# UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

## FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

**Máster en Física Teórica**


## TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

# Energía oscura en teorías escalar-tensor: una formulación general e invariante

# Dark energy in scalar-tensor theories: a general and invariant formulation


**Francisco Hernandez Nicolás**

Director

Javier Rubio Peña



**Curso académico 2022-23**

# Energía oscura en teorías escalar-tensor: una formulación general e invariante

Francisco Hernández Nicolás
*Departamento de Física Teórica, Universidad Complutense de Madrid, 28040 Madrid, España*

En este trabajo desarrollamos un formalismo general e invariante que nos permite estudiar de manera unificada modelos de energía oscura en teorías escalar-tensor. Hacemos un estudio dinámico del Universo desde un marco conforme general, mostrando las reglas de transformación de las distintas componentes que nos permiten definir modelos equivalentes. Durante el desarrollo, encontramos que el sector de materia puede ser descrito en términos de un campo escalar que se comporta como un fluido perfecto, dando lugar a acoplos generales no considerados previamente en la literatura. De modo que, los resultados obtenidos para el campo escalar nos permiten definir un sistema dinámico invariante, donde el sector de materia viene descrito en términos de fluidos genéricos y de sus parámetros. Finalmente, para mostrar de forma explícita la aplicación del formalismo, estudiamos los resultados de un modelo concreto y mostramos que estos son equivalentes en un marco diferente.

## I. INTRODUCCIÓN

La expansión acelerada del Universo descubierta a finales de los años 90 es de los eventos más importantes y revolucionarios de la cosmología moderna [1, 2]. Según el modelo cosmológico estándar, ΛCDM (*Lambda Cold Dark Matter*), esta contribución a la dinámica del Universo aparece por medio de una constante cosmológica $\Lambda$ en las ecuaciones de Einstein, dando lugar a una densidad de energía constante que domina a tiempos tardíos, $\rho_\Lambda \simeq (1\text{meV})^4$. Sin embargo, existen otro tipo de descripciones donde esta constante cosmológica es dinámica. Uno de los modelos más representativos sería el denominado como *quintaesencia*, basado en un campo escalar $\phi$ con cierto potencial $V(\phi)$ responsable de la aceleración cosmológica a tiempos tardíos [3]. Hasta el momento han sido propuestos una gran cantidad de modelos, los cuales han sido principalmente clasificados en modelos de *congelación* y modelos de *descongelación* [4]. Otro de los posibles frentes para explicar el origen de la energía oscura es por medio de una modificación en la propia gravedad [5]. Los primeros modelos más simples propuestos son los de *gravedad* $f(R)$ [6], en los cuales el término de la acción de Einstein-Hilbert se toma como una función genérica $f(R)$. Sin embargo, en los últimos años uno de los modelos más populares de energía oscura son las llamadas teorías *escalar-tensor* [7], las cuales generalizan a las anteriores introduciendo una dependencia con el campo escalar en dicho término $f(\phi, R)$. Dentro de estas teorías surgen también todo tipo de modelos de energía oscura como la teoría de Brans-Dicke [8] o la *gravedad dilatónica* [9].

Cabe destacar que los ejemplos citados son una pequeña parte de toda la lista de modelos que existen en la literatura. Dada la gran cantidad de parámetros y funciones libres que parametrizan estos sistemas, existe cierta arbitrariedad en el ajuste de las mismas para reproducir los resultados físicos buscados. Esto ha dado lugar una enorme cantidad de modelos en concordancia con los datos experimentales [10, 11], lo que supone un problema para tratar de descartar unos sobre otros.

El objetivo del trabajo será desarrollar un formalismo que nos permita estudiar este tipo de teorías desde un marco general, extrayendo resultados que no dependan del sistema concreto utilizado. Para ello introduciremos el concepto de *transformación de marco conforme*, el cual consiste en una serie de transformaciones tanto en la métrica como en los campos involucrados que nos dan lugar a otro sistema físicamente equivalente. De esta forma, desarrollaremos un estudio dinámico de este tipo de teorías desde un marco conforme genérico e invariante, lo que nos permitirá obtener resultados independientes del modelo utilizado e incluso establecer relaciones entre modelos equivalentes.

**Notación y convención**: En el resto del trabajo vamos a adoptar la convención $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ y trabajaremos en unidades naturales.

## II. TEORÍAS ESCALAR-TENSOR Y TRANSFORMACIONES CONFORMES

Considerando únicamente grados de libertad gravitacionales de spin 2 e incluyendo operadores hasta orden cuadrático en las derivadas, las teorías escalar-tensor se pueden describir de forma general bajo la acción

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{f(\phi)}{2}R + \mathcal{L}(\phi) + \mathcal{L}_{mat}(g_{\mu\nu}, \phi, \chi, A_\mu, \psi)\right], \tag{1}$$

donde $g \equiv \det g_{\mu\nu}$ y $R$ es el escalar de Ricci. El término

$$\mathcal{L}(\phi) = -\frac{k(\phi)}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - V(\phi), \tag{2}$$

se corresponde con la densidad Lagrangiana asociada al campo escalar $\phi$ con un potencial $V(\phi)$, donde se incluye un acoplo no mínimo a gravedad por medio de $f(\phi)$ y un término cinético no canónico por medio de $k(\phi)$. Por otro lado, el término $\mathcal{L}_{mat}$ nos representa al sector de materia donde están incluidas todas las componentes posibles dentro del Modelo Estándar: un escalar ($\chi$), un fermión ($\psi$) y un vector ($A_\mu$) y donde podemos incluir además interacciones con el campo $\phi$.

Nuestra idea es ver como responden estas funciones y la acción $S$ bajo transformaciones conformes de la métrica

$$g_{\mu\nu} \to \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}, \tag{3}$$

siendo $\Omega^2 = \Omega^2(\phi)$ el denominado *factor conforme*. Al acto de realizar dicha transformación (3) junto con un reparametrización de los campos involucrados se le denomina como *cambio de marco conforme*.

Teniendo en cuenta que el escalar de Ricci se transforma

$$\tilde{R} = \Omega^{-2} R - 6\Omega^{-3} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \Omega, \tag{4}$$

y despreciando las derivadas totales, podemos reescribir la acción como

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[ \frac{\tilde{f}(\tilde{\phi})}{2} \tilde{R} - \frac{\tilde{k}(\tilde{\phi})}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \nabla_\mu \tilde{\phi} \nabla_\nu \tilde{\phi} - \tilde{V}(\tilde{\phi}) + \tilde{\mathcal{L}}_{mat}(\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{\phi}, \tilde{\chi}, \tilde{A}_\mu, \tilde{\psi}) \right], \tag{5}$$

donde las funciones transformadas $\tilde{f}(\tilde{\phi})$, $\tilde{k}(\tilde{\phi})$ y $\tilde{V}(\tilde{\phi})$ se definen en términos de las originales de la forma

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{\phi}) &= \Omega^{-2} f, \\ \tilde{k}(\tilde{\phi}) &= \frac{\Omega^{-2}}{A(\phi)} \left( k - 6f\Omega^{-2}\Omega^2_{,\phi} + 6\Omega^{-1} f_{,\phi} \Omega_{,\phi} \right), \\ \tilde{V}(\tilde{\phi}) &= \Omega^{-4} V, \end{aligned} \tag{6}$$

siendo $A(\phi) = \left(\frac{d\tilde{\phi}}{d\phi}\right)^2$ la función que nos resuelve de forma explícita la reparametrización del campo $\phi \to \tilde{\phi}$. En el caso de $\mathcal{L}_{mat}$, las funciones y los campos transformados vendrán determinados por la forma explícita del Lagrangiano que estemos considerando en cada caso.

En la literatura existe una distinción entre dos tipos de marco conforme. Por un lado tenemos el *marco de Jordan*, que hace referencia a modelos en los que aparece de forma explícita un acoplo no trivial a gravedad $f(\phi)$. Por otro lado tenemos el *marco de Einstein*, donde este acoplo a gravedad se hace mínimo: $f(\phi) = 1$. Dada la mayor simplicidad que supone considerar un sistema canónico, la elección usual de la mayoría de los sistemas dinámicos es el marco de Einstein a pesar de ser ambos físicamente equivalentes.

Como acabamos de ver, aunque la expresión explícita de $S$ se pueda ver modificada, la acción se transforma a otra equivalente en la misma clase de teorías. Es decir, la acción $S$ en (1) cumple la siguiente propiedad:

$$S[g_{\mu\nu}, \phi, k(\phi), V(\phi), \mathcal{L}_{mat}] = S[\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{\phi}, \tilde{k}(\tilde{\phi}), \tilde{V}(\tilde{\phi}), \tilde{\mathcal{L}}_{mat}]. \tag{7}$$

Nótese que la estructura formal de $S$ no cambia y por tanto, la dinámica de ambos sistemas para sus correspondientes funciones en su marco será la misma. Por ello, podemos concluir en que la acción definida en (1) se mantiene invariante bajo transformaciones conformes generales, lo que nos permite relacionar modelos completamente equivalentes mediante las reglas de transformación correspondientes.

### A. Transformaciones conformes en el sector de materia

Antes de pasar con el estudio de la dinámica de estos sistemas, vamos a mostrar cuáles serían las densidades Lagrangianas correspondientes a los diferentes campos de materia. Asimismo ilustraremos como se comportan estas componentes bajo un cambio de marco conforme. Comenzamos con el caso de un campo escalar $\chi$, cuya densidad Lagrangiana es análoga a la del campo $\phi$ (2):

$$\mathcal{L}(\phi, \chi) = -\frac{k^*(\phi)}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \chi \nabla_\nu \chi - I(\phi, \chi). \tag{8}$$

Podemos ver que este Lagrangiano incluye un acoplo al campo $\phi$ por medio tanto del término cinético $k^*(\phi)$, como del potencial $I(\phi, \chi)$. En el resto de casos incluiremos los acoplos de forma análoga. Tras realizar el cambio de marco conforme, podemos reescribir el Lagrangiano de la forma

$$\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\phi}, \tilde{\chi}) = -\frac{\tilde{k}^*(\tilde{\phi}, \tilde{\chi})}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \nabla_\mu \tilde{\chi} \nabla_\nu \tilde{\chi} - \tilde{I}(\tilde{\phi}, \tilde{\chi}), \tag{9}$$

donde las funciones transformadas se definen:

$$\tilde{k}^*(\tilde{\phi}, \tilde{\chi}) = \frac{\Omega^{-2}}{B(\chi)} k^*, \quad \tilde{I}(\tilde{\phi}, \tilde{\chi}) = \Omega^{-4} I, \tag{10}$$

siendo $B(\chi) = \left(\frac{d\tilde{\chi}}{d\chi}\right)^2$ la función que nos resuelve de forma explícita la reparametrización $\chi \to \tilde{\chi}$.

Para el caso del fermión consideraremos el Lagrangiano de Dirac

$$\mathcal{L}(\phi, \psi) = i\bar{\psi}(a(\phi)\gamma^\mu \nabla_\mu - m(\phi))\psi, \tag{11}$$

donde el acoplo en el término de masa lo introducimos en forma de una masa variable $m(\phi)$. En este caso, el cambio de marco conforme nos da lugar a las funciones transformadas

$$\tilde{a}(\tilde{\phi}, \tilde{\psi}) = \frac{\Omega^{-2}}{C(\psi)} a(\phi), \quad \tilde{m}(\tilde{\phi}) = \Omega^{-4} m(\phi), \tag{12}$$

donde $C(\psi) = \frac{d\tilde{\psi}}{d\psi}$ es la función que nos resuelve de forma explícita la reparametrización $\psi \to \tilde{\psi}$.

Por último, nos queda considerar el caso del campo vectorial, cuyo Lagrangiano viene dado por

$$\mathcal{L}(\phi, A_\mu) = h(\phi) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \tag{13}$$

donde $F_{\mu\nu} \equiv \partial_{[\mu} A_{\nu]}$ es el tensor de intensidad de campo. En este caso, la presencia de dos términos del tipo $g^{\mu\nu}$ nos introduce un factor $\Omega^4$ que cancela con el factor $\Omega^{-4}$

que proviene del determinante de la métrica. Por tanto, este Lagrangiano es invariante bajo transformaciones de conformes lo que nos lleva a

$$\tilde{h}(\tilde{\phi}) = h(\phi). \tag{14}$$

Debido a esta propiedad, si incluimos una componente de radiación en nuestro sistema que inicialmente esté desacoplada esta preservará dicha propiedad en todos los marcos posibles.

## III. DINÁMICA DEL UNIVERSO EN UN FORMALISMO INVARIANTE

En esta sección, trataremos de estudiar la dinámica de las teorías escalar-tensor desde un punto de vista cosmológico y en un marco general e invariante. Por simplicidad, comenzaremos restringiéndonos al caso de un campo escalar como componente de materia, siendo el procedimiento para el caso fermiónico análogo. Consideremos entonces la acción

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{f(\phi)}{2}R + \mathcal{L}(\phi) + \mathcal{L}(\phi,\chi) + \mathcal{L}_R\right], \tag{15}$$

donde $\mathcal{L}(\phi)$ y $\mathcal{L}(\phi,\chi)$ denotan las densidades Lagrangianas para dos campos escalares $\phi$ (2) y $\chi$ (8) respectivamente. El término $\mathcal{L}_R = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ se corresponde con una componente de radiación desacoplada. De esta forma nos aseguramos de la presencia de una época de dominación de radiación sobre el fondo en la evolución cosmológica. Esta componente se se introduce desacoplada al campo $\phi$ para asegurar la existencia de algún marco conforme donde todas las componentes están desacopladas.

Las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema se obtendrán a partir de la acción (15). En primer lugar, la ecuación de Klein-Gordon (KG) para $\phi$ vendrá dada por la derivada funcional respecto a este campo

$$\frac{f_{,\phi}}{2}R+\frac{k_{,\phi}}{2}\left(\nabla\phi\right)^2+k\nabla^2\phi-V_{,\phi}-\frac{k^*_{,\phi}}{2}\left(\nabla\chi\right)^2-I_{,\phi}=0 \tag{16}$$

donde $_{,\phi}$ denota la derivada respecto de $\phi$. De forma análoga para el campo $\chi$ tenemos

$$\nabla^\mu\left(k^*\nabla_\mu\chi\right) + I_{,\chi} = 0. \tag{17}$$

Finalmente, tomando la variación de (15) respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$ llegamos a las ecuaciones de Einstein generalizadas

$$\begin{aligned}G_{\mu\nu} = f^{-1}\big[&T_{\mu\nu} - f_{,\phi\phi}(\nabla\phi)^2 g_{\mu\nu} - f_{,\phi}(\nabla^2\phi)g_{\mu\nu}\\ &+ f_{,\phi}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + f_{,\phi\phi}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\big],\end{aligned} \tag{18}$$

donde $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}R$ es el tensor de Einstein con $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci y $T_{\mu\nu}$ el tensor energía-momento definido por

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{-2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{ng}}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{19}$$

En $S_{ng}$ hemos incluido la parte de la acción correspondiente al sector no gravitatorio de forma que el tensor energía momento total vendrá dado por la suma de los respectivos tensores para cada una de las componentes del sistema $T_{\mu\nu} = T^{(\phi)}_{\mu\nu} + T^{(\chi)}_{\mu\nu} + T^{(r)}_{\mu\nu}$. En este caso, cada uno de los términos viene dado por

$$T^{(\phi)}_{\mu\nu} = k\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{k}{2}(\nabla\phi)^2 g_{\mu\nu} - Vg_{\mu\nu}, \tag{20}$$

$$T^{(\chi)}_{\mu\nu} = k^*\nabla_\mu\chi\nabla_\nu\chi - \frac{k^*}{2}(\nabla\chi)^2 g_{\mu\nu} - Ig_{\mu\nu}, \tag{21}$$

$$T^{(r)}_{\mu\nu} = (\rho_r + p_r)u_\mu u_\nu + p_r g_{\mu\nu}. \tag{22}$$

Sabemos que el tensor energía-momento total debe ser conservado, pero esto no implica que las componentes individuales tengan que serlo. Para el caso de la componente de radiación, al estar desacoplada se conserva individualmente. Sin embargo, para las componentes de ambos campos escalares encontramos las siguientes ecuaciones de conservación

$$\nabla_\mu T^\mu_{(\chi)\nu} = -\frac{1}{3}\left((-4\gamma+2\beta)T^\mu_{(\chi)\nu}\phi_{,\mu} + (\beta+\gamma)T_{(\chi)}\phi_{,\nu}\right), \tag{23}$$

$$\nabla_\mu T^\mu_{(\phi)_\nu} = \frac{1}{3}\left((-4\gamma+2\beta)T^\mu_{(\chi)\nu}\phi_{,\mu} + (\beta+\gamma)T_{(\chi)}\phi_{,\nu}\right), \tag{24}$$

con

$$\beta \equiv -\frac{1}{2}\frac{\partial\ln I(\phi,\chi)}{\partial\phi}, \qquad \gamma \equiv -\frac{1}{2}\frac{\partial\ln k^*(\phi)}{\partial\phi}. \tag{25}$$

Para resolver estas ecuaciones en un sistema con interés cosmológico asumiremos que el Universo está descrito por la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-N_L^2, a^2, a^2, a^2)$, y que por tanto, los campos son espacialmente homogéneos, i.e. $\phi = \phi(t)$ y $\chi = \chi(t)$. Bajo estas condiciones el tensor energía-momento toma una expresión diagonal de la forma: $T_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(N_L^2\rho, a^2p, a^2p, a^2p)$. Comparando con (20) y (21) obtenemos las siguientes expresiones para la densidad y la presión asociadas a los campos

$$\rho_\phi = \frac{k}{2}\dot{\phi}^2 + V, \qquad p_\phi = \frac{k}{2}\dot{\phi}^2 - V, \tag{26}$$

$$\rho_\chi = \frac{k^*}{2}\dot{\chi}^2 + I, \qquad p_\chi = \frac{k^*}{2}\dot{\phi}^2 - I, \tag{27}$$

donde el punto denota la derivada respecto al tiempo conforme $\tau$, el cual está relacionado con el tiempo cosmológico $t$ de la forma $d\tau \equiv -N_L dt$. Haciendo uso de esta métrica, las ecuaciones de Einstein nos dan lugar a las ecuaciones de Friedman y la de la aceleración generalizadas

$$H^2 = \frac{1}{3f}\left(\frac{k}{2}\dot{\phi}^2 + V + \frac{k^*}{2}\dot{\chi}^2 + I + \rho_r\right) - \frac{f_{,\phi}}{f}H\dot{\phi}, \tag{28}$$

$$\dot{H} = -\frac{k\dot{\phi}^2}{2f} - \frac{k^*\dot{\chi}^2}{2f} - \frac{2\rho_r}{3f} - \frac{\ddot{f}}{2f} + \frac{Hf_{,\phi}\dot{\phi}}{2f}, \tag{29}$$

donde $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ es el parámetro de Hubble. Pasando con la ecuación de KG (16), tomando la traza en (18) podemos despejar $R$ para sustituir en (16) lo que nos deja una expresión más conveniente:

$$\left(k+\frac{3f_{,\phi}}{2f}\right)(\ddot{\phi}+3H\dot{\phi})+\left(\frac{k_{,\phi}}{2}+\frac{kf_{,\phi}}{2f}+\frac{3}{2}\frac{f_{,\phi}f_{,\phi\phi}}{f}\right)\dot{\phi}^2 + f^2U_{,\phi}+f^2W_{,\phi}+\left(\frac{k^*f_{,\phi}}{2f}-\frac{k^*_{,\phi}}{2}\right)\dot{\chi}^2=0, \quad (30)$$

donde $U \equiv V/f^2$ y $W \equiv I/f^2$. Finalmente, cerraremos el sistema incluyendo las ecuaciones de conservación para el campo $\chi$

$$\dot{\rho_\chi}+3H(\rho_\chi+p_\chi) - \frac{1}{3}\Big[\rho_\chi(-4\gamma+2\beta)+(\rho_\chi-3p_\chi)(\gamma+\beta)\Big]\dot{\phi}=0, \quad (31)$$

y para la componente de radiación

$$\dot{\rho_r}+4H\rho_r=0. \quad (32)$$

### A. Generalización del sistema

Como hemos comentado anteriormente, nuestro objetivo es tratar la dinámica de las teorías escalar-tensor desde un marco general e invariante. Sin embargo, hasta ahora nos hemos centrado en un sistema donde la componente de materia es un campo escalar $\chi$ (8) (además del fondo de radiación). Si nos fijamos en la expresión para la ecuación de conservación de esta componente (23) podemos ver que es de la forma

$$\nabla_\mu T^\mu_{\ \nu}=aT^\mu_{\ \nu}\partial_\mu\phi+bT\partial_\nu\phi, \quad (33)$$

con $a$ y $b$ dos constantes arbitrarias. Esta es la forma del acoplo más general posible entre una componente con tensor energía momento $T_{\mu\nu}$ y el campo escalar $\phi$ involucrando primeras derivadas. En la literatura, se suelen considerar modelos donde el acoplo se da únicamente con la traza (como es el caso de una componente fermiónica [12]) de forma que las componentes ultrarrelativistas están desacopladas. Sin embargo, partiendo de un campo escalar podemos ver que nos aparece un nuevo acoplo a la componente $T^0_{\ \nu}$ (ya que $\phi=\phi(t)$) del tensor energía-momento, la cual nos introducirá un término de interacción con la densidad.

Por tanto, a pesar de haber comenzado considerando un sistema concreto, si expresamos las ecuaciones en términos de densidades y presiones el sistema será aplicable a cualquier componente genérica. La única condición que debe cumplir es que permita una descripción en términos de fluidos perfectos. De esta forma, podemos definir entonces el sistema de ecuaciones para un fluido genérico con densidad $\rho_m$ y presión $p_m$. En primer lugar definimos las ecuaciones de Friedman y la de la aceleración

$$H^2=\frac{1}{3f}\left(\frac{k}{2}\dot{\phi}^2+V+\rho_m+\rho_r\right)-\frac{f_{,\phi}}{f}H\dot{\phi}, \quad (34)$$

$$\dot{H}=-\frac{k\dot{\phi}^2}{2f}-\frac{\rho_m+p_m}{2f}-\frac{2\rho_r}{3f}-\frac{\ddot{f}}{2f}+\frac{Hf_{,\phi}\dot{\phi}}{2f}. \quad (35)$$

Por otro lado, la ecuación de conservación (33) en la métrica FLRW toma la expresión

$$\dot{\rho_m}+3H(\rho_m+p_m)+(a\rho_m+b(\rho_m-3p_m))\dot{\phi}=0. \quad (36)$$

Y finalmente, haciendo uso de la ecuación de movimiento (17) junto con la misma ecuación de conservación, la ecuación de KG (30) la podemos reescribir como

$$\left(k+\frac{3f_{,\phi}}{2f}\right)(\ddot{\phi}+3H\dot{\phi})+\left(\frac{k_{,\phi}}{2}+\frac{kf_{,\phi}}{2f}+\frac{3}{2}\frac{f_{,\phi}f_{,\phi\phi}}{f}\right)\dot{\phi}^2 + f^2U_{,\phi}+\frac{f_{,\phi}}{2f}(\rho_m-3p_m)-a\rho_m-b(\rho_m-3p_m)=0. \quad (37)$$

Estas ecuaciones se reducen al caso estándar en Relatividad General (RG) con una constante cosmológica cuando la evolución del campo escalar se detiene. Esto sucede en el límite $\dot{\phi}\to 0, \phi\to\phi_0$ tal que

$$\frac{1}{E}\left(V_{,\phi_0}-\frac{2f_{,\phi_0}V}{f}\right)=0, \quad (38)$$

y

$$\frac{1}{E}\left(\frac{f_{,\phi_0}}{2f}(3p_m-\rho_m)+a\rho_m+b(\rho_m-3p_m)\right)=0, \quad (39)$$

con $E=k+\frac{3f^2_{,\phi}}{2f}$. Las condiciones en (38) y (39) se obtienen imponiendo que el término fuente de la ecuación (37) sea nulo, de esta forma garantizamos que la dinámica del campo escalar realmente se frena bajo estas condiciones. Cuando el campo escalar es constante, en las ecuaciones de Einstein únicamente nos aparece el valor de $V(\phi_0)$ jugando el papel de la constante cosmológica.

Para visualizar el sistema en términos de cantidades con mayor interpretación física vamos a expresar la ecuación de Friedman (34) en términos de las densidades relativas. Bajo las siguientes definiciones

$$\Omega_m=\frac{\rho_m}{3fH^2}, \quad \Omega_r=\frac{\rho_r}{3fH^2}, \quad (40)$$

$$\Omega_\phi=\frac{k\dot{\phi}^2}{6fH^2}+\frac{V}{3fH^2}-\frac{f_{,\phi}\dot{\phi}}{fH}, \quad (41)$$

la ecuación de Friedman nos queda $1=\Omega_m+\Omega_r+\Omega_\phi$. En el caso del acoplo mínimo, $f(\phi)=1$, $\Omega_r$ y $\Omega_m$ se reducen a las densidades relativas de la cosmología estándar para radiación y materia respectivamente, mientras que en el límite de RG, $\Omega_\phi$ toma la forma de la densidad relativa de una constante cosmológica. Sin embargo, en el caso no mínimo estas cantidades no tienen la misma interpretación física que en el caso canónico. La presencia de acoplos entre las diferentes componentes nos llevan a que estas cantidades no tengan que estar necesariamente siempre entre cero y uno [13].

Considerando los términos extra de las ecuaciones de Einstein (18) como la contribución de un tensor energía-momento efectivo, podemos definir la presión y densidad efectivas de todas las componentes juntas de la forma

$$\rho_{\rm eff} = \frac{1}{f}\left[\rho_r + \rho_m + \frac{k}{2}\dot\phi^2 - 3Hf_{,\phi}\dot\phi + V\right], \qquad (42)$$

$$p_{\rm eff} = \frac{1}{f}\left[\frac{\rho_r}{3} + p_m + \frac{k}{2}\dot\phi^2 + 2Hf_{,\phi}\dot\phi + \ddot f - V\right]. \qquad (43)$$

Por tanto, la ecuación de estado efectiva para el universo en su totalidad nos queda

$$w_{\rm eff} = \frac{p_{\rm eff}}{\rho_{\rm eff}} = \frac{\Omega_r}{3} + \frac{p_m + \frac{k}{2}\dot\phi^2 + 2Hf_{,\phi}\dot\phi + \ddot f - V}{3fH^2}. \qquad (44)$$

El sistema de ecuaciones (34)–(37) nos determina la dinámica de un Universo cuyas componentes son un campo escalar responsable de la expansión acelerada, una componente de materia arbitraria acoplada a este campo y un fondo de radiación desacoplado, y todo ello en un marco totalmente general e invariante. Si se quisiera añadir más de una componente de materia únicamente se deberían añadir los términos de densidad y presión análogos a los anteriores con sus correspondientes acoplos.

## IV. CONSTRUCCIÓN DEL ESPACIO DE FASES

Dada la naturaleza no lineal de las ecuaciones diferenciales derivadas en la sección anterior, resolverlas de forma analítica con toda generalidad es una tarea demasiado complicada. Sin embargo, los métodos de estudio de sistemas dinámicos mediante el análisis de puntos críticos nos permiten extraer información cualitativa acerca del comportamiento de las soluciones del sistema. Para ello debemos reescribir nuestras ecuaciones en forma de un sistema dinámico.

Comencemos escribiendo la ecuación de Friedman de una forma adimensional

$$1 = \frac{\rho_m}{3fH^2} + \frac{\rho_r}{3fH^2} + \frac{k\dot\phi^2}{6fH^2} - \frac{f_{,\phi}\dot\phi}{fH}. \qquad (45)$$

Esto nos sugiere la siguiente definición de unas variables adimensionales que nos permitan resolver el sistema de ecuaciones cosmológicas como un sistema autónomo,

$$x = \frac{\rho_m}{3fH^2}, \quad y = \frac{\rho_r}{3fH^2}, \quad z = \frac{\dot\phi}{H}. \qquad (46)$$

Con el uso de estas variables la ecuación de Friedman toma la forma

$$1 = x + y + \frac{kz^2}{6f} - \frac{f_{,\phi}}{f} + \frac{V}{3fH^2}, \qquad (47)$$

mientras que la ecuación de estado efectiva (44) y la ecuación de estado para el campo escalar $w_\phi$ se escriben

$$w_{\rm eff} = x + \frac{z^2}{3} + \frac{4y}{3} - 1, \quad w_\phi = \frac{x + y + z^2/3 - 1}{1 - x - y}. \qquad (48)$$

Las variables (46) son las que determinan el comportamiento del sistema dinámico. Los puntos fijos (o de equilibrio) son las soluciones sin dinámica del sistema. Es decir, aquellas que se corresponden con

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 0, \qquad (49)$$

donde $' = \frac{1}{H}\frac{d}{dt} = \frac{d}{dN}$ denota la derivada respecto del número de e-folds $N$.

Por simplicidad, vamos a suponer que la componente de materia sigue una relación de dispersión de la forma $p(\rho) = w\rho$. Partiendo de las definiciones (46) calcularemos entonces la derivada respecto del número de e-folds. A lo largo del desarrollo sustituiremos $\dot H$ y $\ddot\phi$ de las ecuaciones (35) y (37), $\dot\rho_r$ y $\dot{\rho_m}$ de las ecuaciones de continuidad (32) y (36) , y finalmente $H$ de la ecuación de Friedman (34). Hemos considerado $H > 0$ en todas las situaciones lo que implica que podemos dividir por $H$ sin tener ningún problema. Como resultado, llegamos al siguiente sistema de ecuaciones,

$$x' = \frac{1}{E}\Bigg[\left(-6(1+w)f + 3(1-3w)\frac{f_{,\phi}^2}{k} - \frac{6ff_{,\phi}V_{,\phi}}{kV}\right)x + \left(8f + \frac{6ff_{,\phi}V_{,\phi}}{kV}\right)xy + \left(2(k+f_{,\phi\phi}) - \frac{f_{,\phi}k_{,\phi}}{k} + \frac{f_{,\phi}V_{,\phi}}{V}\right)xz^2$$
$$+ \left(6(1+w)f + \frac{6ff_{,\phi}}{k}\big(a + b(1-3w)\big) + \frac{6ff_{,\phi}V_{,\phi}}{kV}\right)x^2 - \left(\big(a+b(1-3w)\big)E + 10f_{,\phi} + \frac{3f_{,\phi}^3}{fk} + \frac{6f_{,\phi}^2V_{,\phi}}{kV}\right)xz\Bigg], \qquad (50)$$

$$y' = \frac{1}{E}\Bigg[-\left(8f + \frac{6ff_{,\phi}V_{,\phi}}{kV}\right)y - \left(10f_{,\phi} + \frac{3f_{,\phi}^3}{fk} + \frac{6f_{,\phi}^2V_{,\phi}}{kV}\right)yz + \left(2(k+f_{,\phi\phi}) - \frac{f_{,\phi}k_{,\phi}}{k} + \frac{f_{,\phi}V_{,\phi}}{V}\right)yz^2$$
$$+ \left(8f + \frac{6ff_{,\phi}V_{,\phi}}{kV}\right)y^2 + \left(6(1+w)f + \frac{6ff_{,\phi}}{k}\big(a+b(1-3w)\big) + \frac{6ff_{,\phi}V_{,\phi}}{kV}\right)xy\Bigg], \qquad (51)$$

$$z' = \frac{1}{E}\Bigg[\left(k + f_{,\phi\phi} - \frac{f_{,\phi}k_{,\phi}}{2k} + \frac{f_{,\phi}V_{,\phi}}{2V}\right)z^3 + \left(3f(1+w) + \frac{3f_{,\phi}}{k}(a + b(1-3w)) + \frac{3ff_{,\phi}V_{,\phi}}{kV}\right)xz + \left(4f + \frac{3ff_{,\phi}}{kV}\right)yz$$
$$- \left(4f_{,\phi} + \frac{3f_{,\phi}}{k}(k + f_{,\phi\phi}) + \frac{fk_{,\phi}}{k} - \frac{fV_{,\phi}}{V} + \frac{3f_{,\phi}^2 V_{,\phi}}{kV}\right)z^2 + \left(-\frac{9f_{,\phi}f}{k}(1+w) + \frac{6f^2}{k}(a + b(1-3w)) + \frac{6f^2V_{,\phi}}{kV}\right)x$$
$$+ \left(\frac{9f_{,\phi}}{k} - 6f - \frac{9ff_{,\phi}V_{,\phi}}{kV}\right)z + \left(-\frac{12f_{,\phi}f}{k} + \frac{6f^2V_{,\phi}}{kV}\right)y + \frac{12ff_{,\phi}}{k} - \frac{6f^2V_{,\phi}}{kV}\Bigg]. \quad (52)$$

Para comprender el comportamiento de las soluciones del sistema (50)–(52) llevaremos acabo el análisis de sistemas dinámicos de la forma estándar [14, 15]. Extraeremos los puntos fijos del sistema, calcularemos los autovectores de la matriz perturbada alrededor de esos puntos y encontraremos los autovalores correspondientes a los mismos. De esta forma, en función de la naturaleza de estos autovalores podremos distinguir el comportamiento de estos puntos fijos. Si todos los autovalores tienen parte real negativa, el punto crítico es estable (atractor). Si al menos uno de ellos tiene parte real positiva, este es inestable (repulsor). Y si algunos tienen parte real positiva y otros negativa, el punto crítico es un punto de silla.

## V. EJEMPLO DEL ESTUDIO DE UN SISTEMA DINÁMICO

El sistema de ecuaciones (50)–(52) obtenido nos describe la dinámica de un sistema completamente general. Sin embargo, resolver la dinámica del sistema sin concretar las expresiones de todas las funciones libres es una tarea demasiado compleja. Por tanto, para mostrar las aplicaciones del formalismo desarrollado en este trabajo vamos a estudiar un ejemplo concreto. En primer lugar, vamos a considerar un sistema donde la componente de materia se corresponde con la usual de materia oscura fría ($w = 0$). Además, consideraremos que tanto esta componente como la de radiación están desacopladas ($a = b = 0$). Sin embargo, incluiremos acoplos del escalar $\phi$ a la gravedad por medio de la función $f(\phi)$ y de un término cinético no canónico $k(\phi)$ de la forma

$$f(\phi) = e^{-\frac{Q}{2}\phi}, \quad k(\phi) = e^{-\frac{Q}{2}\phi}\left(1 - \frac{3}{8}Q^2\right). \quad (53)$$

Este tipo de acoplos se les conoce como dilatónicos y tienen su origen en las teorías de cuerdas [9]. Por último, para el potencial $V(\phi)$ también tomaremos una forma exponencial

$$V(\phi) = V_0 e^{-(\lambda+Q)\phi}. \quad (54)$$

En la Tabla I se muestran los puntos fijos del sistema. Entre todos ellos, vamos a identificar cuales son los responsables para las épocas de dominación de radiación, materia y expansión acelerada.

- Dominación de radiación

  En este sistema la dominación de radiación puede darse por medio de los puntos (f) y (g). Este tipo de soluciones están caracterizadas con una ecuación de estado efectiva $w_{\text{eff}} = 1/3$, lo cual se cumple directamente para el punto (f). Los autovalores de la matriz Jacobiana para las perturbaciones alrededor de este punto son

$$\mu = -1,\ 1,\ 4, \quad (55)$$

  por lo que se corresponde con un punto de silla al que le sucederá una época de dominación de materia. Por otro lado, el punto (g) se corresponderá con un punto de radiación ($w_{\text{eff}} = 1/3$) bajo las condiciones $\lambda \gg Q \gg 1$. Sin embargo, debemos asegurarnos que los valores seleccionados para $\lambda$ y $Q$ son tales que los autovalores de la matriz perturbada

$$\mu = 1, -\frac{\lambda^3 + 2\lambda^2 Q + \lambda Q \pm \sqrt{(64 - 15\lambda^2)(\lambda + Q)^4}}{2(\lambda + Q)^3}, \quad (56)$$

  cumplan las condiciones de inestabilidad mencionadas anteriormente.

- Dominación de materia

  La época de dominación de materia puede venir determinada por alguno de los puntos (d) o (e). Comenzaremos comprobando la viabilidad del punto (d) como un punto fijo con sentido físico. Imponiendo la condición de que la ecuación de estado efectiva debe ser prácticamente nula ($w_{\text{eff}} \simeq 0$) obtenemos dos condiciones: $\lambda \simeq -\frac{4}{7}Q$ y $|\lambda| \gg |Q|$. Otra condición básica es que la componente de materia sea la dominante, i.e., $|\Omega_m| \gg |\Omega_\phi|$. Para el caso $|\lambda| \gg |Q|$ esto se cumple inmediatamente pero para el otro caso es necesario imponer una condición adicional: $Q \gg \left|7\sqrt{\frac{2}{3}}\right|$.

  Respecto al punto (e), tenemos una ecuación de estado efectiva $w_{\text{eff}} \simeq 0$ para $Q^2 \ll 1$ y $Q \simeq \left|2\sqrt{\frac{14}{3}}\right|$, sin embargo para este último la componente de materia es subdominate frente al campo escalar por lo que queda descartado. Los autovalores para la matriz perturbada correspondiente son

$$\mu = -1,\ \frac{24 + 4\lambda Q + Q^2}{8 - Q^2},\ \frac{-24 + Q^2}{2(8 - Q^2)}. \quad (57)$$

  Estudiando las condiciones para $\lambda$ y $Q$ tales que el punto fijo sea inestable, obtenemos que aquellas compati-

| Nombre | x | y | z | $\Omega_\phi$ | $w_\phi$ | $w_{\rm eff}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (a) | 0 | 0 | $\frac{4\lambda}{4+\lambda Q}$ | 1 | $-1+\frac{16\lambda^2}{3(4+\lambda Q)^2}$ | $-1+\frac{16\lambda^2}{3(4+\lambda Q)^2}$ |
| (b) | 0 | 0 | $\frac{8\sqrt{6}-12Q}{8-3Q^2}$ | 1 | $-1+\frac{16(2\sqrt{6}-3Q)^2}{3(8-3Q^2)^2}$ | $-1+\frac{16(2\sqrt{6}-3Q)^2}{3(8-3Q^2)^2}$ |
| (c) | 0 | 0 | $\frac{4(2\sqrt{6}+3Q)}{-8+3Q^2}$ | 1 | $-1+\frac{16(2\sqrt{6}+3Q)^2}{3(8-3Q^2)^2}$ | $-1+\frac{16(2\sqrt{6}+3Q)^2}{3(8-3Q^2)^2}$ |
| (d) | $\frac{-12+4\lambda^2+\lambda Q}{4(\lambda+Q)^2}$ | 0 | $\frac{3}{\lambda+Q}$ | $\frac{7\lambda Q+4(3+Q^2)}{4(\lambda+Q)^2}$ | $-\frac{Q(7\lambda+4Q)}{7\lambda Q+4(3+Q^2)}$ | $-\frac{Q(7\lambda+4Q)}{4(\lambda+Q)^2}$ |
| (e) | $-\frac{8(-24+Q^2)}{3(-8+Q^2)^2}$ | 0 | $\frac{4Q}{-8+Q^2}$ | $1+\frac{8(-24+Q^2)}{3(-8+Q^2)^2}$ | $\frac{56-3Q^2}{-40+3Q^2}$ | $\frac{56Q^2-3Q^4}{3(-8+Q^2)^2}$ |
| (f) | 0 | 1 | 0 | 0 | - | $\frac{1}{3}$ |
| (g) | 0 | $\frac{-4+\lambda^2}{(\lambda+Q)^2}$ | $\frac{4}{\lambda+Q}$ | $\frac{Q^2+2\lambda Q+4}{(\lambda+Q)^2}$ | $\frac{4-6\lambda Q-3Q^2}{12+6\lambda Q+3Q^2}$ | $\frac{\lambda^2-6\lambda Q-3Q^2}{3(\lambda+Q)^2}$ |

Cuadro I. Puntos fijos del sistema.

| n | $Q$ | $\lambda$ |
|---|---|---|
| 1 | $\lvert Q\rvert > 2\sqrt{2}$ | $\lambda < -\frac{8\sqrt{2}+4Q}{Q^2-8}$ |
| 2 | $\lvert Q\rvert > 2\sqrt{2}$ | $\lambda > \frac{8\sqrt{2}-4Q}{Q^2-8}$ |
| 3 | $Q = -2\sqrt{2}$ | $\lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| 4 | $Q = 2\sqrt{2}$ | $\lambda > -\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| 5 | $-2\sqrt{2} < Q < 2\sqrt{2}$ | $\frac{8\sqrt{2}-4Q}{Q^2-8} < \lambda < -\frac{8\sqrt{2}+4Q}{Q^2-8}$ |

Cuadro II. Condiciones sobre los parámetros $\lambda$ y $Q$ para que el punto fijo (a) se corresponda con una solución de expansión acelerada del Universo.

bles con $Q^2 \ll 1$ son

$$-2\sqrt{2} < Q < 2\sqrt{2}, \quad \lambda < \frac{-24-Q^2}{4Q}. \tag{58}$$

Por tanto, bajo estas condiciones el punto (f) también sería capaz de reproducir la etapa de dominación de materia.

- Expansión acelerada

La época de expansión acelerada en principio podría darse por los puntos (a), (b) y (c) ya que son aquellos en los que la ecuación de estado efectiva se corresponde con la del campo escalar ($w_{\rm eff} = w_\phi$). El hecho de que el Universo esté dominado por la componente del campo escalar no nos asegura una expansión acelerada, por ello debemos imponer la condición $w_\phi < -1/3$. Para el punto (a), las condiciones bajo las que esto se cumple se muestran en la Tabla II. Además, trataremos de buscar soluciones en las que el punto sea estable, por lo que debemos asegurarnos de seleccionar unos valores de $Q$ y $\lambda$ tal que los autovalores

$$\mu = \frac{2(\lambda^2-6)}{4+\lambda Q}, \ \frac{4(\lambda^2-4)}{4+\lambda Q}, \ \frac{-12+4\lambda^2+\lambda Q}{4+\lambda Q}, \tag{59}$$

sean negativos.

Pasando ahora con el punto (b), las condiciones para que el punto crítico produzca una expansión acelerada serían

$$Q < -4.46, \quad 1.2 < Q < 2\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad Q > 2\sqrt{\frac{2}{3}}, \tag{60}$$

mientras que la estabilidad del punto crítico impone las condiciones

$$-2\sqrt{6} < Q < -2\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \lambda < \frac{-12+3\sqrt{6}Q}{-2\sqrt{6}+3Q}. \tag{61}$$

Por último, las condiciones para que el punto (c) produzca una expansión acelerada son

$$Q < -2\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad -2\sqrt{\frac{2}{3}} < Q < -1.20, \quad Q < 4.46, \tag{62}$$

mientras que la estabilidad del punto crítico nos deja

$$-2\sqrt{\frac{2}{3}} < Q < 2\sqrt{6}, \quad \lambda > \frac{-12-3\sqrt{6}Q}{2\sqrt{6}+3Q}. \tag{63}$$

Una vez discutidas las diferentes propiedades y condiciones para cada uno de los puntos críticos las posibles secuencias cosmológicamente viables serían:

1. (f) $\rightarrow$ (e) $\rightarrow$ (a) con $Q^2, \lambda^2 \ll 1$:

   La condición de $Q^2 \ll 1$ impuesta por la presencia de un punto de materia con $w_{\rm eff} \simeq 0$ nos fija también un valor pequeño para $\lambda$ por medio de las condiciones necesarias para una época de expansión acelerada (opción 5 de la Tabla II). Estos valores además están en concordancia con las condiciones de estabilidad de los diferentes puntos críticos.

2. (f) $\rightarrow$ (d) $\rightarrow$ (a) con $\lambda = -\frac{4}{7}$ y $|Q| \gg 7\sqrt{\frac{2}{3}}$:

   Ambas condiciones impuestas para la presencia de un punto fijo de materia inestable son compatibles con la presencia de una época de expansión acelerada (opción 1 de la Tabla II) con autovalores (59) negativos.

3. (f) $\rightarrow$ (d) $\rightarrow$ (a) con $|\lambda| \gg |Q|$ y $|Q| > 2\sqrt{2}$:

   La condición de $|\lambda| \gg |Q|$ viene impuesta por la presencia de una época dominada por materia para el punto (d). Para que esto encaje con la presencia de una época de expansión acelerada, es necesario que $|Q| > 2\sqrt{2}$ (opciones 1 y 2 de la Tabla II). Por último, si buscamos que la época de expansión acelerada sea un punto estable, debemos imponer que uno de los dos parámetros sea negativo.

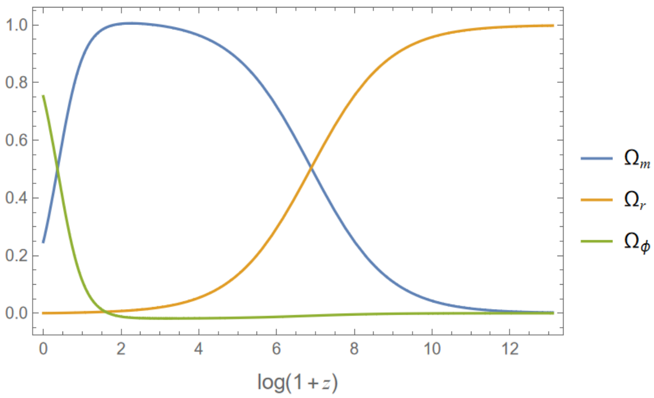


Figura 1. Evolución cosmológica de la solución 1 para $\lambda = 0.1$ y $Q = 0.3$. Las condiciones iniciales han sido seleccionadas tal que $x = 0.001$, $y = 0.999$ y $z = 0$ en un desplazamiento al rojo $\log(1 + z) = 13.1061$.

Como podemos ver en la Figura 1, la primera de las soluciones obtenida es capaz de reproducir una correcta historia cosmológica. Sin embargo, en las otras dos soluciones no se obtiene una evolución cosmológica correcta. A pesar de la existencia de un punto fijo de materia con las condiciones de inestabilidad correctas, la solución no pasa por este, sino que evoluciona directamente de la dominación de radiación a la expansión acelerada. Esto se debe a que ambas soluciones poseen valores grandes de los parámetros $\lambda$ y $Q$, presentes en los términos cinético y potencial del campo escalar. Esto se traduce en que el punto fijo correspondiente a la dominación del mismo sea un atractor de gran magnitud para aquellas soluciones que pasen por sus alrededores.

Nótese la presencia de etapas en la evolución de las soluciones donde los parámetros de densidad toman valores negativos o mayores de 1 (manteniendo siempre que la suma de todos sea la unidad). Como comentamos anteriormente, esto se debe a la presencia de acoplos no mínimos a gravedad.

### A. Quintaesencia acoplada en el marco canónico

Hasta el momento, podría parecer que el sistema que hemos estudiado anteriormente ha sido propuesto *ad hoc* sin ninguna motivación física. Sin embargo, como hemos comentado al principio del trabajo, podemos relacionar este sistema con otro físicamente equivalente. Buscaremos efectuar un cambio de marco conforme para pasar de nuestro sistema con acoplos a gravedad y un término cinético no canónico (marco de Jordan), a otro en el que estos acoplos desaparecen y se trasladan al sector de materia (marco de Einstein). Esta transformación existe, y viene dada por el factor conforme

$$\Omega^2 = e^{-\frac{Q}{2}\phi}. \tag{64}$$

| Nombre | x | y | z | $\Omega_\phi$ | $w_\phi$ | $w_{\text{eff}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (a) | 0 | 0 | $\lambda$ | $\frac{1}{3}(\lambda^2-3)$ | $\frac{1}{3}(\lambda^2-3)$ | 1 |
| (e) | $1-\frac{Q^2}{24}$ | 0 | $-\frac{Q}{2}$ | $\frac{Q^2}{24}$ | 1 | $\frac{Q^2}{24}$ |
| (f) | 0 | 1 | 0 | 0 | - | $\frac{1}{3}$ |

Cuadro III. Puntos fijos de la solución de quintaesencia acoplada.

Retomando la descripción del sector de materia mediante el Lagrangiano del campo escalar $\chi$ (8) de forma efectiva, podemos hacer uso de las transformaciones (6) y (10) para llegar a las nuevas expresiones

$$f(\phi) = 1, \quad k(\phi) = 1, \quad V(\phi) = V_0 e^{-\lambda\phi}, \tag{65}$$

$$I(\phi, \chi) = I_0 e^{Q\phi}, \quad k^*(\phi) = e^{\frac{Q}{2}\phi}. \tag{66}$$

Vemos que, efectivamente, pasamos a un marco canónico en el que los acoplos al campo $\phi$ se sitúan en el sector de materia. Haciendo uso de las definiciones (25), podemos ver que en la ecuación de conservación (23) solo contribuye el término con la traza, ya que $\beta = 2\gamma$. Debido a la presencia de un término $g^{\mu\nu}$ extra en el término cinético respecto al potencial, esta propiedad es imprescindible para permitir la existencia de un marco en el que los campos $\phi$ y $\chi$ estén desacoplados. Por ello, las constantes de acoplo en el sistema de ecuaciones definido en (50)–(52) toman los valores $a = 0$ y $b = -Q/4$.

El sistema que resulta después de este cambio de marco conforme es un modelo de *quintaesencia acoplada* con un potencial exponencial estudiado en [5], el cual considera un sistema con un acoplo constante entre la materia y el campo escalar en un fondo de radiación desacoplado. Por tanto, la solución que hemos obtenido debería ser completamente equivalente a la mostrada para este sistema. Efectuando el cambio de marco (64), las variables para el nuevo sistema toman la forma

$$\tilde{x} = \frac{x}{\frac{Q^2}{16}z^2 - \frac{Q}{2}z + 1}, \quad \tilde{y} = \frac{\Omega^4 y}{\frac{Q^2}{16}z^2 - \frac{Q}{2}z + 1}, \tag{67}$$

$$\tilde{z} = \frac{4z}{4 - Qz}. \tag{68}$$

Bajo estas definiciones, los puntos críticos (f), (e) y (a) de nuestra solución toman la expresión de los del sistema de quintaesencia acoplada [1] (Tabla III).

La solución a la que llegamos en este marco se muestra en la Figura 2. Podemos ver que, al contrario de lo que sucedía en el marco de Jordan, todas las soluciones para los parámetros de densidad toman valores entre 0 y 1. Esto se debe a que en el marco de Einstein, las expresiones para estos parámetros toman su forma canónica.

---

[1] La solución mostrada en la referencia [5] hace uso de unas variables dinámicas diferentes, cuyas relaciones con las empleadas en este trabajo son: $x = 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, $y = x_3^2$, $z = \sqrt{6}x_1$. También es preciso introducir un factor $1/4$ en la definición de la constante de acoplo $Q$.

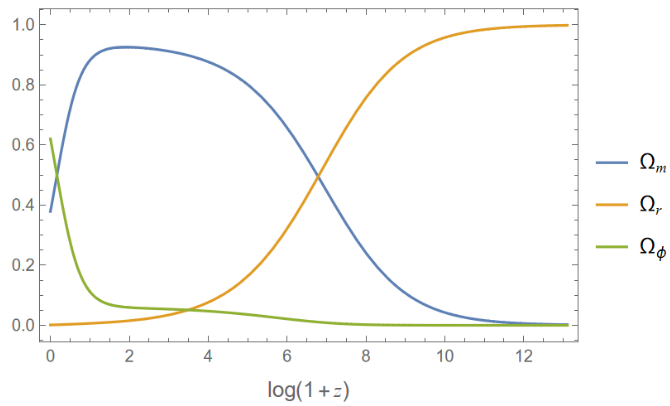


Figura 2. Evolución cosmológica de la solución de quintaesencia acoplada para $\lambda = 0.1$ y $Q = 0.3$. Las condiciones iniciales han sido seleccionadas tal que $x = 0.001$, $y = 0.999$ y $z = 0$ en un desplazamiento al rojo $\log(1+z) = 13.1061$.

## VI. BÚSQUEDA DE GENERALIDAD A NIVEL DEL LAGRANGIANO

Por último, debemos comentar que a pesar de haber considerado un sistema general, a lo largo del desarrollo hemos necesitado especificar las expresiones explícitas de los diferentes Lagrangianos de materia para poder determinar como se transforman. ¿Sería posible estudiar esta invarianza sin la necesidad de especificar un Lagrangiano en concreto? Para ello, podemos considerar algún tipo de acción donde estos términos de materia parametrizados como fluidos perfectos vengan descritos exclusivamente por los parámetros que definen al fluido, como la densidad, la presión o las corrientes conservadas. Una posible opción sería considerar la descripción de este sector de materia propuesta en [16], cuya acción viene dada por

$$S = -\sum_{I=c,d,b,r} \int d^4x \left[\sqrt{-g}\rho_I(n_I) + J^\mu_I \partial_\mu \ell_I\right]. \tag{69}$$

Esta se conoce como la acción de Schuzt-Sorkin [17, 18], la cual nos describe los fluidos perfectos para materia oscura fría (CDM), energía oscura (DE), bariones y radiación identificados con los índices $c, d, b, r$ respectivamente. La densidad de energía $\rho_I$ depende de la densidad de número $n_I$, donde $n_I$ está relacionado con el vector de corriente $J^\mu_I$ de la forma

$$n_I = \sqrt{\frac{g_{\mu\nu}J^\mu_I J^\nu_I}{g}}. \tag{70}$$

Por otro lado, la relación entre $J^\mu_I$ y la velocidad del fluido $u^\mu_I$ viene dada por

$$J^\mu_I = n_I\sqrt{-g}u^\mu_I, \tag{71}$$

de forma que $g_{\mu\nu}u^\mu_I u^\nu_I$ queda garantizado por medio de (70). Por último, el escalar $\ell_I$ presente en la acción es un multiplicador de Lagrange. Estos campos escalares $\ell_I(x)$ actúan como coordenadas Lagrangianas para el fluido que nos sirven para identificar las líneas de flujo que pasan por el punto $x$, así como para derivar las ecuaciones de conservación del fluido.

Dado que la acción original (69) está situada en el marco de Einstein, es necesario generalizar la acción introduciendo acoplos al campo escalar $\phi$ por medio de las funciones arbitrarias $q(\phi)$ y $h(\phi)$,

$$S = -\sum_{I=c,d,b,r} \int d^4x q(\phi)\sqrt{-g}\rho_I(n_I) + h(\phi)J^\mu_I\partial_\mu\ell_I. \tag{72}$$

En lo que sigue, vamos a asumir que los parámetros $\rho_I, n_I$ y $\ell_I$ son aquellos que nos describen el fluido en el marco desacoplado y que, por tanto, no se transforman. De esta forma, las reglas de tansformación quedan recogidas en las funciones de acoplo

$$\tilde{q}(\tilde{\phi}) = \Omega^{-4}q, \quad \tilde{h}(\tilde{\phi}) = \Omega^{-4}h. \tag{73}$$

Podemos ver que, a pesar de estar considerando acoplos diferentes para cada uno de los términos del Lagrangiano, ambos se transforman de la misma forma. Esto nos sugiere la posibilidad de describir este acoplo a materia por medio de una función global tal que $q(\phi) = h(\phi)$ lo cual, una vez estudiada la dinámica del sistema, se observa que viene impuesto por las ecuaciones de movimiento (ver Apéndice A para más detalle).

Esta descripción del Lagrangiano está restringida a una familia de teorías donde el sector de materia está descrito por acoplos globales del tipo $q(\phi)\mathcal{L}_{mat}$. Esta condición es bastante restrictiva ya que no permite la presencia diferentes tipos de acoplos para cada uno de los términos del Lagrangiano, por lo que este sistema no sirve para una descripción general de las teorías escalar-tensor. Una forma de solucionar este problema podría ser considerar dependencias generales del tipo $\rho = \rho(\phi)$ en los parámetros, de forma que los acoplos no aparezcan como un término que factoriza. Otra opción podría ser optar por una descripción más general de los fluidos perfectos propuesta en [19] en la cual estos están descritos de forma efectiva por medio de $d$ campos escalares, siendo $d$ el número de dimensiones espaciales. En cualquier caso, estas serían opciones que se escapan de lo tratado en este trabajo y podrían ser abordadas en estudios futuros.

## VII. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos tratado la dinámica de las teorías escalar-tensor desde un formalismo totalmente general e invariante, teniendo en cuenta también potenciales acoplos entre las componentes del sector de materia y el propio campo escalar. Hemos extraído las ecuaciones de movimiento para un sistema genérico, las cuales han sido reescritas en forma de un sistema dinámico para permitirnos abordar el problema de la forma estándar

[14, 15], extrayendo los puntos críticos del sistema junto con sus condiciones de estabilidad para reproducir la historia cosmológica.

Para ilustrar la aplicabilidad del formalismo desarrollado hemos estudiado la dinámica de un sistema concreto, sin acoplos en el sector de materia, pero con un acoplo no mínimo a gravedad y un término cinético no canónico. Una vez realizado el estudio dinámico, hemos mostrado que este sistema es físicamente equivalente a otro situado en un sistema canónico pero con acoplos en el sector de materia.

De esta forma, mostramos de forma explícita la importancia del estudio de estas propiedades de invarianza de marco conforme en las teorías escalar-tensor. El desarrollo de estas teorías desde un formalismo invariante nos permitirá extraer resultados generales que no dependan del marco concreto seleccionado, lo cual es una asignatura pendiente en los modelos estudiados en la literatura. Por ello, la importancia del formalismo desarrollado en este trabajo reside precisamente en la obtención de unas ecuaciones que son totalmente válidas para cualquier modelo en cualquier marco, estableciendo incluso las reglas de transformación a cualquier marco equivalente.

A lo largo del trabajo, nos hemos centrado en el estudio de teorías escalar-tensor donde se hace uso de un campo escalar como mecanismo de la expansión acelerada tardía del Universo. Sin embargo, todo el formalismo desarrollado hasta el momento es perfectamente aplicable a otra clase de modelos englobados en el marco de la denominada *quintaesencia inflacionaria*. Como el propio nombre sugiere, esta clase de modelos surgen de la idea de unificar a la fase inflacionaria [20–22] y a la expansión acelerada tardía del universo bajo la acción del mismo campo escalar [23], lo que reduce el número de grados de libertad del paradigma cosmológico actual en uno. La única diferencia con lo que hemos estudiado hasta el momento reside en que debemos imponer ciertas condiciones al campo escalar para que sea capaz de presentar estas dos épocas de expansión acelerada. A lo largo de la literatura existen una gran cantidad de modelos en este contexto. El primero de ellos, y el más sencillo, sería el modelo propuesto por Peebles y Vilenkin [24]. Tras este, surgieron una gran cantidad de modelos estudiando campos tanto canónicos como no canónicos. Algunos de los principales ejemplos serían los potenciales de meseta [25], los atractores $\alpha$ [26], la quintaesencia inflacionaria exponencial [27] o la quintaesencia inflacionaria de Gauss-Bonnet [28]. De nuevo, la lista de modelos viables de quintaesencia inflacionaria es mucho más extensa que los ejemplos citados. Por tanto, en estos sistemas surgen los mismos problemas que comentamos para las teorías escalar-tensor y que motivaban este trabajo. Por ello, el estudio de un formalismo invariante en esta clase de teorías es una tarea tan importante como pendiente en la literatura.


[1] A. G. Riess *et al.* (Supernova Search Team), Astron. J. **116**, 1009 (1998), arXiv:astro-ph/9805201.
[2] S. Perlmutter *et al.* (Supernova Cosmology Project), Nature **391**, 51 (1998), arXiv:astro-ph/9712212.
[3] R. R. Caldwell, R. Dave, and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **80**, 1582 (1998), arXiv:astro-ph/9708069.
[4] R. R. Caldwell and E. V. Linder, Phys. Rev. Lett. **95**, 141301 (2005), arXiv:astro-ph/0505494.
[5] L. Amendola and S. Tsujikawa, *Dark Energy: Theory and Observations* (Cambridge University Press, 2010).
[6] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, Rev. Mod. Phys. **82**, 451 (2010), arXiv:0805.1726 [gr-qc].
[7] Y. Fujii and K.-i. Maeda, *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, 2003).
[8] C. Brans and R. H. Dicke, Phys. Rev. **124**, 925 (1961).
[9] M. Gasperini and G. Veneziano, Phys. Rept. **373**, 1 (2003), arXiv:hep-th/0207130.
[10] S. Tsujikawa, K. Uddin, S. Mizuno, R. Tavakol, and J. Yokoyama, Phys. Rev. D **77**, 103009 (2008), arXiv:0803.1106 [astro-ph].
[11] J. Moller, *Dark energy in scalar-tensor theories*, Master's thesis, Hamburg U. (2007).
[12] S. Casas, V. Pettorino, and C. Wetterich, Phys. Rev. D **94**, 103518 (2016), arXiv:1608.02358 [astro-ph.CO].
[13] J. Dutta, L. Jarv, W. Khyllep, and S. Tokke, arXiv preprint arXiv:2007.06601 (2020).
[14] *Dynamical Systems in Cosmology* (Cambridge University Press, 1997).
[15] A. A. Coley, *Dynamical systems and cosmology*, Vol. 291 (Springer Science & Business Media, 2003).
[16] J. Beltrán Jiménez, D. Bettoni, D. Figueruelo, F. A. Teppa Pannia, and S. Tsujikawa, JCAP **03**, 085, arXiv:2012.12204 [astro-ph.CO].
[17] B. F. Schutz and R. Sorkin, Annals of Physics **107**, 1 (1977).
[18] J. D. Brown, Classical and Quantum Gravity **10**, 1579 (1993).
[19] S. Dubovsky, L. Hui, A. Nicolis, and D. T. Son, Phys. Rev. D **85**, 085029 (2012), arXiv:1107.0731 [hep-th].
[20] A. H. Guth, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981).
[21] A. D. Linde, Phys. Lett. B **108**, 389 (1982).
[22] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **48**, 1220 (1982).
[23] R. D. Peccei, J. Solà, and C. Wetterich, Physics Letters B **195**, 183 (1987).
[24] P. J. E. Peebles and A. Vilenkin, Physical Review D **59**, 10.1103/physrevd.59.063505 (1999).
[25] C.-Q. Geng, C.-C. Lee, M. Sami, E. N. Saridakis, and A. A. Starobinsky, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics **2017** (06), 011.
[26] Y. Akrami, R. Kallosh, A. Linde, and V. Vardanyan, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics **2018** (06), 041.
[27] C.-Q. Geng, M. W. Hossain, R. Myrzakulov, M. Sami, and E. N. Saridakis, Physical Review D **92**, 10.1103/physrevd.92.023522 (2015).
[28] C. van de Bruck, K. Dimopoulos, C. Longden, and C. Owen, Gauss-bonnet-coupled quintessential inflation (2017), arXiv:1707.06839 [astro-ph.CO].

## Apéndice A: Estudio dinámico de la acción de Schuzt-Sorkin generalizada

En este apéndice vamos a derivar las ecuaciones de movimiento de la acción

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{f(\phi)}{2}R + \mathcal{L}(\phi) + \mathcal{L}_{mat}\right], \tag{A1}$$

donde el sector de materia viene descrito por la acción

$$S_{\rm mat} = -\sum_{I=c,d,b,r}\int d^4x q(\phi)\sqrt{-g}\rho_I(n_I) + h(\phi)J_I^\mu\partial_\mu\ell_I, \tag{A2}$$

introducida en la Sección VI y $\mathcal{L}(\phi)$ nos describe el Lagrangiano de un campo escalar (2). En primer lugar, nos centraremos en derivar las ecuaciones de movimiento para la acción (A2). Comenzaremos tomando la variación con respecto a $\ell_I$, lo cual nos lleva directamente a

$$\partial_\mu(h(\phi)J_I^\mu) = 0 \quad (\text{para } I = c, d, b, r). \tag{A3}$$

Esto nos muestra que la corriente en el marco de Jordan, $h(\phi)J_I^\mu$, es conservada. Haciendo uso de la propiedad $\partial_\mu(\sqrt{-g}u_I^\mu) = \sqrt{-g}\nabla_\mu u_I^\mu$, la ecuación (A3) nos queda $h_{,\phi}\nabla_\mu\phi n_I u_I^\mu + h(\phi)\left(u_I^\mu\partial_\mu n_I + n_I\nabla_\mu u_I^\mu\right) = 0$. Por otro lado, si tenemos en cuenta que la densidad de energía $\rho_I$ depende únicamente de $n_I$, se cumple entonces la relación $\rho_{,n_I}u_I^\mu\partial_\mu n_I = u_I^\mu\partial_\mu\rho_I$. Y por último, introduciendo la definición de la presión de cada fluido,

$$p_I = n_I\rho_{,n_I} - \rho_I, \tag{A4}$$

la ecuación (A3) puede ser escrita de la forma

$$h(\phi)\left(u_I^\mu\partial_\mu + (\rho_I + p_I)\nabla_\mu u_I^\mu\right) = -(\rho_I + p_I)u_I^\mu h_{,\phi}\partial_\mu\phi. \tag{A5}$$

Como veremos posteriormente, esta es la ecuación de continuidad para el tensor energía-momento de cada fluido.

Para tomar la variación respecto de $J_I^\mu$ haremos uso de la propiedad $\frac{\partial n_I}{\partial J_I^\mu} = \frac{J_{I\mu}}{n_I g}$, de forma que encontramos la relación

$$h(\phi)\partial_\mu\ell_I = q(\phi)\rho_{I,n_I}u_{I\mu}. \tag{A6}$$

Esta ecuación nos permitirá eliminar los multiplicadores de Lagrange $\ell_I$ de las ecuaciones derivadas posteriormente. Para tomar la variación respecto de $g^{\mu\nu}$, haremos uso de las siguientes propiedades

$$\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}, \quad \frac{\delta n_I}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{n_I}{2}(g_{\mu\nu} - u_{I\mu}u_{I\nu}). \tag{A7}$$

Entonces, teniendo en cuenta la definición del tensor energía momento $T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\rm mat}}{\delta g^{\mu\nu}}$, nos queda

$$T_{\mu\nu}^{(I)} = q(\phi)\left[(\rho_I + p_I)u_{I\mu}u_{I\nu} + p_I g_{\mu\nu}\right]. \tag{A8}$$

Como podemos ver, el tensor energía-momento depende únicamente de la función de acoplo $q(\phi)$. Esto sucede como consecuencia de la ecuación de movimiento (A6) utilizada para eliminar la dependencia con los multiplicadores de Lagrange. Por tanto, para que la ecuación de continuidad de los fluidos (A5) tenga sentido, debemos imponer la condición $q(\phi) = h(\phi)$. De esta forma, al tomar la derivada covariante sobre el tensor energía-momento tenemos

$$u_I^\nu\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(I)} = -q(\phi)\left(u_I^\mu\partial_\mu + (\rho_I + p_I)\nabla_\mu u_I^\mu\right) - q_{,\phi}\rho_I u_I^\mu\partial_\mu\phi, \tag{A9}$$

lo cual, haciendo uso de (A5) nos lleva al resultado

$$u_I^\nu\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(I)} = q_{,\phi}p_I u_I^\mu\partial_\mu\phi. \tag{A10}$$

Sin embargo, la ecuación de continuidad $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ aplica únicamente al tensor energía-momento global. Para ello, debemos hacer uso de las contribuciones al tensor energía-momento correspondientes al resto de términos en la acción (A1). Tomando la acción total, las ecuaciones de Einstein nos dan lugar a

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} = f^{-1}\big[&T_{\mu\nu} - f_{,\phi\phi}(\nabla\phi)^2 g_{\mu\nu} - f_{,\phi}(\nabla^2\phi)g_{\mu\nu} \\ &+ f_{,\phi}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + f_{,\phi\phi}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi\big], \end{aligned} \tag{A11}$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor ennergía-momento total de todas las componentes del sistema

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(\phi)} + \sum_{I=c,d,b,r} T_{\mu\nu}^{(I)}. \tag{A12}$$

Incluyendo el resto de términos de la ecuación (A11) dentro de la definición del tensor energía-momento $T_{\mu\nu}^{(\phi)}$ de forma que tengamos un tensor efectivo, la ecuación de KG resultante al variar la acción respecto al campo $\phi$ nos lleva a la expresión

$$u^\nu\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(\phi)(\rm eff)} = -\sum_{I=c,d,b,r} q_{,\phi}p_I u^\nu\partial_\nu\phi, \tag{A13}$$

donde hemos hecho uso de las ecuaciones de movimiento para despejar $\mathcal{L}_{mat} = -\sum_I p_I$. Por tanto, si las velocidades para la CDM, DE, bariones y radiación son las mismas (lo cual es el caso en un universo cosmológico homogéneo e isótropo), las ecuaciones (A10) y (A13) nos llevan a la ecuación de continuidad

$$\sum_{I=c,d,b,r}\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(I)} + \nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(\phi)(\rm eff)} = 0. \tag{A14}$$

De esta forma, hemos podido comprobar que efectivamente la condición de que las funciones de acoplo $q(\phi)$ y $h(\phi)$ sean iguales viene impuesta por las ecuaciones de movimiento. Hemos visto que esta condición ha sido necesaria para que la ecuación de continuidad, uno de los principios básicos de la Relatividad General, se cumpla.