

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

Máster en Física Teórica



TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Pionium y Teoría de Perturbaciones Quiral
Pionium and Chiral Perturbation Theory

Alba Reyes Torrecilla

Directores

José Ramón Peláez Sagredo

Clara Peset Martín

Curso académico 2022-23

Pionium y Teoría de Perturbaciones Quiral

Alba Reyes Torrecilla

Departamento de Física Teórica, Universidad Complutense de Madrid, 28040 Madrid, España

En este trabajo presento el cálculo teórico para la vida media del pionium a través de la relación entre su amplitud de desintegración y la dispersión de piones. Esta última se obtiene tras un cálculo a segundo orden en Teoría de Perturbaciones Quiral, la teoría efectiva de QCD a bajas energías en el límite de $SU(2)$. El resultado es $\tau_{A_{2\pi}} = (3.56 \pm 0.21) \cdot 10^{-15}$ s y $|a_0^0 - a_2^0| = 0.246 \pm 0.007 M_\pi^{-1}$, lo cual está en acuerdo con las medidas del experimento DIRAC (2005) $\tau_{A_{2\pi}}^{exp} = (2.91_{-0.62}^{+0.49}) \cdot 10^{-15}$ s y $|a_0^0 - a_2^0|^{exp} = 0.264_{-0.020}^{+0.033} M_\pi^{-1}$.

I. INTRODUCCIÓN

El pionium es un átomo formado por un pion positivo y otro negativo ligados por la interacción electromagnética. Se forma así una configuración cuyo estado fundamental es menos energético que el de ambos piones por separado. El pionium es un ejemplo de átomo hadrónico y su formalismo matemático es similar al del átomo de hidrógeno. En ambos casos la primera aproximación es un sistema coulombiano de dos cuerpos puntuales. Sin embargo, el pionium no es estable y se acaba desintegrando principalmente a dos piones neutros vía interacciones fuertes que introduciré de forma perturbativa. El objetivo de este trabajo será realizar el cálculo de la vida media del pionium en el marco de la Teoría de Perturbaciones Quiral y hasta una precisión de un loop.

A continuación presento la estructura que seguirá el trabajo. En la *Sección II*, reescribiré la amplitud de la desintegración en términos de la dispersión de piones a baja energía. En la *Sección III*, describiré la simetría quiral en el lagrangiano que justifica el uso de la Teoría de Perturbaciones Quiral, la cual expondré en la *Sección IV* y donde también haré el cálculo explícito del primer y segundo orden. En la *Sección V* expondré brevemente el resultado experimental de DIRAC. Finalmente presentaré las conclusiones de este trabajo en la *Sección VI*.

II. ANCHURA DE DESINTEGRACIÓN DEL PIONIUM

Pretendemos describir la desintegración del pionium ($A_{2\pi}$) a través de la dispersión de piones a baja energía. El $A_{2\pi}$ no es estable y se desintegra de manera muy dominante según $A_{2\pi} \rightarrow \pi^0 \pi^0$. El estado fundamental de este átomo no electrónico tiene asociada una vida media $\tau_{A_{2\pi}}$ que lo caracteriza. La inversa de la vida media es la anchura de desintegración Γ , cuya expresión en su forma diferencial se encuentra derivada en [1]

$$d\Gamma = \frac{|\mathcal{M}_{if}|^2}{E_{p_i}} d\Phi, \quad (1)$$

donde E_{p_i} es la energía del estado inicial, \mathcal{M}_{if} el elemento de matriz invariante y Φ el espacio de fases invariante Lorentz (LIPS). Para un proceso de un cuerpo desinte-

grándose en dos ($1 \rightarrow 2$ 3), el LIPS toma la forma

$$d\Phi^{(2)} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 - p_2 - p_3) \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3 \vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3}. \quad (2)$$

Considero al átomo inicial en reposo $\vec{p}_1 = 0$ (sistema centro de masas, CM), de tal manera que la energía inicial es únicamente la masa del pionium M_A . Integrando la delta de conservación del trimomento que aparece en el LIPS (2), que impone $\vec{p}_2 = -\vec{p}_3 \equiv -\vec{p}$ y $|\vec{p}_2| = |\vec{p}_3| \equiv p$, e incorporando un factor $\frac{1}{2}$ correspondiente a las dos partículas idénticas π^0 del estado final de la desintegración, la anchura queda

$$\Gamma(A_{2\pi} \rightarrow \pi^0 \pi^0) = \frac{1}{2M_A} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^2 4E_{\pi^0}^2} \delta(M_A - 2E_{\pi^0}) \frac{1}{2} |\mathcal{M}_{if}|^2. \quad (3)$$

Debido a que las dos partículas del estado final son idénticas, tendrán la misma masa $m_2 = m_3 \equiv m_{\pi^0}$ y en el sistema CM saldrán en direcciones opuestas con el mismo trimomento. Por tanto, ambas partículas tendrán además la misma energía $E_2 = E_3 \equiv E_{\pi^0}$. Paso a coordenadas esféricas y simplifico la delta de conservación de la energía para expresarla en función de momentos

$$\delta(M_A - 2E_{\pi^0}) = \frac{\delta(p - p_0)}{|f'(p_0)|} = \frac{\sqrt{p_0^2 + m_{\pi^0}^2}}{2p_0} \delta(p - p_0), \quad (4)$$

$$f(p) = M_A - 2\sqrt{p^2 + m_{\pi^0}^2} \text{ tal que } f(p_0) = 0,$$

donde p_0 es el momento de cada π^0 sobre la capa de masas $E_{\pi^0}^2 = p_0^2 + m_{\pi^0}^2$. Con todo ello, la anchura es

$$\Gamma(A_{2\pi} \rightarrow \pi^0 \pi^0) = \frac{1}{4M_A} \int \frac{dp}{(2\pi)^2 4E_{\pi^0}^2} \int d\Omega p^2 \frac{\sqrt{p_0^2 + m_{\pi^0}^2}}{2p_0} \cdot \delta(p - p_0) |\mathcal{M}_{if}|^2. \quad (5)$$

La delta sitúa los piones neutros sobre la capa de masas, $p = p_0$, e integrando

$$\Gamma(A_{2\pi} \rightarrow \pi^0 \pi^0) = \frac{1}{32M_A (2\pi)^2 E_{\pi^0}} \int d\Omega |\mathcal{M}_{if}|^2. \quad (6)$$

La diferencia de masas entre los estados inicial y final de la desintegración restringe el espacio de fases ($\beta_{\pi^0 \pi^0}$) disponible para que tenga lugar el proceso. A través de la ecuación de capa de masas y la conservación de la energía

encuentro que

$$p_0 = \sqrt{E_{\pi^0}^2 - m_{\pi^0}^2} = \sqrt{\frac{1}{4}M_A^2 - m_{\pi^0}^2} = \frac{M_A\beta_{\pi^0\pi^0}}{2}, \quad (7)$$

$$\beta_{\pi^0\pi^0} = \sqrt{1 - \left(\frac{2m_{\pi^0}}{M_A}\right)^2}.$$

Dado que estoy considerando al $A_{2\pi}$ en su estado fundamental, su momento angular orbital será nulo; $L = 0$. Por lo tanto, en una descomposición en ondas parciales, la contribución dominante a la amplitud vendrá de la onda S , que es puramente esférica. De esta manera, la amplitud $|\mathcal{M}_{if}|^2$ es independiente de los ángulos θ y ϕ . Integrando el ángulo sólido se obtiene finalmente

$$\Gamma(A_{2\pi} \rightarrow \pi^0\pi^0) = \frac{\beta_{\pi^0\pi^0}}{32\pi M_A} |\mathcal{M}_{if}|^2. \quad (8)$$

Al formar el átomo, aparecen distintos niveles energéticos tomando como referencia la construcción para el átomo de hidrógeno $E_n = -\frac{\alpha^2\mu}{2n^2}$, donde α es la constante de estructura fina y μ la masa reducida del sistema (ver *Tabla I*). En el caso del pionium, $\mu = \frac{m_{\pi^\pm}}{2}$. Para el estado fundamental $n = 1$ se tiene que $M_A = 2m_{\pi^\pm} - \Delta E$, donde esta diferencia energética $\Delta E = -E_1$ es la energía de enlace. Atendiendo a la *Tabla I* comprobamos que dicha energía resulta despreciable y $M_A \approx 2m_{\pi^\pm}$. No obstante, esta diferencia energética, aun siendo pequeña, es suficiente para restringir el espacio de fases de tal manera que el $A_{2\pi}$ en reposo y en su estado fundamental no pueda desintegrarse a dos piones cargados, pues $2m_{\pi^\pm} > M_A$.

m_{π^\pm}	$= 139.57039 \pm 0.00018$ MeV
m_{π^0}	$= 134.9768 \pm 0.0005$ MeV
μ	≈ 69.785 MeV
α	$\approx 1/137$
ΔE	$\approx 1.859 \cdot 10^{-3}$ MeV

Tabla I: Colección de valores para distintas cantidades empleadas durante la sección. Las masas de los piones cargados y neutros están extraídas de [2]. Nótese que $2m_{\pi^\pm} \gg \Delta E$.

Para la desintegración $A_{2\pi} \rightarrow \pi^0\pi^0$ se puede estimar el espacio de fases disponible y el momento típico con el que saldrán los piones neutros de la desintegración. Siguiendo la expresión (7)

$$\beta_{\pi^0\pi^0} \approx \sqrt{1 - \left(\frac{m_{\pi^0}}{m_{\pi^\pm}}\right)^2} \simeq 0.254, \quad p_0 \simeq \beta_{\pi^0\pi^0} m_{\pi^\pm} \approx 35.513 \text{ MeV}. \quad (9)$$

Se comprueba que $p_0 \ll m_{\pi^0}$.

Sin embargo, para emplear (8) es imprescindible conocer la amplitud de desintegración $A_{2\pi} \rightarrow \pi^0\pi^0$, \mathcal{M}_{if} .

A. Amplitud de desintegración del pionium a través de la dispersión de piones a baja energía

El elemento de matriz $\mathcal{M}_{if} = \langle A_{2\pi}(\vec{p}_i) | \mathcal{M} | \pi^0\pi^0(\vec{p}_f) \rangle$, donde \mathcal{M} es la matriz amplitud de interacción fuerte,

$|A_{2\pi}(\vec{p}_i)\rangle$ el estado que representa a la configuración ligada del pionium y $|\pi\pi\rangle$ el de piones libres. Nos conviene expresar $|A_{2\pi}(\vec{p}_i)\rangle$ como superposición lineal en la base de estados $|\pi^-\pi^+\rangle$. Dado que, a efectos de interacción fuerte, ambos π^- y π^+ son indistinguibles, la función de onda de este estado deberá encontrarse correctamente simetrizada

$$|A_{2\pi}(\vec{p}_i)\rangle = \mathcal{C} \int d^3\vec{q} g(\vec{p}_i, \vec{q}) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{\vec{p}_i}{2} + \vec{q}, \frac{\vec{p}_i}{2} - \vec{q} \right\rangle + \left| \frac{\vec{p}_i}{2} - \vec{q}, \frac{\vec{p}_i}{2} + \vec{q} \right\rangle \right), \quad (10)$$

donde \mathcal{C} es una constante de normalización y $g(\vec{p}_i, \vec{q})$ una función de los momentos. Podemos recoger la simetría $\pi^+ \leftrightarrow \pi^-$ de la función de onda dentro de otra función $g_s(\vec{p}_i, \vec{q}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (g(\vec{p}_i, \vec{q}) + g(\vec{p}_i, -\vec{q}))$ tal que

$$|A_{2\pi}(\vec{p}_i)\rangle = \mathcal{C} \int d^3\vec{q} g_s(\vec{p}_i, \vec{q}) \left| \frac{\vec{p}_i}{2} + \vec{q}, \frac{\vec{p}_i}{2} - \vec{q} \right\rangle, \quad (11)$$

de nuevo, con otro cambio de variable $\vec{q} \rightarrow \vec{q} - \frac{\vec{p}_i}{2}$

$$|A_{2\pi}(\vec{p}_i)\rangle = \mathcal{C} \int d^3\vec{q} f(\vec{p}_i, \vec{q}) |\vec{q}, \vec{p}_i - \vec{q}\rangle, \quad (12)$$

donde $f(\vec{p}_i, \vec{q}) = g_s(\vec{p}_i, \vec{q} - \frac{\vec{p}_i}{2})$.

Para hallar la constante de normalización \mathcal{C} , recordamos que los estados de piones cargados se normalizan según

$$\langle \vec{q}' | \vec{q} \rangle = 2E_q (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{q}' - \vec{q}). \quad (13)$$

Por tanto, la normalización similar de los estados ligados requiere que

$$\langle A_{2\pi}(\vec{k}_i) | A_{2\pi}(\vec{p}_i) \rangle = 2E_A (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}_i - \vec{p}_i). \quad (14)$$

Empleando los estados del pionium en la forma (12)

$$\langle A_{2\pi}(\vec{k}_i) | A_{2\pi}(\vec{p}_i) \rangle = |\mathcal{C}|^2 \int d^3\vec{q}' \int d^3\vec{q} f^*(\vec{k}_i, \vec{q}') f(\vec{p}_i, \vec{q}) \cdot 2E(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{q}' - \vec{q}) 2E'(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}_i - \vec{q}' - \vec{p}_i + \vec{q}), \quad (15)$$

donde E y E' son ya las energías de los dos piones cargados no ligados. Integrando la delta obtengo

$$\langle A_{2\pi}(\vec{k}_i) | A_{2\pi}(\vec{p}_i) \rangle = |\mathcal{C}|^2 \int d^3\vec{q} f^*(\vec{k}_i, \vec{q}) f(\vec{p}_i, \vec{q}) \cdot 4E^2 (2\pi)^6 \delta^{(3)}(\vec{k}_i - \vec{p}_i). \quad (16)$$

Multiplico y divido por la energía del átomo, que no depende de los momentos de los piones finales e identifico que, para una correcta normalización, se debe cumplir

$$\frac{2|\mathcal{C}|^2}{E_A} \int d^3\vec{q} f^*(\vec{k}_i, \vec{q}) f(\vec{p}_i, \vec{q}) E^2 (2\pi)^3 = 1. \quad (17)$$

En el límite no relativista la energía de los piones cargados será aproximable por sus masas con $m_{\pi^\pm} \approx \frac{M_A}{2}$, de tal manera que $p_i \simeq 0$. Si consideramos además que la función $f(p_f)$ esté correctamente normalizada, obtenemos la constante \mathcal{C}

$$\frac{2(2\pi)^3 |\mathcal{C}|^2}{M_A} \left(\frac{M_A}{2} \right)^2 \underbrace{\int d^3\vec{q} |f(\vec{q})|^2}_1 = 1 \rightarrow \mathcal{C} = \sqrt{\frac{2}{(2\pi)^3 M_A}}. \quad (18)$$

Por otro lado, en el sistema CM, definimos $\vec{r} = \vec{r}_+ - \vec{r}_-$ como la distancia entre los dos constituyentes del pionium y $\vec{R} = \frac{\vec{r}_+ + \vec{r}_-}{2}$ como las coordenadas del CM. La función de onda atómica tomará la forma

$$\langle \vec{r}_-, \vec{r}_+ | A_{2\pi}(\vec{p}_i) \rangle = \Phi(\vec{R}) \Psi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}_i \cdot \vec{R}} \Psi(\vec{r}). \quad (19)$$

La función $\Phi(\vec{R})$ contiene la información correspondiente al movimiento conjunto del átomo y está descrita por una onda plana con la normalización usual en (19). $\Psi(\vec{r})$ describe el movimiento relativo de sus componentes. Calculo $\langle \vec{r}_-, \vec{r}_+ | A_{2\pi}(\vec{p}_i) \rangle$ explícitamente con los estados atómicos de la forma (11) por conveniencia

$$\langle \vec{r}_-, \vec{r}_+ | A_{2\pi}(\vec{p}_i) \rangle = \int d^3 \vec{q} g_s(\vec{p}_i, \vec{q}) \left\langle \vec{r}_-, \vec{r}_+ \left| \frac{\vec{p}_i}{2} + \vec{q}, \frac{\vec{p}_i}{2} - \vec{q} \right. \right\rangle. \quad (20)$$

El resultado de desarrollar este producto escalar se puede relacionar con (19) a través de su transformada de Fourier

$$\langle \vec{r}_-, \vec{r}_+ | A_{2\pi}(\vec{p}_i) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}_i \cdot \vec{R}} \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \vec{q} g_s(\vec{p}_i, \vec{q}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}}_{\Psi(\vec{r})}, \quad (21)$$

de donde obtengo que

$$g_s(\vec{p}_i, \vec{q}) = g_s(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \vec{r} \Psi(\vec{r}) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}}. \quad (22)$$

Nótese que esta función solo depende de \vec{q} . Descompongo la función correspondiente al momento relativo del átomo en su parte radial y angular según $\Psi(\vec{r}) = \chi(r) \Omega(\theta, \phi)$ aprovechando la descripción del átomo de hidrógeno. Para $L = 0$, $\Omega(\theta, \phi)$ no tiene dependencia angular y la función de onda radial del átomo $\chi(r) \sim e^{-r/a_0}$ se concentra cerca del origen. Aquí $a_0 = \frac{1}{\mu\alpha}$ es el radio de Bohr. Por tanto, se podrá aproximar $\Psi(\vec{r}) \approx \Psi_0$, la función de onda para $L = 0$ y $r = 0$, que es una constante. Así

$$g_s(\vec{q}) \simeq \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \Psi_0 \int d^3 \vec{r} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}} = \Psi_0 (2\pi)^{3/2} \delta^{(3)}(\vec{q}), \quad (23)$$

y los estados atómicos (11):

$$|A_{2\pi}(\vec{p}_i)\rangle = \sqrt{\frac{2}{M_A}} \Psi_0 \left| \frac{\vec{p}_i}{2}, \frac{\vec{p}_i}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{2}{M_A}} \Psi_0 |\pi^- \pi^+(\vec{p}_i)\rangle, \quad (24)$$

donde el momento inicial se reparte de manera simétrica entre ambos piones cargados.

Con todo este desarrollo he conseguido expresar el estado inicial del átomo ligado como superposición de estados de piones cargados libres. Así, \mathcal{M}_{if} en (8) es

$$\Gamma(A_{2\pi} \rightarrow \pi^0 \pi^0) = \frac{2\beta_{\pi^0 \pi^0}}{32\pi M_A^2} |\Psi_0|^2 |\mathcal{A}_{+-00}^{J=0}(\vec{p}_f = 0)|^2, \quad (25)$$

donde $\mathcal{A}_{+-00}^{J=0}(\vec{p}_f) = \langle \pi^- \pi^+(\vec{p}_i) | \mathcal{M} | \pi^0 \pi^0(\vec{p}_f) \rangle$ es la amplitud de dispersión del proceso $\pi^- \pi^+ \rightarrow \pi^0 \pi^0$. Nótese que he tomado el límite de bajas energías que impone $p_f \simeq 0 \rightarrow E_{CM}^2 = 4m_{\pi^0}^2$.

Por último, la cantidad Ψ_0 la calculo recordando los autoestados de átomos monoeléctricos [3]. En concreto el estado fundamental, con números cuánticos $n = 1$, $L = 0$, $m_L = 0$ es

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-Zr/a_0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (Z\mu\alpha)^{3/2} e^{-Zr/a_0}, \quad (26)$$

que no tiene dependencia angular. Para el pionium $Z = 1$, que es la carga del π^+ . Tomando además el límite $r \rightarrow 0$ concluyo que

$$\Gamma(A_{2\pi} \rightarrow \pi^0 \pi^0) = \frac{\beta_{\pi^0 \pi^0} (\alpha \frac{m_{\pi^\pm}}{2})^3}{16\pi^2 M_A^2} |\mathcal{A}_{+-00}^{J=0}(\vec{p}_f = 0)|^2. \quad (27)$$

El objetivo de las sucesivas secciones será el cálculo de la amplitud para el proceso de dispersión de piones a distintos niveles de precisión. Para ello, recurriré a una teoría efectiva que reproduzca la interacción fuerte entre piones a bajas energías.

III. SIMETRÍA QUIRAL EN EL LAGRANGIANO DE QCD

La cromodinámica cuántica (QCD) es la teoría cuántica de campos gauge que describe las interacciones fuertes entre partículas. QCD se vuelve no perturbativa a bajas energías, por lo que son necesarias teorías efectivas que incluyan únicamente los grados de libertad que se observan en ese régimen.

Para un número genérico N_f de sabores, el lagrangiano de QCD se escribe como

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{j=1}^{N_f} \bar{q}_j (i\not{D} - m_j) q_j - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a,$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c, \quad \not{D} = \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} g t_a A_\mu^a \right) \gamma^\mu, \quad (28)$$

donde γ^μ son las matrices de Dirac, A_μ^a , con $a = 1, \dots, 8$, los campos gauge de los gluones, g la constante de acoplamiento fuerte, m_j la masa de los diferentes quarks y f_{bc}^a las constantes de estructura del grupo $SU(3)_C$. Nótese que hemos omitido los índices de color de los quarks y de los generadores t_a del álgebra.

El objeto de estudio de este trabajo ocurre a escalas de energía por debajo del GeV (típica escala hadrónica $\Lambda \sim 1$ GeV). Los piones están compuestos por los quarks de valencia u y d , los quarks más ligeros, a los cuales restringiremos el lagrangiano (28) con $N_f = 2$. La masa de los piones es cercana a los 140 MeV, mientras que la de sus constituyentes se encuentran entre los 2–5 MeV. Esta diferencia energética hace lícito despreciar las masas de los quarks u y d como primera aproximación en lo que se conoce como *límite quiral*. Bajo esta aproximación el lagrangiano adquiere una nueva simetría; la *simetría quiral*.

Descomponiendo q en sus dos quiralidades $q = q_L + q_R$, con $q_{L,R} = P_{L,R} \cdot q$ y $P_{L,R} = \frac{1 \mp \gamma_5}{2}$, $\gamma_5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$, la parte del lagrangiano que involucra a los quarks se separará en ambas quiralidades ($\bar{q}_i \not{D} q \rightarrow \bar{q}_L i \not{D} q_L + \bar{q}_R i \not{D} q_R$)

y por tanto este será invariante bajo transformaciones $SU_L(2) \times SU_R(2)$ del tipo [4]

$$q_{L,R} \xrightarrow{SU(2)_L \times SU(2)_R} U_{L,R} \cdot q_{L,R} = \exp\left(i \frac{\tau_j \theta_{L,R}^j}{2}\right) q_{L,R}, \quad (29)$$

donde τ_a son los generadores del álgebra de $SU(2)$; las matrices de Pauli. Si no anulamos la masa de los quarks, al separar los espinores en sus dos quiralidades, aparecen términos cruzados proporcionales a las masas. Por tanto, la masa de los quarks rompe de manera explícita esta simetría.

La simetría quiral $SU(2)_L \times SU(2)_R$ implica la conservación de las corrientes:

- $V_j^\mu = \frac{1}{2} \bar{q} \gamma^\mu \tau_j q$: corriente vectorial que se corresponde con $\theta_L^j = \theta_R^j$, el subgrupo $SU(2)_{L+R} = SU(2)_V$ de isospín.
- $A_j^\mu = \frac{1}{2} \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 \tau_j q$: corriente axial con $\theta_L^j = -\theta_R^j$.

Si la simetría quiral se manifestara en la naturaleza, los hadrones ligeros aparecerían ordenados en tripletes de $SU(2)_L \times SU(2)_R$ degenerados correspondientes a ambas corrientes presentadas. Esta simetría será en todo caso aproximada, pues las masas de los quarks ligeros no son exactamente nulas. Aun así, es esperable que las desviaciones de esta simetría sean comparables a la escala de dichas masas tan ligeras. Para $J^P = 1^-$ existe un triplete de isospín $\rho(770)$ donde las masas de ρ^-, ρ^0, ρ^+ son muy parecidas. Sin embargo, el triplete $J^P = 1^+$ más cercano a la masa de la $\rho(770)$ es la $a_1(1260)$. Esta diferencia tan acusada de masas no es atribuible a la aproximación del límite quiral. En el lagrangiano (28) no hay ninguna otra fuente que esté rompiendo la simetría y explique así lo observado experimentalmente; la simetría quiral está así espontáneamente rota.

A. Ruptura espontánea de la simetría quiral

Cuando existe una simetría, tanto el hamiltoniano como el vacío son invariantes bajo esa transformación. Denotemos con Q^a a las cargas del grupo que inducen dicha transformación.

En una teoría cuántica de campos, se define al vacío para que sea aniquilado por el hamiltoniano, $H|0\rangle = 0$. Cuando hay ruptura espontánea de simetría (SSB), encontramos que el vacío no es invariante bajo la simetría completa, sino solo bajo una parte que cumple $Q^a|0\rangle = |0\rangle$. Las cargas que no dejan al vacío invariante cumplen $Q^a|0\rangle = |\pi^a\rangle \neq |0\rangle$, donde los $|\pi^a\rangle$ son una translación de $|0\rangle$ e igualmente aniquilados por el hamiltoniano $H|\pi^a\rangle = 0$. El vacío está degenerado. Para cuantizar la teoría se escoge un único vacío de entre los posibles, rompiendo así la simetría. Los generadores que no dejen al vacío escogido invariante se dirá que están “rotos” y a los $|\pi^a\rangle$ se les denominará *bosones de Nambu-Goldstone* (NGB). Por el Teorema de Goldstone [5] aparecen tantos

NGB como generadores rotos y con los mismos números cuánticos que dichos generadores.

En la naturaleza solo se observan tripletes de $SU(2)_V$. La simetría se está rompiendo espontáneamente de $SU(2)_L \times SU(2)_R$ (6 generadores) a $SU(2)_V$ (3 generadores). Esto nos deja con un total de 3 generadores rotos. Aparecerán tres NGB pseudo-escalares sin masa que se identifican con el triplete de piones. Como la masa de los quarks no es nula, la masa de estos NGB tampoco lo será y se les dirá *pseudo-NGB*. Aún así será una masa muy por debajo de las típicas escalas hadrónicas. En el límite de isospín, $m_d = m_u$, la masa de los tres *pseudo-NGB* será idéntica, y la denotaremos con M_π .

IV. TEORÍA DE PERTURBACIONES QUIRAL

La *Teoría de Perturbaciones Quiral* (ChPT) es una teoría efectiva que proporciona un método de expansión sistemática en potencias del momento $\mathcal{O}(k^{2n})$, más exactamente en $\left(\frac{k}{4\pi f_\pi}\right)^{2n}$, donde $4\pi f_\pi \sim \Lambda$, y $f_\pi = 92.3$ MeV es la constante de desintegración del pion. De esta manera, a bajas energías, cada término estará suprimido con respecto al anterior. Esta expansión viene asociada a un conteo de potencias por el cual un término cinético o un término de masa de los NGB ($\sim M_\pi^2$) contribuyen como $\sim k^2$, mientras que los términos de masa de los quarks escalarían linealmente ($M_\pi^2 \propto m_q$). Teniendo en cuenta este conteo y las simetrías de QCD, así como el patrón de SSB quiral, a cada orden existe un número finito de términos que constituyen el lagrangiano efectivo lo más general posible de QCD a bajas energías.

El Teorema de conteo quiral de Weinberg indica a qué orden (referido como dimensión *Dim*) contribuye un diagrama según su número de loops (N_L) y su número y tipo de vértices

$$Dim = 2(1 + N_L) + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n-1)N_{2n}, \quad (30)$$

donde N_{2n} es el número de vértices de $\mathcal{O}(k^{2n})$ procedentes de los términos del lagrangiano que llamaremos \mathcal{L}_{2n} . Por otro lado, la teoría será renormalizable orden a orden; las divergencias que aparezcan a un cierto orden quiral serán reabsorbidas en los parámetros del lagrangiano del orden sucesivo. Para una revisión más detallada de esta teoría y del Teorema del conteo de Weinberg pueden consultarse [6–8].

Los elementos de $SU(2)$ se pueden escribir como matrices unitarias que incluyan a los campos de los piones π^a , los únicos grados de libertad a bajas energías, según

$$U = \exp\left(i \frac{\pi^a \tau_a}{f_\pi}\right), \quad a = 1, 2, 3. \quad (31)$$

El lagrangiano efectivo se construye orden a orden a partir de U y sus derivadas o potencias de M_π^2 , siendo genéricamente $\mathcal{O}(k^2) \equiv \mathcal{O}(\partial^2) = \mathcal{O}(M_\pi^2)$. A cada orden se consideran todos los términos independientes posibles consistentes con el patrón de ruptura de simetría quiral, simetría Lorentz, paridad, etc. Para extraer los términos de

interacción de los piones expandiremos U y U^\dagger hasta conseguir el número de campos que precisemos. Usualmente resulta más conveniente trabajar en la base de carga para los campos de los piones según

$$\pi^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi^1 + i\pi^2), \quad \pi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi^1 - i\pi^2), \quad \pi^0 = \pi^3. \quad (32)$$

De esta manera reescribo (31) como

$$U = \exp\left(\frac{i\sqrt{2}}{f_\pi}\varphi\right), \quad \varphi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 & \pi^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

A continuación, calcularé la amplitud de la dispersión de piones $\pi^-\pi^+ \rightarrow \pi^0\pi^0$ en ChPT. Para ello, analizaré los diagramas que contribuyen primero a tree-level y después a un loop, según el conteo de Weinberg (30), y calculando su contribución a la amplitud en cada caso.

A. Dispersión $\pi^-\pi^+ \rightarrow \pi^0\pi^0$ a tree-level

El lagrangiano más general posible a orden más bajo en $SU(2)$ es

$$\mathcal{L}_2 = \frac{f_\pi^2}{4}\text{Tr}(\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U) + \frac{f_\pi^2 M_\pi^2}{4}\text{Tr}(U + U^\dagger), \quad (34)$$

donde sus únicos parámetros son f_π y M_π . Este lagrangiano da lugar a vértices $\mathcal{O}(k^2)$ y será válido para el cálculo a tree-level (Leading Order, LO). Este lagrangiano, solo al orden más bajo, también se puede construir a través de un modelo muy simple y didáctico llamado *modelo sigma lineal* [9]. Expandiendo la expresión (33) hasta términos de interacción de cuatro piones, (34) queda

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & \frac{1}{2}\partial_\mu \pi^0 \partial^\mu \pi^0 + \partial_\mu \pi^- \partial^\mu \pi^+ - M_\pi^2 \left[\frac{1}{2}(\pi^0)^2 + \pi^- \pi^+ \right] + \\ & + \frac{1}{3f_\pi^2} \left[\pi^0 \pi^- \partial_\mu \pi^0 \partial^\mu \pi^+ + \pi^0 \pi^+ \partial_\mu \pi^0 \partial^\mu \pi^- - \pi^- \pi^+ \partial_\mu \pi^- \partial^\mu \pi^+ - \right. \\ & \left. - (\pi^0)^2 \partial_\mu \pi^- \partial^\mu \pi^+ - \pi^- \pi^+ \partial_\mu \pi^0 \partial^\mu \pi^0 + \frac{1}{2}(\pi^+)^2 \partial_\mu \pi^- \partial^\mu \pi^- + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(\pi^-)^2 \partial_\mu \pi^+ \partial^\mu \pi^+ \right] + \frac{M_\pi^2}{6f_\pi^2} \left[(\pi^- \pi^+)^2 + (\pi^0)^2 \pi^- \pi^+ + \frac{1}{4}(\pi^0)^4 \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Lo resaltado en (35) son los términos de interacción de dos piones cargados con dos neutros a LO, necesarios para calcular la amplitud del proceso $\pi^-\pi^+ \rightarrow \pi^0\pi^0$. De ellos extraemos el vértice de interacción para construir diagramas de Feynman. En el espacio de momentos, cada derivada de un campo se traducirá en $-ik$ si la partícula es entrante, o ik si es saliente. Además, habrá que añadir un factor 2 de simetría debido a las distintas posibles contracciones de los campos, pues los π^0 son idénticos. Con ello, el vértice con todos los momentos entrantes para la interacción $\pi^-(k_1)\pi^+(k_2)\pi^0(k_3)\pi^0(k_4)$ queda

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} \pi^- \quad \pi^0 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ \pi^+ \quad \pi^0 \end{array} &= \frac{i}{3f_\pi^2} [2(k_1 \cdot k_2) + 2(k_3 \cdot k_4) - (k_1 \cdot k_3) - \\ & - (k_1 \cdot k_4) - (k_2 \cdot k_3) - (k_2 \cdot k_4) + M_\pi^2]. \end{aligned} \quad (36)$$

Este vértice permite calcular distintos procesos de dispersión de piones orientando los momentos k_i según sea preciso. En particular, para la amplitud de la dispersión $\pi^-\pi^+ \rightarrow \pi^0\pi^0$ a LO, los momentos k_3 y k_4 pasan a ser salientes. Esto se ve reflejado en los diagramas cambiando el signo de cada momento que pasa a ser saliente. Además, todas las partículas están sobre la capa de masas, por lo que empleo las variables de Mandelstam para reescribir los productos de momentos

$$\begin{aligned} s &= (k_1 + k_2)^2 = (k_3 + k_4)^2, \quad (k_1 \cdot k_2) = (k_3 \cdot k_4) = \frac{s}{2} - M_\pi^2, \\ t &= (k_1 - k_3)^2 = (k_2 - k_4)^2, \quad (k_1 \cdot k_3) = (k_2 \cdot k_4) = M_\pi^2 - \frac{t}{2}, \\ u &= (k_1 - k_4)^2 = (k_2 - k_3)^2, \quad (k_1 \cdot k_4) = (k_2 \cdot k_3) = M_\pi^2 - \frac{u}{2}. \end{aligned} \quad (37)$$

Recordando que las variables de Mandelstam cumplen en este caso $s + t + u = 4M_\pi^2$, obtengo la amplitud

$$\begin{array}{c} \pi^- \quad \pi^0 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ \pi^+ \quad \pi^0 \end{array} = \mathcal{A}(s, t, u) = \frac{s - M_\pi^2}{f_\pi^2}. \quad (38)$$

Según la expresión (30), este será el único diagrama que contribuya a LO y coincide con el primer cálculo de este proceso en [10].

1. Relación con las amplitudes de isospín definido

La amplitud (38) solo depende de la variable de Mandelstam s , por ello identificaremos a $\mathcal{A}(s, t, u)$ como el canal s . Sin embargo, del vértice (36) es posible obtener otros procesos de dispersión de piones considerando otras combinaciones de momentos.

- Amplitud $\mathcal{A}(t, s, u)$ canal t a tree-level.

Estos procesos resultan de hacer salientes los momentos k_2 y k_4 o k_1 y k_3 en el vértice (36). Así, (38) y (39) están relacionados por la simetría de crossing $k_2 \leftrightarrow -k_3$ o $k_1 \leftrightarrow -k_4$, lo cual se traduce en $s \leftrightarrow t$.

$$\begin{array}{c} \pi^- \quad \pi^0 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ \pi^0 \quad \pi^- \end{array} = \begin{array}{c} \pi^0 \quad \pi^+ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ \pi^+ \quad \pi^0 \end{array} = \mathcal{A}(t, s, u) = \frac{t - M_\pi^2}{f_\pi^2}. \quad (39)$$

- Amplitud $\mathcal{A}(u, t, s)$ canal u a tree-level.

Siguiendo un procedimiento parejo obtengo $\mathcal{A}(u, t, s)$ por crossing $s \leftrightarrow u$.

$$\begin{array}{c} \pi^- \quad \pi^0 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ \pi^0 \quad \pi^- \end{array} = \begin{array}{c} \pi^0 \quad \pi^+ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ \pi^+ \quad \pi^0 \end{array} = \mathcal{A}(u, t, s) = \frac{u - M_\pi^2}{f_\pi^2}. \quad (40)$$

Los piones son un triplete de isospín, por lo que podemos identificar sus estados como $|\pi^+\rangle = |1, +1\rangle$, $|\pi^0\rangle = |1, 0\rangle$, $|\pi^-\rangle = -|1, -1\rangle$. De la composición de momentos de isospín a través de los coeficientes de Clebsch-Gordan, calculo las distintas amplitudes de los canales

s , t y u en función de las amplitudes con isospín definido. Además, es posible expresar todos los resultados de las amplitudes en función únicamente de las variables s y θ incorporando la condición $t = (2M_\pi^2 - \frac{s}{2})(1 - \cos\theta)$, siendo θ el ángulo de dispersión en el sistema CM y $s = E_{CM}^2$. Con ello llego a las relaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(s, t, u) &= \frac{1}{3}(\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_2), \quad \mathcal{A}_0 = 3\mathcal{A}(s, t, u) + \mathcal{A}(t, s, u) + \mathcal{A}(u, t, s), \\ \mathcal{A}(t, s, u) &= \frac{1}{2}(\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_1), \quad \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}(t, s, u) - \mathcal{A}(u, t, s), \\ \mathcal{A}(u, t, s) &= \frac{1}{2}(\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1), \quad \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}(t, s, u) + \mathcal{A}(u, t, s), \end{aligned} \quad (41)$$

donde el subíndice denota el isospín total. La amplitud destacada en negrita será la empleada en el cálculo según la descomposición en ondas parciales.

2. Ondas parciales y scattering lengths

Las amplitudes de isospín definido se pueden expandir en ondas parciales. Para una introducción sobre teoría de scattering y la expansión en ondas parciales puede consultarse [11]. Escogiendo la normalización empleada en [4]

$$\mathcal{A}_I(s, \theta) = 32\pi \sum_{L=0}^{\infty} ((2L+1)P_L(\cos\theta)t_I^J(s)), \quad (42)$$

donde $P_L(\cos\theta)$ es el polinomio de Legendre de orden L .

El estado inicial es un átomo ligado y, en el sistema CM, el momento angular orbital es $L=0$; onda S . Por otro lado, los piones son bosones con $S=0$; el estado compuesto de dos piones se mantendrá con espín nulo y $J=L=0$. Por tanto, su función de onda deberá estar simetrizada y solo podrán aparecer estados de isospín total par; $I=0, 2$. Las correspondientes ondas parciales a momentos L más bajos que se pueden construir y que contribuyen al proceso $\pi^-\pi^+ \rightarrow \pi^0\pi^0$ son entonces t_0^0 y t_2^0 .

Los polinomios de Legendre $P_L(\cos\theta)$ son una base ortonormal de funciones y, por tanto, la expansión (42) se puede invertir

$$t_I^L(s) = \frac{1}{64\pi} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) P_L(\cos\theta) \mathcal{A}_I(s, \theta). \quad (43)$$

En particular, con $P_0(\cos\theta) = 1$, a LO

$$t_0^0(s) = \frac{1}{32\pi} \mathcal{A}_0(s), \quad t_2^0(s) = \frac{1}{32\pi} \mathcal{A}_2(s). \quad (44)$$

Por otro lado, en la ecuación (27), se necesita la amplitud a momento cero. Es usual parametrizarla en términos del *scattering length* a definido como [12]

$$a_I^L \simeq \frac{1}{M_\pi k^{2L}} \text{Re}(t_I^L(s)) + \mathcal{O}(k^2), \quad (45)$$

con k el momento del CM. Con ello, regresando a (27), y desarrollando $\mathcal{A}_{+-0}^{J=0}(\vec{p}_f=0) = \mathcal{A}(s, t, u)$ según las relaciones (41), (44) y (45), tengo que

$$\Gamma(A_{2\pi} \rightarrow \pi^0\pi^0) \simeq \frac{2}{9} \beta_{\pi^0\pi^0} \alpha^3 m_{\pi^\pm} (a_0^0 - a_2^0)^2 \simeq \frac{2}{9} \alpha^3 p_0 (a_0^0 - a_2^0)^2, \quad (46)$$

en unidades de M_π^2 y donde en la última aproximación se ha empleado (9).

Hasta este orden, e introduciendo el límite de bajas energías tal que $s = 4M_\pi^2$, con $M_\pi = m_{\pi^\pm}$, obtengo los resultados a LO

$$\begin{aligned} |a_0^0 - a_2^0| &= 0.200 \pm 0.006 M_\pi^{-1}, \quad \Gamma_{A_{2\pi}} = (1.23 \pm 0.07) \cdot 10^{-7} \text{ MeV}, \\ \tau_{A_{2\pi}} &= (5.35 \pm 0.30) \cdot 10^{-15} \text{ s}. \end{aligned} \quad (47)$$

Este resultado para $|a_0^0 - a_2^0|$ coincide con el obtenido en [13] para el cálculo a primer orden. Las incertidumbres en (47) las he estimado teniendo en cuenta que asumir el límite de isospín implica un error del 3%. Este resultado desprecia la contribución del orden siguiente, este error también se puede estimar, pero se conocerá tras el cálculo completo a un loop.

B. Dispersión $\pi^-\pi^+ \rightarrow \pi^0\pi^0$ a un loop

Para mejorar la precisión del cálculo es necesario aumentar el orden de la serie perturbativa. Para ello, calcularé la amplitud de la dispersión de piones hasta un loop (next-to Leading Order, NLO).

Los términos de interacción del lagrangiano (35) proporcionan vértices hasta $\mathcal{O}(k^2)$. Por el momento solo he trabajado con sus términos de interacción que involucran $\pi^-\pi^+\pi^0\pi^0$; sin embargo, es posible extraer otros vértices con los que construir diagramas de Feynman de orden superior. Dichos vértices son

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{3f_\pi^2} [(k_1 \cdot k_2) + (k_1 \cdot k_3) + (k_2 \cdot k_4) + (k_3 \cdot k_4) - \\ &- 2(k_2 \cdot k_3) - 2(k_1 \cdot k_4) + 2M_\pi^2], \end{aligned} \quad (48)$$

$$= \frac{i}{f_\pi^2} M_\pi^2. \quad (49)$$

Orientando los momentos en (48) y (49) como se requiera en cada caso, construyo los diagramas en la Figura 1, que incorporan dos vértices del lagrangiano (35). Contribuyen a $\mathcal{O}(k^4)$ a la amplitud según el conteo (30).

Expondré el cálculo de forma más detallada para el primero de los diagramas ((a) de la Figura 1); los sucesivos se calcularán de forma equivalente modificando los momentos entrantes y salientes como convenga en cada caso. En el primer diagrama, las líneas internas portarán los momentos q y $p-q$, siendo $p = k_1 + k_2 = k_3 + k_4$, $p^2 = s$, y q el momento del loop que está integrado. Construyo así

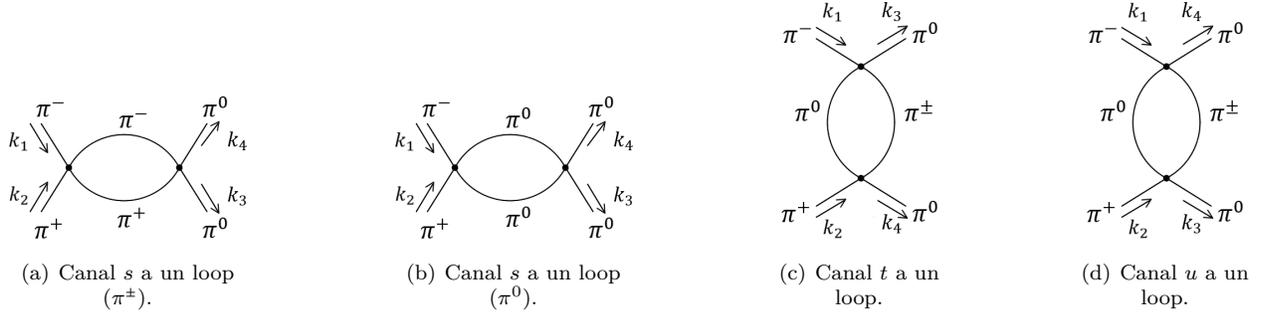


Figura 1: Diagramas que se pueden construir con dos vértices del lagrangiano (35) y que contribuyen a $\mathcal{O}(k^4)$ a la amplitud del proceso $\pi^- \pi^+ \rightarrow \pi^0 \pi^0$ NLO.

la amplitud como

$$\begin{aligned}
 iA_{s^\pm}(s, t, u) = & \mu^{D-4} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \left[\frac{i}{3f_\pi^2} ((k_1 \cdot k_2) - (k_1 \cdot q) - \right. \\
 & - (k_2 \cdot (p - q)) + (q \cdot (p - q)) + 2(k_2 \cdot q) + 2(k_1 \cdot (p - q)) + 2M_\pi^2) \cdot \\
 & \cdot \frac{i}{q^2 - M_\pi^2} \frac{i}{(p - q)^2 - M_\pi^2} \frac{i}{3f_\pi^2} (2(q \cdot (p - q)) + 2(k_3 \cdot k_4) + (q \cdot k_3) + \\
 & \left. + ((p - q) \cdot k_3) + (q \cdot k_4) + ((p - q) \cdot k_4) + M_\pi^2) \right]. \quad (50)
 \end{aligned}$$

Esta integral es divergente, por lo que para calcularla se recurre al método de regularización dimensional. Para ello se introduce la escala μ y la dimensión $D = 4 + 2\epsilon$. Típicamente se fija μ a la masa de la $\rho(770)$, M_ρ . En el desarrollo del cálculo he empleado los productos (37), con lo que aparecen distintas integrales con los momentos q^μ , q^2 , $q^\mu q^\nu$, $q^\mu q^2$ o q^4 en sus numeradores. Se podrán escribir todas ellas a través de la reducción de Passarino-Veltman [14] en función de las integrales

$$I_1(p^2) = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 - M_\pi^2)((p - q)^2 - M_\pi^2)}, \quad (51)$$

$$I_0 = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2 - M_\pi^2}. \quad (52)$$

Las amplitudes restantes de la Figura 1 también se escriben en función de dichas integrales llegando a

$$A_{s^\pm}(s, t, u) = i\mu^{D-4} \left(\frac{s M_\pi^2 - s^2}{2f_\pi^4} I_1(s) + \frac{5s - 3M_\pi^2}{9f_\pi^4} I_0 \right), \quad (53)$$

$$A_{s0}(s, t, u) = i\mu^{D-4} \left(\frac{M_\pi^4 - s M_\pi^2}{2f_\pi^4} I_1(s) + \frac{M_\pi^2}{3f_\pi^4} I_0 \right), \quad (54)$$

$$\begin{aligned}
 A_t(s, t, u) = & -\frac{i\mu^{D-4}}{9f_\pi^4} \left[\left(2t^2 + 9M_\pi^4 - 8t M_\pi^2 + \frac{1}{D-1} (2t^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{9}{2} s t - 17t M_\pi^2 - 18s M_\pi^2 + 36M_\pi^4 - D t M_\pi^2 + \frac{D}{4} t^2) \right) I_1(t) + \right. \\
 & \left. + \left(6M_\pi^2 - 2t - \frac{1}{D-1} (4t - 18M_\pi^2 + 9s + D \frac{t}{2}) \right) I_0 \right], \quad (55)
 \end{aligned}$$

$$A_u(s, t, u) = A_t(s, [t \leftrightarrow u]). \quad (56)$$

Nótese que la amplitud del canal u se obtiene a partir del canal t por crossing $t \leftrightarrow u$.

Por otro lado, es posible expandir (33) hasta términos de interacción de seis piones expandiendo así el lagrangiano (34) hasta $\mathcal{O}(k^4)$. Esto da lugar a dos nuevos diagramas que también contribuyen a NLO, los cuales cuentan con un loop de un pion cargado o neutro portando un momento q que queda integrado. Con un tratamiento similar al empleado en los diagramas de la Figura 1, teniendo en cuenta los factores de simetría en la contracción de los campos, encuentro que en este caso las amplitudes se escriben en función únicamente de la integral (52)

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram (c)} & = \mathcal{A}_{6\pi^\pm}(s, t, u) = \frac{i\mu^{D-4}}{45f_\pi^4} (50M_\pi^2 - 30s) I_0, \quad (57)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram (d)} & = \mathcal{A}_{6\pi^0}(s, t, u) = \frac{i\mu^{D-4}}{90f_\pi^4} (55M_\pi^2 - 40s) I_0. \quad (58)
 \end{aligned}$$

En (36), (48) y (49) se pueden unir dos de sus líneas externas de tal manera que se conserve la carga. Estos diagramas resultantes constituyen una contribución a la corrección del propagador de pion y a la renormalización de los campos y la masa de este

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram (c)} & = \frac{\pi^\pm, \pi^0}{k} \pi^\pm = \frac{\pi^\pm, \pi^0}{k} \pi^0 = -\frac{\mu^{D-4}}{6f_\pi^2} (M_\pi^2 - k^2) I_0. \quad (59)
 \end{aligned}$$

Las integrales (51) y (52) se encuentran resueltas en distintas tablas; he escogido la referencia [15]. Siguiendo sus anexos

$$I_1(s) = -i \left(2\lambda + \frac{1}{(4\pi)^2} + 2\mu_\pi - J(s) \right), \quad (60)$$

$$I_0 = -i2M_\pi^2 (\lambda + \mu_\pi), \quad (61)$$

donde

$$\lambda = \frac{\mu^{D-4}}{(4\pi)^2} \left(\frac{1}{2\epsilon} - \frac{1}{2} (\log 4\pi + \gamma_E - 1) \right), \quad (62)$$

$$J(s) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(2 + \sigma(s) \log \left(\frac{\sigma(s) - 1}{\sigma(s) + 1} \right) \right), \quad (63)$$

$$\sigma(s) = \sqrt{1 - \frac{4M_\pi^2}{s}}, \quad \mu_\pi = \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \log \left(\frac{M_\pi^2}{\mu^2} \right). \quad (64)$$

Inspirando la notación en [16], la parte divergente $1/\epsilon$ queda ubicada únicamente dentro de la definición de λ en (62).

Todos los diagramas calculados hasta ahora provienen de los términos de interacción de (34); sin embargo, hay que considerar un diagrama más que contribuye a NLO y que procede de un lagrangiano de orden superior.

1. Lagrangiano de orden superior $\mathcal{O}(k^4)$

El lagrangiano de orden superior lo he tomado de [4], restringiéndolo a $SU(2)$ según las relaciones entre sus parámetros encontradas en [17]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & \frac{\ell_1}{2} \text{Tr} \left(\partial^\mu U^\dagger \partial_\mu U \right)^2 + \frac{\ell_2}{4} \text{Tr} \left(\partial^\mu U^\dagger \partial^\nu U \right) \text{Tr} \left(\partial_\mu U^\dagger \partial_\nu U \right) + \\ & + \frac{M_\pi^2 \ell_4}{4} \text{Tr} \left(\partial^\mu U^\dagger \partial_\mu U \left(U^\dagger + U \right) \right) + \frac{M_\pi^4 (\ell_3 + \ell_4)}{8} \text{Tr} \left(U^{\dagger 2} + U^2 \right), \end{aligned} \quad (65)$$

donde ℓ_i son las *Low Energy Constants* (LECs) en $SU(2)$. En ChPT es frecuente emplear el esquema de renormalización $\overline{\text{MS}} - 1$ en el cual las LECs absorberán las divergencias de las amplitudes (53), (54), (55), (56), (57) y (58). Expandiendo U y U^\dagger según la definición en (33) obtengo un lagrangiano muy extenso donde los términos de interés son

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^{int} = & \frac{1}{f_\pi^4} \left(4\ell_1 \partial^\mu \pi^+ \partial_\mu \pi^- \partial^\nu \pi^0 \partial_\nu \pi^0 + 4\ell_2 \partial^\mu \pi^+ \partial_\mu \pi^0 \partial^\nu \pi^- \partial_\nu \pi^0 \right) + \\ & + \left[\ell_4 \left(2\partial^\mu \pi^+ \partial_\mu \pi^0 \pi^- \pi^0 + 2\partial^\mu \pi^- \partial_\mu \pi^0 \pi^+ \pi^0 - 5\partial^\mu \pi^+ \partial_\mu \pi^- (\pi^0)^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - 5\partial^\mu \pi^0 \partial_\mu \pi^0 \pi^+ \pi^- \right) + 4M_\pi^4 (\ell_3 + \ell_4) \pi^+ \pi^- (\pi^0)^2 \right] \frac{M_\pi^2}{3f_\pi^4}, \end{aligned} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^{\pi\pi} = & \frac{2M_\pi^2}{f_\pi^2} \left[\ell_4 \left(\partial^\mu \pi^+ \partial_\mu \pi^- + \frac{1}{2} \partial^\mu \pi^0 \partial_\mu \pi^0 \right) - (\ell_3 + \ell_4) (\pi^+ \pi^- + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (\pi^0)^2 \right), \end{aligned} \quad (67)$$

donde \mathcal{L}_4^{int} es la interacción $\pi^- \pi^+ \pi^0 \pi^0$ que contribuye al loop y $\mathcal{L}_4^{\pi\pi}$ los términos que, junto a (59), corrigen el propagador del pión y contribuyen a la renormalización de los campos y la masa. Comienzo calculando la amplitud de la interacción (66) a tree-level con \mathcal{L}_4

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4(s, t, u) = & \frac{1}{f_\pi^4} \left[2\ell_1 (s - 2M_\pi^2)^2 + \ell_2 \left((u - 2M_\pi^2)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + (t - 2M_\pi^2)^2 \right) + 4M_\pi^2 \left(\ell_4 (s - M_\pi^2) + \ell_3 \frac{2M_\pi^2}{3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (68)$$

Los vértices del lagrangiano \mathcal{L}_4 los representaré con un cuadrado negro que contiene las LECS. Por su parte, la contribución (67) a la corrección del propagador es

$$\begin{array}{c} \pi^\pm \\ \text{---} \blacksquare \text{---} \\ \text{---} k \end{array} = \begin{array}{c} \pi^0 \\ \text{---} \blacksquare \text{---} \\ \text{---} k \end{array} = \frac{2M_\pi^2}{f_\pi^2} (\ell_4 (k^2 - M_\pi^2) - \ell_3 M_\pi^2). \quad (69)$$

2. Renormalización y cancelación de divergencias

Para completar el cálculo a un loop es necesario renormalizar los parámetros del lagrangiano y reabsorber todas las divergencias que han surgido en cada diagrama. Este hecho hace que los valores de las masas y campos físicos se alejen del valor de los parámetros introducidos en el lagrangiano. Es frecuente referirse a estos segundos con el apellido “*desnudo*”, mientras que los primeros están renormalizados y se corrigen orden a orden.

Parametrizaré la corrección del propagador de tal manera que cumpla $\frac{i}{k^2 - M_\pi^2} \rightarrow \frac{i}{k^2 - M_\pi^2 + \Pi(k^2, M_\pi^2)}$, siendo $-i\Pi(k^2, M_\pi^2)$ la suma de los diagramas en (59) y (69) a este orden

$$\begin{array}{c} \text{---} k \\ \text{---} \blacksquare \text{---} k \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} k \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} k \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} k \\ \text{---} \blacksquare \text{---} k \end{array} + \dots = \begin{array}{c} \text{---} k \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} k \end{array} \left(1 + \frac{\Pi(k^2, M_\pi^2)}{k^2 - M_\pi^2} + \dots \right). \quad (70)$$

A mayores órdenes se puede apreciar cómo esta sucesión se trata de una serie geométrica. Definiendo además $\Pi(k^2, M_\pi^2) = A(k^2 - M_\pi^2) + B M_\pi^2$, con $A = \left. \frac{\partial \Pi(k^2, M_\pi^2)}{\partial k^2} \right|_{k^2 = M_\pi^2}$ y $B = \left. \frac{\Pi(k^2, M_\pi^2)}{M_\pi^2} \right|_{k^2 = M_\pi^2}$, siendo ambas $\sim \frac{M_\pi^2}{f_\pi^2}$, tengo que

$$\frac{i}{k^2 - M_\pi^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{\Pi(k^2, M_\pi^2)}{k^2 - M_\pi^2}} \right) = \frac{1}{(1 + A)(k^2 - M_\pi^2 + \frac{B}{1+A} M_\pi^2)}, \quad (71)$$

Así, $\delta M_\pi^2 = \frac{B}{1+A} \simeq B$ será la corrección a la masa y $Z = 1 + A$ la corrección a los campos, resultando en unas relaciones $M_\pi^{r^2} = M_\pi^2 (1 - \delta M_\pi^2)$ y $\pi^r = Z_\pi^{-1/2} \pi$, donde el índice “ r ” indica que la cantidad está renormalizada. Conocido $\Pi(k^2, M_\pi^2)$ calculo dichas correcciones y obtengo

$$Z_\pi = 1 - \frac{M_\pi^2}{f_\pi^2} \left(2\ell_4 - \frac{4}{3} \lambda - \frac{4}{3} \mu_\pi \right) + \mathcal{O}(M_\pi^4), \quad (72)$$

$$M_\pi^{r^2} = M_\pi^2 \left(1 + \frac{M_\pi^2}{f_\pi^2} (2\ell_3 + \lambda + \mu_\pi) + \mathcal{O}(M_\pi^4) \right). \quad (73)$$

La constante f_π también ha de renormalizarse orden a orden; sin embargo, su cálculo es elaborado y queda fuera el alcance del trabajo. Tomaré el resultado de [13]

$$f_\pi^r = f_\pi \left(1 + \frac{M_\pi^2}{f_\pi^2} (\ell_4 - 2\lambda - 2\mu_\pi) + \mathcal{O}(M_\pi^4) \right). \quad (74)$$

Las LECs renormalizadas que cancelan todas las divergencias son [13]

$$\ell_i^r(\mu) = \ell_i - \gamma_i \lambda, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad \gamma_1 = \frac{1}{3}, \quad \gamma_2 = \frac{2}{3}, \quad \gamma_3 = -\frac{1}{2}, \quad \gamma_4 = 2. \quad (75)$$

Para dar el resultado final en función de las cantidades desnudas, habrá que reexpresar la masa renormalizada a través de la relación (73), tanto en el tree-level como en las correcciones NLO. Sin embargo, añadir (73) a los términos $\mathcal{O}(k^4)$ supone una corrección total $\mathcal{O}(k^6)$, más allá del orden que estamos considerando a un loop. Atendiendo únicamente a (38) hasta NLO tengo

$$\mathcal{A}(s, t, u) = \frac{s - \frac{4}{3}M_\pi^2}{f_\pi^2} + \frac{M_\pi^2}{3f_\pi^2} = \frac{s - M_\pi^2}{f_\pi^2} - \frac{4M_\pi^4}{3f_\pi^4} (2\ell_3^r + \mu_\pi). \quad (76)$$

La amplitud completa será la suma de (76), (53), (54), (55), (56), (57), (58) y (68). Las $\ell_i^r(\mu)$ en (75) consiguen que las expresiones (73) y (74) sean finitas; en cambio, (72) continua siendo divergente y contribuirá a cancelar las divergencias en la amplitud total. Esta corrección a los campos es $\mathcal{O}(k^2)$, por tanto, incluirla en el segundo orden resultaría de nuevo en correcciones de orden superior al considerado. Será por tanto necesario añadirlo solo al tree-level señalado en **negrita** en (76) como

$$\mathcal{A}^r(s, t, u) = \frac{s - M_\pi^2}{f_\pi^2} Z_\pi^2 - \frac{4M_\pi^4}{3f_\pi^4} (2\ell_3^r + \mu_\pi). \quad (77)$$

Incorporando esta contribución y considerando las LECs renormalizadas (75), llego a una amplitud total que ya es finita en términos de M_π y f_π , desnudas, y que coincide con la obtenida en la referencia [13]

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\text{NLO}}(s, t, u) &= \mathcal{A}^r(s, t, u) + \mathcal{A}_{s\pm}(s, t, u) + \mathcal{A}_{s0}(s, t, u) + \\ &+ \mathcal{A}_t(s, t, u) + \mathcal{A}_u(s, t, u) + \mathcal{A}_{6\pi^\pm}(s, t, u) + \mathcal{A}_{6\pi^0}(s, t, u) + \\ &+ \mathcal{A}_4(s, t, u) = \frac{s - M_\pi^2}{f_\pi^2} + B(s, t, u) + C(s, t, u), \end{aligned} \quad (78)$$

donde el $\mathcal{O}(k^2)$ aparece destacado en **negrita** y donde $B(s, t, u)$ y $C(s, t, u)$ son las correcciones $\mathcal{O}(k^4)$ a un loop

$$B(s, t, u) = \frac{1}{6f_\pi^4} \left[3(s^2 - M_\pi^4)J(s) + \{ (t(t-u) - 2M_\pi^2t + 4M_\pi^2u - 2M_\pi^4)J(t) + [t \leftrightarrow u] \} \right], \quad (79)$$

$$C(s, t, u) = \frac{1}{6f_\pi^4} \left[4 \left(3\ell_1^r(\mu) - \mu_\pi - \frac{1}{24\pi^2} \right) (s - 2M_\pi^2)^2 + (3\ell_2^r(\mu) - 2\mu_\pi - \frac{5}{96\pi^2}) (s^2 + (t-u)^2) - \frac{M_\pi^2}{16\pi^2} (12s - 15M_\pi^2) \right]. \quad (80)$$

3. Resultados numéricos y discusión

Para obtener un resultado numérico se trabaja con las cantidades renormalizadas de la masa y la constante de acoplo. Para ello, aplicaré (73) y (74) únicamente en el tree-level destacado en (78). Para los términos $\mathcal{O}(k^4)$ se tiene que $M_\pi^2 = M_\pi^{r2} = m_{\pi^\pm}^2$ y $f_\pi = f_\pi^r = 92.3$ MeV a este orden.

La dependencia en la escala μ de la amplitud aparece en μ_π según (64) y en las $\ell_i^r(\mu)$ a través de (75) y (62). He comprobado explícitamente que ambas contribuciones

se cancelan haciendo que la amplitud sea independiente de la escala como ha de suceder en cualquier observable físico. Las LECs llevan la información de la dinámica a bajas energías de la teoría subyacente que es QCD. Conocer el valor de estas LECs es muy importante de cara a la predicción de observables. En este trabajo tomaré directamente su valor de la bibliografía, pues su determinación y fenomenología queda fuera de los objetivos. En [13, 18] se emplea una definición diferente para las LECs. Adaptando su valor en [18] a la notación seguida en este trabajo y a la escala $\mu = M_\rho$ tengo

$$\begin{aligned} l_1^r(M_\rho) &= (4.0 \pm 0.6) \cdot 10^{-3}, & l_2^r(M_\rho) &= (1.9 \pm 0.2) \cdot 10^{-3}, \\ l_3^r(M_\rho) &= (0.8 \pm 3.7) \cdot 10^{-3}, & l_4^r(M_\rho) &= (6.2 \pm 1.3) \cdot 10^{-3}. \end{aligned} \quad (81)$$

A continuación, empleo las ecuaciones (41), (43) y (45) para obtener los scattering lengths. Incorporo todas las correcciones a la amplitud y recorro a la expresión para la anchura (46). Introduciendo el límite de bajas energías de manera equivalente a lo hecho en el cálculo a LO obtengo

$$\begin{aligned} |a_0^0 - a_2^0| &= 0.246 \pm 0.007 M_\pi^{-1}, & \Gamma_{A_{2\pi}} &= (1.85 \pm 0.11) \cdot 10^{-7} \text{ MeV}, \\ \tau_{A_{2\pi}} &= (3.56 \pm 0.21) \cdot 10^{-15} \text{ s}. \end{aligned} \quad (82)$$

La cantidad $|a_0^0 - a_2^0|$ coincide con el cálculo a segundo orden en [13]. Al realizar cálculos a mayor orden perturbativo, se encuentra que los errores asociados a la precisión de este también están suprimidos con respecto a los que presentaba el orden dominante. Mantendré como único error relevante el 3% consecuente de haber considerado el límite de isospín, pues los errores asociados a las LECs no son significativos.

Los resultados teóricos se acercan más al experimento al aumentar la precisión, considerando correcciones de mayor orden en la serie perturbativa (ver la evolución y la convergencia de la serie en las primeras tres columnas de la *Tabla II*). El cálculo a dos loops (next-to next-to Leading Order, NNLO) se encuentra en [19]. Manteniendo la precisión solo hasta un loop, también es posible incluir los efectos de la violación de isospín, $m_u \neq m_d$, e interacción electromagnética. Esta corrección se incluye en trabajos como [20] resultando en $\Delta |a_0^0 - a_2^0| = (3.6 \pm 2.1) \cdot 10^{-3} M_\pi^{-1}$.

	LO	NLO	NNLO [21, 22]	Exp. [23]
$ a_0^0 - a_2^0 $	0.200	0.246	0.265	$0.264^{+0.033}_{-0.020}$
$\tau_{A_{2\pi}} \cdot 10^{-15}$	5.35	3.56	2.9	$2.91^{+0.49}_{-0.62}$

Tabla II: Evolución de los resultados de la diferencia de los scattering lengths y la vida media del $A_{2\pi}$ según el orden de las correcciones en ChPT con referencia a los resultados experimentales de DIRAC presentados en la *Sección V*.

V. EXPERIMENTO DIRAC

El objetivo del experimento DIRAC (Dimeson Relativistic Complex) es medir la vida media del estado fundamental del $A_{2\pi}$. Emplea el haz de protones del Proton

Synchrotron (CERN) para impactar sobre un blanco fijo. La colisión produce pares $\pi^-\pi^+$ que pueden formar átomos $A_{2\pi}$, que a su vez se desintegran a $\pi^0\pi^0$ o bien se ionizan debido a la interacción con el blanco. Los pares resultado de la ionización (pares atómicos) son los que se medirán en el detector. Se identificarán a través de un momento relativo bajo, un ángulo de abertura pequeño y energías prácticamente idénticas en CM. Un imán separará los productos según su carga en los dos brazos del detector y se buscarán pares $\pi^-\pi^+$ en coincidencia. En la colisión se producirán también otros tipos de pares $\pi^-\pi^+$ con o sin interacción coulombiana que se sustraerán del análisis. El estudio de los pares atómicos detectados muestra un exceso de eventos a bajo momento relativo corroborando la existencia del $A_{2\pi}$, como ya se había observado por primera vez en [24]. DIRAC ha conseguido además medir su vida media. La cantidad de átomos producidos en la colisión y la proporción que se ioniza se puede simular y es bien conocida [25]. Cambiando el grosor del blanco y el momento del haz de protones, la cantidad de pares atómicos esperados es distinta. No obstante, también influye el efecto de la desintegración $A_{2\pi} \rightarrow \pi^0\pi^0$, caracterizada por la vida media $\tau_{2\pi}$, que hará que los pares atómicos medidos sean menos que los esperados. El grosor del blanco es tal que variándolo levemente se puede observar la influencia de la desintegración sobre la ionización e inferir así la vida media del $A_{2\pi}$, que resulta ser $\tau_{A_{2\pi}}^{exp} = (2.91^{+0.49}_{-0.62}) \cdot 10^{-15}$ s [23]. La relación entre la anchura de desintegración y los scattering lengths empleada en el experimento coincide con la expresión (46) derivada en

este trabajo, salvo una corrección que afecta al resultado en un 6 %; obtienen así $|a_0^0 - a_2^0|^{exp} = 0.264^{+0.033}_{-0.020} M_\pi^{-1}$.

VI. CONCLUSIONES

En este trabajo he presentado el cálculo de la vida media del pionium hasta el orden de un loop en Teoría de Perturbaciones Quiral y en el límite de $SU(2)$, llegando al resultado $\tau_{A_{2\pi}} = (3.56 \pm 0.21) \cdot 10^{-15}$ s y $|a_0^0 - a_2^0| = 0.246 \pm \pm 0.007 M_\pi^{-1}$ para la diferencia de los scattering lengths en onda S . He relacionado la desintegración $A_{2\pi} \rightarrow \pi^0\pi^0$ con el scattering de piones a baja energía $\pi^-\pi^+ \rightarrow \pi^0\pi^0$, cuya amplitud he calculado explícitamente a primer y segundo orden en Teoría de Perturbaciones Quiral. Dicha teoría es la teoría efectiva de QCD a bajas energías y se construye a partir de los piones, los hadrones más ligeros, que se corresponden con los bosones de Goldstone de la ruptura espontánea de simetría quiral. He hecho el cálculo dentro del formalismo de la Teoría Cuántica de Campos, incluyendo la renormalización a un loop de la amplitud. Las expresiones derivadas coinciden con las encontradas en [10, 13] y el resultado obtenido es compatible con la medida del experimento DIRAC [23].

En conclusión, el cálculo de la vida del pionium me ha permitido comprobar la efectividad de Teoría de Perturbaciones Quiral para describir la Física Hadrónica a bajas energías, siendo capaz de llegar a una precisión comparable a la de los datos experimentales.

-
- [1] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory* (Addison-Wesley, 1995).
 - [2] R. L. Workman *et al.* (Particle Data Group), Review of Particle Physics, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2022** (2022).
 - [3] R. Eisberg and R. Resnick, *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles* (1985).
 - [4] J. R. Peláez, From controversy to precision on the sigma meson: A review on the status of the non-ordinary $f_0(500)$ resonance, *Phys. Rep.* **658**, 1 (2016).
 - [5] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, Broken Symmetries, *Phys. Rev.* **127**, 965 (1962).
 - [6] S. Scherer, Introduction to Chiral Perturbation Theory, *Adv. Nucl. Phys.* **27**, 277 (2003).
 - [7] A. Pich, Chiral Perturbation Theory, *Rep. Prog. Phys.* **58**, 563 (1995).
 - [8] S. Weinberg, Phenomenological Lagrangians, *Physica A* **96**, 327 (1979).
 - [9] M. Gell-Mann and M. Lévy, The axial vector current in beta decay, *Nuovo Cimento* (1955-1965) **16**, 705 (1960).
 - [10] S. Weinberg, Pion scattering lengths, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 616 (1966).
 - [11] H. M. Nussenzveig, *Causality and Dispersion Relations*, Tech. Rep. (1972).
 - [12] A. Martin, *Scattering Theory: Unitarity, Analyticity and Crossing* (Springer, 1969).
 - [13] J. Gasser and H. Leutwyler, Chiral perturbation theory to one loop, *Ann. Phys.* **158**, 142 (1984).
 - [14] G. Passarino and M. Veltman, One-loop corrections for e^+e^- annihilation into $\mu^+\mu^-$ in the Weinberg model, *Nucl. Phys. B* **160**, 151 (1979).
 - [15] P. Pascual and R. Tarrach, *QCD: Renormalization for the Practitioner* (Springer, 1984).
 - [16] A. G. Nicola and J. R. Peláez, Meson-meson scattering within one-loop chiral perturbation theory and its unitarization, *Phys. Rev. D* **65**, 054009 (2002).
 - [17] J. Gasser and H. Leutwyler, Chiral Perturbation Theory: Expansions in the Mass of the Strange Quark, *Nucl. Phys. B* **250**, 465 (1985).
 - [18] G. Colangelo, J. Gasser, and H. Leutwyler, $\pi\pi$ scattering, *Nucl. Phys. B* **603**, 125 (2001).
 - [19] M. Knecht *et al.*, The low energy $\pi\pi$ amplitude to one and two loops, *Nucl. Phys. B* **457**, 513 (1995).
 - [20] M. Knecht and R. Urech, Virtual photons in low energy $\pi-\pi$ scattering, *Nucl. Phys. B* **519**, 329 (1998).
 - [21] G. Colangelo, J. Gasser, and H. Leutwyler, The $\pi\pi$ s-wave scattering lengths, *Phys. Lett. B* **488**, 261 (2000).
 - [22] J. Gasser *et al.*, Decays of the $\pi^+\pi^-$ atom, *Phys. Rev. D* **64**, 016008 (2001).
 - [23] B. Adeva *et al.*, First measurement of the $\pi^+\pi^-$ atom lifetime, *Phys. Lett. B* **619**, 50 (2005).
 - [24] L. Afanasyev *et al.*, Observations of atoms consisting of π^+ and π^- mesons, *Phys. Lett. B* **308**, 200 (1993).
 - [25] L. Nemenov, Elementary Relativistic Atoms, *Sov. J. Nucl. Phys.* **41** (1985).