MÉTODOS NUMÉRICOS

Resúmenes y problemas

Curso 23/24

Doble grado en Matemáticas e Informática

Facultad de Ciencias Matemáticas - UCM

Juan-Carlos Felipe-Navarro

CONTENIDOS:

Resúmenes

1. Método de Gauss

2. Métodos iterativos

3. Cálculo de funciones spline

Problemas

1. Representación de números y propiedades básicas de matrices

2. Métodos directos para sistemas lineales

3. Métodos iterativos

4. Interpolación, diferenciación e integración numérica

5. Integración numérica y resolución de ecuaciones no lineales

MÉTODOS NUMÉRICOS

Curso 2023-2024

MÉTODO DE GAUSS (RESUMEN)

$$\boxed{A\,x = b}$$

$$\begin{cases} A^{(1)} &= A \\ b^{(1)} &= b \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \mathcal{A}^{(1)} \\ \beta^{(1)} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} A^{(2)} \\ b^{(2)} \end{cases} \rightsquigarrow \;\cdots\cdots\; \rightsquigarrow \begin{cases} A^{(n)} &= U \\ b^{(n)} \end{cases}$$

$$\boxed{U\,x = b^{(n)}}$$

Permutación (paso $k \in \{1 : n-1\}$): $\quad (A^{(k)}, b^{(k)}) \rightsquigarrow (\mathcal{A}^{(k)}, \beta^{(k)})$

$$\text{Actualización de la matriz} \quad \begin{cases} \alpha_k^{(k)\,T} &= a_{i_k}^{(k)\,T} \\ \alpha_{i_k}^{(k)\,T} &= a_k^{(k)\,T} \\ \alpha_i^{(k)\,T} &= a_i^{(k)\,T} \quad \text{si} \quad i \neq k, i_k \end{cases}$$

$$\text{Actualización del termino independiente} \quad \begin{cases} \beta_k^{(k)} &= b_{i_k}^{(k)} \\ \beta_{i_k}^{(k)} &= b_k^{(k)} \\ \beta_i^{(k)} &= b_i^{(k)} \quad \text{si} \quad i \neq k, i_k \end{cases}$$

Eliminación (paso $k \in \{1 : n-1\}$): $\quad (\mathcal{A}^{(k)}, \beta^{(k)}) \rightsquigarrow (A^{(k+1)}, b^{(k+1)})$

$$\forall \;\; \text{fila } i \in \{k+1 : n\} \quad \begin{cases} l_{ik} &= \frac{\alpha_{ik}^{(k)}}{\alpha_{kk}^{(k)}} \qquad \text{multiplicador} \\ a_{ij}^{(k+1)} &= \alpha_{ij}^{(k)} - l_{ik}\,\alpha_{kj}^{(k)} \qquad \forall \;\; \text{col. } \; j \in \{k+1 : n\} \\ b_i^{(k+1)} &= \beta_i^{(k)} - l_{ik}\,\beta_k^{(k)} \end{cases}$$

Sustitución hacia atrás:

MÉTODOS NUMÉRICOS

Curso 2023-2024

Métodos iterativos para resolución de Sistemas Lineales: Resumen

---

Dada una matriz invertible A y el sistema lineal asociado

$$Ax = b$$

queremos definir una sucesión

$$x^k = B\,x^{k-1} + c$$

de forma que su limite (si existe) sea la solución del sistema lineal. Una forma de conseguir esto es descomponiendo la matriz $A = M - N$ con M una matriz invertible y tomando $B = M^{-1}N$ y $c = M^{-1}b$. La elección de las matrices M y N nos dará diferentes métodos iterativos. Para estudiar algunos de ellos, escribamos la matriz A de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} d_{11} & -f_{12} & \cdots & \cdots & -f_{1n} \\ -e_{21} & d_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -f_{n-1,n} \\ -e_{1,n-1} & \cdots & \cdots & -e_{n,n-1} & d_{nn} \end{pmatrix} = D - E - F.$$

Método de Jacobi:

$$\begin{cases} M = D \\ N = E + F \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} J := B = D^{-1}(E+F) \\ \quad c = D^{-1}b \end{cases}$$

El método iterativo componente a componente queda:

$$x_i^k = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\,x_j^{k-1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\,x_j^{k-1} \right) / a_{ii}.$$

Método de Gauss-Seidel:

$$\begin{cases} M = D - E \\ N = F \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{L}_1 := B = (D-E)^{-1}F \\ \quad c = (D-E)^{-1}b \end{cases}$$

El método iterativo componente a componente queda:

$$x_i^k = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\,x_j^{k} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\,x_j^{k-1} \right) / a_{ii}.$$

Método de Relajación Jacobi:

Si en cada paso k hacemos una media ponderada (con parámetro $w > 0$) entre el valor actual y el que nos daría el método de Jacobi obtenemos:

$$x^k = (1-w)\,x^{k-1} + w\,\left(Jx^{k-1} + c\right),$$

que componente a componente es

$$x_i^k = (1-w)x_i^{k-1} + w\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\,x_j^{k-1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\,x_j^{k-1}\right)/a_{ii}.$$

Este método se corresponde con la descomposición $A = M - N$ dada por

$$\begin{cases} M = \frac{D}{w} \\ N = E + F + \frac{1-w}{w}D \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} B = D^{-1}\Big(w(E+F) + (1-w)D\Big) \\ c = w\,D^{-1}b \end{cases}$$

Método de Relajación:

Del mismo modo, si en cada paso k hacemos una media ponderada (con parámetro $w > 0$) esta vez entre el valor actual y el que nos daría el método de Gauss-Seidel obtenemos:

$$x_i^k = (1-w)x_i^{k-1} + w\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\,x_j^{k} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\,x_j^{k-1}\right)/a_{ii},$$

que se corresponde con la descomposición $A = M - N$ dada por

$$\begin{cases} M = \frac{D}{w} - E \\ N = F + \frac{1-w}{w}D \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{L}_w := B = (D - wE)^{-1}\Big(wF + (1-w)D)\Big) \\ \quad c = w\,(D - wE)^{-1}b \end{cases}$$

Método de Relajación para Gauss-Seidel:

No confundir con hacer la ponderación a nivel "vectorial" en cada paso k:

$$x^k = (1-w)\,x^{k-1} + w\,\left(\mathcal{L}_1 x^{k-1} + c\right)$$

Este se corresponde con la descomposición dada por

$$\begin{cases} M = \frac{D-E}{w} \\ N = F + \frac{1-w}{w}(D-E) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} B = (D-E)^{-1}\Big(wF + (1-w)(D-E)\Big) \\ c = w\,(D-E)^{-1}b \end{cases}$$

Método de Relajación asociado a un iterativo general:

En general, dado un método iterativo $x^k = B\,x^{k-1} + c$, se puede definir uno de relajación asociado, de la forma:

$$x^k = (1-w)\,x^{k-1} + w\,\left(B\,x^{k-1} + c\right) = \Big(w\,B + (1-w)\,I\Big)\,x^{k-1} + w\,c$$

Además, si $B = M^{-1}\,N$ entonces $B_w := w\,B + (1-w)\,I$ también viene de una factorización $A = M_w - N_w$ de la matriz del sistema. Así es:

$$\begin{cases} M_w = \frac{M}{w} \\ N_w = N + \frac{1-w}{w}\,M_w \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} B_w = M^{-1}\Big(w\,N + (1-w)\,M\Big) \\ c_w = w\,c \end{cases}$$

MÉTODOS NUMÉRICOS

Curso 2023-2024

Cálculo de las funciones spline cúbicas

Dada una partición $\Delta = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$, el spline cúbica asociado queda determinado de manera única si conocemos las imágenes $y_i = s(x_i)$ y los momentos $M_i = s''(x_i)$. Así es,

$$\begin{aligned} S(x) = y_j &+ \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{M_{j+1} + 2M_j}{6}(x_{j+1} - x_j) \right)(x - x_j) \\ &+ \frac{M_j}{2}(x - x_j)^2 + \frac{M_{j+1} - M_j}{6\,(x_{j+1} - x_j)}(x - x_j)^3 \qquad \text{en} \quad x \in [x_j, x_{j+1}] \end{aligned}$$

Esta expresión se obtiene fácilmente tras imponer que la función sea un polinomio de grado tres en cada intervalo, así como los valores de la función y la segunda derivada en los extremos del intervalo. De esta forma se asegura que la función S y su segunda derivada S'' son funciones continuas en todo $[a, b]$. Veamos ahora que imponiendo continuidad de la primera derivada podemos determinar los momentos M_i, y por tanto el spline quedaría univocamente determinado a partir de las imágenes (y el tipo de spline).
Como la función $S \in C^2([a, b])$, en particular satisface

$$S'(x_j^-) = S'(x_j^+) \qquad \text{para todo} \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} S'(x) =& \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{M_{j+1} + 2M_j}{6}(x_{j+1} - x_j) + M_j(x - x_j) \\ &+ \frac{M_{j+1} - M_j}{2\,(x_{j+1} - x_j)}(x - x_j)^2 \qquad \text{en} \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \end{aligned}$$

obtenemos

$$S'(x_j^-) = \frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} + \frac{M_{j-1} + 2M_j}{6}(x_j - x_{j-1})$$

y

$$S'(x_j^+) = \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{M_{j+1} + 2M_j}{6}(x_{j+1} - x_j).$$

De esta forma obtenemos, para cada $j \in \{i, \ldots, n-1\}$

$$\frac{x_j - x_{j-1}}{6} M_{j-1} + \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{3} M_j + \frac{x_{j+1} - x_j}{6} M_{j+1} = \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}},$$

que es equivalente a

$$\frac{x_j - x_{j-1}}{x_{j+1} - x_{j-1}} M_{j-1} + 2M_j + \frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+1} - x_{j-1}} M_{j+1} = \frac{6}{x_{j+1} - x_{j-1}} \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \right).$$

Esto nos proporciona $n-1$ ecuaciones lineales. Para acabar de cerrar el problema (tantas ecuaciones como incógnitas) necesitamos otras dos ecuaciones. Éstas las obtendremos imponiendo el tipo de spline.

Tipo I: $S''(a) = S''(b) = 0$

En este caso las dos ecuaciones extra son triviales

$$M_0 = S''(x_0) = S''(a) = 0$$

y

$$M_n = S''(x_n) = S''(b) = 0.$$

Por tanto, los momentos son las únicas soluciones del sistema tridiagonal

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$\mu_j = \frac{x_j - x_{j-1}}{x_{j+1} - x_{j-1}}, \quad \lambda_j = \frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+1} - x_{j-1}} \ \text{ y } \ b_j = \frac{6}{x_{j+1} - x_{j-1}} \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \right).$$

Notad que los coeficientes λ_i, μ_i solo dependen de la partición Δ, son positivos y satisfacen $\lambda_i + \mu_i = 1$, lo cuál hace que la atriz del sistema sea de diagonal estrictamente dominante (y por tanto invertible).

Tipo II: $S'(a) = y_0'$ y $S'(b) = y_n'$

En este caso obtenemos por un lado

$$y_0' = S'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} - \frac{M_1 + 2M_0}{6}(x_1 - x_0),$$

que es equivalente a

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{x_1 - x_0} \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} - y_0' \right).$$

Del mismo modo obtenemos

$$y_n' = S'(x_n) = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} + \frac{M_{n-1} + 2M_n}{6}(x_n - x_{n-1}),$$

que es equivalente a

$$M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{x_n - x_{n-1}} \left(y_n' - \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \right).$$

Por tanto, los momentos son las únicas soluciones del sistema tridiagonal

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix},$$

donde para todo $j \in \{1, \dots, n-1\}$

$$\mu_j = \frac{x_j - x_{j-1}}{x_{j+1} - x_{j-1}}, \quad \lambda_j = \frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+1} - x_{j-1}}, \quad b_j = \frac{6}{x_{j+1} - x_{j-1}} \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \right)$$

y

$$b_0 = \frac{6}{x_1 - x_0} \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} - y_0' \right), \quad b_n = \frac{6}{x_n - x_{n-1}} \left(y_n' - \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \right).$$

Notad nuevamente que los coeficientes λ_i, μ_i solo dependen de la partición Δ, son positivos y satisfacen $\lambda_i + \mu_i = 1$, lo cuál hace que la matriz del sistema sea de diagonal estrictamente dominante (y por tanto invertible).

Tipo III: $S'(a) = S'(b)$ y $S''(a) = S''(b)$

En este caso obtenemos una primera ecuación trivial

$$M_0 = S''(x_0) = S''(a) = S''(b) = S''(x_n) = M_n.$$

Por otro lado, como

$$S'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} - \frac{M_1 + 2M_0}{6}(x_1 - x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} - \frac{M_1 + 2M_n}{6}(x_1 - x_0)$$

y

$$S'(x_n) = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} + \frac{M_{n-1} + 2M_n}{6}(x_n - x_{n-1}),$$

obtenemos

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{6} M_{n-1} + \frac{x_1 - x_0 + x_n - x_{n-1}}{3} M_n + \frac{x_1 - x_0}{6} M_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} - \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}},$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{x_n - x_{n-1}}{x_1 - x_0 + x_n - x_{n-1}} M_{n-1} + 2M_n + \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0 + x_n - x_{n-1}} M_1 \\ = \frac{6}{x_1 - x_0 + x_n - x_{n-1}} \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \right). \end{aligned}$$

Por tanto, concluimos que los momentos son las únicas soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 & & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & & \\ & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & & \mu_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix},$$

donde para todo $j \in \{1, \dots, n-1\}$

$$\mu_j = \frac{x_j - x_{j-1}}{x_{j+1} - x_{j-1}}, \quad \lambda_j = \frac{x_{j+1} - x_j}{x_{j+1} - x_{j-1}}, \quad b_j = \frac{6}{x_{j+1} - x_{j-1}} \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \right),$$

$$\mu_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_1 - x_0 + x_n - x_{n-1}}, \quad \lambda_n = \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0 + x_n - x_{n-1}}$$

y

$$b_n = \frac{6}{x_1 - x_0 + x_n - x_{n-1}} \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \right).$$

Como en los casos anteriores, los coeficientes λ_i, μ_i solo dependen de la partición Δ, son positivos y satisfacen $\lambda_i + \mu_i = 1$, lo cuál hace que la matriz del sistema sea de diagonal estrictamente dominante (y por tanto invertible) a pesar de no ser tridiagonal.

MÉTODOS NUMÉRICOS

Curso 2023-2024

Entrega Problemas 1: Representación de números y propiedades básicas de matrices

---

Problema 1:

Dado $x \in \mathbb{R}$ un número máquina normal positivo en formato IEEE con precisión simple, denotamos por I_x al entero de 32 bits (1 bit para el signo, 8 para el exponente trasladado y los 23 restantes para la mantisa) que lo representa.

El algoritmo *Fast Inverse Square Root* se ha utilizado durante años para calcular $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. En un primer paso, aproxima

$$I_y \approx 0101\,1111\,0011\,0111\,0101\,1001\,1101\,1111 - I_x/2.$$

Leed la página de Wikipedia del algoritmo (link) y explicad por qué la expresión anterior aproxima el resultado. ¿Se puede dar alguna cota del error relativo máximo que se comete con esa aproximación?

Problema 2:

Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{m\times l}(\mathbb{K})$ matrices descompuestas en bloques de la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right), \qquad B = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right),$$

con $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n_i,m_j}(\mathbb{K})$ y $B_{jk} \in \mathcal{M}_{m_j,l_k}(\mathbb{K})$ tales que $n_1 + n_2 = n$, $m_1 + m_2 = m$ y $l_1 + l_2 = l$.

a) Demostrad que el producto $AB \in \mathcal{M}_{n\times l}(\mathbb{K})$ se puede escribir por bloques de la forma

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right).$$

b) Extended el resultado al caso en que las matrices A y B estén descompuestas en un número arbitrario de bloques compatibles. Puede ser útil seguir un argumento de inducción sobre el número de bloques.

Problema 3:

Dados $1 \leq i, j \leq n$, sea $P^{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matriz

$$P^{ij} = \begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccccccc} & & & i) & & & & j) & & & \end{array} & \\
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \\
 & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\
 & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right) &
\begin{array}{c} \\ \\ \\ i) \\ \\ \\ \\ j) \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

a) Demostrad que dada una matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces

$$P^{ij}B = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_j^T \\ \vdots \\ b_i^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i) \\ \\ j) \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \quad \text{y} \quad BP^{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & i) & & j) & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_j & \dots & b_i & \dots & b_n \end{pmatrix} \end{array}.$$

Es decir, al multiplicar P^{ij} por la izquierda/derecha se intercambian las filas/columnas de B. Por esta razón a estas matrices se les denomina matrices de permutación.

b) Calculad $\det(P^{ij})$ y probad que $(P^{ij})^{-1} = P^{ij}$.

MÉTODOS NUMÉRICOS

Curso 2023-2024

Entrega Problemas 2: Métodos directos para sistemas lineales

Problema 1:

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, con $n \geq 2$, una matriz donde los únicos elementos que pueden ser no nulos son los de la diagonal, a_{ii}, primera columna, a_{i1}, y última columna, a_{in}.

a) Comprobad que
$$|A| = (a_{11}\, a_{nn} - a_{1n}\, a_{n1}) \prod_{i=2}^{n-1} a_{ii}.$$

b) Demostrad que si A es invertible, para resolver un sistema lineal $Ax = b$ se puede resolver en primer lugar un sistema de dos ecuaciones lineales para (x_1, x_n) y posteriormente un sistema diagonal de $n-2$ ecuaciones para determinar el resto de incógnitas. ¿Cuántas operaciones requiere este procedimiento?

c) Probad, mediante el método de Gauss, que si $a_{11} \neq 0$ entonces la matriz A admite factorización LU aunque no tenga por qué ser invertible.

d) Justificad por qué las matrices L y U de la factorización tienen ceros fuera de la diagonal y la primera y última columnas. ¿Cuál sería el coste de resolver un sistema lineal con la matriz A haciendo la descomposición LU? Comparadlo con el obtenido en el apartado b).

Problema 2:

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz invertible que admite factorización LU. Probad que los elementos de la diagonal de U son de la forma
$$\begin{cases} u_{11} = \delta_1, \\ u_{kk} = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}} \quad \text{si} \quad k \in \{2, ..., n\}, \end{cases}$$
donde δ_k es el menor principal de orden k de la matriz A. ¿Qué podríamos decir en caso de que A admitiese factorización LU pero no fuese invertible?

Problema 3:

Sea $A \in GL_n(\mathbb{K})$ una matriz hermítica e invertible con todos los menores principales no nulos. Demostrad que puede descomponerse de la forma

$$A = L\,D\,L^*,$$

con L una matriz triangular inferior con unos en la diagonal, $l_{ii} = 1$, y D una matriz diagonal con $d_{ii} \neq 0$. Concluid que A es definida positiva si y solo si todos sus menores principales son positivos.

MÉTODOS NUMÉRICOS

Curso 2023-2024

Entrega Problemas 3: Métodos iterativos

Problema 1:

Dada una matriz invertible $A \in \mathcal{M}_n$ y un vector $b \in \mathbb{K}^n$ se define el método iterativo

$$x^{k+1} = (I - \alpha A)\, x^k + \beta\, b,$$

donde α y β son dos escalares reales.

a) Demostrad que el método solamente puede ser convergente (independientemente de la aproximación inicial x^0) si $Re(\sigma(A)) \subset (0, +\infty)$ ó $Re(\sigma(A)) \subset (-\infty, 0)$.

b) Asumiendo que se cumple la condición necesaria de convergencia del apartado anterior, determinad los valores de α y β para que el método converja a la solución del sistema $Ax = b$.

c) Comprobad que, para los valores obtenidos de los parámetros α y β, este método iterativo es el asociado a cierta descomposición $A = M - N$ de la matriz.

Problema 2:

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz tal que

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \leq |a_{ii}| \qquad \text{para todo} \quad i \in \{1, \ldots, n\}$$

con al menos todos los elementos de la diagonal, la primera fila y la primera columna no nulos, es decir,

$$a_{ii} \neq 0, \quad a_{1,i} \neq 0 \quad y \quad a_{i,1} \neq 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\},$$

mientras el resto de elementos son arbitrarios (pueden ser nulos o no).

Observación: A no tiene por qué ser de diagonal estrictamente dominante.

a) Demostrad, dando un contraejemplo en cada dimensión n, que la matriz A no tiene por qué ser invertible si $n > 1$.

b) Sea $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $Av = 0$. Probad que si $k \in \{2, \ldots, n\}$ tal que

$$|v_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|,$$

entonces

$$|v_1| = |v_k|$$

y el máximo siempre se alcanza en la primera componente. Usadlo para concluir que $v = (\pm c, \pm c, \cdots, \pm c)^T$ para alguna constante $c \in \mathbb{R}$ y elección de signos.

Supongamos ahora que además existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}| < |a_{i_0 i_0}|.$$

c) Demostrad que entonces A si que es invertible.

d) Definimos un método iterativo para la descomposición $A = M - N$, donde M es la matriz formada por la diagonal, la primera fila y la primera columna de A. Probad que el método está bien definido y es convergente.

MÉTODOS NUMÉRICOS

Curso 2023-2024

Entrega Problemas 4: Interpolación, diferenciación e integración numérica

---

Problema 1:

Dados $(x_0, \ldots, x_n)$ e $(y_0, \ldots, y_n)$, sea S un spline cúbico interpolador. Es decir, la función S es un polinomio de grado 3 en cada intervalo $[x_k, x_{k+1}]$, satisface $S(x_k) = y_k$ y además $S \in C^2([x_0, x_n])$.

a) Demostrad, utilizando el Teorema de integración por partes, que

$$\int_{x_0}^{x_n} |S''(x)|^2 \, dx = S''(x_n)\, S'(x_n) - S''(x_0)\, S'(x_0) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k (y_{k+1} - y_k),$$

para algunas constantes c_k. ¿Cuáles son esas constantes?

b) Deducid de la expresión del apartado anterior la unicidad de spline cúbico interpolador para los tres tipos estudiados.

Indicación: Notad que la única función $F \in C([a, b])$ no negativa tal que su integral se anula, es decir $\int_a^b F = 0$, es la función idénticamente cero $F \equiv 0$.

Problema 2:

Dado un conjunto $\{x_0, \ldots, x_n\}$ de $n+1$ puntos diferentes y otro punto $z \in \mathbb{R}$, supongamos que sabemos que

$$f'(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k\, f(x_k) + d\, f^{n+1)}(\xi)$$

para toda función $f \in C^{n+1}([a, b])$, donde $\xi \in [a, b]$ es un punto que podría depender de f, mientras que c_k y d son independientes de f. Demostrad que los coeficientes c_k y d están unívocamente determinados. Aplicadlo para recuperar los coeficientes de alguna de las aproximaciones de la derivada vistas en clase.

Indicación: Usad polinomios como funciones f en la identidad anterior.

Problema 3:

Dada una función $f \in C^1([a,b])$ y un conjunto de $n+1$ puntos diferentes $\{x_0, \ldots, x_n\} \subset [a,b]$, queremos encontrar un polinomio $p \in \mathcal{P}_k$ que interpole tanto la función f como su derivada f' en los puntos dados. Es decir, queremos que $p \in \mathcal{P}_k$ satisfaga

$$p(x_i) = f(x_i) \quad \text{y} \quad p'(x_i) = f'(x_i) \qquad \text{para todo} \quad i = 0, \ldots, n.$$

A ese polinomio p lo llamaremos polinomio de Hermite.

a) Justificad, sin dar una demostración, por qué si queremos tener existencia y unicidad del polinomio de Hermite, entonces el grado esperado para ese polinomio es $k = 2n+1$.

b) Demostrad que si existe un polinomio de Hermite $p \in \mathcal{P}_{2n+1}$, entonces es único.

c) Dados los polinomios de Lagrange $L_i \in \mathcal{P}_n$ asociados a $\{x_0, \ldots, x_n\}$, definimos

$$H_i(x) = L_i^2(x)\big(1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i)\big) \quad \text{y} \quad \widetilde{H}_i(x) = (x - x_i)\, L_i^2(x).$$

Calculad $H_i(x_j)$, $H_i'(x_j)$, $\widetilde{H}_i(x_j)$ y $\widetilde{H}_i'(x_j)$. Usadlo para demostrar que se puede construir el polinomio de Hermite como combinación lineal de la familia de polinomios H_i y $\widetilde{H}_i$.

d) Probad que si $f \in C^{2n+2}([a,b])$ y $p \in \mathcal{P}_{2n+1}$ es el polinomio de Hermite, entonces

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2 \qquad \text{para algún} \quad \xi_x \in [a,b] \quad \text{si} \quad x \in [a,b].$$

<u>**Indicación**</u>: Fijado x utilizad la función

$$g(y) = f(y) - p(y) - \frac{f(x) - p(x)}{\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2} \prod_{i=0}^{n} (y - x_i)^2$$

junto con el Teorema de Rolle. Relacionad ξ_x con un cero de alguna derivada de esta función auxiliar g.

e) Se quiere definir una cuadratura basada en la interpolación descrita aproximando la integral de una función f por la integral del polinomio de Hermite $p \in \mathcal{P}_{2n+1}$. ¿Hasta polinomios de qué grado se puede asegurar que la cuadratura es exacta? Demostrad que la cuadratura tendría la forma

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} \Big(\alpha_i\, f(x_i) + \beta_i\, f'(x_i)\Big).$$

¿Por qué $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = b - a$?

MÉTODOS NUMÉRICOS

Curso 2023-2024

Entrega Problemas 5: Integración numérica y resolución de ecuaciones no lineales

---

Problema 1:

Sabemos que

$$\pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

y queremos utilizarlo para calcular aproximaciones de π utilizando solamente operaciones elementales (sumas, restas, multiplicaciones y divisiones).

a) Probad que

$$\int_{L}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \leq \frac{1}{L}$$

si $L > 0$.

b) Dado $L > 0$, calculad cuantos subintervalos son necesarios para determinar

$$\int_{0}^{L} \frac{dx}{1+x^2}$$

con un error menor que $\delta \ll 1$ utilizando los fórmulas (abiertas y cerradas) compuestas de Newton-Cotes vistas en clase.

<u>Indicación</u>: Utilizad que la función $g(t) = 1/(1+t^2)$ satisface las cotas $|g''| \leq 2$ y $|g^{iv)}| \leq 24$ en todo $\mathbb{R}$.

c) Explicad cómo implementarías un algoritmo para aproximar π con N decimales correctos basado en los apartados anteriores. ¿Cuántas operaciones requeriría?

Problema 2:

Sea la ecuación algebraica

$$x^n + x - 1 = 0, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

a) Demostrad que la ecuación tiene siempre una única raíz positiva y que dependiendo de la paridad de n tiene una o ninguna raíz negativa. ¿Es alguna de estas raíces racional?

b) Probad que la sucesión definida por

$$x_k = \frac{(n-1)x_{k-1}^n + 1}{n\, x_{k-1}^{n-1} + 1}$$

puede converger a las dos soluciones dependiendo del valor inicial x_0 que se elija. Escoged un valor inicial x_0 para cada una. ¿Cuántas iteraciones son necesarias para garantizar 6 decimales correctos?

c) Mediante el método de bisección y el uso de Matlab, determinad un intervalo de tamaño menor que 10^{-8} en el que se encuentre la solución positiva. ¿Cuántas iteraciones son necesarias para determinarlo? Explicad con detalle cómo lo encontráis.

d) Fijemos ahora $n = 4$. Demostrad que la solución positiva se puede encontrar también como límite de la sucesión

$$x_k = \frac{1}{x_{k-1}^3 + 1},$$

independientemente del valor inicial $x_0 \in [0, 1]$. ¿Qué pasaría si comenzásemos con $x_0 \in (1, +\infty)$? ¿Y si $x_0 \in (-\infty, 0)$?