la Proposición 3.25 en el espacio $L^1(\mathbb{T})$. Usando eso y la Proposición 1.20 ya tendríamos que la aplicación es inyectiva.

Ahora, a continuación, consideremos $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ y comprobemos que existe una función $f \in L^2(\mathbb{T})$ tal que $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} = \hat{f} = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Como $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tenemos así que dado $\epsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq n_0$ se cumple que

$$\sum_{n < |k| \leq m} |a_k|^2 < \frac{\epsilon}{2\pi}.$$

Sea $T_m(\theta) = \sum_{k=-m}^m a_k e^{ik\theta}$ polinomio trigonométrico y, por tanto, $T_m \in L^2(\mathbb{T})$. De esa forma, si $m, n \geq n_0$ entonces, haciendo uso de lo visto en el Ejemplo 3.30, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |T_m(t) - T_n(t)|^2 dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n < |k| \leq m} a_k e^{ikt} \right|^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n < |k| \leq m} a_k e^{ikt} \right) \left(\sum_{n < |k| \leq m} \bar{a}_k e^{-ikt} \right) dt \\ &= 2\pi \sum_{n < |k| \leq m} |a_k|^2 < \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de polinomios trigonométricos es una sucesión de Cauchy en un espacio completo. Luego existe una función $f \in L^2(\mathbb{T})$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \|T_m - f\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0$. De esa forma, usando este resultado, el Teorema 3.31 y la igualdad

$$\int_{-\pi}^{\pi} |T_m(t) - f(t)|^2 dt - \int_{-\pi}^{\pi} |S_m(f, t) - f(t)|^2 dt = 2\pi \sum_{k=-m}^m |a_k - c_k(f)|^2$$

obtenemos de esa manera que $a_k = c_k(f) \forall k \in \mathbb{N}$, concluyendo así la demostración. $\square$

Capítulo 4

Convergencia de Abel y funciones armónicas

En este capítulo vamos a desarrollar otro de los conceptos más importantes de este trabajo: las funciones armónicas. En la primera sección vamos a ver la convergencia en el sentido de Abel, otro tipo de convergencia generalizada como lo fuera la convergencia de Cesàro en el capítulo anterior. Posteriormente, vamos a definir el núcleo de Poisson y vamos a estudiar algunas de sus propiedades. Además, vamos a ver un resultado de gran importancia relacionado con la sumabilidad de Abel: el Teorema de Poisson. Y en la última sección vamos a estudiar la definición de las funciones armónicas y algunos resultados relacionados con otros contenidos del trabajo.

4.1. Convergencia de Abel

A lo largo de este capítulo vamos a trabajar principalmente con el disco unidad en el plano complejo $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Definición 4.1. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ una sucesión de números complejos. Una serie sumable Abel a L es una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ de tal manera que, al considerar la función $f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ definida en $(0, 1)$, se verifica que $\lim_{r \rightarrow 1^-} f(r) = L$. En tal caso, lo escribiremos como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L(A)$.

Teorema 4.2. Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L(C, 1)$. Entonces se satisface que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L(A)$.

Demostración. Vamos a considerar las sucesiones $(s_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ y $(t_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ donde el término general viene dado por $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ y $t_n = \frac{\sum_{k=0}^n a_k}{n+1}$, respectivamente. Gracias a la hipótesis del enunciado, tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = L$.

En primer lugar, se comprueba rápidamente que para $0 < r < 1$

$$(1-r) \sum_{j=0}^{n-1} s_j r^j + s_n r^n = (1-r) \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^j a_k \right) r^j + \sum_{k=0}^n a_k r^n = \sum_{j=0}^n a_j r^j.$$

En consecuencia, comprobar la existencia del límite cuando n tiende a infinito en cualquiera de los dos miembros de la igualdad equivale a la existencia en el otro lado y, además, los límites serán iguales.

Por las hipótesis y al ser $0 < r < 1$, se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n r^n = 0$. Eso es cierto puesto que $s_n r^n = t_n n r^n$, donde $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = L$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} n r^n = 0$ (si consideras la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n r^n$, esta es convergente por el criterio del cociente y así el término general converge a 0).

De esa manera, se satisface que

$$(1-r) \sum_{j=0}^{\infty} s_j r^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j r^j$$

en caso de que alguna de las dos series sea convergente.

Mediante un proceso similar, sumando por partes y usando que $\lim_{n \rightarrow \infty} nt_n r^{n-1} = 0$, se puede ver que se cumple la igualdad

$$f(r) = (1-r)^2 \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)t_j r^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j r^j$$

si cualquiera de las series fuera convergente.

Es muy fácil comprobar que el término de la izquierda de la igualdad es convergente usando el hecho de que la sucesión $(t_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ es acotada y la convergencia de las series geométricas de razón menor que 1 y de sus derivadas.

Vamos a comprobar ahora que $\lim_{r \rightarrow 1^-} f(r) = L$. Queremos ver que dado $\epsilon > 0$ arbitrario existe un $\delta > 0$ tal que si $r \in (0, 1)$ y $|1-r| < \delta$ entonces $|f(r) - L| < \epsilon$. Para ello, vamos a utilizar el resultado que ya conocemos para series de potencias con $|r| < 1$:

$$\sum_{j=0}^{\infty} r^j = \frac{r}{1-r} \longrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)r^j = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

Usando esto y la definición de f que hemos dado, obtenemos que

$$f(r) - L = (1-r)^2 \left(\sum_{j=0}^m + \sum_{j=m+1}^{\infty} \right) (j+1)(t_j - L)r^j = I + J.$$

Estimaremos las cantidades I , J y así la demostración estará completa.

Tenemos que $\sum_{j=m+1}^{\infty} (j+1)r^j \leq \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)r^j = \frac{1}{(1-r)^2}$. De esa forma, si usamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = L$, entonces existe un natural m tal que para todo $j \geq m+1$ se verifica que $|t_j - L| < \frac{\epsilon}{2}$ y entonces podemos probar

$$|J| \leq \frac{(1-r)^2 \epsilon}{2} \sum_{j=m+1}^{\infty} (j+1)r^j \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Ahora, utilizando que $r < 1$ y la convergencia de la sucesión $(t_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ (luego es una sucesión acotada) existe una constante $c > 0$ tal que

$$|I| \leq c|1-r|^2 \sum_{j=0}^m (j+1) = c \frac{(m+1)(m+2)}{2} |1-r|^2 \leq c \frac{(m+1)(m+2)}{2} \delta^2.$$

Por lo tanto, si se escoge δ lo suficientemente pequeño para que $c \frac{(m+1)(m+2)}{2} \delta^2 < \frac{\epsilon}{2}$ entonces la prueba ya está completa. $\square$

4.2. Núcleo de Poisson

Consideremos la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{|n|} c_n(f) e^{in\theta}$, $0 \leq \rho < 1$. Está bien definida, puesto que se satisface que $|\rho^{|n|} c_n(f) e^{in\theta}| \leq \rho^{|n|} \max_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t)|$ y $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{|n|}$ es una serie geométrica de razón menor que 1. Por lo que la serie es absolutamente convergente.

De esa forma, operando con dicha serie obtenemos la siguiente expresión:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{|n|} c_n(f) e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{|n|} e^{in\theta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{|n|} e^{in(\theta-t)} \right) f(t) dt.$$

Definición 4.3. Dado $\rho \in [0, 1)$, el núcleo de Poisson es la función dada por

$$P_{\rho}(s) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{|n|} e^{ins}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Observación 4.4. El núcleo de Poisson está bien definido. Para probarlo basta con aplicar el mismo razonamiento que hemos usado para la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{|n|} c_n(f) e^{in\theta}$.

Además, la expresión que hemos hallado antes nos permite determinar que

$$(P_\rho * f)(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{|n|} c_n(f) e^{in\theta}.$$

En lo que resta del capítulo vamos a utilizar en múltiples ocasiones el operador laplaciano, definido en coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}^2$ por

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

y en coordenadas polares por

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Proposición 4.5. Dado $\rho \in [0, 1)$, $s \in [-\pi, \pi]$, el núcleo de Poisson cumple las siguientes propiedades:

1. $P_\rho(s) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-\rho^2}{1-2\rho \cos s + \rho^2}$.
2. El núcleo de Poisson es una función par, 2π -periódica y estrictamente positiva.
3. El núcleo de Poisson es creciente en $[-\pi, 0]$ y decreciente en $(0, \pi]$ respecto de la variable s .
4. Se cumple que $\lim_{\rho \rightarrow 1} P_\rho(s) = 0$ si $s \in [-\pi, \pi]$ y $s \neq 0$.
5. $\int_{-\pi}^{\pi} P_\rho(s) ds = 1$.
6. Dada una función $f \in L^1(\mathbb{T})$, se verifica que $\Delta(P_\rho * f) = 0$ (considerando que estamos trabajando en coordenadas polares).
7. Sea $f \in L^p(\mathbb{T})$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces

$$\|P_\rho * f\|_p \leq \|f\|_p \text{ y } \lim_{\rho \rightarrow 1^-} \|(P_\rho * f) - f\|_p = 0.$$

Demostración. Para probar la primera propiedad, consideremos que el núcleo de Poisson tiene la forma

$$P_\rho(s) = \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n e^{ins} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n e^{-ins} \right).$$

Ambas series son geométricas de razón < 1 , por lo que podemos calcular su valor y tenemos de esa forma que

$$\begin{aligned} P_\rho(s) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{1 - \rho e^{is}} + \frac{\rho e^{-is}}{1 - \rho e^{-is}} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{(1 - \rho e^{-is}) + (1 - \rho e^{is}) \rho e^{-is}}{(1 - \rho e^{is})(1 - \rho e^{-is})} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 - \rho e^{is} - \rho e^{-is} + \rho^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos s + \rho^2}. \end{aligned}$$

Eso prueba (1).

Las dos primeras afirmaciones que hemos enunciado en la segunda propiedad se deducen de la definición del núcleo de Poisson. Para la tercera afirmación debemos considerar que $\rho \in [0, 1)$ y que $1 - 2\rho \cos s + \rho^2 > 1 - 2\rho + \rho^2 = (1 - \rho)^2 > 0$.

Si utilizamos la fórmula obtenida en la primera propiedad para el núcleo de Poisson, tenemos que $P'_\rho(s) = -\frac{1}{2\pi} \frac{(1-\rho^2)2\rho \sin s}{(1-2\rho \cos s + \rho^2)^2}$. Usando esto, los valores que puede tomar la variable ρ y las propiedades de la función seno se puede demostrar (3).

Por otra parte, si tenemos un valor de s en el intervalo $[-\pi, \pi]$ no nulo entonces se verifica que $\lim_{\rho \rightarrow 1} 1 - 2\rho \cos s + \rho^2 > 0$, mientras que $\lim_{\rho \rightarrow 1} 1 - \rho^2 = 0$. Por lo tanto, se satisface el resultado enunciado en (4) para dichos valores de la variable s .

Probemos a continuación la penúltima propiedad. Gracias a la Observación 4.4 y al hecho de que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ins} ds = 0$ para todo entero n no nulo se cumple lo siguiente:

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_{\rho}(s) ds = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{|n|} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = 1.$$

A continuación, para demostrar la penúltima propiedad, basta con aplicar las derivadas parciales pertinentes a la expresión que hemos visto en la Observación 4.4, además de comprobar la convergencia de esas derivadas parciales del mismo modo que al comienzo de la sección y usando en última instancia el criterio del cociente.

Y, para finalizar, la última propiedad tiene una demostración análoga a la vista para el núcleo de Fejér en el Teorema 3.22 y en la Proposición 3.23. De esta forma concluye la prueba. $\square$

Teorema 4.6 (Teorema de Poisson). *Sea $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ y sean $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ los coeficientes de Fourier de la función f . Entonces para todo $\rho \in [0, 1)$, $\theta \in \mathbb{T}$ se cumple que*

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{|n|} c_n(f) e^{in\theta} = \lim_{\rho \rightarrow 1^-} (P_{\rho} * f)(\theta) = f(\theta)$$

uniformemente en $\theta \in \mathbb{T}$, o lo que es lo mismo, la serie de Fourier de f es sumable Abel a la propia función f .

Demostración. Tanto el núcleo de Poisson $P_{\rho}(s)$ como f son funciones 2π -periódicas y así, aplicando la Proposición 4.5 obtenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} P_{\rho}(\theta - t) f(t) dt - f(\theta) \right| &= \left| \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} P_{\rho}(\theta - t) f(t) dt - \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} P_{\rho}(\theta - t) f(\theta) dt \right| \\ &\leq \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} P_{\rho}(\theta - t) |f(t) - f(\theta)| dt = \int_{|\theta-t| \leq \delta} P_{\rho}(\theta - t) |f(t) - f(\theta)| dt \\ &\quad + \int_{\delta < |\theta-t| \leq \pi} P_{\rho}(\theta - t) |f(t) - f(\theta)| dt. \end{aligned}$$

Como la función f es continua en el intervalo $[-\pi, \pi]$, se cumple que f es uniformemente continua en $[-\pi, \pi]$. De esa manera, para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|\theta - t| < \delta$ entonces $|f(\theta) - f(t)| < \frac{\epsilon}{2}$. Aplicando estas propiedades que hemos visto y las que enunciamos para el núcleo de Poisson en la Proposición 4.5 (cómo es su integral y dónde es decreciente), se obtiene que

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} P_{\rho}(\theta - t) f(t) dt - f(\theta) \right| &\leq \int_{|\theta-t| \leq \delta} P_{\rho}(\theta - t) |f(t) - f(\theta)| dt \\ &\quad + \int_{\delta < |\theta-t| \leq \pi} P_{\rho}(\theta - t) |f(t) - f(\theta)| dt \leq \frac{\epsilon}{2} + P_{\rho}(\delta) \|f\|_{\infty} 4\pi. \end{aligned}$$

Y así, usando que $\delta > 0$, se satisface que $\lim_{\rho \rightarrow 1} P_{\rho}(\delta) = 0$ y se puede demostrar fácilmente que $|\int_{-\pi}^{\pi} P_{\rho}(\theta - t) f(t) dt - f(\theta)| < \epsilon$. $\square$

Este último resultado que hemos enunciado y demostrado ha sido para funciones continuas en el intervalo $\mathbb{T}$. A continuación, vamos a enunciar un resultado más general para funciones en $L^1(\mathbb{T})$.

Teorema 4.7. *Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ y sean $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ los coeficientes de Fourier de la función f . Entonces para casi todo $t \in \mathbb{T}$ se cumple que*

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} (P_r * f)(t) = f(t).$$

Demostración. Para la demostración, véanse los capítulos 5 y 7 de [7]. $\square$

Una aplicación que tienen estos resultados es encontrar una función que resuelve uno de los problemas más importantes en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales: el problema de Dirichlet asociado a la ecuación de Laplace en el disco.

Dicho problema viene dado por

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{si } (x, y) \in D_R \\ u = g, & \text{si } (x, y) \in \partial D_R \end{cases}, \quad (\text{PD})$$

donde $D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$ es el disco de centro 0 y radio $R > 0$ y donde $g \in \mathcal{C}(\partial D_R, \mathbb{R})$. Esta expresión del problema está escrita en coordenadas cartesianas, mientras que si lo consideramos en coordenadas polares ($x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ con $\rho \in [0, R]$ y $\theta \in \mathbb{R}$) entonces tiene la forma

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0, & \text{si } (\rho, \theta) \in (0, R) \times \mathbb{R} \\ v(\rho, \theta + 2\pi) = v(\rho, \theta), & \text{si } (\rho, \theta) \in (0, R) \times \mathbb{R} \\ v(R, \theta) = g(R \cos \theta, R \sin \theta) = f(\theta), & \text{si } \theta \in \mathbb{R} \end{cases}. \quad (\text{PD})$$

Con ayuda de la última propiedad en la Proposición 4.5 y del Teorema 4.6 hemos comprobado que la función $(P_\rho * f)$ resuelve el problema en el disco unidad. De forma análoga, se probaría que la función $(P_{\frac{\rho}{R}} * f)$ lo resuelve en el disco D_R para $R > 0$ arbitrario.

4.3. Funciones armónicas

Definición 4.8. Una función armónica es una función $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ definida en un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, con imagen en $\mathbb{R}$ y que cumple que $\Delta u = 0$ en Ω .

Observación 4.9. En la definición anterior, el término armónico se puede sustituir por subarmónico o superarmónico si se cambia $\Delta u = 0$ por $\Delta u \geq 0$ o por $\Delta u \leq 0$, respectivamente.

Además, es claro por la definición que u es subarmónica si y solo si $-u$ es superarmónica y que u es armónica si y solo si es subarmónica y superarmónica.

Observación 4.10. La definición de una función armónica en un abierto de $\mathbb{C}$ es análoga a la Definición 4.8 para $n = 2$. Una función $u : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica si tiene segundas derivadas parciales continuas en Ω y $\Delta u(z) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$ con $z = x + iy \in \Omega$.

Proposición 4.11. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y sean $u = \text{Re} f$, $v = \text{Im} f$. Entonces u y v son armónicas en Ω .

Demostración. Ya hemos podido comprobar en el Lema 1.36 que $f'(z)$ viene dada por la expresión $f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = -iu_y(x, y) + v_y(x, y)$ para $z = x + iy \in \Omega$. Como f es holomorfa tenemos que u_x , u_y , v_x y v_y son continuas y, en consecuencia, las funciones u y v tienen primera derivada continua.

Si procedemos ahora con la segunda derivada de forma análoga, se prueba así que las derivadas parciales segundas de u y v son continuas. De esa manera, se cumple que $u_{xy} = u_{yx}$ y que $v_{xy} = v_{yx}$. Por ello, si usamos ahora las ecuaciones de Cauchy-Riemann, obtenemos que

$$u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy},$$

$$v_{yy} = u_{xy} = u_{yx} = -v_{xx}.$$

Por lo tanto, ambas funciones son armónicas y así concluye la prueba. $\square$

Teorema 4.12. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y simplemente conexo y sea $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica. Entonces existe una función f holomorfa en Ω tal que $\text{Re} f = u$.

Demostración. Si existe dicha función $f = u + iv$ holomorfa, por el Lema 1.36 las funciones u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Además, se cumple que

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = u_x(x, y) - iu_y(x, y).$$

En primer lugar, definimos $g(z) = u_x(x, y) - iu_y(x, y)$ para $z = x + iy$. Vamos a buscar una primitiva de g . Al ser u una función armónica, la parte real e imaginaria de g tienen derivadas parciales continuas y, al cumplir u la ecuación de Laplace, tenemos que

$$u_{xx} = -u_{yy}, \quad u_{x,y} = u_{yx}.$$

En consecuencia, las componentes de g verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Por ello, por el Lema 1.40 se satisface que $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y gracias a la Proposición 1.39 sabemos que existe una función $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que

$$(\operatorname{Re} F)_x - i(\operatorname{Re} F)_y = F' = g = u_x - iu_y.$$

De esa forma, obtenemos que

$$(u - \operatorname{Re} F)_x = 0 = (u - \operatorname{Re} F)_y$$

en Ω , conjunto abierto y conexo. Por lo tanto, existe una constante $k \in \mathbb{R}$ tal que $u - \operatorname{Re} F = k$. Así, si definimos $f = F + k$, se tiene que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y con $\operatorname{Re} f = u$, por lo que la prueba está terminada. $\square$

Observación 4.13. En el Teorema 4.12 hemos probado que, dada una función armónica u en Ω , existe una función holomorfa con $\operatorname{Re} f = u$. Consideremos ahora la parte imaginaria de f .

Dicha función tiene nombre propio y se denomina conjugada armónica de u . Con el teorema hemos sido capaces de demostrar que para cada función armónica en un subconjunto abierto y simplemente conexo de $\mathbb{C}$ existe su conjugada armónica.

Proposición 4.14. Supongamos que $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{D})$ es una función armónica. Entonces existe una sucesión de números complejos $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que

$$u(re^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{int}, \quad re^{it} \in \mathbb{D}.$$

Demostración. Gracias al Teorema 4.12 se verifica que existe una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ que satisface que $\operatorname{Re} f = u$. Como dicha función es holomorfa, entonces es analítica y la podemos expresar como

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n, \quad |z| < 1.$$

De esa forma, por hipótesis tenemos que

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{d}_n \bar{z}^n \right), \quad |z| < 1.$$

Por lo tanto, si consideramos

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} d_{-n}, & \text{si } n < 0 \\ \frac{1}{2} (d_0 + \bar{d}_0), & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{2} d_n, & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

se sigue que $u(re^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{int}$ y así termina la demostración. $\square$

Teorema 4.15. Sea u una función armónica en $\mathbb{D}$ y $1 < p < \infty$ de tal modo que

$$\sup_{r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{it})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = A < \infty.$$

Entonces existe una función $f \in L^p(\mathbb{T})$, con $\|f\|_p \leq A$ y que cumple que $u(re^{it}) = f * P_r(t)$ (con $0 \leq r < 1$).

Demostración. Debido a la Proposición 4.14 se cumple que existe una sucesión de números complejos $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que $u(re^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{int}$. Vamos a comprobar que $a_n = c_n(f)$ para una función $f \in L^p(\mathbb{T})$ y para todo n entero. Para ello, definimos las medias de Cesàro

$$\begin{aligned} \sigma_n(t) &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \sum_{|k| \leq j} a_k e^{ikt} = \frac{1}{n+1} (a_{-n} e^{-int} + 2a_{-n+1} e^{-i(n-1)t} + \dots \\ &\quad + (n+1)a_0 + \dots + 2a_{n-1} e^{i(n-1)t} + a_n e^{int}) = \sum_{j=-n}^n \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) a_j e^{ijt}. \end{aligned}$$

A continuación, vamos a usar el criterio establecido en el Teorema 3.24. Si demostramos que $\|\sigma_n\|_p \leq A$ entonces, por el resultado, ya habremos visto que los a_n son los coeficientes de Fourier de una función $f \in L^p(\mathbb{T})$ con $\|f\|_p \leq A$ y la prueba estará completa.

Si escribimos

$$\sigma_n(t) = (\sigma_n(t) - (\sigma_n * P_r)(t)) + (\sigma_n * P_r)(t) = I(t) + J(t)$$

basta con que estimemos la norma de cada sumando.

En primer lugar, gracias a lo visto en el Ejemplo 3.30 tenemos que

$$\begin{aligned} (\sigma_n * P_r)(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(t-s) P_r(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j=-n}^n \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) a_j e^{ij(t-s)} \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{iks} \right) ds \\ &= \sum_{j=-n}^n \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) a_j r^{|j|} e^{ijt}. \end{aligned}$$

De esa manera, obtenemos que

$$I(t) = \sum_{j=-n}^n \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) (1 - r^{|j|}) a_j e^{ijt} = (1-r) \sum_{j=-n}^n \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \frac{1 - r^{|j|}}{1-r} a_j e^{ijt} = (1-r) I_1(t).$$

En consecuencia, al ser I_1 un polinomio trigonométrico, ocurre así que $\|I\|_p \leq (1-r)\|I_1\|_p$ y $\lim_{r \rightarrow 1^-} \|I\|_p = 0$.

Por otra parte, un simple cálculo nos permitiría obtener que $J(t) = (u(re^{i\cdot}) * K_n)(t)$. De esa forma, por la Proposición 1.12 obtenemos que

$$\|J\|_p \leq \|u(re^{i\cdot})\|_p \|K_n\|_1 \leq A.$$

Por lo tanto, gracias a las estimaciones que hemos hecho se verifica que $\|\sigma_n\|_p \leq A$ y así concluye la prueba. $\square$

Proposición 4.16 (Principio del máximo). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, conexo y acotado con $n \geq 2$ y sea $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ una función subarmónica. Entonces $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.

Demostración. Vamos a analizar dos situaciones: cuando $\Delta u(x) > 0$ y cuando $\Delta u(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$.

En el primer caso, como $u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ y $\bar{\Omega}$ es un conjunto compacto, existe un punto $x_0 \in \bar{\Omega}$ tal que $u(x_0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} u(x)$. Supongamos que $x_0 \in \Omega$. De esa manera, al ser x_0 un punto donde se alcanza el máximo, se satisface que $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x_0) \leq 0$ para cada $j \in \{1, \dots, n\}$. Por lo tanto, se obtiene que $\Delta u(x_0) \leq 0$. Pero eso es absurdo, luego $x_0 \in \partial\Omega$ y el resultado es cierto.

A continuación, vamos a comprobarlo para el segundo caso. Dado $\epsilon > 0$, consideremos la función $w(x) = u(x) + \epsilon|x|^2$. De esa forma, $w \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ y verifica que $\Delta w(x) = \Delta u + 2n\epsilon > 0$. Así, la función w cumple que tiene su máximo en la frontera de Ω por el primer caso y tenemos que $\max_{x \in \bar{\Omega}} (u(x) + \epsilon|x|^2) = \max_{x \in \partial\Omega} (u(x) + \epsilon|x|^2)$. Ahora, usando que Ω es acotado, se deduce que $|x|^2$ es acotado en Ω . Por lo tanto, al hacer el límite cuando ϵ tiende a 0, se obtiene que $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ y así concluye la prueba. $\square$

Corolario 4.17 (Principio del mínimo). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, conexo y acotado con $n \geq 2$ y sea $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ una función superarmónica. Entonces $\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$.

Demostración. Gracias a las hipótesis, tenemos que $-u$ es una función subarmónica. De esa manera, por la Proposición 4.16 se cumple que

$$\min_{\Omega} u = -\max_{\Omega}(-u) = -\max_{\partial\Omega}(-u) = \min_{\partial\Omega} u,$$

y así termina la demostración. $\square$

Corolario 4.18 (Principio del máximo y del mínimo). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, conexo y acotado con $n \geq 2$ y sea $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ una función armónica. Entonces se verifica que $\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|$.

Demostración. Utilizando la Proposición 4.16, el Corolario 4.17 y la definición del valor absoluto de una función, obtenemos que

$$\begin{aligned} \max_{\Omega} |u| &= \max_{\Omega} \left\{ \max\{u, -u\} \right\} = \max_{\Omega} \left\{ \max_{\Omega} u, \max_{\Omega}(-u) \right\} \\ &= \max_{\Omega} \left\{ \max_{\partial\Omega} u, \max_{\partial\Omega}(-u) \right\} = \max_{\partial\Omega} \left\{ \max\{u, -u\} \right\} = \max_{\partial\Omega} |u|. \end{aligned}$$

De esa forma, el resultado ya ha sido comprobado. $\square$

Gracias a estos resultados somos capaces de demostrar la unicidad de soluciones del problema (PD). De esa manera, la solución que hemos encontrado en la sección anterior será la única solución del problema.

Corolario 4.19. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, conexo y acotado (con $n \geq 2$) y sean $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ y $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Entonces el problema

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{en } \Omega \\ u = g, & \text{en } \partial\Omega \end{cases}, \quad (\text{P})$$

tiene una única solución $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$.

Demostración. Supongamos que u_1 y u_2 son dos soluciones de (P) y sea $w = u_1 - u_2$. Entonces, dicha función w es solución del problema

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & \text{en } \Omega \\ w = 0, & \text{en } \partial\Omega \end{cases}.$$

De esa manera, $w \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ y w es armónica en Ω . Por lo tanto, por el Corolario 4.18 se cumple que $\max_{\bar{\Omega}} |w| = \max_{\partial\Omega} |w| = 0$ y la función w es constantemente 0. Así ocurre que $u_1 \equiv u_2$ y el resultado ya está demostrado. $\square$

Bibliografía

- [1] R. G. BARTLE Y D. R. SHERBERT, *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons, 1982.
- [2] D. COHN, *Measure Theory*. Birkhäuser, 1993.
- [3] J. B. CONWAY, *Functions of one complex variable*. Springer-Verlag, 1978.
- [4] L. GRAFAKOS, *Classical Fourier Analysis*. Springer Nature Link, 2014.
- [5] C. MARTÍNEZ Y M. SANZ, *Análisis de una variable real*, Editorial Reverté, S.A., 1992.
- [6] M. STEIN Y G. WEISS, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton University Press, 1971.
- [7] A. TORCHINSKY, *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis*. Academic Press, 1986.
- [8] A. ZYGMUND, *Trigonometric series*. Cambridge University Press, 1969.