Universidad Complutense de Madrid

Grado en Matemáticas

Multiplicadores de Fourier

Trabajo de Fin de Grado

Hugo Barrio Cortés

Director:
F. Javier Soria de Diego

16 de julio de 2024

Resumen:

En este Trabajo de Fin de Grado se desarrollan los conocimientos básicos de áreas de las matemáticas como la teoría de la medida, los espacios vectoriales topológicos y la transformada de Fourier para un correcto entendimiento de la teoría de distribuciones. A partir de ello se introducen los capítulos centrales tales como el teorema del núcleo de Hörmander y los conceptos de multiplicadores de Fourier para terminar enunciando un resultado bastante reciente como lo es el Teorema del multiplicador de la bola.

Abstract:

In this Final Degree Project, basic knowledge of areas of mathematics such as measure theory, topological vector spaces, and the Fourier transform is developed for a proper understanding of distribution theory. From this foundation, the central chapters are introduced, including Hörmander's kernel theorem and the concepts of Fourier multipliers, concluding with a relatively recent result known as the Ball Multiplier Theorem.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

A lo largo de este trabajo iremos adquiriendo los conocimientos necesarios para poder llegar a comprender qué son los multiplicadores de Fourier, así como algunos resultados importantes acerca de ellos. Comenzaremos con un detallado resumen de los conocimientos previos que debemos tener para poder desarrollar los capítulos venideros, dividido en tres principales apartados. En primer lugar, haremos un repaso de algunos resultados de Teoría de la Medida, tales como el Teorema de Convergencia Monótona, el Lema de Fatou o el Teorema de Convergencia Dominada, así como las desigualdades de Young y de Hölder. Continuaremos con una sección dedicada a la topología en espacios vectoriales, algunos enunciados y definiciones como la de V_N y de p_N que serán importantes de cara a la construcción de la topología sobre el espacio que posteriormente denotaremos por $\mathscr{D}_K$. En la tercera sección de este capítulo nos adentraremos en la Transformada de Fourier. La definiremos tanto para el espacio L^1, como para L^2, así como para los L^p con $p \in (1, 2)$. Veremos también el Teorema de Inversión de Fourier y algunas propiedades y resultados de la transformada tales como la igualdad de Plancherel.

En el tercer capítulo, haremos una introducción a la Teoría de Distribuciones. Veremos las definiciones de multi-índice y de los espacios $\mathscr{D}$ y $\mathscr{S}$, a partir de las cuales comenzaremos a desarrollar el concepto de distribución. Comentaremos cómo operar con ellas, realizar derivadas, convoluciones con funciones o cómo aplicarles la transformada de Fourier. Veremos también propiedades de la transformada que nos serán de gran utilidad en los próximos capítulos para poder desarrollar resultados de gran importancia.

A continuación, nos sumergiremos principalmente en el Teorema del Núcleo de Hörmander, teorema entorno al cual desarrollaremos el capítulo. Para ello, definiremos conceptos tales como qué es un operador, qué significa que esté acotado y propiedades de aquellos que cumplen estas características. Una vez visto esto, finalmente podremos adentrarnos en qué afirma este teorema, el cual nos garantiza que bajo condiciones determinadas, podemos expresar ciertos operadores como convolución de una función con una distribución.

Por último, hablaremos acerca de qué son los multiplicadores, definiremos los espacios

L_p^q, los conjuntos M_p^q y estableceremos ciertas relaciones entre ellos apoyándonos en resultados demostrados en capítulos previos. Finalmente, enunciaremos uno de los problemas más interesantes en este ámbito de estudio en los últimos años, el Teorema del multiplicador de la bola. Después de algunas aproximaciones al problema y de ciertas acotaciones que se demostraron que debían cumplirse, fue finalmente Charles Fefferman quién logró demostrarlo en 1973. Veremos también como ejemplo, qué es la Transformada de Hilbert, y cual es la transformada de Fourier de este nuevo concepto.

En cuanto a la bibliografía empleada, nos hemos basado en las referencias [1] y [3] para el capítulo introductorio en cuanto a las nociones previas de análisis y [8] para la parte de la transformada de Fourier, mientras que los últimos capítulos se han basado en un estudio algo más detenido de [5].

Capítulo 2

Resultados previos

Vamos a introducir, para comenzar, algunos resultados que necesitaremos más adelante. Se separarán según el ámbito matemático al que pertenezcan, de forma que iremos viendo de ciertas ramas de las matemáticas algunos conocimientos interesantes que utilizaremos en los capítulos sucesivos para profundizar en este trabajo.

2.1. Teoría de la Medida

En esta sección repasaremos tres de los teoremas más importantes de la teoría de la medida y algunas de sus demostraciones.

Teorema 2.1 (Teorema de la Convergencia Monótona)**.** *Sea f_n una sucesión de funciones medibles positivas tales que $f_n \leqslant f_{n+1}$ a.e. x. Sea f medible positiva tal que $\lim_n f_n = f$ a.e. x. Entonces*

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu. \tag{2.1}$$

Demostración. Véase la demostración en [1, Capítulo 3, Teorema 1.1] □

Lema 2.2 (Lema de Fatou)**.** *Sea f_n una sucesión de funciones medibles positivas, entonces se cumple*

$$\int_X \liminf_n f_n \, d\mu \leqslant \liminf_n \int_X f_n \, d\mu.$$

Demostración. Por la definición de límite inferior

$$\liminf_n f_n = \lim_{k\to\infty} \Big(\inf_{n\geqslant k} f_n \Big),$$

siendo

$$F_k = \inf_{n\geqslant k} \{f_n\},$$

donde las F_k son medibles positivas y $F_k \leqslant F_{k+1}$. Vemos por otra parte que $F_k \leqslant f_k$, pues F_k es el ínfimo de los elementos de la sucesión posteriores o iguales a f_k. Además como

$\lim_n F_n$ es medible, aplicando el Teorema 2.1,

$$\int_X \liminf_n f_n \, d\mu = \int_X \lim_k F_k \, d\mu = \lim_k \int_X F_k \, d\mu \leqslant \liminf_n \int_X f_n \, d\mu.$$

Queda, por tanto, demostrado el lema. □

Veamos ahora un resultado que nos garantiza la convergencia de funciones bajo unas determinadas condiciones menos restrictivas que hasta ahora.

Lema 2.3. *Sea $\{f_j\}$ una sucesión de funciones tal que $f_j \to f$ a.e. x y $\|f_j\|_p \leqslant \|f\|_p$, entonces*

$$\|f - f_j\|_p \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Demostración. Sea $g_j = |f|^p + |f_j|^p - |f - f_j|^p$. Vemos $g_j \geqslant 0$ y $g_j \longrightarrow 2|f|^p$ a.e. x. Aplicando el Lema 2.2:

$$\int \liminf_j g_j \, dx \leqslant \liminf_j \int g_j \, dx.$$

Aplicando el límite en el lado izquierdo y sustituyendo en el derecho

$$\begin{aligned} 2\|f\|\|_p^p &\leqslant \liminf_j \left(\|f\|_p^p + \|f_j\|_p^p - \|f - f_j\|_p^p\right) \leqslant \liminf_j \left(2\|f\|_p^p - \|f - f_j\|_p^p\right) \\ &= 2\|f\|_p^p - \limsup_j \left(\|f - f_j\|_p^p\right) \end{aligned}$$

Entonces

$$0 \leqslant \limsup_j \left(\|f - f_j\|_p^p\right) \leqslant 0,$$

es decir, obtenemos lo que queríamos, pues

$$\|f - f_j\|_p^p = 0 \Longrightarrow \|f - f_j\|_p = 0.$$

□

Teorema 2.4 (Teorema de la Convergencia Dominada)**.** *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles tales que*

- *Existe* $\lim_n f_n = f$ *a.e. x.*
- *Existe g medible positiva tal que $|f_n| \leqslant g$ a.e. x, para todo $n \in \mathbb{N}$,* $\int_X g \, d\mu < \infty$.

entonces, $\lim_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_n f_n \, d\mu$.

Demostración. Modificando f_n y g en conjuntos de medida nula, podemos suponer que para todo x, existe $\lim_n f_n(x)$ y $|f_n(x)| \leqslant g(x)$. Entonces

$$-g(x) \leqslant f_n(x) \leqslant g(x), \text{ para toda } x \Longrightarrow \begin{cases} (g - f_n)(x) \geqslant 0 \\ f_n(x) + g(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

Veamos primero que el límite inferior de la integral es mayor o igual que la integral del límite de las f_n . Por el Lema 2.2

$$\int_X \liminf_n (f_n + g)\, d\mu \leqslant \liminf_n \int_X (f_n + g)\, d\mu,$$

por lo que

$$\int_X \liminf_n f_n\, d\mu + \int_X g\, d\mu \leqslant \liminf_n \int_X f_n\, d\mu + \int_X g\, d\mu.$$

Sabemos que si existe $\lim f_n$, entonces

$$\liminf f_n = \lim f_n = \limsup f_n, \tag{2.2}$$

y como por definición hemos tomado $\int_X g\, d\mu < \infty$, obtenemos la desigualdad

$$\int_X \lim_n f_n\, d\mu \leqslant \liminf_n \int_X f_n\, d\mu.$$

Recíprocamente, y aplicando (2.2),

$$\int_X \liminf_n (g - f_n)\, d\mu \leqslant \liminf_n \left(\int_X g\, d\mu - \int_X f_n\, d\mu \right),$$

y así

$$\int_X g\, d\mu - \int_X f\, d\mu \leqslant \int_X g\, d\mu + \liminf_n \int_X (-f_n)\, d\mu. \tag{2.3}$$

Por otra parte, podemos ver que $\liminf_n \int_X (-f_n)\, d\mu = -\limsup_n \int_X f_n\, d\mu$, es decir,

$$\int_X g\, d\mu + \liminf_n \int_X (-f_n)\, d\mu = \int_X g\, d\mu - \limsup_n \int_X f_n\, d\mu.$$

Sustituyendo en (2.3)

$$\int_X g\, d\mu - \int_X f\, d\mu \leqslant \int_X g\, d\mu - \limsup_n \int_X f_n\, d\mu,$$

y una vez más, aplicando $\int_X g\, d\mu < \infty$,

$$\limsup_n \int_X f_n\, d\mu \leqslant \int_X \lim_n f_n\, d\mu.$$

Uniendo las implicaciones de ambos apartados llegamos al siguiente resultado

$$\limsup_n \int_X f_n \, d\mu \leqslant \int_X \lim_n f_n \, d\mu \leqslant \liminf_n \int_X f_n \, d\mu,$$

lo que nos lleva a concluir que

$$\lim_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_n f_n \, d\mu,$$

lo que termina la demostración. □

Queremos demostrar la desigualdad de Hölder, pero para ello veamos antes el siguiente lema.

Lema 2.5. *Sean a, $b \geqslant 0$ reales no negativos y $p > 1$, $p' > 1$ reales tales que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, *entonces*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Demostración. Definimos $f(x) = \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{1}{p'} - x$ en $[0, \infty)$. Entonces $f'(x) = x^{p-1} - 1$, con lo que

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x^{p-1} = 1 \Longleftrightarrow x = 1.$$

Como $f''(1) \geqslant 0$, f tiene un mínimo en $x = 1$. Por tanto,

$$f(x) \geqslant f(1) = 0 \Longrightarrow \frac{x^p}{p} + \frac{1}{p'} - x \geqslant 0 \Longrightarrow \frac{x^p}{p} + \frac{1}{p'} \geqslant x.$$

Tomemos ahora $x = ab^{\frac{1}{1-p}}$, y así, $x^p = a^p b^{\frac{p}{1-p}} = a^p b^{-p'}$, donde obtenemos esta relación entre p y p' del enunciado. Sustituyendo y trabajando para obtener la desigualdad que buscamos obtenemos

$$ab^{\frac{1}{1-p}} \leqslant \frac{a^p}{p} b^{-p'} + \frac{1}{p'} \Longrightarrow ab \leqslant \frac{a^p}{p}\left(b^{\frac{p}{1-p}}\right)\left(b^{\frac{-p}{1-p}}\right) + \frac{1}{p'}\left(b^{\frac{-p}{1-p}}\right) \Longrightarrow ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

□

Definamos ahora los espacios L^p, concepto que necesitaremos para el teorema posterior.

Definición 2.6. Llamamos L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, al espacio de clases de equivalencia de funciones en $\mathbb{R}^n$ con potencia p-ésima del valor absoluto integrable, y escribimos

$$\|u\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}, \; u \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Llamamos $L_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ a las funciones de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ que tienden a 0 en el ∞.

Teorema 2.7. *Sean f, g funciones medibles tales que $f \in L^p$, $g \in L^{p'}$ con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, entonces*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

A esta desigualdad se le conoce como desigualdad de Hölder.

Demostración. Sean $A = \|f\|_p$, $B = \|g\|_{p'}$. Observamos que $A \neq 0$ y $B \neq 0$, pues sino el resultado se obtiene de forma trivial. Aplicamos el Teorema 2.5 tomando

$$a = \frac{|f(x)|}{A},\ b = \frac{|g(x)|}{B}.$$

Entonces

$$ab = \frac{|f(x)g(x)|}{AB} \leqslant \frac{|f(x)|^p}{pA^p} + \frac{|g(x)|^{p'}}{p'B^{p'}} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

$$\frac{1}{AB}\int |f(x)g(x)|\, d\mu \leqslant \frac{1}{pA^p}\int |f|^p\, d\mu + \frac{1}{p'B^{p'}}\int |g|^{p'}\, d\mu,$$

pero $A^p = \int |f|^p\, d\mu$ y $B^{p'} = \int |g|^{p'}\, d\mu$, por lo que

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_{p'}}\|fg\|_1 \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \Longrightarrow \|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p\|g\|_{p'}.$$

□

2.2. Espacios Vectoriales Topológicos

En esta nueva sección veremos algunas definiciones y observaciones relacionadas con los espacios vectoriales topológicos.

Definición 2.8. Sean L un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $\mathscr{T}$ una topología en L. Se llama espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{K}$ al par $(L, \mathscr{T})$ si cumple

- $(x, y) \longrightarrow x + y$ es continua de $L \times L$ en L.
- $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ es continua de $\mathbb{K} \times L$ en L.

Definición 2.9. Sea p una seminorma sobre un espacio vectorial X, entonces cumple las siguientes propiedades:

- $p(x) \geqslant 0,$ para todo $x \in X$.
- $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$.
- $p(\alpha x) = |\alpha| p(x),$ para todo α escalar.

Observación 2.10. Una norma es una seminorma que cumple $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Definición 2.11. Una familia $\mathscr{P}$ de seminormas en X se dice que separa puntos si para cada $x \neq 0$ existe un $p \in \mathscr{P}$ tal que $p(x) \neq 0$.

Definición 2.12. Se dice que un espacio X es localmente convexo si existe una base local $\mathscr{B}$ cuyos elementos son convexos.

Definición 2.13. Sea $\mathscr{P}$ una familia de seminormas en un espacio vectorial X que separa puntos. A cada $p \in \mathscr{P}$ y a cada entero positivo n asociamos el conjunto

$$V(n,p) = \left\{ x : p(x) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Llamaremos $\mathscr{B}$ a la colección de todas las intersecciones finitas de los conjuntos $V(n,p)$.

Teorema 2.14. *La base $\mathscr{B}$ definida anteriormente es una base local convexa y equilibrada para una topología τ sobre X que convierte a X en un espacio localmente convexo, tal que*

a) cada $p \in \mathscr{P}$ es continua.

b) un conjunto $E \subset X$ es acotado si, y sólo si, cada $p \in \mathscr{P}$ es acotada sobre E.

Demostración. Véase la demostración de [7, Teorema 1.37]. □

Observación 2.15. Cabe destacar que en el caso de restringirnos a una familia numerable de abiertos con p fija, por construcción, sería suficiente trabajar con el abierto asociado a la mayor n. Veamos que podemos asociar una noción de monotonía a las $V(r,p)$ en r. Vemos que si $r < R$, tenemos que $1/R < 1/r$, y por tanto, $V(R,p) \subset V(r,p)$. Por otra parte, en el caso de trabajar con una familia creciente de seminormas $\{p_j\}_{j=1}^m$, tal que, $p_j(x) \leqslant p_{j+1}(x)$, si trabajamos con m fijo, a la hora de calcular la intersección de las $V(m,p)$ generadas por dicha familia, encontramos una gran simplificación, pues $V(m,p_{j+1}) \subset V(m,p_j)$, de forma que $\bigcap_{j=1}^m V(m,p_j(x)) = V(m,p_m(x))$.

Teorema 2.16. *Si X es un espacio vectorial topológico con una base local numerable, entonces existe una métrica d sobre X tal que*

- *d es compatible con la topología de X.*
- *las bolas abiertas centradas en 0 son equilibradas.*
- *d es invariante: $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ para $x, y, z \in X$.*

Demostración. Véase [7, Teorema 1.24]. □

Observación 2.17. Si, además, X es localmente convexo, entonces se puede elegir d verificando el Teorema 2.16, de forma que además se cumpla que todas las bolas son convexas.

Observación 2.18. Si $\mathscr{P} = \{p_i : i = 1, 2, 3, \dots\}$ es una familia numerable de seminormas sobre X que separa puntos, el Teorema 2.14 prueba que $\mathscr{P}$ induce una topología τ con una base local numerable. Además, empleando el Teorema 2.16, τ es metrizable.

Definición 2.19. Un espacio de Fréchet es un espacio vectorial topológico X tal que:

- La topología puede ser inducida por una familia numerable de seminormas.
- X es Hausdorff, es decir, para todos x, y existen entornos E_x, E_y tal que $E_x \cap E_y = \emptyset$.
- Hay completitud en la familia de seminormas.

Definición 2.20. Se dice que un espacio vectorial topológico X tiene la propiedad de Heine-Borel si todo subconjunto cerrado y acotado de X es compacto.

Definiremos ahora una topología en $C^\infty(\Omega)$ que necesitaremos más adelante.

Definición 2.21. Sea $\{K_i\}_i$ una familia de conjuntos compactos tal que $K_i \subset \operatorname{int}(K_{i+1})$, y sea $\Omega = \bigcup K_i$. Definamos seminormas p_N sobre $C^\infty(\Omega)$ como

$$p_N(f) = \max\{|D^\alpha f(x)|\colon x \in K_N,\, |\alpha| \leqslant N\}.$$

Estas seminormas definen por el Teorema 2.14 una topología, de la cual los conjuntos

$$V_N = \left\{ f \in C^\infty(\Omega)\colon p_N(f) < \frac{1}{N} \right\}$$

forman una base.

2.3. Transformada de Fourier

Veamos algunas propiedades de la transformada de Fourier, así como las definiciones de la propia transformada en L^1, en L^2 y en L^p para $p \in (1, 2)$.

Definición 2.22. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos la transformada de Fourier como

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx,\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

siendo $x \cdot \xi$ el producto escalar de los vectores ξ, x en $\mathbb{R}^n$.

A partir de ahora escribiremos $x\xi$ en lugar de $x \cdot \xi$ por simplicidad.

Observación 2.23. Es sencillo ver que la trasformada de Fourier es lineal, es decir, si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y α, β escalares, entonces $(\widehat{\alpha f + \beta g}) = \alpha\widehat{f} + \beta\widehat{g}$. La demostración se desprende de la linealidad de la integral.

Observación 2.24. $\widehat{(\tau_h f)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i h\xi}$ donde $\tau_h f(x) = f(x+h)$.

Lema 2.25 (Riemann-Lebesgue). *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$\lim_{|\xi|\to\infty} |\widehat{f}(\xi)| = 0.$$

Demostración. Nos centraremos en el caso $n = 1$, pues para dimensiones mayores se prueba de forma similar. Sea f continua de soporte compacto. Tomamos $\xi \neq 0$ y sustituyendo x por $x + \dfrac{1}{2\xi}$ concluimos que

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\, dx = \int_{\mathbb{R}} f\left(x + \frac{1}{2\xi}\right)e^{-2\pi i x\xi}e^{-\pi i}\, dx = -\int_{\mathbb{R}} f\left(x + \frac{1}{2\xi}\right)e^{-2\pi i x\xi}\, dx.$$

Llegamos entonces a la conclusión de que esta es una segunda fórmula para calcular $\widehat{f}(\xi)$, y por ende

$$|\widehat{f}(\xi)| \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left| f(x) - f\left(x + \frac{1}{2\xi}\right)\right| dx.$$

Queremos aplicar el Teorema 2.4, así que veamos que se cumplen las hipótesis. Primero, observamos que $\lim_{|\xi|\to\infty} \left| f(x) - f\left(x + \frac{1}{2\xi}\right)\right| = 0$ por continuidad de f. Por otra parte, para encontrar una cota, vemos que por ser f una función continua de soporte compacto, existe un cierto K_0 tal que $\mathrm{sop}(f) \subset K_0$. Ahora, si tomamos $|\xi| \geqslant 1$, $|\xi| \to \infty$, existe un K tal que $\mathrm{sop}(f) \cup \mathrm{sop}\left(f\left(x + \frac{1}{2\xi}\right)\right) \subset K$. Finalmente, tomando $g = 2\|f\|_\infty \chi_K$, comprobamos finalmente que $\left| f(x) - f\left(x + \frac{1}{2\xi}\right)\right| \leqslant g$ y podemos aplicar el Teorema 2.4 para llegar a que $\left| f(x) - f\left(x + \frac{1}{2\xi}\right)\right| \to 0$ si $|\xi| \to \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y vemos que $|\widehat{f}(\xi)|$ converge a 0 si $|\xi| \to \infty$. Sea f una función integrable arbitraria, puede ser aproximada en la norma L^1 por una función continua con soporte compacto. Dado $\epsilon > 0$, podemos tomar una cierta función g continua con soporte compacto tal que $\|f - g\|_{L^1} \leqslant \epsilon$. Entonces

$$\limsup_{|\xi|\to\infty} |\widehat{f}(\xi)| \leqslant \limsup_{|\xi|\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x) - g(x))e^{-2\pi i x\xi}\, dx\right| + \limsup_{|\xi|\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-2\pi i x\xi}\, dx\right| \leqslant \epsilon + 0 = \epsilon.$$

Como hemos tomado de forma arbitraria $\epsilon > 0$, obtenemos que $|\widehat{f}(\xi)| \to 0$ si $|\xi| \to \infty$. $\square$

Teorema 2.26. *Sea* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *entonces* $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ *y* $\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$.

Demostración. Para demostrar este teorema veamos lo siguiente:

a) f bien definida se deduce a partir de la Observación 2.23 y de $|e^{2\pi i t x\xi}| = 1$, por lo que $|\widehat{f}(\xi)| \leqslant \|f\|_1$.

b) $\lim_{|\xi|\to\infty} |\widehat{f}(\xi)| = 0$ por el Teorema 2.25, que ya hemos demostrado.

c) f es continua. Para esto definimos $\widehat{f}(\xi + h) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\xi}e^{-2\pi i x h}\, dx$ y comprobamos que estamos en las condiciones de aplicar el Teorema 2.4. Por una parte, $\lim_{h\to 0} f(x)e^{-2\pi i x\xi}e^{-2\pi i x h} = f(x)e^{-2\pi i x\xi}$ y por otra, $|f(x)e^{-2\pi i x\xi}e^{-2\pi i x h}| = |f(x)|$, que es integrable. De esta forma concluimos que $\lim_{h\to 0} \widehat{f}(\xi + h) = \widehat{f}(\xi)$ y por tanto, que $\widehat{f}$ es continua.

□

Ejemplo 2.27. Sea $f(\xi) = \chi_{[-1,1]}$, calculemos su transformada de Fourier.

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\,dx = \int_{-1}^{1} e^{-2\pi i x\xi}\,dx = \left.\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{e^{-i\xi}-e^{i\xi}}{-i\xi}\\ &= \frac{\cos(-\xi)+i\operatorname{sen}(-\xi)-\cos(\xi)-i\operatorname{sen}(\xi)}{-i\xi} = 2\frac{\operatorname{sen}(\xi)}{\xi}.\end{aligned}$$

Como sabemos que $\left|\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right|$ no es integrable en $\mathbb{R}$, entonces $\widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$.

Recordemos la definición de convolución y veamos algunas propiedades más de la transformada de Fourier.

Definición 2.28. Sean f y g funciones medibles y definidas en $\mathbb{R}^n$. Si existe a.e. $x \in \mathbb{R}^n$, la función

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy,$$

se denomina convolución de f y g.

Introducimos la siguiente notación, que nos será útil más adelante.

Definición 2.29. Denotamos por $\bar{u}$ a la función definida como $\bar{u}(y) = u(-y)$.

Proposición 2.30. *Sea $f \in L^1$,*

- *Sea* $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1$, *entonces* $\widehat{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)}(\xi) = 2\pi i\xi_j \widehat{f}(\xi)$.
- *Sea* $x_j f \in L^1$, *entonces* $(\widehat{-2\pi i x_j f})(\xi) = \dfrac{\partial}{\partial \xi_j}\widehat{f}(\xi)$.

Demostración. Pueden encontrarse en los apartados 1.31 y 1.32 de [3]. □

Lema 2.31. *Si* $f(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$, *entonces,* $\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi\|\xi\|^2}$.

Demostración. Veremos el resultado para dimensión uno, pues podemos considerar el caso de la integral en $\mathbb{R}^n$ como el producto de n integrales en dimensión uno por el Teorema de Fubini. Es sencillo comprobar que $f(x) = e^{-\pi x^2}$ es solución de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} u'(x) + 2\pi x u(x) = 0 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Utilizando la Proposición 2.30, vemos que $\widehat{f}$ también verifica la ecuación diferencial, pues

$$\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\,dx = 1.$$

Por la unicidad de la ecuación diferencial, llegamos a que $\widehat{f} = f$. □

Lema 2.32. *Sea $g(x) = \lambda^{-n} f(\lambda x)$, entonces $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\lambda\xi)$, para $\lambda > 0$.*

Demostración. Lo encontramos en el apartado 1.30 de [3]. □

Teorema 2.33. *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\, dx.$$

Demostración. $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)e^{-2\pi i x\xi}\, dx\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\, dx.$ □

Teorema 2.34 (Teorema de inversión de Fourier)**.** *Sea $\widehat{f}$ integrable, entonces podemos expresar f en función de $\widehat{f}$ de la siguiente manera,*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi}\, d\xi,$$

donde podemos modificar la función en un conjunto de medida nula para que sea continua en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. De los Lemas 2.31 y 2.32 obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(\lambda x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\lambda^{-n} g(\lambda^{-1}x)\, dx.$$

Realizamos el cambio de variable $y = \lambda x$ para obtener

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda^{-1}y)\widehat{g}(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) g(\lambda^{-1}y)\, dy,$$

y haciendo $\lambda \longrightarrow \infty$, llegamos a

$$f(0)\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(y)\, dy = g(0)\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)\, dy.$$

Escogemos $g(y) = e^{-\pi\|y\|^2}$ y aplicamos el Lema 2.31, obteniendo:

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\, d\xi,$$

que es el caso $y = 0$ de la fórmula de inversión. Aplicamos a continuación $\tau_y f$ a la Observación 2.24 para obtener:

$$f(y) = (\tau_y f)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{(\tau_y f)}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i y\xi}\, d\xi.$$

□

Teorema 2.35. *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces*

a) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}}(x)\, dx.$

b) $\widehat{(f * g)}(x) = \widehat{f}(x) \cdot \widehat{g}(x)$.

c) $\widehat{(f \cdot g)}(x) = \widehat{f}(x) * \widehat{g}(x)$.

Demostración. a) Sea $\chi = \overline{\widehat{g}}$ y apliquemos el Teorema 2.34 para obtener

$$\overline{\widehat{\chi}(x)} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(\xi) e^{2\pi i x \xi}\, d\xi = g(x).$$

Ahora basta aplicar el apartado a) reemplazando g por χ.

b) Se deduce de la definición y del Teorema de Fubini.

c) Tenemos $(\widehat{f} * \widehat{g})(x) = (2\pi)^n f(-x)(2\pi)^n g(-x)$ por un lado, y por otro $\widehat{(f \cdot g)}(x) = f(-x)g(-x)$, de lo que se desprende la igualdad buscada.

□

Corolario 2.36. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\widehat{f} = 0$, necesariamente $f = 0$.*

Demostración. Se deduce directamente de la fórmula de inversión. □

En el caso de L^2, para definir la transformada de Fourier en este espacio, nos apoyaremos en las funciones $f \in L^1 \cap L^2$, de modo que definiremos la transformada en L^2 como extensión de las transformadas de las f.

Proposición 2.37. *Sean $f \in L^1$, $\rho(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$ y $\rho_t = \dfrac{1}{t^n} \cdot \rho\left(\dfrac{x}{t}\right)$, entonces:*

$$(f * \rho_t)(x) \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f \text{ en } L^1 \text{ cuando } t \to 0.$$

Demostración. Para ver que $f * \rho_t \longrightarrow f$ en L^1, comprobemos que $\|(f * \rho_t - f)\|_1 \xrightarrow{t \to 0} 0$. Desarrollemos:

$$\|f * \rho_t - f\|_1 \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| \cdot \frac{1}{t^n} \cdot \rho\left(\frac{y}{t}\right) dy\, dx,$$

puesto que $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx = 1$. Observamos que empleando el cambio de variable $u = y/t$, tenemos que $\|f(x-tu) - f(x)\|_1 \longrightarrow 0$. El objetivo buscado para completar esta demostración va a ser aplicar el Teorema 2.4. Separemos los siguientes casos:

- Si f es continua con soporte compacto, entonces podemos aplicar directamente el Teorema 2.4.

- Sea ahora f tal que no es continua con soporte compacto. Podemos encontrar una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones f_n continuas con soporte compacto tales que $f_n \longrightarrow f$ por un argumento de densidad de las funciones con soporte compacto en L^1 como veremos en la Observación 3.11. De esta forma $\exists \epsilon_1 > 0$ tal que $\|f_n - f\|_1 < \dfrac{\epsilon_1}{3}$. Aplicando el primer caso, $\exists \epsilon_2 > 0$ tal que $\|(f_n * \rho_t - f_n)\|_1 < \dfrac{\epsilon_2}{3}$, y $\exists \epsilon_3 > 0$ tal que

$\|(f*\rho_t - f_n*\rho_t)\|_1 < \frac{\epsilon_3}{3}$. De este modo, tomando $\epsilon = \max\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ y aplicando la desigualdad triangular, llegamos a que:

$$\|(f*\rho_t - f)\|_1 \leqslant \|(f*\rho_t - f_n*\rho_t)\|_1 + \|(f_n*\rho_t - f_n)\|_1 + \|f_n - f\|_1 < \frac{\epsilon_1}{3} + \frac{\epsilon_2}{3} + \frac{\epsilon_3}{3} < 3\cdot\frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Así, concluimos la demostración.

□

Proposición 2.38 (Igualdad de Plancherel)**.** *Sea $f \in L^1 \cap L^2$, entonces $\widehat{f} \in L^2$ y $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$.*

Demostración. Tomamos de nuevo $\rho(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$ y $\rho_t = t^{-n}\rho\left(\frac{x}{t}\right)$ con $t > 0$, y consideramos la función $f*\rho_t \in L^1 \cap L^2$. Tenemos, por la Proposición 2.37, que $\lim_t f*\rho_t = f$ en L^1 y en L^2, luego existe $\lim_t \widehat{f*\rho_t}$ en L^2 y converge a $\widehat{f}$ uniformemente. Así, $\lim_t \widehat{f*\rho_t} = \widehat{f}$ en L^2, de modo que $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$. □

Observación 2.39. Como $\overline{L^1 \cap L^2}^{\|\cdot\|_2} = L^2$, podemos extender la trasformada de Fourier

$$L^1 \cap L^2 \xrightarrow{\wedge} L^2.$$

Llamemos $\mathcal{F}$ a esta aplicación, de modo que

$$L^2 \xrightarrow{\mathcal{F}} L^2$$

tal que si $f \in L^1 \cap L^2$, entonces $\mathcal{F}f = \widehat{f}$.

Definición 2.40. Sea $f \in L^2$, $f_j \in L^1 \cap L^2$ tal que $f_j \xrightarrow{L^2} f$, entonces, definimos la transformada de una función de L^2 como $\mathcal{F}f = \lim \widehat{f_j}$. Así, tenemos que

$$\mathcal{F}f(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\, dx \text{ en } L^2.$$

Teorema 2.41. *$\mathcal{F}$: $L^2 \to L^2$ es un isomorfismo isométrico y*

$$f(x) = \lim_{R\to\infty} \int_{|\xi|<R} \mathcal{F}f(\xi)e^{2\pi i x\xi}\, d\xi \text{ en } L^2$$

es la inversa de la transformada de Fourier en L^2.

Demostración. Por una parte, por el Corolario 2.36, se trata de una aplicación inyectiva, y por la Proposición 2.38 comprobamos que se trata de una isometría. Resta comprobar que esta aplicación es sobreyectiva, lo que se puede encontrar en [3, Teorema 1.41]. □

Por último, veamos como definir la transformada para las funciones de L^p con $1 < p < 2$.

Definición 2.42. Sea $f \in L^p$, $1 < p < 2$ podemos realizar la siguiente descomposición: $f = f_1 + f_2$ siendo $f_1 \in L^1$ y $f_2 \in L^2$. Así, la transformada de f puede verse como

$$\widehat{f}(x) = \widehat{f_1}(x) + \mathcal{F}f_2(x).$$

Observación 2.43. Cabe mencionar que esta definición no depende de la descomposición. Supongamos que existen dos descomposiciones $f = f_1 + f_2 = g_1 + g_2$ con $f_1, g_1 \in L^1$ y $f_2, g_2 \in L^2$. Observamos que $f_1 - g_1 = g_2 - f_2 \in L^1 \cap L^2$, pues el lado izquierdo pertenece a L^1 por ser resta de funciones de L^1 y la parte derecha a L^2 por ser resta de funciones L^2. Aplicando ahora la transformada a ambos lados de la igualdad, obtenemos

$$\widehat{f_1} - \widehat{g_1} = \mathcal{F}g_2 - \mathcal{F}f_2 \Longrightarrow \widehat{f_1} + \mathcal{F}f_2 = \widehat{g_1} + \mathcal{F}g_2.$$

Tras estas definiciones de la transformada, podemos generalizar el Teorema 2.26.

Teorema 2.44 (Teorema de Hausdorff-Young)**.** *Si* $f \in L^p$ *con* $1 \leqslant p \leqslant 2$*, entonces* $\widehat{f} \in L^{p'}$, $1/p + 1/p' = 1$ *y*

$$\|\widehat{f}\|_{p'} \leqslant \|f\|_p.$$

Demostración. Los casos particulares $p = 1, 2$ quedan vistos en el Teorema 2.26 y la Proposición 2.38, mientras que el caso $1 < p < 2$ se sigue de [6, Teorema 7.1.12]. □

Capítulo 3

Introducción a la Teoría de Distribuciones

Vamos a introducir ahora el concepto de multi-índice, el cual necesitaremos de cara a definir el espacio $\mathscr{D}$.

Definición 3.1. Sea $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un multi-índice, donde $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ y $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, definimos el operador diferencial asociado al multi-índice como

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

El concepto de multi-índice nos va a resultar muy útil de cara al espacio $\mathscr{S}$ que veremos a continuación, que será además donde definiremos las funciones.

Definición 3.2. Sea un conjunto abierto y no vacío $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, se dice que una función f pertenece a $C^\infty(\Omega)$ si $D^\alpha f \in C(\Omega)$, para todo α multi-índice. Se define $\mathscr{D}(\Omega)$ al espacio de las funciones $\phi \in C^\infty(\Omega)$ que tienen soporte compacto.

Definición 3.3. Definimos $\mathscr{D}_K$ al conjunto formado por las funciones que tienen soporte compacto en K.

Observación 3.4. El conjunto $\mathscr{D}_K$ es un subespacio cerrado de $C^\infty(\Omega)$.

Definición 3.5. Sea $K \subset \Omega$ y $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, se define la norma $\|\phi\|_K$ como

$$\|\phi\|_K = \text{máx}\{|D^\alpha \phi(x)| \colon x \in \Omega,\ |\alpha| \leqslant N\},$$

y con esta norma, podemos definir las seminormas

$$V_N = \left\{\phi \in \mathscr{D}_K \colon \|\phi\|_N < \frac{1}{N}\right\}. \tag{3.1}$$

Por el Teorema 2.14 esta familia de seminormas genera una topología.

Observación 3.6. Veamos que la topología definida por la Definición 3.5 sobre $\mathscr{D}_K$ es la misma que la que genera la Definición 2.21. A cada K podemos asociarle un entero N_0 tal que $K \subset K_N$ para todo $N \geqslant N_0$, y entonces, para estos N, $\|\phi\|_N = p_N(\phi)$, con $\phi \in \mathscr{D}_K$. Además, como $\|\phi\|_N \leqslant \|\phi\|_{N+1}$ y $p_N(\phi) \leqslant p_{N+1}(\phi)$, las topologías inducidas por ambas sucesiones de seminormas no varían si N toma valores mayores o iguales a N_0. Así pues, ambas topologías sobre $\mathscr{D}_K$ son idénticas, y (3.1) es una base local de dicha topología.

Definición 3.7. Sea Ω un conjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$.

a) Para todo compacto $K \subset \Omega$, τ_K denota la topología de $\mathscr{D}_K$ generada por las seminormas V_N de la Definición 3.5.

b) β es la colección de todos los conjuntos convexos y equilibrados $W \subset \mathscr{D}(\Omega)$ tales que $\mathscr{D}_K \cap W \in \tau_K$ para todo compacto $K \subset \Omega$.

c) τ es la colección de todas las uniones de conjuntos de la forma $\Phi + W$ donde $\Phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ y $W \in \beta$.

Teorema 3.8. *τ cumple las siguientes afirmaciones.*

a) τ es una topología en $\mathscr{D}(\Omega)$, y β es una base local de τ.

b) $\mathscr{D}(\Omega)$ dotado de la topología τ es un espacio vectorial topológico localmente convexo.

Demostración. Ver [7, Teorema 6.4]. □

Definición 3.9. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, donde Ω es un abierto conexo. Llamamos distribución a una forma lineal definida en $\mathscr{D}(\Omega)$, que sea continua respecto de la topología de la Definición 3.7. El espacio de todas las distribuciones se representa por $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Ejemplo 3.10. Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) = \{f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C} : f\cdot\chi_K \in L^1, \text{ para todo } K \subset \Omega \text{ compacto}\}$ y $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, entonces $L_f(\phi) = \displaystyle\int_\Omega \phi(x) f(x)\, dx$ es una distribución. Veamos primero que está bien definida.

$$\left| \int_\Omega \phi(x) f(x)\, dx \right| = \left| \int_K \phi(x) f(x)\, dx \right| \leqslant \|\phi(x)\|_\infty \int_K |f(x)|\, dx < \infty.$$

Por otra parte, la linealidad es inmediata, por lo que falta ver que es continua. Sea $\phi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi$ en $\mathscr{D}(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned}\left| \int_\Omega f(x)\phi_n(x)\, dx - \int_\Omega f(x)\phi(x)\, dx \right| &= \left| \int_K f(x)\phi_n(x)\, dx - \int_K f(x)\phi(x)\, dx \right| \\ &= \left| \int_K f(x)(\phi_n(x) - \phi(x))\, dx \right| \\ &\leqslant \int_K |f(x)|\, dx \cdot \|\phi_n(x) - \phi(x)\|_\infty,\end{aligned}$$

y finalmente

$$\int_K |f(x)|\,dx \cdot \|\phi_n(x) - \phi(x)\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

por lo queda comprobada la continuidad de L_f, pues

$$\lim_{n\to\infty} \int_K f(x)\phi_n(x)\,dx = \int_K f(x)\phi(x)\,dx.$$

Queda así visto que L_f es una distribución.

Observación 3.11. $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Se puede encontrar la demostración en [1, Capítulo 5, Corolario 3.1]. □

Caractericemos ahora la continuidad y la convergencia de sucesiones en $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Teorema 3.12. *Una forma lineal u es continua en $\mathscr{D}'(\Omega)$ si para cada compacto $K \subset \Omega$ existen un entero N_K y una constante C_K tales que*

$$|u(\phi)| \leqslant C_K \sum_{|\alpha|\leqslant N_K} \|D^\alpha \phi\|_K \text{ , con } \phi \in \mathscr{D}'(\Omega).$$

Demostración. Véase la sección 6.2 de [2]. □

Teorema 3.13. *Sea $\{u_j\}$ una sucesión de distribuciones en $\mathscr{D}_K$, entonces $u_j \to 0$ si y sólo si existe K tal que para todo j, $\operatorname{sop}(u_j) \subset K$ y para todo α, $D^\alpha u_j \to 0$ uniformemente en K.*

Demostración. Ver [2, Teorema 6.5]. □

Observación 3.14. Para ver que una sucesión de distribuciones $\{u_j\}$ tiende a u basta con ver que la sucesión $\{u_j - u\}$ tiende a 0.

Definición 3.15. Llamamos $\mathscr{S}$ al espacio de funciones infinitamente diferenciables u que cumplen

$$p_{\alpha,\beta}(u) = \sup_x \left|x_\beta D^\alpha u(x)\right| < \infty$$

para cualesquiera α y β con α y β multi-índices, y con la topología del Teorema 2.14, conformada por las seminormas $p_{\alpha,\beta}(u)$. Al espacio dual de $\mathscr{S}$ lo denotamos por $\mathscr{S}'$ y a sus elementos los llamaremos funciones temperadas.

Definamos la derivada en el sentido distribucional.

Definición 3.16. Sean $T \in \mathscr{S}'(\Omega)$, $g \in \mathscr{S}(\Omega)$. Definimos la derivada en el sentido de distribuciones como

$$(D^\alpha T)(g) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha g).$$

Observación 3.17. Veamos que esta definición de derivada distribucional es razonable con un ejemplo. Sea de nuevo $T = L_f$ tal que $f \in C^\infty$ tiene soporte compacto y $\phi \in \mathscr{S}$. Entonces integrando por partes obtenemos

$$\int f'\phi = f\phi - \int f\phi',$$

pero $f\phi$ tiene soporte compacto, por lo que evaluando en $\mathbb{R}^n$ vale 0, es decir,

$$\int f'\phi = -\int f\phi'.$$

Obtenemos así que

$$L_{f'} = \big(-L_f\big)' \Longrightarrow \big(L_f\big)' = -L_{f'},$$

por lo que resulta natural extenderlo a $u'(\phi) = -u(\phi')$ para u una distribución cualquiera.

Veamos ahora algunos ejemplos de derivadas de distribuciones y de funciones que pueden o no ser derivables en el sentido ordinario. Por construcción hemos visto que la derivada en el sentido distribucional de una función derivable coincide con su derivada ordinaria. Veamos que ocurre con la derivada distribucional de una función que no sea derivable en el sentido ordinario.

Ejemplo 3.18. Sea $f(x) = |x|$. Sabemos que si $x \neq 0$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{array} \right. .$$

de modo que no podemos considerar la derivada usual de $f(x)$ en todo $\mathbb{R}$ pues no está definida para $x = 0$. Veamos que ocurre con la derivada en el sentido distribucional. Consideremos $L_f(\phi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x|\phi(x)\,dx$ con $\phi(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Aplicando la expresión obtenida en la Observación 3.17,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |x|'\phi(x)\,dx &= -\int_{-\infty}^{\infty} |x|\phi'(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} |x|\phi'(x)\,dx - \int_{0}^{\infty} |x|\phi'(x)\,dx \\
&= \cancel{x\phi(x)\Big|_{x=-\infty}^{0}} - \int_{-\infty}^{0} \phi(x)\,dx - \cancel{x\phi(x)\Big|_{x=0}^{\infty}} + \int_{0}^{\infty} \phi(x)\,dx \\
&= -\int_{-\infty}^{0} \phi(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} \phi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x)\phi(x)\,dx,
\end{aligned}$$

donde

$$\operatorname{sgn}(x) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{array} \right. .$$

Por tanto, tenemos que $f'(x) = \operatorname{sgn}(x)$ en el sentido de las distribuciones.

Ejemplo 3.19. Veamos un ejemplo con el que nos será útil contar para más adelante. Sean $H(x) = \chi_{(0,\infty)}$ la función de Heaviside y $\phi \in \mathscr{S}$, entonces

$$(L_H)'(\phi) = -\int_{\mathbb{R}} \phi'(x) H(x)\, dx = -\int_0^{\infty} \phi'(x)\, dx = \cancel{-\phi(\infty)} + \phi(0) = \delta(\phi).$$

Obtenemos que $H' = \delta$. Es trivial ver que δ es lineal, y es continua porque ϕ lo es. A la distribución δ se le conoce como distribución δ de Dirac.

Ejemplo 3.20. Calculemos en esta ocasión la derivada de una distribución. Queremos calcular la derivada de δ. Por el anterior ejemplo, tenemos que $H' = \delta$, siendo H la función de Heaviside, de modo que $H'' = \delta'$. Así, repitiendo el proceso anterior, llegamos a que $L_{H''} = L_{\delta'} = -\phi'(x)$, siendo $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

Definición 3.21. Se llaman funciones de decrecimiento rápido a las funciones $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ que verifican la condición

$$p_N(f) = \sup_{|\alpha| \leqslant N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^N |((i)^{-|\alpha|} D^{\alpha} f)(x)| < \infty$$

para todo $N \in \mathbb{Z}^+$, donde $|x|^2 = \sum {x_i}^2$. Esto implica que, siendo $P(x)$ y α respectivamente un polinomio y un multi-índice cualesquiera, $P(x) \cdot (i)^{-|\alpha|} D^{\alpha} f$ es una función acotada en $\mathbb{R}^n$. Además, puesto que dicha condición se cumple con $(1 + |x|^2)^N P(x)$, resulta que todo $P(x) \cdot (i)^{-|\alpha|} D^{\alpha} f$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n)$. Las funciones de decrecimiento rápido forman un espacio vectorial, que llamaremos $\mathscr{S}$, donde la colección numerable de las $p_N(f)$ define una topología localmente convexa por el Teorema 2.14.

Observación 3.22. Es sencillo ver que $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}$.

Veamos un resultado similar al del Teorema 3.12, que podemos encontrar en [2], de forma que nos permita determinar la continuidad de una forma lineal para el caso de $\mathscr{S}$.

Teorema 3.23. *Una forma lineal u es continua en $\mathscr{S}$ si existen un entero N y una constante C_N tales que*

$$|u(\phi)| \leqslant C_N p_N(\phi) = C_N \sup_{|\alpha| \leqslant N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^N |((i)^{-|\alpha|} D^{\alpha} \phi)(x)|.$$

Demostración. Véase la sección 6.2 de [2]. □

Observación 3.24. De forma equivalente, si tomamos $\phi \in \mathscr{S}$, $N \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$, podemos acotar la norma p de una función de la siguiente manera:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|^p\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{Np} \frac{|\phi(x)|^p}{(1 + |x|^2)^{Np}}\, dx \leqslant (p_N(\phi))^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1 + |x|^2)^{Np}}.$$

Haciendo un cambio de variables a coordenadas polares,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1 + |x|^2)^{Np}} = \int_0^{\infty} \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^{Np}}\, dr.$$

Es sencillo ver que cuando $r \to 0$, el valor de la función tiende a 0, por lo que basta ver como se comporta en el infinito. Como sabemos que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx < \infty \iff p > 1$, esta última integral es convergente si y sólo si $\deg(r^{n-1}) + 1 < \deg((1+|x|^2)^{Np})$, es decir, si $(n-1)+1 < 2Np$, o lo que es lo mismo, despejando N, si $N > \dfrac{n}{2p}$. De este modo, seleccionando N de forma adecuada y arrastrando las constantes que van apareciendo al plantear las desigualdades, vemos que $\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|^p\,dx < \infty$, y por ello, $\displaystyle\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|^p\right)^{1/p} dx < \infty$. Podemos ver a partir de este, un resultado similar para las derivadas de las distribuciones, aunque en este caso N también dependerá de $|\alpha|$ de la siguiente manera:

$$\|D^\alpha \phi\|_p \leqslant C_N p_N(\phi) \text{ , con } N > \text{máx}\left\{\frac{n}{2p}, |\alpha|\right\}.$$

Así, vemos que podemos acotar la norma p tanto de una distribución como de sus derivadas, y por el Teorema 3.23, obtenemos la continuidad de estas distribuciones.

Volvemos ahora con las distribuciones temperadas. Sabemos que son los elementos que $\mathscr{S}'$, pero queremos ver como definirlas. Para ello nos apoyaremos en el siguiente teorema.

Teorema 3.25. *Se verifican las siguientes relaciones entre los espacios $\mathscr{D}$ y $\mathscr{S}$:*

a) $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $\mathscr{S}$.

b) La aplicación identidad de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathscr{S}$ es continua.

En ambos apartados tomamos las topologías de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ y de $\mathscr{S}$ como la de la Definición 3.7 y la de la Definición 3.21 respectivamente.

Demostración. Veamos la demostración de cada apartado por separado.

a) Sean $f \in \mathscr{S}$, $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, con $\psi = 1$ sobre la bola unidad de $\mathbb{R}^n$, y para $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, tomamos
$$f_r(x) = f(x)\psi(rx).$$
Entonces $f_r(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, y para todo polinomio P y todo multi-índice α se tiene
$$P(x)D^\alpha(f - f_r)(x) = P(x)\sum_{\beta \leqslant \alpha} c_\alpha \beta (D^{\alpha-\beta} f)(x) r^{|\beta|} D^\beta[1 - \psi(rx)].$$
Por la elección de ψ, vemos que $D^\beta[1-\psi(rx)] = 0$ para todo multi-índice β cuando $|x| < 1/r$. Puesto que $f \in \mathscr{S}$, se tiene $P \cdot D^{\alpha-\beta} f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ para todo $\beta \leqslant \alpha$. Por consiguiente, la suma anterior tiende uniformemente a 0 en todo $\mathbb{R}^n$ cuando $r \longrightarrow 0$. Así pues, $\|f_r - f\| \longrightarrow 0$, o lo que es lo mismo, $f_r \longrightarrow f$ en la topología de $\mathscr{S}$ y con esto queda demostrado el primer apartado.

b) Para todo conjunto compacto K de $\mathbb{R}^n$, la topología inducida en $\mathscr{D}_k$ por $\mathscr{S}$ es, evidentemente la de la Definición 2.21, pues cada $(1+|x|^2)^N$ es acotada en K. Por tanto, la aplicación identidad de $\mathscr{D}_k$ en $\mathscr{S}$ es continua. Este apartado es ahora consecuencia de [7, Teorema 6.6], que nos dice que si A es una aplicación lineal de $\mathscr{D}(\Omega)$ a un espacio localmente convexo, que A sea acotada implica que sea continua.

□

Definición 3.26. Sean $i : \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}$ la aplicación identidad, L una forma lineal continua en $\mathscr{S}$, y se define

$$u_L = L \circ i. \tag{3.2}$$

Por ser i continua, por el Teorema 3.25, vemos que $u_L \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$; la densidad de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathscr{S}$ muestra que dos formas L distintas no pueden originar la misma u_L. Así pues, la igualdad en (3.2) define un isomorfismo de espacios vectoriales entre el espacio $\mathscr{S}'$ y un cierto subespacio del espacio de distribuciones. Las distribuciones generadas de esta forma se llaman distribuciones temperadas.

Corolario 3.27. *Las distribuciones temperadas son aquellas $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ que admiten extensión continua a todo el espacio $\mathscr{S}$. Las distribuciones temperadas en $\mathbb{R}^n$ son los elementos de $\mathscr{S}'$.*

Ejemplo 3.28. Toda distribución con soporte compacto es temperada. Supongamos que el compacto K sea el soporte de una cierta distribución $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$; tomemos $\psi \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi = 1$ en un cierto conjunto abierto que contenga a K, sea $f \in \mathscr{S}$, y definamos

$$\widetilde{u}(f) = u(\psi f).$$

Si $f_i \to 0$ en $\mathscr{S}$, entonces todas las $D^\alpha f_i \to 0$ uniformemente en $\mathbb{R}^n$, y por consiguiente todas las $D^\alpha(\psi f_i) \to 0$ uniformemente en $\mathbb{R}^n$; así pues, $\psi f_i \to 0$ en $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. De aquí resulta que $\widetilde{u}$ es continua en $\mathscr{S}$. Puesto que $\widetilde{u}(\phi) = u(\phi)$ para toda $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\widetilde{u}$ es extensión de u.

Observación 3.29. Veamos que si $1 \leqslant p \leqslant \infty$, entonces $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'$. Para ello veamos que $\mathscr{S} \subset L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in \mathscr{S}$. Sabemos por la Definición 3.21 que ϕ decrece más rápido que cualquier polinomio, y en particular, que $1 + |x|^m$, por lo que $|\phi(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+|x|^m}$. Vista esta desigualdad es fácil ver que $\phi(x) \in L^{p'}$, pues

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|^{p'}\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^m)^{p'}}\, dx < \infty.$$

Ahora

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\, dx \right| \leqslant \|f\|_p \|\phi\|_{p'} < \infty$$

por el Teorema 2.7. Como $L_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)\, dx \implies L_f \in \mathscr{S}'$. De esta forma, hemos visto que podemos establecer una relación entre los elementos de $L^p(\mathbb{R}^n)$ y los de $\mathscr{S}$, tomando la función $g : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}'$, $f \longmapsto L_f$, por lo que vemos que en efecto, a través de esta función g, toda función de $L^p(\mathbb{R}^n)$ es elemento de $\mathscr{S}'$, lo que demuestra el enunciado.

Ya hemos visto la definición de derivada distribucional, veamos ahora algunas otras operaciones entre distribuciones. Teniendo en cuenta la definición de convolución de dos funciones vista en la Definición 2.28, veamos las características de la misma.

Corolario 3.30 (Desigualdad de Young)**.** *Si* $f \in L^p$ *y* $g \in L^q$*, entonces* $f * g \in L^r$ *con* $1/p + 1/q = 1/r + 1$ *y*

$$\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demostración. Fijando $f \in L^p$, es inmediato que

$$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_1 \text{ y}$$

$$\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'},$$

y empleando [3, Teorema 1.42] a $Tg = f * g$. □

Definición 3.31. Sea $h \in \mathbb{R}^n$, denotamos por τ_h al operador traslación que cumple

$$(\tau_h u)(x) = u(x - h).$$

Un operador lineal acotado A de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^q(\mathbb{R}^n)$ se dice invariante por traslaciones si

$$\tau_h A = A \tau_h.$$

Definición 3.32. Sean $T \in \mathscr{S}'(\Omega)$, $g \in \mathscr{S}(\Omega)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Definimos la convolución de T y g como

$$(T * g)(x) = T(\tau_x \bar{g}),$$

con la definición de $\bar{g}$ dada en la Definición 2.29.

Observación 3.33. La definición tiene sentido pues $\tau_x \bar{g} \in \mathscr{S}$. $\tau_x \bar{g}$ es continua ya que g y $\bar{g}$ lo son. Por otro lado, es fácil ver que $\tau_x(f + g) = \tau_x f + \tau_x g$, lo que prueba que τ_x es lineal.

Observación 3.34. Para ver que esta definición es razonable veamos lo siguiente. Sabemos que la definición de una convolución entre una función y una distribución debe ser una extensión a las distribuciones de la convolución ordinaria, es decir, si aplicamos la definición que planteamos a dos funciones, debe coincidir con su convolución.
Vamos a tomar como distribución T la función L_f, donde $f \in C^\infty$ y tiene soporte compacto y $g \in \mathscr{S}$, con $L_f(g) = \int fg$. Veamos primero que efectivamente L_f es una distribución. La linealidad es directa, pues

$$L_f(\phi + \psi) = L_f(\phi) + L_f(\psi), \text{ por la linealidad de la integral.}$$

Por otra parte, la función es continua por ser $f \in L^1_{\text{loc}}$, por lo que L_f está bien definida. Entonces

$$L_f * g = \int g(x - y) f(y)\, dy = \int \bar{g}(y - x) f(y)\, dy = L_f(\tau_x \bar{g}),$$

donde $\bar{g} \in \mathscr{S}$. Como esta nueva definición conserva las propiedades de la convolución, podemos extrapolarla a una distribución cualquiera.

Veamos ahora algunas propiedades de la transformada de Fourier.

Teorema 3.35. *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces*

a) $(\widehat{\tau_h f})(\xi) = e^{-2\pi i\xi h}\widehat{f}(\xi)$.

b) $(\widehat{e^{2\pi ixh}f(x)})(\xi) = \tau_h \widehat{f}(\xi)$.

c) $(\widehat{f * g})(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$.

d) *Si* $\lambda > 0$ *y* $h(x) = f(x/\lambda)$, *entonces* $\widehat{h}(\xi) = \lambda^n \widehat{f}(\lambda\xi)$.

Demostración. a) $(\widehat{\tau_h f})(\xi) = \int(\tau_h f)\cdot e^{-2\pi ix\xi} = \int f\cdot\tau_{-h}\cdot e^{-2\pi ix\xi} = \int f \cdot e^{-2\pi i\xi h} \cdot e^{-2\pi ix\xi} = e^{-2\pi i\xi h}(\xi)\widehat{f}(\xi)$.

b) $(\widehat{e^{2\pi ixh}f(x)})(\xi) = \int e^{2\pi ixh} \cdot f \cdot e^{-2\pi ix\xi} = \int f \cdot e^{-2\pi i(\xi-h)x} = (\tau_x \widehat{f})(\xi)$.

c) Se obtiene empleando el Teorema de Fubini.

d) Aplicamos un cambio de variable en la definición de $\widehat{f}$.

□

Definición 3.36. Sea $u \in \mathscr{S}'$, definimos $\widehat{u}(\phi) = u(\widehat{\phi})$.

Observación 3.37. Veamos que la definición es coherente. Tomamos L_f la misma que en la Observación 3.34. Tenemos entonces que, aplicando el Teorema de Fubini,

$$\widehat{L_f}(\phi) = L_{\widehat{f}}(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\,dx = L_f(\widehat{\phi}).$$

Teorema 3.38. *Sean $\phi \in \mathscr{S}$ y $u \in \mathscr{S}'$. Entonces*

a) $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, *y*
$$D^\alpha(u * \phi) = (D^\alpha u) * \phi = u * (D^\alpha \phi)$$
para todo multi-índice α.

b) *El valor absoluto de $u * \phi$ está mayorado por un polinomio, es decir, $u * \phi \in \mathscr{S}'$.*

c) $\widehat{(u * \phi)} = \widehat{\phi}\widehat{u}$.

d) $(u * \phi) * \psi = u * (\phi * \psi)$, *para cada $\psi \in \mathscr{S}$.*

e) $\widehat{u} * \widehat{\phi} = \widehat{(\phi u)}$.

Demostración. Véase [7, Teorema 7.19]. □

Capítulo 4

Teorema del Núcleo de Hörmander

En este capítulo veremos uno de los teoremas más importantes de este trabajo, el teorema del núcleo de Hörmander, que nos permite expresar un operador que cumple ciertas propiedades como una convolución de una función con una distribución, conceptos que definiremos en este capítulo. Veamos los siguientes teoremas y definiciones, donde se tomará como medida la de Lebesgue.

Definición 4.1. Se dice que un operador A es acotado si cumple

$$\|Ax\| \leqslant C\|x\|$$

para todo $x \in A$. Al mínimo valor de C, que se denota por $\|A\|$, se llama norma del operador A.

Recordamos la definición de operador invariante por traslaciones.

Definición 4.2. Sea $h \in \mathbb{R}^n$, denotamos por τ_h al operador traslación que cumple

$$(\tau_h u)(x) = u(x-h).$$

Un operador lineal acotado A de $L^p(\mathbb{R}^n)$ a $L^q(\mathbb{R}^n)$ se dice invariante por traslaciones si

$$\tau_h A = A\tau_h.$$

Recordamos $\bar{u}$ de la Definición 2.29 como $\bar{u}(y) = u(-y)$.

Teorema 4.3. *Sea A es un operador acotado invariante por traslaciones de $L^p(\mathbb{R}^n)$ a $L^q(\mathbb{R}^n)$ y $p > q \geqslant 1$, entonces $A = 0$ si $p < \infty$ y coincide con la restricción de A a $L_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ si $p = \infty$.*

Demostración. Lo primero que observamos es que si $p < \infty$, $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$

$$\|u + \tau_h u\|_p \to 2^{1/p}\|u\|_p,\ h \to \infty; \tag{4.1}$$

lo mismo ocurre para $p = \infty$ dado $u \in L_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. En el caso de $p < \infty$, esto ocurre debido a que las funciones con soporte compacto en $L^p(\mathbb{R}^n)$ son densas en el propio espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$.

De esta forma, podemos tomar funciones v, w de forma que $u = v + w$, v tiene soporte compacto y $\|w\|_p < \epsilon$. Esta descomposición nos servirá para probar la observación del comienzo de la demostración. Tomamos ahora un $|h|$ lo suficientemente grande como para que se cumpla que los soportes de v y de $\tau_h v$ sean disjuntos, de modo que

$$\|v + \tau_h v\|_p = 2^{1/p}\|v\|_p.$$

Veámoslo; sea K tal que $\mathrm{sop}(v) \subset K$:

$$\begin{aligned}\|v + \tau_h v\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |v(x) + v(x-h)|^p dx = \int_K |v(x)|^p dx + \int_{K+h} |v(x-h)|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|^p dx + \int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|^p dx = 2\|v\|_p^p.\end{aligned}$$

De esta forma

$$\lim_{|h|\to\infty} \|v + \tau_h v\|_p = 2^{1/p}\|v\|_p.$$

Además sabemos que $\Big|\|v\|_p - \|u\|_p\Big| < \epsilon$ y $\Big|\|v + \tau_h v\|_p - \|u + \tau_h u\|_p\Big| < 2\epsilon$, veamos entonces (4.1). Sea $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C(\mathbb{R}^n)$ tal que $v_k \xrightarrow{L^p} u$, $k \to \infty$. Entonces, para toda $h \in \mathbb{R}^n$, $\tau_h v_k \xrightarrow{L^p} \tau_h u$, $k \to \infty$. Dado $\delta > 0$, sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|v_{k_0} - u\|_p < \min\left\{\frac{\delta}{3\cdot 2^{1/p}}, \frac{\delta}{6}\right\}.$$

Fijado $k_0 \in \mathbb{N}$, sabemos que existe un $N > 0$ tal que si $|h| > N$, entonces

$$\Big|\|v_{k_0} + \tau_h v_{k_0}\|_p - 2^{1/p}\|v_{k_0}\|_p\Big| < \frac{\delta}{3}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\Big|\|u + \tau_h u\|_p - \|u\|_p\Big| &\leqslant \Big|\|u + \tau_h u\|_p - \|v_{k_0} + \tau_h v_{k_0}\|_p\Big| + \Big|\|v_{k_0} + \tau_h v_{k_0}\|_p - 2^{1/p}\|v_{k_0}\|_p\Big| \\ &+ \Big|2^{1/p}\|v_{k_0}\|_p - 2^{1/p}\|u\|_p\Big| \leqslant \|u - v_{k_0}\|_p + \|\tau_h u - \tau_h v_{k_0}\| + \frac{\delta}{3} \\ &+ 2^{1/p}\|v_{k_0} - u\|_p \leqslant 2\|u - v_{k_0}\|_p + \frac{\delta}{3} + 2^{1/p}\frac{\delta}{3\cdot 2^{1/p}} \\ &\leqslant 2\cdot\frac{\delta}{6} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta\end{aligned}$$

si $|h| > N$. Obtenemos por tanto finalmente que $\Big|\|u + \tau_h u\|_p - \|u\|_p\Big| < \delta$ si $|h| > N$, de modo que queda probado (4.1). Asumamos ahora

$$\|Au\|_q \leqslant C\|u\|_p, \quad u \in L^p(\mathbb{R}^n), \tag{4.2}$$

con $q < p < \infty$. La linealidad y la invariancia por traslaciones de A nos da

$$\|Au + \tau_h Au\|_q = \|A(u + \tau_h u)\|_q \leqslant C\|u + \tau_h u\|_p.$$

Cuando $h \to \infty$ se sigue de (4.1) que

$$\|Au\|_q \leqslant 2^{1/p-1/q}\, C\, \|u\|_p,$$

lo cual mejora la cota previamente obtenida en (4.2) puesto que el exponente es negativo. Podemos considerar que C denota el mínimo valor con el que se verifica la desigualdad de (4.2), de este modo entramos en contradicción con la minimalidad de la cota salvo que $C = 0$, o lo que es lo mismo, $A = 0$. Podemos aplicar el mismo argumento si $p = \infty > q \geqslant 1$ reemplazando $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ por $L_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Con esto, la prueba queda terminada. $\square$

Antes de probar el siguiente teorema, veamos algunos resultados previos que necesitaremos de cara a su demostración. Veamos que el cociente incremental de una función $u \in \mathscr{S}$ coincide con lo esperado, es decir, es la derivada parcial, así como otros lemas previos.

Lema 4.4. *Sea $\phi \in \mathscr{S}$, $h > 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\phi(x_1, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - \phi(x)}{h} \right|^p dx \leqslant \|\partial x_j \phi\|_p^p.$$

Demostración. Primero vemos que

$$\frac{\phi(x_1, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - \phi(x)}{h} = D_{j,h}\phi(x) = \frac{1}{h} \int_0^h \partial x_j \phi(x_1, \ldots, x_j + t, \ldots, x_n)\, dt,$$

entonces

$$\|D_{j,h}\phi\|_p \leqslant \frac{1}{h} \int_0^h \|\partial x_j \phi(x_1, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n)\|_p\, dt = \frac{1}{h} \|\partial x_j \phi\|_p \int_0^h dx = \|\partial x_j \phi\|_p,$$

pues $\displaystyle\int_0^h dx = h$. Finalmente obtenemos la desigualdad

$$\|D_{j,h}\phi\|_p \leqslant \|\partial x_j \phi\|_p, \text{ y equivalentemente, } \|D_{j,h}\phi\|_p^p \leqslant \|\partial x_j \phi\|_p^p,$$

lo que completa la demostración. $\square$

Finalmente llegamos al resultado que buscamos.

Lema 4.5. *Sea $\phi \in \mathscr{S}$, $1 \leqslant p < \infty$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$, entonces*

$$\left\| \frac{\phi(x_1, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - \phi(x)}{h} - \partial x_j \phi(x) \right\|_p \xrightarrow{h \to 0} 0.$$

Demostración. Como $D_{j,h}\phi \longrightarrow \partial x_j \phi$ a.e. x, por el Lema 4.4 obtenemos

$$\|D_{j,h}\phi\|_p \leqslant \|\partial x_j \phi\|_p.$$

De este modo y por el Lema 2.3, llegamos a que

$$\|D_{j,h}\phi - \partial x_j \phi\|_p \xrightarrow{h \to 0} 0.$$

Esto concluye la prueba. $\square$

Lema 4.6. *Sea A un operador acotado invariante por traslaciones de L^p a L^q y $u \in \mathscr{S}$, entonces se cumple*

$$D^\alpha(Au) = A(D^\alpha u) \tag{4.3}$$

en el sentido de las distribuciones.

Demostración. Para probar esto es suficiente considerar la derivada de primer orden. Sea $v = Au$ y definimos $u_h(x) = u(x_1 + h, x_2, \dots, x_n)$ y $v_h(x)$ de forma equivalente. Como A es invariante por traslaciones tenemos que $Au_h = v_h$ y entonces

$$A\left(\frac{u_h - u}{h}\right) = \frac{v_h - v}{h}.$$

Tomando $h \to 0$, por el Lema 4.5, $(u_h - u)/h$ converge a $\partial u/\partial x_1$ en L^p, vemos entonces que $(v_h - v)/h$ converge a $A(\partial u/\partial x_1)$ con la norma de L^q. Queda con esto visto (4.3). □

Lema 4.7. *Si una función v en $\mathbb{R}^n$ y sus derivadas de orden k con $k \leqslant n$ son localmente L^p, podemos redefinir v en un conjunto de medida nula para hacerla continua. Entonces, existe una constante C*

$$|v(x)| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant n} \left(\int_{|y-x| \leqslant 1} |D^\alpha v(y)|^p \, dy \right)^{1/p}. \tag{4.4}$$

Demostración. Las suposiciones acerca de v se satisfacen también con $p = 1$ y (4.4) se sigue del Teorema 2.7 para todo p si se prueba para $p = 1$. Supongamos ahora que $x = 0$ y que v tiene soporte compacto en la esfera unidad. Sea ϕ una función de C_0^∞ con soporte en la esfera unidad y que tenga valor igual a 1 en un entorno del 0. Sea ahora $w = v\phi$, que tiene soporte compacto en la esfera unidad. La fórmula de las derivadas de Leibniz nos da

$$\sum_{|\alpha| \leqslant n} \int |D^\alpha w(y)| \, dy \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant n} \left(\int_{|y| \leqslant 1} |D^\alpha v(y)| \, dy \right).$$

Entonces, si probamos el lema para w, obtendremos que v es continua en un entorno del origen salvo como mucho en un conjunto de medida nula y que (4.4) es válido para $x = 0$. El enunciado general del lema se sigue de su invariancia por traslaciones. Sea $h(x) = H(x_1) \dots H(x_n)$ donde H es la función de Heaviside, la cual vale 1 si $x \geqslant 0$ y 0 si $x < 0$. Entonces, aplicando el Ejemplo 3.19:

$$\frac{\partial^n h}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = \delta$$

en el sentido de las distribuciones. Ahora, como w tiene soporte compacto, tenemos que, aplicando la definición de convolución en el sentido distribucional, $(w * \delta) = \delta(\bar{w}_x) = \bar{w}_x(0) = w(x)$, a partir de lo cual obtenemos

$$w = w * \delta = w * \frac{\partial^n h}{\partial x_1 \dots \partial x_n} = \frac{\partial^n w}{\partial x_1 \dots \partial x_n} * h.$$

En la parte derecha tenemos una convolución entre una función integrable y una acotada, y por tanto una función continua. w se diferencia de esta función continua únicamente en un conjunto de medida nula, y cambiando su definición obtenemos

$$|w(x)| \leqslant \int \left| \frac{\partial^n w}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \right| dx,$$

lo que completa la prueba. □

Teorema 4.8. *Sea A es un operador invariante por traslaciones acotado de $L^p(\mathbb{R}^n)$ a $L^q(\mathbb{R}^n)$, entonces hay una única distribución $T \in \mathscr{S}'$ tal que*

$$Au = T * u,\ u \in \mathscr{S}.$$

Demostración. Por el Lema 4.7 podemos modificar la función Au en un conjunto de medida nula para que sea continua si $u \in \mathscr{S}$, obteniendo

$$\big|(Au)(0)\big| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant n} \|D^\alpha u\|_p.$$

Como, por el Teorema 3.23, $(Au)(0)$ es una forma lineal continua en $\mathscr{S}$ podemos escribirlo como

$$(Au)(0) = T(\bar{u}) = (T * \bar{u})(0),$$

donde $\bar{u}$ queda descrito en la Definición 2.29 y $T \in \mathscr{S}'$. Dado que ambos lados de la igualdad son invariantes por traslaciones, obtenemos

$$(Au)(x) = (T * \bar{u})(x)$$

para todo x, lo que prueba el teorema debido a que la unicidad de T se sigue de la demostración. Si $p < \infty$, el espacio $\mathscr{S}$ es denso en L^p y el operador A se toma como la clausura de $u \to T * u$. Si $p = \infty$ y $q < \infty$, tenemos que $T = 0$ por el Teorema 4.3. Por último, si $p = q = \infty$, la distribución T es una medida acotada. □

Capítulo 5

Multiplicadores de Fourier

En este capítulo comenzaremos a trabajar con los conceptos de los multiplicadores de Fourier, así como desarrollar resultados relativos a ellos.

Definición 5.1. Llamamos L_p^q al espacio de las distribuciones $T \in \mathscr{S}'$ tales que

$$\|T * u\|_q \leqslant C\|u\|_p \ , \ u \in \mathscr{S} \tag{5.1}$$

donde C es una constante. La menor constante que cumple la desigualdad (5.1) la denotamos por $L_p^q(T)$.

Definición 5.2. El conjunto de transformadas de Fourier $\widehat{T}$ de distribuciones $T \in L_p^q$ se denota por M_p^q y $M_p^q(\widehat{T}) = L_p^q(T)$. A los elementos de M_p^q los llamamos multiplicadores del tipo (p, q).

Teorema 5.3. *Sea $T \neq 0$ una distribución. El conjunto de los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T \in L_{1/x}^{1/y}$ es un subconjunto convexo del triángulo*

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \ 0 \leqslant y \leqslant 1, \ y \leqslant x, \tag{5.2}$$

que es simétrico respecto a la recta $x + y = 1$.

Demostración. Ver demostración en [5, Teorema 1.3]. □

Teorema 5.4. *Se cumplen las siguientes igualdades*

$$L_p^\infty = L_1^{p'} = L^{p'}, \ p < \infty; \ L_\infty^\infty = L_1^1 = M,$$

donde también se dan las igualdades de las respectivas normas.

Demostración. En virtud del Teorema 5.3, es suficiente probar que $L_p^\infty = L^{p'}$ y que $L_\infty^\infty = M$. La primera igualdad se deduce de que $L^{p'}$ es el dual de L^p cuando $p < \infty$, y por otro lado, la segunda desigualdad es la definición de medida acotada, dada al final de la demostración del Teorema 4.8. □

Corolario 5.5. *$T \in L_{1/x}^{1/y}$ para todo (x, y) del triángulo (5.2) si y sólo si $T \in L^1 \cap L^\infty$.*

Demostración. Ver [5, Corolario 1.1]. □

Corolario 5.6. *Sea $p \leqslant q$ y $1/p - 1/q = 1 - 1/a$. Entonces tenemos que $L_a \subset L_p^q$ y*

$$L_p^q(f) \leqslant \|f\|_a. \tag{5.3}$$

Además, si $a = 1$, podemos sustituir L^1 por M.

Demostración. Por el Teorema 5.4 el corolario se cumple para $p = a'$, $q = \infty$ y para $p = 1$, $q = a$. El caso general se deduce de las propiedades de la convexidad del Teorema 5.3. Vemos que de hecho (5.3), es exactamente

$$\|f * u\|_q \leqslant \|f\|_a \|u\|_p,\ f \in L^a,\ u \in \mathscr{S}.$$

Con esto quedaría probado. □

Teorema 5.7. *$M_2^2 = L^\infty$ y también se da la igualdad de las normas.*

Demostración. Sea $T \in L_2^2$, de modo que $\widehat{T} \in M_2^2$. Entonces $T * u \in L^2$ para todo $u \in \mathscr{S}$, por lo que la transformada de Fourier $\widehat{T}\widehat{u} \in L^2$, y

$$\|\widehat{T}\widehat{u}\|_2 = \|T * u\|_2 \leqslant L_2^2(T)\|u\|_2 = M_2^2(\widehat{T})\|\widehat{u}\|_2$$

para todo $\widehat{u} \in \mathscr{S}$. Esto prueba que $\widehat{T}$ es localmente L^2 y entonces que $|\widehat{T}(\xi)| \leqslant M_2^2(\widehat{T})$ en casi todo punto. Por otro lado, si $|\widehat{T}(\xi)| \leqslant C$ en casi todo punto, el mismo argumento prueba que $M_2^2(\widehat{T}) \leqslant C$. Así, $M_2^2(\widehat{T})$ es el supremo de $\widehat{T}$, lo que prueba el teorema. □

Antes de ver el siguiente resultado, comentaremos el Teorema de Diferenciación de Lebesgue, resultado que necesitaremos más adelante.

Corolario 5.8 (Teorema de Diferenciación de Lebesgue)**.** *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} f(x - y)\, dy = f(x),\ a.e.\ x.$$

Por tanto, concluimos que $|f(x)| \leqslant Mf(x)$, a.e. x.

Teorema 5.9. *Sea $M_p^q = \{m$ tales que $T_m \colon L^p \longrightarrow L^q\}$, se tienen los siguientes resultados:*

a) Si $p > q$, $M_p^q = \{0\}$.

b) Si $p = q = 2$, $M_2^2 = L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

c) $M_p^q = M_{q'}^{p'}$ y $M_p^p = M_{p'}^{p'}$.

Demostración. a) Se deduce del Teorema 4.3.

b) Para ver esta igualdad veamos el doble contenido. Veamos primero $L^\infty \subset M_2^2$. Sea $m \in L^\infty$, queremos ver si T_m está acotado de L^2 en L^2. Tenemos que $\widehat{T_m f} = m \cdot \widehat{f}$ y empleando la Proposición 2.38:

$$\|T_m f\|_2 = \|\widehat{T_m f}\|_2 = \|m\widehat{f}\|_2 \leqslant \|m\|_\infty \|\widehat{f}\|_2 = \|m\|_\infty \|f\|_2,$$

por lo que concluimos que $\|T_m\|_{L^2 \to L^2} \leqslant \|m\|_\infty$. Para comprobar que $M_2^2 \subset L^\infty$, supongamos que $T_m \colon L^2 \longrightarrow L^2$. Sean $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ y $f \in L^2$ de modo que $\widehat{f}(y) = \dfrac{1}{|\sqrt{B(x,r)}|} \chi_{B(x,r)}(y) \in L^2$. Por lo tanto,

$$\|T_m f\|_2^2 = \|\widehat{T_m f}\|_2^2 = \|m\widehat{f}\|_2^2 \leqslant C\|\widehat{f}\|_2^2,$$

y análogamente

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |m(y)|^2 \, dy \leqslant C \frac{1}{|B(x,r)|} |B(x,r)| = C.$$

Haciendo tender $r \to 0$, podemos aplicar el Corolario 5.8, llegando a que $|m(x)|^2 \leqslant C$ a.e. $x \Longrightarrow m \in L^\infty$.

c) Comenzamos comprobando la primera afirmación. Sea $T \in M_p^q$, es decir, $T \colon L^p \to L^q$ está acotado. Veamos entonces que $T \in M_{q'}^{p'}$, es decir, que T es un operador de $L^{q'}$ en $L^{p'}$. Nos paramos primero a ver que podemos definir la relación entre los espacios L^p y $L^{p'}$ como

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) \, dx,$$

con $f \in L^p, g \in L^{p'}$, que está bien definido por el Teorema 2.7. Definimos ahora el operador adjunto de T como $T^* \colon L^{q'} \to L^{p'}$ de modo que satisface:

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, T^* g \rangle, \text{ para todo } f \in L^p, g \in L^{q'}. \tag{5.4}$$

Como partimos de que T es acotado, existirá una constante C tal que para toda función $f \in L^p$,

$$\|Tf\|_{L^q} \leqslant C\|f\|_{L^p}.$$

De este modo

$$|\langle Tf, g \rangle| \leqslant \|Tf\|_{L^q} \|g\|_{L^{q'}} \leqslant C\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{q'}}. \tag{5.5}$$

Ahora, uniendo lo obtenido en (5.4) y en (5.5), llegamos a la conclusión de que T^* debe ser acotado de $L^{q'}$ en $L^{p'}$, y de hecho, debe serlo con la misma constante C. De esta manera, hemos probado que si tomamos un operador $T \in M_p^q$, entonces su operador adjunto $T^* \in M_{q'}^{p'}$. Repitiendo el proceso en el sentido inverso, llegaríamos a que si $T' \in M_{q'}^{p'}$, su operador adjunto $T'^* \in M_p^q$, de modo que podemos concluir que los espacios M_p^q y $M_{q'}^{p'}$ mantienen una relación de dualidad, con lo que llegamos a que $M_p^q = M_{q'}^{p'}$. Para terminar, vemos que el caso $M_p^p = M_{p'}^{p'}$, es simplemente una particularización del caso general cuando $p = q$, por lo que se deduce de la demostración previa.

□

Teorema 5.10. *Sean $1 \leqslant p_0, p_1, q_0, q_1 \leqslant \infty$, $0 < \theta < 1$ y definamos p y q como*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \ \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Si T es un operador lineal de $L^{p_0} + L^{p_1}$ en $L^{q_0} + L^{q_1}$ tal que

$$\|Tf\|_{q_0} \leqslant M_0 \|f\|_{p_0} \ \textit{para} \ f \in L^{p_0}$$

$$\|Tf\|_{q_1} \leqslant M_1 \|f\|_{p_1} \ \textit{para} \ f \in L^{p_1},$$

entonces,

$$\|Tf\|_q \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_p \ \textit{para} \ f \in L^p.$$

Demostración. Puede encontrarse en [3, Teorema 1.42]. □

Observación 5.11. Por el Teorema 5.10, sean $T_1 \colon L^p \longrightarrow L^p$, $T_2 \colon L^{p'} \longrightarrow L^{p'}$ con $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant p' \leqslant \infty$, entonces la aplicación $T \colon L^r \longrightarrow L^r$ está bien definida para toda r tal que $p \leqslant r \leqslant p'$. Además si $p \leqslant r \leqslant 2 \Longrightarrow M_p^p \subsetneq M_r^r \subsetneq M_2^2 = L^\infty$.

Corolario 5.12. *Para todo p tenemos que $M_p^p \subset L^\infty$, y $\|f\|_\infty \leqslant M_p^p(f)$, $f \in M_p^p$.*

Demostración. Ver [5, Corolario 1.3]. □

Teorema 5.13. *Se satisfacen las siguientes inclusiones:*

$$M_p^q \subset L_{loc}^p \ \ \textit{si} \ \ p \geqslant 2; \ \ M_p^q \subset L_{loc}^{q'} \ \ \textit{si} \ \ q \leqslant 2. \tag{5.6}$$

Demostración. Como $M_p^q = M_{q'}^{p'}$ por el Teorema 4.8, es suficiente probar la segunda mitad de (5.6). Sea $T \in L_p^q$, $q \leqslant 2$. Para todo $u \in \mathscr{S}$ tenemos que $T*u \in L^q$ y por el Teorema 2.44, obtenemos que $\widehat{T}\widehat{u} \in L^{q'}$, para todo $u \in \mathscr{S}$, y por tanto, para todo $\widehat{u} \in \mathscr{S}$. Esto prueba el teorema. □

Teorema 5.14. *Sea $2 \leqslant p \leqslant q \leqslant r$ o $p \leqslant q \leqslant r \leqslant 2$. Entonces si $f \in M_p^q$ y $g \in M_q^r$ tenemos que $fg \in M_p^r$ y*

$$M_p^r(fg) \leqslant M_p^q(f) M_q^r(g).$$

El operador invariante por traslaciones correspondiente a fg es el producto de los correspondientes a las funciones f y g.

Demostración. Véase [5, Teorema 1.7]. □

Corolario 5.15. *Para todo p, M_p^p es un anillo normado con las operaciones de suma y producto.*

Teorema 5.16. *Sea $f \in M_p^q$ y $g \in \mathscr{S}$, tenemos*

$$gf \in M_r^q \text{ si } r \leqslant p;\ gf \in M_p^s \text{ si } s \geqslant q.$$

Demostración. Véase [5, Teorema 1.8]. □

Veamos a continuación uno de los resultados más importantes demostrados recientemente, el Teorema del multiplicador de la bola. Se quería estudiar un problema de acotación de p tal que $m \in M_p^p$, siendo m la función característica de la bola, para $1 < p \leqslant 2 \leqslant p' < \infty$, siendo p, p' coeficientes conjugados. Hasta un cierto momento, se sabía que dicha p, debía ser estrictamente mayor que 1 y menor o igual a 2, y por simetría, que p' debía ser mayor o igual que 2 y estrictamente menor que infinito, pero no fue hasta 1973, cuando Charles Fefferman probó que la función característica de la bola pertenece a $M_p^p \Longleftrightarrow p = 2$.

Teorema 5.17 (Teorema del multiplicador de la bola)**.** *Sea $m = \chi_B$, siendo B la bola de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que $\widehat{T_B f} = \chi_B \widehat{f}$, donde $T_B f(x) = \int_B \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi}\, d\xi$, entonces podemos dividir el estudio de p para que $m \in M_p^p$ en los siguientes dos casos:*

- *Si $n = 1$, entonces $m \in M_p$, con $1 < p < \infty$.*
- *Si $n \geqslant 2$, entonces $m \in M_p \Longleftrightarrow p = 2$.*

Ejemplo 5.18 (Transformada de Hilbert)**.** Definimos la transformada de Hilbert Hf como:

$$Hf(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{x-y}\, dy = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x-y)}{y}\, dy,$$

donde

$$\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x-y)}{y}\, dy = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon < |y| < 1/\epsilon} \frac{f(x-y)}{y}\, dy.$$

Para aplicar la transformada de Fourier a Hf, realizamos un paso previo, que es darnos cuenta de que podemos expresar Hf en términos de una convolución, de modo que

$$Hf(x) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{x-y}\, dy = \left(\text{v.p.} \left(\frac{1}{x} \right) * f \right)(x).$$

Ahora, aplicando el segundo apartado de 2.35, llegamos a que

$$\widehat{Hf}(\xi) = \left(\widehat{\text{v.p.} \left(\frac{1}{x} \right) * f} \right)(\xi) = \left(\widehat{\text{v.p.} \left(\frac{1}{x} \right)} \right)(\xi) \cdot \widehat{f}(\xi). \tag{5.7}$$

Calculemos ahora

$$\left(\widehat{\text{v.p.} \left(\frac{1}{x} \right)} \right)(\xi).$$

Definimos la transformada de Fourier de v.p.$\left(\dfrac{1}{x}\right)$ como

$$\left(\widehat{\text{v.p.}\left(\frac{1}{x}\right)}\right)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{v.p.}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-2\pi i x\xi}\, dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon<|x|<1/\epsilon} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{x}\, dx.$$

Por otro lado conocemos la siguiente igualdad $e^{-2\pi i x\xi} = \cos(2\pi x\xi) - i\,\text{sen}(2\pi x\xi)$, por lo que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon<|x|<1/\epsilon} \frac{e^{-2\pi i x\xi}}{x}\, dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon<|x|<1/\epsilon} \frac{\cos(2\pi x\xi) - i\,\text{sen}(2\pi x\xi)}{x}\, dx.$$

Examinemos ambas integrales por separado. Por un lado, la función $\cos(2\pi x\xi)$ tiene simetría par, y por otro, la función $\dfrac{1}{x}$ tiene simetría impar, por lo que el producto $\dfrac{\cos(2\pi x\xi)}{x}$ tiene simetría impar y

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon<|x|<1/\epsilon} \frac{\cos(2\pi x\xi)}{x}\, dx = 0.$$

Por otra parte, la función $\text{sen}(2\pi x\xi)$ tiene simetría impar, y como $\dfrac{1}{x}$ tiene también simetría impar, el producto $\dfrac{\text{sen}(2\pi x\xi)}{x}$ tiene simetría par. De este modo, reducimos el cálculo a

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon<|x|<1/\epsilon} \frac{\cos(2\pi x\xi) - i\,\text{sen}(2\pi x\xi)}{x}\, dx = -i \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon<|x|<1/\epsilon} \frac{\text{sen}(2\pi x\xi)}{x}\, dx.$$

Al estar trabajando en $\mathbb{R}^n$, podemos olvidarnos de la unidad imaginaria, y enfocarnos en resolver la integral

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon<|x|<1/\epsilon} \frac{\text{sen}(2\pi x\xi)}{x}\, dx.$$

Distinguimos dos casos:

- Si $\xi > 0$, entonces aplicando el cambio de variable $u = 2\pi x\xi$, tenemos que

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon<|x|<1/\epsilon} \frac{\text{sen}(2\pi x\xi)}{x}\, dx = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon<|x|<1/\epsilon} \frac{\text{sen}(u)}{u}\, du = \pi.$$

- Si $\xi < 0$, entonces tenemos que $\text{sen}(2\pi x(-\xi)) = -\text{sen}(2\pi x\xi)$, ahora con $\xi > 0$. Aplicando el cambio de variable $u = 2\pi x\xi$, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon<|x|<1/\epsilon} \frac{\text{sen}(2\pi x(-\xi))}{x}\, dx &= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon<|x|<1/\epsilon} \frac{-\text{sen}(2\pi x\xi)}{x}\, dx \\ &= -\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon<|x|<1/\epsilon} \frac{\text{sen}(u)}{u}\, du = -\pi.\end{aligned}$$

De este modo, podemos expresar

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon<|x|<1/\epsilon}\frac{\operatorname{sen}(2\pi x\xi)}{x}\,dx=\pi\operatorname{sgn}(\xi),$$

de donde concluimos que

$$\left(\widehat{\text{v.p.}\left(\frac{1}{x}\right)}\right)(\xi)=-\pi\operatorname{sgn}(\xi).$$

Ahora, por una cuestión de consistencia en la definición de la transformada de Fourier, reescribimos la expresión como

$$\left(\widehat{\text{v.p.}\left(\frac{1}{x}\right)}\right)(\xi)=\operatorname{sgn}(\xi). \tag{5.8}$$

Uniendo lo obtenido en (5.7) y (5.8), llegamos a la conclusión de que

$$\widehat{Hf}(\xi)=\operatorname{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi),$$

donde la función $\operatorname{sgn}(x)$, estaba definida de la siguiente forma:

$$\operatorname{sgn}(x)=\left\{\begin{array}{c}1 \text{ si } x>0\\ 0 \text{ si } x=0\\ -1 \text{ si } x<0\end{array}\right. .$$

Por otro lado, podemos comprobar tomando $f=\chi_{(0,1)}$, que $Hf\notin L^1$. De hecho, se puede concluir que $H\in L_p \iff 1<p<\infty$ ayudándonos de [3, Teorema 2.5].

Bibliografía

[1] J. Cerdà, *Análisis Real*, Edicions de la Universitat de Barcelona, 1996.

[2] J. Cerdà, *Linear Functional Analysis*, Graduate Studies in Mathematics. Volumen 116, 2010.

[3] J. Duoandikoetxea, *Análisis de Fourier*, Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, 1991.

[4] M. De Guzmán y B. Rubio, *Integración: Teoría y Técnicas*, Editorial Alhambra, 1979.

[5] L. Hörmander, *Estimates for translation invariant operators in L^p spaces*, Acta Math. **104** (1960), 95-135.

[6] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer-Verlag, 1983.

[7] W. Rudin, *Análisis Funcional*, McGraw-Hill Book Company, 1979.

[8] M. Stein y G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, 1971.