

ECUACIONES DIFERENCIALES

Presentación de la Asignatura

Grado en Matemáticas

Universidad Complutense de Madrid

Curso 2023/2024

- Profesor: Juan Carlos Felipe
- Mail: jcfelipe@ucm.es
- Despacho: QB-646 (Facultad de Químicas, Edificio B, planta 6^a)

- Profesor: Juan Carlos Felipe
- Mail: jcfelipe@ucm.es ↷ **Uso del Foro de Consultas del CV**
- Despacho: QB-646 (Facultad de Químicas, Edificio B, planta 6^a)

- Profesor: Juan Carlos Felipe
- Mail: jcfelipe@ucm.es ~→ Uso del Foro de Consultas del CV
- Despacho: QB-646 (Facultad de Químicas, Edificio B, planta 6^a)
- Horario de clase:

LMXJV 18:00 - 18:50


Aula B16

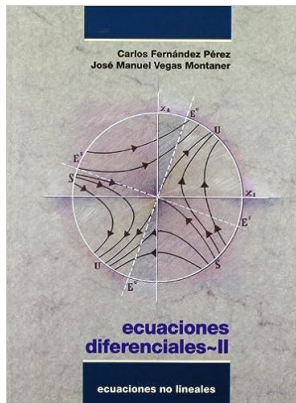
- Profesor: Juan Carlos Felipe
- Mail: jcfelipe@ucm.es ↷ Uso del Foro de Consultas del CV
- Despacho: QB-646 (Facultad de Químicas, Edificio B, planta 6^a)
- Horario de clase:

LMXJV 18:00 - 18:50

Aula B16

- Horario de tutorías
 - Martes 15:00-17:00
 - Miércoles 12:00-14:00
 - Jueves 12:00-13:00 (a partir de Noviembre) & 15:30-17:30

-  Fernández Pérez, C. & Vegas Montaner, J.M. *Ecuaciones diferenciales II, Ecuaciones no lineales*. Madrid: Pirámide, D.L. 1996.



- Control parcial durante el curso \rightsquigarrow Fecha por determinar
- Examen Final (12 Enero)/ Extraordinario (13 Junio)

$$\text{Nota Final} = \begin{cases} 30\% & \text{Control} \\ 70\% & \text{Examen} \end{cases}$$

¿Por qué estudiamos Ecuaciones Diferenciales?

- Modelizan multitud de fenómenos naturales (física, química, economía, dinámica de poblaciones...)
- Permiten realizar predicciones sobre comportamiento futuro de los sistemas

Segunda Ley de Newton

La fuerza que genera el movimiento es directamente proporcional al cambio del momento en cada unidad de tiempo

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) \underset{\text{masa cte.}}{=} m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Segunda Ley de Newton

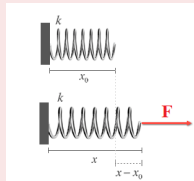
La fuerza que genera el movimiento es directamente proporcional al cambio del momento en cada unidad de tiempo

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) \underset{\text{masa cte.}}{=} m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Ley de Hooke (Elasticidad)

El alargamiento unitario que experimenta un cuerpo elástico es directamente proporcional a la fuerza aplicada sobre el mismo

$$F = \kappa (x - x_0)$$



Segunda Ley de Newton

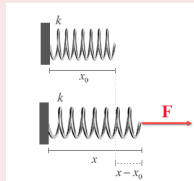
La fuerza que genera el movimiento es directamente proporcional al cambio del momento en cada unidad de tiempo

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) \text{ masa = cte. } m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Ley de Hooke (Elasticidad)

El alargamiento unitario que experimenta un cuerpo elástico es directamente proporcional a la fuerza aplicada sobre el mismo

$$F = \kappa (x - x_0)$$

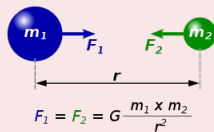


$$m x'' = \kappa (x - x_0)$$

Ley de gravitación universal (Mecánica celeste)

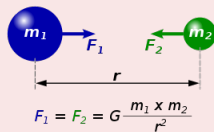
La fuerza que ejerce una partícula puntual con masa m_i sobre otra con masa m_j es directamente proporcional al producto de las masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa

$$F_{ij} = -G \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|^2} \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|}$$



Ley de gravitación universal (Mecánica celeste)

La fuerza que ejerce una partícula puntual con masa m_i sobre otra con masa m_j es directamente proporcional al producto de las masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa



$$F_{ij} = -G \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|^2} \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|}$$

$$m_j x_j'' = - \sum_{i \neq j} G \frac{m_i m_j}{|x_i - x_j|^2} \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|}$$

Sistemas Depredador-Presa

Sistemas Depredador-Presa

- Describe la interacción entre dos especies distintas: **depredadores** y **presas**

DEPREDADOR $\xrightarrow{\text{CAZA A}}$ PRESA

Sistemas Depredador-Presa

- Describe la interacción entre dos especies distintas: **depredadores** y **presas**

DEPREDADOR $\xrightarrow{\text{CAZA A}}$ PRESA

$x(t)$ representa el número de presas a tiempo t

$y(t)$ representa el número de depredadores a tiempo t

Sistemas Depredador-Presa

- La población de presas **crece debido a la reproducción** y el ritmo de crecimiento es proporcional al tamaño de la población de presas.
- La presencia de depredadores causa una **disminución de presas porque son cazadas**. El ritmo de decrecimiento es proporcional al producto del tamaño de las dos poblaciones.

Sistemas Depredador-Presa

- La población de presas crece debido a la reproducción y el ritmo de crecimiento es proporcional al tamaño de la población de presas.
- La presencia de depredadores causa una disminución de presas porque son cazadas. El ritmo de decrecimiento es proporcional al producto del tamaño de las dos poblaciones.

$$x' = ax - bxy$$

Sistemas Depredador-Presa

- La población de presas crece debido a la reproducción y el ritmo de crecimiento es proporcional al tamaño de la población de presas.
- La presencia de depredadores causa una disminución de presas porque son cazadas. El ritmo de decrecimiento es proporcional al producto del tamaño de las dos poblaciones.

$$x' = ax - bxy$$

- La presencia de presas hace que la población de depredadores **crece debido a la caza**. El ritmo de decrecimiento es proporcional al producto del tamaño de las dos poblaciones.
- La población de depredadores **decrece debido a las muertes** y el ritmo de decrecimiento es proporcional al tamaño de la población.

Sistemas Depredador-Presa

- La población de presas crece debido a la reproducción y el ritmo de crecimiento es proporcional al tamaño de la población de presas.
- La presencia de depredadores causa una disminución de presas porque son cazadas. El ritmo de decrecimiento es proporcional al producto del tamaño de las dos poblaciones.

$$x' = ax - bxy$$

- La presencia de presas hace que la población de depredadores crece debido a la caza. El ritmo de decrecimiento es proporcional al producto del tamaño de las dos poblaciones.
- La población de depredadores decrece debido a las muertes y el ritmo de decrecimiento es proporcional al tamaño de la población.

$$y' = cxy - dy$$

Sistemas Depredador-Presa

Este modelo tan sencillo se conoce como **Lotka-Volterra**

$$\begin{cases} x' = x(a - by), \\ y' = y(cx - d). \end{cases}$$

Sistemas Depredador-Presa

Este modelo tan sencillo se conoce como **Lotka-Volterra**

$$\begin{cases} x' = x(a - by), \\ y' = y(cx - d). \end{cases}$$

Es un sistema de EDOs no lineales con algunas soluciones especiales:

Sistemas Depredador-Presa

Este modelo tan sencillo se conoce como **Lotka-Volterra**

$$\begin{cases} x' = x(a - by), \\ y' = y(cx - d). \end{cases}$$

Es un sistema de EDOs no lineales con algunas soluciones especiales:

- Ausencia de poblaciones: $x(t) = 0$, $y(t) = 0$

Sistemas Depredador-Presa

Este modelo tan sencillo se conoce como **Lotka-Volterra**

$$\begin{cases} x' = x(a - by), \\ y' = y(cx - d). \end{cases}$$

Es un sistema de EDOs no lineales con algunas soluciones especiales:

- Ausencia de poblaciones: $x(t) = 0, y(t) = 0$
- Ausencia de depredadores: $x(t) = x(0)e^{at}, y(t) = 0$

Sistemas Depredador-Presa

Este modelo tan sencillo se conoce como **Lotka-Volterra**

$$\begin{cases} x' = x(a - by), \\ y' = y(cx - d). \end{cases}$$

Es un sistema de EDOs no lineales con algunas soluciones especiales:

- Ausencia de poblaciones: $x(t) = 0, y(t) = 0$
- Ausencia de depredadores: $x(t) = x(0)e^{at}, y(t) = 0$
- Ausencia de presas: $x(t) = 0, y(t) = y(0)e^{-dt}$

Sistemas Depredador-Presa

Este modelo tan sencillo se conoce como **Lotka-Volterra**

$$\begin{cases} x' = x(a - by), \\ y' = y(cx - d). \end{cases}$$

Es un sistema de EDOs no lineales con algunas soluciones especiales:

- Ausencia de poblaciones: $x(t) = 0, y(t) = 0$
- Ausencia de depredadores: $x(t) = x(0)e^{at}, y(t) = 0$
- Ausencia de presas: $x(t) = 0, y(t) = y(0)e^{-dt}$
- Equilibrio: $x(t) = d/c, y(t) = a/b$

Sistemas Depredador-Presa

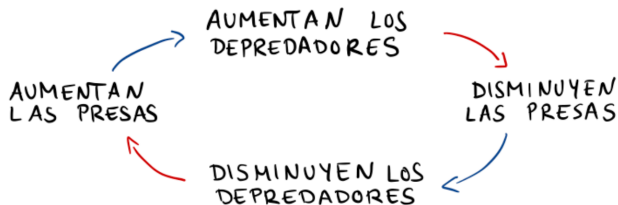
$$\begin{cases} x' = x(a - by), \\ y' = y(cx - d). \end{cases}$$

Por la naturaleza del problema esperamos que haya un comportamiento periódico.

Sistemas Depredador-Presa

$$\begin{cases} x' = x(a - by), \\ y' = y(cx - d). \end{cases}$$

Por la naturaleza del problema esperamos que haya un comportamiento periódico.



Modelo SIR

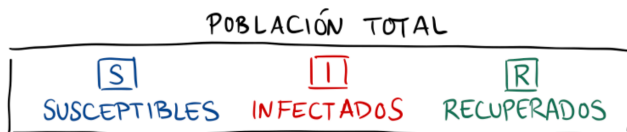
Modelo SIR

- Modeliza el desarrollo de una enfermedad infecciosa en una población

Ejemplos en Dinámica de Poblaciones

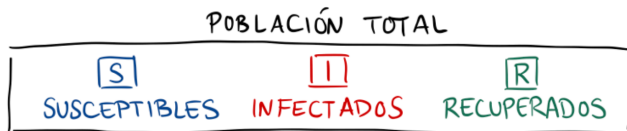
Modelo SIR

- Modeliza el desarrollo de una enfermedad infecciosa en una población
- Existen 3 grupos de individuos: **Susceptibles (S)**, **Infectados (I)** y **Recuperados (R)**



Modelo SIR

- Modeliza el desarrollo de una enfermedad infecciosa en una población
- Existen 3 grupos de individuos: Susceptibles (S), Infectados (I) y Recuperados (R)

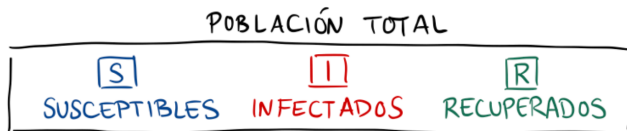


- La población total se mantiene constante

$$S(t) + I(t) + R(t) = cte$$

Modelo SIR

- Modeliza el desarrollo de una enfermedad infecciosa en una población
- Existen 3 grupos de individuos: Susceptibles (S), Infectados (I) y Recuperados (R)



- La población total se mantiene constante

$$S'(t) + I'(t) + R'(t) = 0$$

Modelo SIR

- Los individuos susceptibles son aquellos que pueden infectarse de la enfermedad
- Los infectados solo pueden recuperarse
- Los individuos recuperados no pueden volver a ser susceptibles



Ejemplos en Dinámica de Poblaciones

Modelo SIR

- El número de infecciones es proporcional al producto de susceptibles e infectados

$$S' = -\beta S I$$

- El número de recuperaciones es proporcional al número de infectados

$$R' = \gamma I$$



Ejemplos en Dinámica de Poblaciones

Modelo SIR

- El número de infecciones es proporcional al producto de susceptibles e infectados

$$S' = -\beta S I$$

- El número de recuperaciones es proporcional al número de infectados

$$R' = \gamma I$$

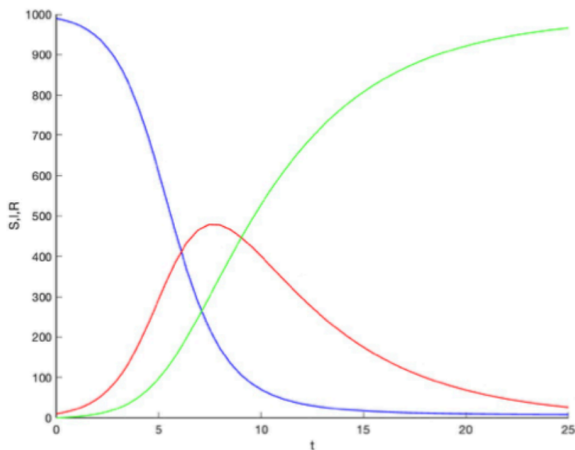


Obtenemos un sistema de EDOs no lineales

$$\begin{cases} S' = -\beta S I, \\ I' = \beta S I - \gamma I, \\ R' = \gamma I. \end{cases}$$

Ejemplos en Dinámica de Poblaciones

Modelo SIR



$$S(0) = 990, I(0) = 10, \beta = 0'001, \gamma = 0'2$$

Modelo SIR



Excepto en casos muy particulares, no existen soluciones explícitas de las Ecuaciones Diferenciales

Excepto en casos muy particulares, no existen soluciones explícitas de las Ecuaciones Diferenciales

Entonces, ¿qué podemos hacer?

Excepto en casos muy particulares, no existen soluciones explícitas de las Ecuaciones Diferenciales

Entonces, ¿qué podemos hacer?

- Número de soluciones (existencia y unicidad)

Excepto en casos muy particulares, no existen soluciones explícitas de las Ecuaciones Diferenciales

Entonces, ¿qué podemos hacer?

- Número de soluciones (existencia y unicidad)
- Dominio de definición de las soluciones

Excepto en casos muy particulares, no existen soluciones explícitas de las Ecuaciones Diferenciales

Entonces, ¿qué podemos hacer?

- Número de soluciones (existencia y unicidad)
- Dominio de definición de las soluciones
- Dependencia de las condiciones iniciales y de los parámetros

Excepto en casos muy particulares, no existen soluciones explícitas de las Ecuaciones Diferenciales

Entonces, ¿qué podemos hacer?

- Número de soluciones (existencia y unicidad)
- Dominio de definición de las soluciones
- Dependencia de las condiciones iniciales y de los parámetros
- Propiedades cualitativas (periodicidad, monotonía...)

Excepto en casos muy particulares, no existen soluciones explícitas de las Ecuaciones Diferenciales

Entonces, ¿qué podemos hacer?

- Número de soluciones (existencia y unicidad)
- Dominio de definición de las soluciones
- Dependencia de las condiciones iniciales y de los parámetros
- Propiedades cualitativas (periodicidad, monotonía...)
- Comportamiento asintótico (cuando el tiempo tiende a infinito)

Parte I: Teoría fundamental

- 1 Teoremas de Existencia y Unicidad
- 2 Prolongabilidad de soluciones. Soluciones maximales.
- 3 Dependencia de condiciones iniciales y parámetros.
- 4 Estabilidad de soluciones

Parte I: Teoría fundamental

- 1 Teoremas de Existencia y Unicidad
- 2 Prolongabilidad de soluciones. Soluciones maximales.
- 3 Dependencia de condiciones iniciales y parámetros.
- 4 Estabilidad de soluciones

Parte II: Sistemas autónomos

- 5 Flujo y órbitas de sistemas autónomos
- 6 Método de Liapunov
- 7 Sistemas conservativos
- 8 Sistemas Planos. Teorema de Poincaré-Bendixon

Parte I: Teoría fundamental

- 1 Teoremas de Existencia y Unicidad
- 2 Prolongabilidad de soluciones. Soluciones maximales.
- 3 Dependencia de condiciones iniciales y parámetros.
- 4 Estabilidad de soluciones

Parte II: Sistemas autónomos

- 5 Flujo y órbitas de sistemas autónomos
- 6 Método de Liapunov
- 7 Sistemas conservativos
- 8 Sistemas Planos. Teorema de Poincaré-Bendixon

Aplicaciones