ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

Ejercicios y problemas

Course 23/24

Máster en Matemáticas Avanzadas

Facultad de Ciencias Matemáticas - UCM

Juan-Carlos Felipe-Navarro

CONTENIDOS:

HERRAMIENTAS BÁSICAS DE ANÁLISIS

Problema 1. Desigualdad de Cauchy y Young.

a) Prueba que para todo $a, b \geq 0$, se tiene
$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$
Además, si $\varepsilon > 0$ se tiene
$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

b) Dados $1 < p, q < \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, demuestra que para todo $a, b \geq 0$ se tiene
$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$
Deduce por tanto que si $\varepsilon > 0$, entonces
$$ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon \, b^q,$$
donde $C_\varepsilon = (\varepsilon p)^{-q/p} q^{-1}$.
Indicación: Utiliza la identidad $ab = e^{\frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{q}\log(b^q)}$ junto con la convexidad de la función exponencial.

Problema 2. Integración por partes y fórmulas de Green.
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con frontera regular $\Gamma = \partial\Omega$, y $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ un campo vectorial. Entonces, el **Teorema de la Divergencia** afirma que
$$\int_\Omega \operatorname{div}(F)\, dx = \int_\Gamma F \cdot \nu \, dS,$$
donde ν es el vector **normal exterior** (unitario) a Γ. Deduce:

a) Si $f \in C^1(\overline{\Omega})$, entonces
$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx = \int_\Gamma f \, \nu_i \, dS.$$

b) Si $f, g \in C^1(\overline{\Omega})$, entonces se tiene la **fórmula de integración por partes**
$$\int_\Omega f \, \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\, g \, dx + \int_\Gamma f \, g \, \nu_i \, dS.$$

c) Si $f \in C^1(\overline{\Omega})$, $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, entonces
$$\int_\Omega f \operatorname{div}(F)\, dx = -\int_\Omega \nabla f \cdot F \, dx + \int_\Gamma f \, F \cdot \nu \, dS.$$

d) Si $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, entonces se tiene la **primera fórmula de Green**
$$\int_\Omega \Delta u \, v \, dx = -\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \, dx + \int_\Gamma v \, \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS.$$

e) Si $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, entonces se tiene la **segunda fórmula de Green**

$$\int_\Omega (\Delta u\, v - u\, \Delta v)\; dx = \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} v - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) dS.$$

Problema 3. Integración en polares.
Por integración en coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$ se tiene

$$\int_{B_R} f(x)\, dx = \int_0^R \left(\int_{\partial B_r} f(x)\, dS \right) dr,$$

donde $r = |x|$ y $B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \rho\}$ representa la bola de radio $\rho > 0$ centrada en el origen.

a) Prueba que

$$|B_R| = \alpha_n\, R^n \qquad \text{y} \qquad |\partial B_R|_{n-1} = \frac{d}{dR}|B_R| = n\, \alpha_n\, R^{n-1},$$

donde α_n es el volumen de la bola unidad de $\mathbb{R}^n$.

b) Deduce que si f es una función radialmente simétrica, entonces

$$\int_{B_R} f(x)\, dx = n\, \alpha_n \int_0^R f(r)\, r^{n-1}\, dr.$$

c) Demuestra que

$$\alpha_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)},$$

donde Γ es la función Gamma, que viene dada por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt.$$

Indicación: Toma $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|^2} = \prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{-|x_i|^2}$ y haz $R \to \infty$, integrando en polares y usando Fubini.

Problema 4. Lema de Urysohn.
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $K \subset \Omega$ un subconjunto compacto de Ω. Prueba que existe una función $\chi \in C_c(\Omega)$ tal que $0 \le \chi(x) \le 1$ y $\chi = 1$ en K.

Problema 5. Aproximación de L^1 por funciones continuas.
Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ una función integrable. Demuestra que para todo $\varepsilon > 0$, existe una función $f_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Concluye que $C_c(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^1(\mathbb{R}^n)$.
Indicación: Prueba primero el caso particular en el que la función es la característica de un conjunto E medible con medida finita y luego recuerda la construcción de la integral a partir de funciones simples para probar el caso general.

Problema 6. Mollifier.
Sea $\xi : \mathbb{R} \to [0,1)$ la función que viene dada por

$$\xi(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si} \quad t > 0, \\ 0 & \text{si} \quad t \leq 0. \end{cases}$$

Esta función es el ejemplo típico de función que es infinitamente diferenciable en toda la recta real, es decir $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, pero no es analítica.

a) Si $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la función radialmente simétrica definida como

$$\phi(x) = \xi(1 - |x|^2).$$

Demuestra que $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. ¿Cuál es su soporte?

b) A partir de

$$\varphi(x) = \frac{\phi(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} \phi(z)\, dz},$$

definimos la familia de funciones $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ para todo $\varepsilon > 0$. Prueba que todas satisfacen que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\, dx = 1$. Esboza las gráficas de φ_ε para distintos valores de ε.

Esta familia de funciones se llama **sucesión regularizante estándar** en $\mathbb{R}^n$.

Problema 7. Cut-off en la bola.
Sea $\xi : \mathbb{R} \to [0,1)$ nuevamente la función

$$\xi(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si} \quad t > 0, \\ 0 & \text{si} \quad t \leq 0. \end{cases}$$

a) Comprueba que la función

$$\zeta(t) = \frac{\xi(t)}{\xi(t) + \xi(1-t)}$$

es regular, no decreciente y además satisface que $\zeta(t) = 0$ si $t \leq 0$, mientras que $\zeta(t) = 1$ si $t \geq 1$.

c) Dados $a < b < c < d$ definimos la función $\psi : \mathbb{R} \to [0,1]$

$$\psi(t) = \zeta\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\zeta\left(\frac{d-t}{d-c}\right).$$

Comprueba que $\psi \equiv 1$ en (b,c) y $\psi \equiv 0$ en $\mathbb{R} \setminus [a,d]$.

d) Dados $R, r > 0$, construye una función $\eta \in C_0^\infty(B_{R+r})$ tal que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta(x) = 1$ en B_R, y además para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ se satisface

$$|D^\alpha \eta| \leq c_{\alpha,n}\, r^{-|\alpha|} \quad \text{en todo} \quad \mathbb{R}^n,$$

donde $c_{\alpha,n}$ es una constante positiva que no depende de R ni r, y $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.
Esta tipo de funciones se llama **cut-off**.

Problema 8. Partición de la unidad.
Dado $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto, sean $U_i \subset U_i' \subset U_i''$ abiertos tales que $K \subset \cup_{i=1}^m U_i$ es un recubrimiento finito. Supongamos que para cada $1 \leq i \leq m$, existe una función

$\eta_i \in C_c^\infty(U_i'')$ tal que $0 \leq \eta_i \leq 1$, $\eta_i = 1$ en U_i y además $\eta_i = 0$ en $U_i'' \setminus U_i'$. Definimos de manera recurrente las funciones

$$\overline{\eta}_1 = \eta_1, \qquad \overline{\eta}_{i+1} = (1-\eta_1)\dots(1-\eta_i)\,\eta_{i+1}.$$

Prueba que $\overline{\eta}_i \in C_0^\infty(U_i'')$, y además $\sum_{j=1}^{i} \overline{\eta}_j = 1 - \prod_{j=1}^{i}(1-\eta_j)$. En particular, se satisface que $\sum_{j=1}^{m} \overline{\eta}_j = 1$ en un entorno del compacto K.

Problema 9. Cut-off en un compacto.
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $K \subset \Omega$ un subconjunto compacto de Ω. Demuestra que existe una función $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \eta(x) \leq 1$, tiene soporte tan próximo a K como se quiera y $\eta = 1$ en un entorno de K.

ESPACIOS L^p

Problema 1. Ejemplos radiales.
Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ las funciones radialmente simétricas dadas por $f(x) = |x|^{-\alpha}$ y $g(x) = |ln(|x|)|^{\beta}$ con parámetros $\alpha, \beta > 0$.

a) Encuentra los valores de $p \geq 1$ (dependientes de la dimensión n y de los parámetros α y β) para los cuales $f, g \in L^p(B_1)$.

b) Determina los valores de $p \geq 1$ para los cuales $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n \setminus B_1)$.

Indicación: Puedes plantear primero el caso de dimensión $n = 1$.

Problema 2. Generalizaciones de la Desigualdad de Hölder.

a) Demuestra que dados $1 \leq p, q \leq \infty$ y dos funciones $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^q(\Omega)$, entonces el producto $uv \in L^r(\Omega)$ con $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

b) Sean $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, y las tres funciones $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ y $w \in L^r(\Omega)$. Prueba que el producto $uvw \in L^1(\Omega)$ y además

$$\int_\Omega |uvw| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)} \|w\|_{L^r(\Omega)}.$$

Problema 3. Desigualdad de interpolación.
Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$ tales que

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Demuestra que si $w \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, entonces $w \in L^r(\Omega)$ y se satisface la desigualdad de interpolación

$$\|w\|_{L^r(\Omega)} \leq \|w\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \|w\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}.$$

Problema 4. Algunas inclusiones.

a) Dado $1 \leq p < \infty$, encuentra una función en $L^p(B_1)$ que no pertenezca a $L^q(B_1)$ para ningún $q > p$.

b) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto con medida finita, es decir, tal que $|\Omega| < \infty$. Prueba que si $1 \leq p < q \leq \infty$ entonces se tiene

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega \|u\|_{L^q(\Omega)}.$$

Concluye que esa desigualdad implica la continuidad de la inclusión $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, es decir, si $u_n \to u$ en $L^q(\Omega)$, entonces también converge en $L^p(\Omega)$. ¿Es la inclusión siempre estricta?

c) Demuestra que $L^p(\mathbb{R}^n)$ ni contiene ni está contenido en $L^q(\mathbb{R}^n)$ si $p \neq q$.

Problema 5. Resultados de convergencia.

a) Sean p y q exponentes conjugados, es decir, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Deduce que si $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $v_n \to v$ en $L^q(\Omega)$ entonces

$$\lim_n \int_\Omega u_n v_n = \int_\Omega uv.$$

b) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y $1 \le p \le r \le q \le \infty$. Prueba que si la sucesión $\{w_n\}_n$ es acotada en $L^q(\Omega)$ y convergente en $L^p(\Omega)$, entonces es también converge (y al mismo límite) en $L^r(\Omega)$.

Problema 6. Comportamiento de L^p cuando $p \to \infty$

a) Sea Ω un abierto con medida finita, es decir, tal que $|\Omega| < \infty$, y una función $f \in L^\infty(\Omega)$. Demuestra que $f \in L^p(\Omega)$ para todo $p \in [1,\infty)$. Además, satisface

$$\lim_{p\to+\infty} ||f||_{L^p(\Omega)} = ||f||_{L^\infty(\Omega)}.$$

b) Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sea $f \in L^p(\Omega)$ una función tal que $||f||_{L^p(\Omega)} \le C$ para todo $p \in [1,\infty)$. Prueba que entonces $f \in L^\infty(\Omega)$ y satisface $||f||_{L^\infty(\Omega)} \le C$. ¿Es cierto que $f \in L^\infty(\Omega)$ si $f \in L^p(\Omega)$ para todo $p \in [1,\infty)$ pero $||f||_{L^p(\Omega)} \to +\infty$ cuando $p \to +\infty$?

Problema 7. Dilataciones y traslaciones.

a) Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para algún $1 \le p \le \infty$. Dado $\lambda > 0$ definimos las dilataciones $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$. Prueba que entonces

$$\|f_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{-n/p}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

b) Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para algún $1 \le p < \infty$ y $h \in \mathbb{R}^n$, definimos las traslaciones $T_h f(x) = f(x+h)$. Demuestra que

$$\|T_h f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

y además

$$\lim_{h\to 0} \|T_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

¿Qué pasa cuando $p = \infty$?
Indicación: Utiliza la aproximación de f en $L^p(\mathbb{R}^N)$ por funciones continuas de soporte compacto.

Problema 8. Convolución de funciones.

a) Sean f, g, y h definidas en $\mathbb{R}^n$. Comprueba que

$$f * g = g * f, \qquad \text{y} \qquad f * (g * h) = (f * g) * h$$

siempre que estén definidas.

b) Demuestra que

$$supp(f * g) \subset \overline{supp(f) + supp(g)}.$$

c)) Prueba la **desigualdad de Young**: si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}, \quad \text{con} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}.$$

Además, si $r = \infty$, demuestra que $f * g$ es uniformemente continua.

Indicación: Haz primero el caso $r = \infty$ (usando que las traslaciones son continuas en $L^p(\mathbb{R}^n)$), después el caso $p = q = r = 1$, y finalmente los casos restantes.

Definimos el espacio de funciones de decrecimiento rápido o espacio de Schwartz

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{tal que} \quad \sup_{\mathbb{R}^n} |x^m \, D^k f(x)| < \infty \quad \text{para toda} \;\; k, m \in \mathbb{N}^n \right\}.$$

d) Prueba que si $f, g \in \mathcal{S}$ entonces $f * g \in \mathcal{S}$ y para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ se tiene

$$D^\alpha (f * g) = D^\alpha f * g = f * D^\alpha g.$$

e) Demuestra que si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in \mathcal{S}$ entonces $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ se tiene $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$.

Problema 9. Aproximación por funciones regulares.

Sea $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ una sucesión regularizante cualquiera y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Prueba que

a) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p < \infty$, entonces con $\varepsilon \to 0$

$$f * \varphi_\varepsilon \to f \quad \text{en} \quad L^p(\mathbb{R}^N).$$

b) Si $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, entonces con $\varepsilon \to 0$

$$f * \varphi_\varepsilon \to f \quad \text{en} \quad L^p_{loc}(\Omega).$$

c) Si $f \in C(\Omega)$, entonces con $\varepsilon \to 0$

$$f * \varphi_\varepsilon \to f \quad \text{uniformemente en compactos de} \;\; \Omega.$$

Problema 10. Densidad de $C_c^\infty(\Omega)$ en $L^p(\Omega)$.

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$. Demuestra que $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < \infty$ pero que no es denso en $L^\infty(\Omega)$.

Indicación: Utiliza que toda función $f \in L^p(\Omega)$ se puede aproximar por funciones de $L^p(\Omega)$ de soporte compacto en Ω y luego regularizar estas haciendo la convolución con una sucesión regularizante estándar.

ESPACIOS DE HILBERT Y EL TEOREMA DE LAX-MILGRAM

Problema 1. Identidad del paralelogramo.
Sea H un espacio de Banach. Prueba que H es un espacio de Hilbert si y solo si satisface la desigualdad del paralelogramo. Es decir, si

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2+\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right), \quad \text{para todo } \ x,y\in H.$$

¿Cómo se puede obtener el producto escalar a partir de la norma? Concluye que $L^p(\Omega)$ es un espacio de Hilbert si y solo si $p=2$ y construye su producto escalar.

Problema 2. Caracterización del elemento nulo via producto escalar.

a) Prueba que si $f\in H$ es tal que $\langle f,u\rangle=0$ para todo $u\in H$ entonces $f=0$.

b) Demuestra que si $f\in H$ es tal que $\langle f,u\rangle=0$ para todo $u\in D$ donde $D\subset H$ es un subconjunto denso en H entonces $f=0$.

c) Aplica lo anterior para deducir que si $f\in L^2(\Omega)$ y

$$\int_\Omega f\varphi=0 \quad \text{para toda } \ \varphi\in C_c^\infty(\Omega)$$

entonces $f=0$.

Problema 3. Pitágoras y proyección ortogonal en dimensión finita.
Sea H un espacio de Hilbert con producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y sean $f_1,\dots,f_m$ elementos ortogonales (y no nulos) de H.

a) Prueba que $f_1,\dots,f_m$ son linealmente independientes y que se satisface el Teorema de Pitágoras: si $\alpha_i\in\mathbb{R}$, entonces

$$\left\|\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i\right\|^2=\sum_{i=1}^m|\alpha_i|^2\|f_i\|^2.$$

b) Sea $V=[f_1,\dots,f_m]$ el subespacio vectorial generado. Demuestra que si $f\in H$, entonces existe un único $p\in V$ tal que $f-p\perp V$. Calcula p como combinación lineal de $f_1,\dots,f_m$. Este elemento p es la proyección ortogonal de f sobre V. Deduce que $\|f-p\|\le\|f-q\|$ para todo $q\in V$.

Problema 4. Proyección sobre funciones en una banda.
Dado el abierto $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ y las funciones $h_l,h_u:\Omega\to[0,+\infty)$ tales que $h_l,h_u\in L^2(\Omega)$ y $h_l\le h_u$ en casi todo punto de Ω, definimos el conjunto

$$K=\{w\in L^2(\Omega) \text{ tal que } h_l(x)\le w(x)\le h_u(x) \quad \text{en c.t.p. } \ x\in\Omega\}\subset L^2(\Omega).$$

Comprueba que K es un cerrado convexo y calcula P_K.

Problema 5. Proyección sobre funciones impares.
Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto simétrico respecto al origen ($x \in \Omega$ si y solo si $-x \in \Omega$), sea $H = L^2(\Omega)$ y consideramos el subespacio V de funciones impares en H,

$$V = \{u \in H \ : \ u(-x) = -u(x) \text{ c.t.p. } x \in \Omega\}.$$

Comprueba que se puede aplicar el teorema de la proyección ortogonal. Determina $V^\perp$ y calcula la proyección $P_V f$ de una función $f \in H$ cualquiera.

Problema 6. Proyección sobre funciones que dependen de una sola variable.
Dado un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sea $\mathcal{C} = \Omega \times (0,1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y $H = L^2(\mathcal{C})$. Consideramos el subespacio de funciones que solo dependen de la variable axial

$$V = \{u \in H \, : \, u(x,t) = v(t), \text{ con } v \in L^2(0,1)\}.$$

Calcula $V^\perp$ y verifica que $H = V \oplus V^\perp$ descomponiendo una función cualquiera $f \in H$ como suma de un elemento de V y un elemento de $V^\perp$.

Problema 7. Teorema de Stampacchia.
Sea $K \subset H$ un conjunto no vacío, cerrado y convexo en un espacio de Hilbert H y $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coerciva. Dado $h^\star \in H^\star$, demuestra que existe un único elemento $u \in K$ tal que

$$a(u, v-u) \geq h^\star(v-u) \quad \text{ para todo } \ v \in K.$$

Si además a es simétrica, prueba que u es el único minimizante del funcional

$$\frac{1}{2}a(v,v) - h^\star(v)$$

entre todos los elementos de K.

Problema 8. Convergencia débil.

a) Prueba que toda sucesión débilmente convergente en un espacio de Hilbert, es acotada en norma.

b) Demuestra que si $u_k \to u$ débilmente en H, entonces

$$\|u\| \leq \liminf_k \|u_k\|$$

Concluye que si además $\|u\| = \lim_k \|u_k\|$, entonces $u_k \to u$ en H.
Indicación: desarrolla $\|u_n - u\|^2$

d) Demuestra que si $u_n \to u$ débilmente en H y $v_n \to v$ fuertemente en H, entonces

$$\lim_{k\to\infty} \langle u_k, v_k \rangle = \langle u, v \rangle.$$

ESPACIOS DE SOBOLEV

Problema 1. Ejemplos de distribuciones en 1D.
Prueba que las siguientes expresiones definen distribuciones en $\mathbb{R}$:

a) La función de Heaviside
$$H(\phi) = \int_0^\infty \phi(x)\,dx, \qquad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

b) La Delta de Dirac
$$\delta(\phi) = \phi(0), \qquad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

c) El Logaritmo
$$\mathrm{L}_{|x|}(\phi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|x|>\varepsilon} \log|x|\,\phi(x)\,dx\right), \qquad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

d) El Valor Principal de $\frac{1}{x}$ (Obs: esta función no es localmente integrable)
$$\mathrm{VP}_{1/x}(\phi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}\,dx\right), \qquad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

e) La Parte Finita de $\frac{1}{x^2}$ (Obs: esta función no es localmente integrable)
$$\mathrm{PF}_{1/x^2}(\phi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x^2}\,dx - 2\frac{\phi(0)}{\varepsilon}\right), \qquad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Demuestra además que en sentido de distribuciones se tiene:
$$H' = \delta, \qquad \mathrm{L}'_{|x|} = \mathrm{VP}_{1/x} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{VP}'_{1/x} = -\mathrm{PF}_{1/x^2}.$$

Problema 2. Convergencia de distribución asociada a una función.
Sea $f_\varepsilon \in L^1_{loc}(\Omega)$ una sucesión tal que $f_\varepsilon \to f$ en $L^1_{loc}(\Omega)$ cuando $\varepsilon \to 0$, es decir, converge en $L^1(\Omega')$ para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$. Prueba que las distribuciones asociadas verifican, cuando $\varepsilon \to 0$, que
$$T_{f_\varepsilon} \to T_f \quad \text{en} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Problema 3. Derivación de distribuciones.
i) Sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, demuestra que entonces para todo $i, j = 1, \ldots, n$,
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_i}$$
y por tanto todas sus derivadas cruzadas (de cualquier orden) coinciden. En particular, para todo multiíndice α, $D^\alpha T$ está bien definida.
ii) Prueba que si $T_\varepsilon \to T$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ cuando $\varepsilon \to 0$, entonces para todo multiíndice se tiene
$$D^\alpha T_\varepsilon \to D^\alpha T \quad \text{en} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Problema 4. Distribución δ.

a) Sea $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con la propiedad $\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\,dx = 1$ y tal que $\operatorname{supp}(u) = \overline{B}_1$. Definimos la familia de funciones

$$u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\, u(x/\varepsilon).$$

Prueba que $u_\varepsilon \to \delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ cuando $\varepsilon \to 0$. En particular, concluye que toda sucesión regularizante φ_ε converge a δ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

b) Calcula, en sentido de distribuciones, las derivadas sucesivas de la distribución δ (es decir δ', δ'', δ''', etc.).

Problema 5. Convolución de distribuciones.
Si $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ entonces se define la **convolución**

$$(T * \phi)(x) = T(\phi(x - \cdot)), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Prueba que si $\phi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ entonces:

a) $T * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ y para todo multiíndice se tiene

$$D^\alpha(T * \phi) = D^\alpha T * \phi = T * D^\alpha \phi.$$

Indicación: Usa cocientes incrementales para las derivadas primeras y posteriormente inducción.

b) $\delta * \phi = \phi$.

c) $T * (\phi * \psi) = (T * \phi) * \psi$.

d) Si $T_\varepsilon \to T$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, con $\varepsilon \to 0$, entonces $T_\varepsilon * \phi \to T * \phi$ uniformemente en compactos de $\mathbb{R}^n$. ¿Qué ocurre con las derivadas?

e) Si $\phi_\varepsilon \to \phi$ en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, con $\varepsilon \to 0$, entonces $T * \phi_\varepsilon \to T * \phi$ uniformemente en compactos de $\mathbb{R}^n$. ¿Qué ocurre con las derivadas?

Problema 6. Derivada débil de funciones casi C^1.

a) Sea $f \in C^1((-1,1)\setminus\{0\})$ y tal que tiene límites laterales finitos $\lim_{x\to 0^+} f(x) = a$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = b$. Supongamos que $f' \in L^1_{loc}((-1,1))$. Prueba entonces que

$$DT_f = (a - b)\,\delta + T_{f'}.$$

b) Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $x_0 \in \Omega$, sea $f \in C^1(\Omega \setminus \{x_0\})$ tal que $\nabla f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ y $\lim_{x\to x_0} f(x)|x - x_0|^{n-1} = 0$. Demuestra que $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ y que las derivadas débiles de f son $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Indicación: Integra por partes en $\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon(x_0)}$ y toma $\varepsilon \to 0$.

Problema 7. Funciones de Sobolev en dimensión $n = 1$.
Prueba que si $u \in W^{1,p}(0,1)$ con $1 < p \le \infty$ entonces se tiene

$$|u(x) - u(y)| \le |x - y|^{1/p'} \|u\|_{W^{1,p}(0,1)}, \quad \text{c.t.p. } x, y \in (0,1),$$

lo que implica que $u \in C^{0,1/p'}([0,1])$. Por otro lado, Prueba que si $p = 1$ entonces $W^{1,1}(0,1) \subset C([0,1])$.
Indicación: Demuestra que si $u \in W^{1,1}(0,1)$ entonces u se puede recuperar integrando su derivada débil que coincide c.t.p. con su derivada puntual.

Problema 8. Proyección ortogonal en Sobolev.
Sea $H = H^1(-1,1)$ y
$$V = \{u \in H : u(0) = 0\}.$$
Demuestra que V es un subespacio cerrado de H y calcula la proyección ortogonal en V de la función $f \equiv 1$.

Problema 9. Funciones radiales en espacios de Sobolev.

a) ¿Para qué exponentes $\alpha > 0$ y $p \geq 1$ se cumple que la función $u(x) = |x|^{-\alpha}$ pertenece a los espacios $W^{1,p}(B_1)$ y $W^{1,p}(\mathbb{R}^n \backslash B_1)$?

b) ¿Cuales son los exponentes β para los que la función $u(x) = |\log|x||^\beta$ pertenece al espacio $H^1(B_{1/2})$?

Problema 10. Dilataciones y funciones de Sobolev.
Sea $u_0 \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p \leq \infty$. Si $\lambda > 0$ probar que definiendo $u_\lambda(x) = u_0(\lambda x)$ se tiene, para todo α con $|\alpha| \leq m$,
$$\|D^\alpha u_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \lambda^{|\alpha|-N/p}\|D^\alpha u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

Problema 11. Truncamiento y regularización en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.
Dado $R > 0$ sea $\varphi_R \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ una función de cut-off tal que $0 \leq \varphi_R \leq 1$,
$$\varphi_R(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| \leq R, \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 2R, \end{cases}$$
y además $||\nabla\varphi_R||_{L^\infty} \leq C\, R^{-1}$ para alguna constante $C \geq 0$ independiente de R.
Prueba que si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, con $1 \leq p < \infty$, entonces, si $R \to \infty$,
$$u\,\varphi_R \to u \quad \text{en} \quad W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$
Haciendo la convolución con una sucesión regularizante, demuestra que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Problema 12. Truncamiento y regularización en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$.
Sea el semiplano
$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R},\ x_n > 0\}$$
y $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$, con $1 \leq p < \infty$.
Dados $\varepsilon > 0$ y $R > 0$, extendemos u por cero en el complementario de $\mathbb{R}^n_+$ y definimos
$$u_{\varepsilon,R}(x) = u(x', x_n + \varepsilon)\varphi_R(x) \quad \text{para todo} \quad x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n_+,$$
donde φ_R es la función de cut-off del problema anterior.
Prueba que, si $\varepsilon \to 0$ y $R \to \infty$, entonces
$$u_{\varepsilon,R} \to u \quad \text{en} \quad W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$$
Haciendo la convolución con una sucesión regularizante, concluye que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$.
Indicación: Recuerda que el operador traslación es continuo en L^p.

Problema 13. Operador de extensión en el semiplano.
Definimos el operador de extensión $E : W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, con $1 \le p < \infty$, como

$$E(u)(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n) & \text{si} \quad x_n > 0 \\ u(x', -x_n) & \text{si} \quad x_n < 0 \end{cases}$$

Prueba que E es lineal y verifica

$$\|E(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)}$$

para cierta constante $C > 0$ independiente de u. En particular, E es continuo.
Indicación: Demuéstralo para $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y argumenta por densidad.

Problema 14. Aplicación traza en el semiplano $\mathbb{R}^n_+$.
Partiendo de la identidad

$$v(x', x_n) = v(x', 0) + \int_0^{x_n} \frac{\partial v}{\partial x_n}(x', s)\, ds,$$

que se satisface para toda función $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, aplícala a $v = |u|^p$ e integra primero en $x_n \in (0, +\infty)$ y después en $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ parar demuestrar que la aplicación traza: $\mathrm{Tr}(u)(x') = u(x', 0)$ verifica

$$\|\mathrm{Tr}(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^{N-1})} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)}$$

para toda función $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por densidad, concluye que γ se extiende de forma única a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$, con $1 \le p < \infty$.

Problema 15. Regla de Leibniz en Sobolev.
Dado Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, sean $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Demuestra que entonces $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y además

$$\frac{\partial\,(uv)}{\partial x_i} = v\,\frac{\partial u}{\partial x_i} + u\,\frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Justifica que el resultado es falso en general si no se pide que las funciones sean L^∞.
Indicación: Para probar la afirmación sobre las derivadas, fijada una función test, aproximar u, en un entorno del soporte de la función test, por funciones regulares y pasar al límite.

Problema 16. Regla de la cadena en Sobolev.
Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $F \in C^1(\mathbb{R})$ tal que F' es acotada.

a) Prueba que si $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tiene derivada débil en Ω y definimos $v = F(u)$, entonces se cumple que v también tiene derivada débil y además

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = F'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Justifica que el resultado es falso en general si no se pide que F' sea acotada.

b) Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con Ω acotado, demuestra que $F(u) \in W^{1,p}(\Omega)$. Justifica que el resultado puede ser falso si no se pide que Ω sea acotado.

c) Si $F(0) = 0$ y $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, prueba que entonces $F(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Problema 17. Parte positiva y negativa.

a) Demuestra que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ entonces $u^+ = \max\{u, 0\} \in W^{1,p}(\Omega)$ y comprueba que

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & \text{si } u \geq 0, \\ 0 & \text{si } u < 0. \end{cases}$$

Indicación: Aproxima u^+ por $F_\varepsilon(u)$, donde

$$F_\varepsilon(s) = \begin{cases} (s^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon & s \geq 0, \\ 0 & s < 0, \end{cases}$$

y aplica la regla de la cadena.

b) Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, concluye que entonces $u^-, |u| \in W^{1,p}(\Omega)$ y calcula ∇u^- y $\nabla |u|$.

Problema 18. Aplicación de Riesz-Frechet en Sobolev.
Demuestra que el funcional

$$Lu = \int_0^1 u(t)\, dt$$

pertenece al espacio $H^{-1}(0,1) = (H_0^1(0,1))^*$. Encuentra el elemento en $H_0^1(0,1)$ que lo representa.

Problema 19. Desigualdad de Poincaré-Wirtinger.
Sea $p \geq 1$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto convexo y acotado. Denotemos por $(u)_\Omega$ la media integral sobre Ω de cualquier función $u \in L^1(\Omega)$, es decir,

$$(u)_\Omega := \fint_\Omega u(x)\, dx.$$

Demuestra que existe una constante $C > 0$, dependiendo solamente de n, p y Ω, tal que se satisface la desigualdad de *Poincaré-Wirtinger*

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Problema 20. Norma equivalente en Sobolev.
Sea Ω un dominio Lipschitz acotado en $\mathbb{R}^n$.

(*a*) Demuestra que

$$(u,v)_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} u|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega}\, d\sigma + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx$$

es un producto escalar en $H^1(\Omega)$.

(*b*) Prueba que la norma

$$\|u\|_{\partial\Omega} = \left(\int_{\partial\Omega} u|_{\partial\Omega}^2\, d\sigma + \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \right)^{1/2}$$

es equivalente a la estándar $\|u\|_{H^1}$.

SOLUCIONES DÉBILES Y PRINCIPIO DEL MÁXIMO

Problema 1. Soluciones débiles no clásicas.
Consideremos el problema
$$\begin{cases} -u'' = f(x), \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases}$$
con $f = -\chi_{(-1,0)} + \chi_{(0,1)}$.

(a) ¿Puede existir una solución C^2 del problema?

(b) Calcula la función $u_a : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definida a trozos y que viene dada por la solución de
$$\begin{cases} -u'' = -1, \\ u(-1) = 0, \ u(0) = a \end{cases}$$
en el intervalo $[-1, 0]$, y por la solución de
$$\begin{cases} -u'' = 1, \\ u(0) = a, \ u(1) = 0 \end{cases}$$
en el intervalo $[0, 1]$.

(c) Comprueba que $u_a \in H_0^1(-1, 1)$ para todo valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ y calcula su derivada débil.

(d) Encuentra los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para los que la función u_a es solución débil de la ecuación, es decir,
$$\int_{-1}^{1} u_a' \, \varphi' = \int_{-1}^{1} f\varphi, \quad \text{para todo} \quad \varphi \in C_c^\infty(-1, 1).$$
Comprueba que para estos valores del parámetro la función pertenece a $C^1([-1, 1])$ y $H^2(-1, 1)$ pero no a $C^2([-1, 1])$.

Problema 2. Existencia y unicidad de soluciones en dimensión $n = 1$.
Escribe la formulación débil del problema
$$\begin{cases} (x^2 + 1)\, u'' - x\, u' = \sin(2\pi x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$
Demuestra que existe una única solución débil $u \in H_0^1(0, 1)$ y encuentra una constante explicita C tal que
$$\|u'\|_{L^2(0,1)} \le C.$$

Problema 3. Problema de Dirichlet en $\mathbb{R}^n$.
Dados $c > 0$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ consideremos el problema

$$-\Delta u + cu = f \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^n.$$

(a) Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, prueba que toda solución clásica u satisface

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla \varphi + c \int_{\mathbb{R}^n} u\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(b) Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, demuestra que toda solución clásica u satisface la formulación débil:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v + c \int_{\mathbb{R}^n} uv = \int_{\mathbb{R}^n} fv \qquad \text{para todo} \quad v \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

(c) Usando el Teorema de Lax–Milgram, demuestra que existe una única solución débil $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ del problema.

(d) Prueba que la solución débil satisface

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

y que además minimiza, en $H^1(\mathbb{R}^n)$, el funcional

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla v|^2 + c|v|^2\right) - \int_{\mathbb{R}^n} fv, \qquad v \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

(e) Demuestra que la solución débil verifica el problema original en sentido de distribuciones y $\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Concluye que el conjunto

$$D(A) := \{u \in H^1(\mathbb{R}^n) \quad : \quad \text{es sol. débil del prob. para alguna } f \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

viene dado por

$$D(A) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^n), \quad \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Problema 4. Dual de $H^1(\Omega)$ y de $H^1_0(\Omega)$.

(a) Sea Ω un dominio acotado y C^1 y sea $g \in L^2(\partial\Omega)$. Usando la noción de traza en espacios de Sobolev, prueba que la forma lineal

$$v \longmapsto \widetilde{T}_g(v) = \int_{\partial\Omega} gv$$

define un elemento del dual de $H^1(\Omega)$ que es nulo sobre $H^1_0(\Omega)$ y que la aplicación $g \mapsto \widetilde{T}_g$ es lineal y continua.

(b) Sean $f \in L^2(\Omega)$, $h_i \in L^2(\Omega)$ para $i = 1, \ldots, n$ y $g \in L^2(\partial\Omega)$. Demuestra que entonces la forma lineal

$$v \longmapsto F(v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega h_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv$$

define un elemento del dual de $H^1(\Omega)$ y del dual de $H^1_0(\Omega)$.

Problema 5. Problema de Dirichlet con condición de borde no homogénea. Consideremos el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f & \text{en} \quad \Omega, \\ u = g & \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

donde $c \in [0.\infty)$, $f \in L^2(\Omega)$ y g es la traza de una función $G \in H^1(\Omega)$.

(a) Supongamos que $u \in H^1(\Omega)$ verifica la ecuación en sentido de distribuciones y la condición de contorno en sentido de las trazas. Prueba que $U = G - u \in H_0^1(\Omega)$ y verifica la formulación débil:

$$\int_\Omega \nabla U \nabla v + c \int_\Omega U v = -\int_\Omega f v + \int_\Omega \nabla G \nabla v + c \int_\Omega G v \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

(b) Demuestra que existe una única solución débil u y que depende de forma continua de f y G, i.e., existe una constante $C \geq 0$ tal que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\big(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|G\|_{H^1(\Omega)}\big).$$

Problema 6. Trazas, EDPs y proyecciones ortogonales.

(a) Sea $V = H_0^1(\Omega)^\perp$, el espacio ortogonal de $H_0^1(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$. Demuestra que todo elemento $v \in V$ satisface que $\Delta v = v$ en sentido de distribuciones.

(b) Dada $G \in H^1(\Omega)$, sabemos que podemos descomponer $G = P_{H_0^1(\Omega)}G + P_V G$. Demuestra que las proyecciones están caracterizadas así: $P_V G$ es la única solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = G & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

y $P_{H_0^1(\Omega)}G$ verifica

$$\int_\Omega \nabla P_{H_0^1(\Omega)}G \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega P_{H_0^1(\Omega)}G\,\varphi = \int_\Omega \nabla G \nabla \varphi + \int_\Omega G\varphi \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Deduce de lo anterior que la correspondencia $\mathrm{Tr}(G) \mapsto u$ permite identificar a V con el espacio de trazas.

(c) Denotamos por

$$H^{1/2}(\partial\Omega) := \{\mathrm{Tr}(w) \;:\; w \in \; H^1(\Omega)\} \subset L^2(\partial\Omega)$$

y definimos, para una traza $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$

$$\|g\|_{\mathrm{Tr}} := \text{ínf}\{\|G\|_{H^1(\Omega)} \;:\; \mathrm{Tr}(G) = g\}.$$

Prueba que $\|\cdot\|_{\mathrm{Tr}}$ es una norma y que satisface

$$\|g\|_{\mathrm{Tr}} \leq \|P_V G\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|G\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall\, G \in H^1(\Omega) \text{ tal que } \mathrm{Tr}(G) = g.$$

Problema 7. Existencia y unicidad con desigualdad de Gårding.
Sea Ω un dominio acotado y regular. Consideremos el operador lineal de segundo orden elíptico

$$Lu := -\mathrm{div}(A\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu,$$

con $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$, y constantes de elipticidad $\Lambda \geq \lambda > 0$.

(*a*) Prueba que existe $\gamma > 0$ (dependiendo solamente de λ, $\|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}$ y $\|c_-\|_{L^\infty(\Omega)}$) tal que se satisface la denominada desigualdad de Gårding

$$\frac{\lambda}{2}\,\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq B_L(u,u) + \gamma\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega).$$

Aquí B_L es la forma bilineal asociada al operador L.

(*b*) Demuestra usando el teorema de Lax-Milgram y la desigualdad de Gårding que existe una constante $c_\star \geq 0$, dependiente solo de λ y $\|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}$, tal que si $c \geq c_\star$ en c.t.p. de Ω, entonces para toda $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema

$$\begin{cases} Lu = f & \text{en} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Además, u satisface

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

donde $C > 0$ depende solamente de Ω y λ.

Problema 8. Problema de Neumann con término de orden cero.
Sea Ω un dominio acotado y regular y $g \in L^2(\partial\Omega)$. Consideremos el problema con condiciones de contorno de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

(*a*) Prueba que la formulación débil del problema viene dada por

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv, \quad \text{para todo} \quad v \in H^1(\Omega)$$

(*b*) Aplica el teorema de Lax-Milgram apropiadamente (eligiendo la forma bilineal, los espacios y la forma lineal correspondiente) para probar existencia y unicidad de solución débil.

(*c*) Si cambiamos el operador Laplaciano, $-\Delta$, por un operador elíptico de segundo orden puro, $L = -\mathrm{div}(A\,\nabla\cdot)$, ¿cómo habría que adaptar la definición de condición de Neumann para este problema? Demuestra existencia y unicidad para el mismo.
Indicación: Dadas dos funciones $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$, integra por partes en $\int_\Omega u\, Lv$, e identifica los términos de borde.

Problema 9. Problema de Neumann sin término de orden cero.
Sea Ω un dominio acotado y regular y $g \in L^2(\partial\Omega)$. Consideremos el problema con condiciones de contorno de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

(a) Prueba que la formulación débil del problema viene dada por

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv, \quad \text{para todo} \quad v \in H^1(\Omega).$$

Encuentra una condición necesaria para que el problema tenga solución. Justifica que en caso de existencia de solución, ésta no puede ser única.

(b) Definimos el conjunto

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : \int_\Omega v = 0\}.$$

Prueba que es un subespacio vectorial cerrado de $H^1(\Omega)$. Demuestra que, asumiendo la condición necesaria para existencia de solución débil, la formulación débil del problema de Neumann es equivalente a

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv, \quad \text{para todo} \quad v \in V.$$

(c) Aplica el teorema de Lax-Milgram junto con la Desigualdad de Poincaré-Wirtinger para probar existencia y unicidad de solución débil en V, una vez asumida la condición necesaria. Concluye de esto que la condición necesaria es también suficiente para tener existencia de solución débil para el problema de Neumann, y que dos soluciones siempre difieren en una constante.

Problema 10. Problema de Neumann con término de orden uno.
Encuentra el error en el siguiente argumento y discute si la conclusión es correcta a pesar de que el razonamiento no lo sea. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y regular, consideramos el problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + b \cdot \nabla u = f, & \text{in } \in \Omega, \\ \partial_\nu u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $b \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ y $f \in L^2(\Omega)$. Sea B la forma bilineal asociada al problema

$$B(u,v) = \int_\Omega \{\nabla u \cdot \nabla v + v(b \cdot \nabla u)\}.$$

Si $\operatorname{div} b = 0$, podemos escribir

$$\int_\Omega (b \cdot \nabla u)\, u = \frac{1}{2}\int_\Omega b \cdot \nabla(u^2) = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} u^2\ b \cdot \nu.$$

Entonces, si además $b \cdot \nu \geq b_0 > 0$ en c.t.p. de $\partial\Omega$, se tiene que

$$B(u,u) \geq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + b_0\|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \geq C\|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

y B es coerciva. Por tanto, con esas hipótesis el problema tendría solución única.

Problema 11. Existencia y unicidad con bilaplaciano.
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y regular, y $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$ el operador bilaplaciano. Dada $f \in L^2(\Omega)$, diremos que $u \in H_0^2(\Omega)$ es una solución débil del problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{en } \Omega, \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

si satisface

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \text{para toda } v \in H_0^2(\Omega).$$

Demuestra que existe una única solución débil del problema, y que si ésta es suficientemente regular entonces es también solución clásica.

Problema 12. Problema de Robin en dimensión $n = 1$.
Dado el problema

$$\begin{cases} \cos x u'' - \sin x u' - x u = 1, \quad 0 < x < \pi/6, \\ u'(0) = -u(0), \; u(\pi/6) = 0, \end{cases}$$

escribe la formulación débil del mismo y discute la existencia y unicidad de solución débil.

Problema 13. Problema de Robin para el Laplaciano.
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y regular. Consideremos en $H^1(\Omega)$ la forma bilineal

$$B(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv + \int_{\partial\Omega} d\, u\, v$$

donde $d \in L^\infty(\partial\Omega)$.

(a) Prueba que dado $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in L^2(\partial\Omega)$, si $d \geq 0$ se tiene que existe una única función $u \in H^1(\Omega)$ verificando

$$B(u, v) = \int_\Omega f v + \int_{\partial\Omega} g v, \text{ para todo } v \in H^1(\Omega).$$

(b) Obtén razonadamente el problema (ecuación en derivadas parciales y condición de contorno) que se corresponde con la formulación débil anterior.

(c) Demuestra que existe una constante $d_0 < 0$ tal que la forma bilineal $B(\cdot, \cdot)$ es coerciva si $d(x) \geq d_0$. Es decir, la coercividad de $B(\cdot, \cdot)$ no se pierde para valores negativos pero pequeños de $d(x)$.

Problema 14. Principio del máximo en dominios pequeños.
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y regular. Sea $u \in H^1(\Omega)$ una subsolución en sentido débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta u + c\, u = 0, & \text{en } \Omega \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $c \in L^\infty(\Omega)$. Demouestra que si la medida de Ω es suficientemente pequeña (en función de $||c_-||_{L^\infty(\Omega)}$), entonces $u \leq 0$ en Ω.
Indicación: Recuerda cómo es la constante de la desigualdad de Poincaré.

Problema 15. Principio del máximo con término de orden uno.
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y regular. Sea $u \in H^1(\Omega)$ una subsolución en sentido débil del problema problema

$$\begin{cases} -\Delta u + b \cdot \nabla u + c\, u = 0, & \text{en } \Omega \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $b_i, c \in L^\infty(\Omega)$. Estudia la viabilidad de tener un principio del máximo.
Indicación: Ayudate de la desigualdad de Gårding.

ENTREGA 1

Problema 1.
Elige al menos uno de los tres teoremas que se enuncian a continuación y demuéstralo utilizando el siguiente procedimiento:

- Toma un recubrimiento finito adecuado de Ω.
- Usando partición de la unidad, descompón las funciones del espacio de Sobolev como suma de funciones con soporte compacto en cada uno de los abiertos del recubrimiento.
- "Aplana" la frontera en los abiertos que intersecan el borde aprovechando la regularidad del dominio.
- Aplica la versión para semiespacio del resultado a demostrar.
- Traslada la información obtenida a la función original.

Definición. *Decimos que un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es C^1 si localmente, en un entorno de cualquier punto $x_0 \in \partial\Omega$, la frontera se puede escribir, tras una rotación, como la gráfica de una función C^1. Es decir, para todo $x_0 \in \partial\Omega$, existe una rotación $R \in SO(n)$, un radio $r > 0$ y una función $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ tal que $\gamma \in C^1$,*

$$R(\Omega \cap B_r(x_0)) = \{x \in B_r(Rx_0) : x_n > \gamma(x_1, ..., x_{n-1})\}$$

y

$$R(\partial\Omega \cap B_r(x_0)) = \{x \in B_r(Rx_0) : x_n = \gamma(x_1, ..., x_{n-1})\}.$$

Teorema A. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto C^1 acotado y $p \in [1, +\infty)$. Entonces, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $W^{1,p}(\Omega)$.*

Teorema B. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto C^1 acotado y $p \in [1, +\infty]$. Entonces, existe un operador $E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$*

- $Eu\,(x) = u(x)$ *si* $x \in \Omega$,
- $||Eu||_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\,||u||_{L^p(\Omega)}$,
- $||Eu||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\,||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$,

donde $C \geq 0$ es una constante que solamente depende del dominio Ω. El operador E se denomina operador de extensión.

Teorema C. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto C^1 acotado y $p \in [1, +\infty]$. Entonces, existe un operador lineal y continuo $\mathrm{Tr} : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ tal que $\mathrm{Tr}(u) = u|_{\partial\Omega}$ para toda función $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. El operador Tr se denomina traza.*

Problema 2.
Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, una función $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ y un escalar $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, podemos definir el cociente incremental de u de tamaño h como el vector

$$D^h u = (\partial_1^h u, ..., \partial_n^h u)$$

donde

$$\partial_i^h u(x) = \frac{u(x + h\, e_i) - u(x)}{h}, \qquad i \in \{1, ..., n\}.$$

Está claro que $D^h u$ está bien definido al menos en $\Omega_h = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > h\}$.

a) Sea $p \in [1, +\infty)$ y $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Demuestra que entonces, para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$ se satisface

$$||D^h u||_{L^p(\Omega')} \leq ||Du||_{L^p(\Omega)}$$

para todo h tal que $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

b) Sea $p \in (1, +\infty)$ y $u \in L^p(\Omega)$. Prueba que si existe una constante $C > 0$ tal que

$$||D^h u||_{L^p(\Omega')} \leq C$$

para todo subdominio $\Omega' \subset\subset \Omega$ y $0 < |h| < \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, entonces

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \qquad \text{y además} \qquad ||Du||_{L^p(\Omega)} \leq C.$$

¿Qué ocurre con el caso $p = 1$?

Problema 3.
Demuestra que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2}\, dx \leq \left| \frac{2}{n-2} \right|^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2\, dx,$$

para toda $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ cuando $n > 2$. Además, la constante es óptima y se alcanza si y solo si $u \equiv 0$. Comprueba que la desigualdad de Poincaré en $H_0^1(\Omega)$ puede deducirse de la desigualdad anterior cuando Ω es acotado. ¿Puedes decir algo, por densidad, cuando $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$? ¿Qué pasa si $n \leq 2$? ¿Podría ser cierta una desigualdad tipo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^p}{|x|^p}\, dx \leq C_{n,p} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p\, dx,$$

cuando $p \in [1, +\infty)$ para alguna constante $C_{n,p} \geq 0$?

ENTREGA 2

Problema 1.
Dado un abierto convexo y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y una función regular estrictamente cóncava $\psi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que $\psi < 0$ en $\partial\Omega$, pero $\max_\Omega \psi > 0$, sea K el conjunto

$$K = \{v \in H_0^1 \ : \ v \geq \psi \ \text{ en c.t.p. de } \ \Omega\}.$$

(a) Comprueba que K es un subconjunto convexo y cerrado de $H_0^1(\Omega)$.
(b) Demuestra que existe una única función $u \in K$ que minimiza en K el funcional

$$J(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2 \, dx,$$

y que viene caracterizada por

$$\int_\Omega (\nabla v - \nabla u) \cdot \nabla u \, dx \geq 0 \text{ para toda } v \in K.$$

(c) Prueba que el minimizante u satisface en sentido débil $-\Delta u \geq 0$ en Ω.
(d) Supón que $u \in C(\Omega)$. Demuestra que satisface $-\Delta u = 0$ en el abierto $\{x \in \Omega : u(x) > \psi(x)\}$ en sentido débil, y por tanto $u \in C^\infty(\{x \in \Omega : u(x) > \psi(x)\})$.
(e) Construye un ejemplo en dimensión $n = 1$ en el que el minimizante $u \notin C^2(\Omega)$. Sin embargo, comprueba que si que satisface $u \in C^{1,1}(\Omega)$.

Problema 2.
Dado un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y una función $f \in L^q(\Omega)$ para algún $q > n/2 \geq 1$, sea $u \in H^1(\Omega)$ una subsolución en sentido débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

(a) Dado $k > 0$ definimos la función $u_k = (u - k)^+$ y el conjunto $\Omega_k = \{x \in \Omega : u(x) > k\}$. Demuestra, combinando la desigualdad de Sobolev y Hölder, que

$$||\nabla u_k||_{L^2(\Omega)}^2 \leq C||f||_{L^q(\Omega)} \, ||\nabla u_k||_{L^2(\Omega)} \, |\Omega_k|^{\frac{nq+2q-2n}{2nq}}$$

para alguna constante $C \geq 0$ dependiendo solamente de n y q.
(b) Prueba que

$$||u_k||_{L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)} \leq C||f||_{L^q(\Omega)} \, |\Omega_k|^{\frac{nq+2q-2n}{nq}}$$

para alguna constante $C \geq 0$ dependiendo solamente de n y q.
(c) Dada $l > k$, demuestra que $\Omega_l = \{x \in \Omega : u_k(x) > l - k\}$. Además, se satisface

$$|\Omega_l|^{\frac{q-1}{q}} \leq \frac{1}{l-k} ||u_k||_{L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)}.$$

(d) Sea $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función decreciente que satisface

$$\phi(t) \le \left(\frac{A}{t-s}\right)^{\alpha} \phi(s)^{1+\beta}$$

para cualquier $t > s$ y ciertas constantes positivas A, α y β. Entonces, si definimos $r = A\,2^{\frac{\beta+1}{\beta}}\,\phi(0)^{\frac{\beta}{\alpha}}$, se cumple que

$$\phi(r(1-2^{-m})) \le \phi(0)\,2^{-\frac{m\alpha}{\beta}},$$

para toda $m \in \mathbb{N}$, y en consecuencia $\phi(r) = 0$.

(e) Combina todos los resultados anteriores para concluir que

$$u(x) \le C\,||f||_{L^q(\Omega)}\,|\Omega|^{\frac{2q-n}{nq}} \qquad \text{en c.t.p. } x \text{ de } \Omega,$$

para alguna constante $C \ge 0$ dependiendo solamente de n y q.

Problema 3.
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y regular. Demuestra que existe una sucesión de funciones $\{e_k\}_{k\ge 0} \subset C^\infty(\Omega)$ que forman una base ortonormal de Hilbert en $L^2(\Omega)$ y satisfacen en sentido débil el problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta e_k &= \lambda_k\, e_k & \text{en } \Omega, \\ \partial_\nu e_k &= 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Aquí $\{\lambda_k\}_{k\ge 0}$ es una sucesión creciente tal que $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k > 0$ si $k > 0$ y además $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$. ¿Puedes relacionar λ_1 con la mejor constante de alguna de las desigualdades vistas en clase?

Indicación: Puede ser de utilidad recordar que si se define el subespacio

$$V = \left\{ w \in H^1(\Omega) : \int_\Omega w = 0 \right\},$$

entonces, dada $f \in V$ existe una única función $u \in V$ que satisface en sentido débil

$$\begin{cases} -\Delta u &= f & \text{en } \Omega, \\ \partial_\nu u &= 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$