

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

Máster en Física Teórica



TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

**Cosmología en modelos de gravedad con ruptura
de invariancia bajo difeomorfismos**

**Cosmology in gravity models with broken
diffeomorphisms**

Antonio Miguel González Bello-Morales

Director

Antonio López Maroto

Curso académico 2021-2022

Cosmología en modelos de gravedad con ruptura de invariancia bajo difeomorfismos

Antonio Miguel González Bello-Morales*

*Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Ciencias Físicas,
Departamento de Física Teórica, Máster en Física Teórica, Trabajo Fin de Máster
(Dated: 7 de septiembre de 2022)*

Estudiamos la viabilidad cosmológica de ciertas teorías métricas de la gravedad que rompen la invariancia bajo difeomorfismos. Mostramos que, aunque dichas teorías son compatibles con Relatividad General en la aproximación de campo débil, tienen un efecto apreciable en el régimen cosmológico. Estudiamos el efecto de estas modificaciones en el desarrollo cosmológico y su compatibilidad con las observaciones.

Keywords: Difeomorfismo, Fluido rígido, Energía oscura, Conservación, Tensor energía-momento

I. INTRODUCCIÓN

Desde el comienzo mismo de la Teoría de la Relatividad General de Einstein se han desarrollado otras teorías que han tratado de explicar los mismos fenómenos y que estudian la gravedad como un fenómeno geométrico. La teoría de la gravedad de Nordström, desarrollada antes que la Relatividad General o la teoría de Einstein-Cartan son algunos ejemplos [1] [2].

La Relatividad General, no obstante, ha dado una explicación satisfactoria a muchos de los fenómenos observados tanto a nivel local [3][4] como a escala cosmológica; el modelo Λ CDM concuerda con las observaciones realizadas por telescopios como Planck [5] de los observables cosmológicos. Esta teoría es invariante bajo transformaciones generales de coordenadas y automáticamente cumple la conservación del tensor energía-momento. Según el teorema de Lovelock, el único tensor en 4 dimensiones construido a partir de la métrica, y de primeras y segundas derivadas, que es simétrico y que tiene divergencia nula es una combinación lineal del tensor de Einstein y de la métrica [6][7]. Al aplicar las identidades de Bianchi sobre el tensor de Einstein este tiene por construcción divergencia nula, luego de las ecuaciones de Einstein se sigue que el tensor energía-momento se conserva automáticamente. Esto impone no solo la conservación de la energía, sino indirectamente la invariancia bajo difeomorfismos de la teoría, ya que el tensor energía-momento es conservado si los campos materiales tienen un lagrangiano simétrico bajo cambios de coordenadas [8].

Bajo una transformación general de coordenadas generada por un campo vectorial V^μ [8]

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + V^\mu$$

un tensor arbitrario variará al moverse por el campo V^μ , de acuerdo a su derivada de Lie $\mathcal{L}_V T$. Si nuestra teoría es invariante bajo estas transformaciones, la acción cumplirá $\delta S = \delta S_{EH} + \delta S_m = 0$. Podemos desarrollar estas variaciones [8]

$$\delta S_{EH} = \int d^4x \frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = 2 \int d^4x \sqrt{-g} G^{\mu\nu} \nabla_\mu V_\nu$$

donde las variaciones de la acción de Einstein-Hilbert dan como resultado el tensor de Einstein, mientras que $\delta g_{\mu\nu} = \mathcal{L}_V g_{\mu\nu} = \nabla_\mu V_\nu$ es la variación de la métrica provocada por la transformación de coordenadas, que es igual a su derivada de Lie sobre el campo generador V_μ . Integrando por partes, tenemos

$$\delta S_{EH} = -2 \int d^4x \sqrt{-g} V_\nu \nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$$

Usando la identidad de Bianchi $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ tenemos que la acción de Einstein-Hilbert es invariante bajo difeomorfismos. Tomando ahora \mathcal{L}_m el procedimiento es similar

$$\delta S_m = \int d^4x \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2} T^{\mu\nu} \nabla_\mu V_\nu$$

donde el tensor energía-momento aparece de las variaciones de los campos materiales. Integrando por partes una vez más

$$\delta S_m = \int d^4x \sqrt{-g} V_\nu \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

De forma que la invariancia bajo transformaciones generales de coordenadas tiene como consecuencia la conservación del tensor energía-momento. La conservación de la energía emerge como consecuencia de la invariancia bajo difeomorfismos de la teoría [8].

La principal consecuencia del teorema de Lovelock es que las modificaciones a la Relatividad General, o bien no conservan el tensor energía-momento automáticamente sino que hay que imponerlo mediante condiciones adicionales [8]; o involucran nueva física, añadiendo términos con derivadas superiores de la métrica a la acción o considerando nuevos campos materiales con distintos acoplos; o rompen algunas simetrías existentes, como puede ser la ruptura de invariancia bajo difeomorfismos parcial [9] o total.

*Electronic address: antgon12@ucm.es

Recientemente han ganado popularidad algunas de estas teorías para tratar de dar una explicación a varios fenómenos, entre otros, a las observaciones sobre la expansión acelerada del Universo atribuida a una energía oscura [8]. Un ejemplo son las teorías de gravedad unimodular [10], que rompen parcialmente la invariancia bajo difeomorfismos, o teorías efectivas como la propuesta por [11] que rompe totalmente la invariancia, y que necesita imponer una condición para la conservación de la energía.

Existen en Física muchos casos donde una simetría que presenta un sistema se rompe a bajas energías. Los quarks más ligeros a bajas energías no presentan simetría quiral, pero a altas energías tienden asintóticamente a restaurar la simetría [12]. Podríamos observar el fenómeno contrario en este caso: la invariancia bajo difeomorfismos podría no ser una simetría de la teoría sino un fenómeno emergente que se observa solo a bajas energías. La justificación a esta hipótesis es que la Relatividad General no describe bien fenómenos de altas energías y muestra singularidades en estos casos, de forma que a esta escala no existe una teoría satisfactoria desarrollada y podríamos esperar que, si existe esta teoría, no presente las mismas simetrías [11].

En el modelo propuesto por [11] se considera una acción de Einstein-Hilbert modificada con términos dependientes de la métrica y de segundas derivadas, \mathcal{L}_i , que no son invariantes bajo cambios de coordenadas y cuya contribución a las ecuaciones de Einstein se da en la forma de un símbolo con divergencia no nula, lo que rompe la conservación de $T_{\mu\nu}$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\kappa}[R + \sum a_i \mathcal{L}_i] + \mathcal{L}_{materia}$$

$$G_{\mu\nu} + a\mathcal{M}_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}; \quad \nabla_\mu \mathcal{M}^{\mu\nu} \neq 0$$

La ruptura de la invariancia bajo difeomorfismos implica que las ecuaciones solo tendrían solución en un conjunto de sistemas de coordenadas. La conservación de la energía podrá obtenerse sobre las soluciones, imponiéndose la condición $\nabla_\mu \mathcal{M}^{\mu\nu} = 0$ [8] [11].

Otro ejemplo son las teorías de gravedad unimodular [9] [10]. Estas teorías imponen que el determinante de la métrica tenga un valor fijo igual a una densidad escalar, lo que impone una restricción a la invariancia bajo difeomorfismos. La teoría es invariante bajo un subgrupo de cambios de coordenadas. La gravedad unimodular estándar nos da las ecuaciones de Relatividad General con una constante cosmológica, vista como una constante de integración que absorbe las contribuciones de la energía del vacío. Al imponer que las variaciones de $\sqrt{-g}$ sean nulas, se obtiene que la teoría solo es invariante bajo transformaciones infinitesimales cuyos vectores generadores cumplen

$$\nabla_\mu \xi^\mu = 0$$

Estas transformaciones son conocidas como difeomorfismos que preservan el volumen [10]. El tensor energía-momento no se conserva automáticamente en estas teorías sino que se impone como condición [8].

Lo estudiado hasta ahora nos muestra que las teorías que rompen, parcial o totalmente, la invariancia bajo difeomorfismos son interesantes desde del punto de vista cosmológico, al poder explicar parcial o totalmente los efectos atribuidos a una energía oscura.

Recientemente se han estudiado teorías que pese a romper esta simetría bajo transformaciones generales de coordenadas son equivalentes a Relatividad General en aproximación de campo débil [11]. En este trabajo estudiamos si dichas teorías siguen siendo viables en el régimen no lineal. En particular, estudiamos sus soluciones cosmológicas y las comparamos con la evolución explicada en el modelo Λ CDM.

II. TEORÍA MÉTRICA EFECTIVA

Viendo ahora la posibilidad de que la simetría bajo cambios de coordenadas sea solo aproximada, podemos considerar teorías que rompan esta invariancia. Una posibilidad es construir un lagrangiano efectivo, el más general posible con primeras y segundas derivadas de la métrica de forma que mantengamos una teoría métrica de la gravedad, donde esta sea una manifestación de la curvatura. Seguimos el desarrollo hecho por [11]. El teorema de Lovelock implica que el nuevo tensor de Einstein no tendrá divergencia nula, además esta acción ya no es invariante bajo difeomorfismos dado que los términos adicionales están contruidos con combinaciones de $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ no tensoriales. Usando la signatura $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\kappa} \left[\mathcal{L}_{EH} + \sum_{i=1}^7 a_i \mathcal{L}_i \right] + \mathcal{L}_m \quad (1)$$

donde \mathcal{L}_i son [11]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= -g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda, & \mathcal{L}_2 &= -g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda \\ \mathcal{L}_3 &= -g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} g_{\lambda\omega} \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\omega \\ \mathcal{L}_4 &= -g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} g_{\lambda\omega} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\rho\sigma}^\omega \\ \mathcal{L}_5 &= -g^{\alpha\beta} \Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda \Gamma_{\mu\beta}^\mu, & \mathcal{L}_6 &= -g^{\mu\nu} \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda \\ \mathcal{L}_7 &= -g^{\mu\nu} \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \end{aligned} \quad (2)$$

Los coeficientes a_i son las constantes de acoplo de estos términos normalizadas a $\kappa = 8\pi G$, y se espera que dichas constantes sean pequeñas. Los términos \mathcal{L}_6 y \mathcal{L}_7 se pueden construir como combinación lineal de los demás términos mas términos de superficie, por lo que podemos ignorarlos; y cualquier término con dos derivadas de la métrica también se puede expresar como combinación de los primeros 5 términos mas términos de superficie [11]

por lo que la curvatura no aparece en nuestro lagrangiano efectivo más que en el de Einstein-Hilbert.

En el análisis de las ecuaciones de Einstein linealizadas seguido en esta teoría [11], donde se usa una aproximación de campo débil

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}; \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (3)$$

vemos que los términos a_4, a_5 son compatibles con la Relatividad General a primer orden, mientras que a_1, a_2, a_3 no lo son salvo una combinación particular (caso trivial) [11]. En efecto, tomando estas ecuaciones

$$\begin{aligned} & -\square h^{\alpha\beta} + (1 + 2a_4)(\partial^\alpha \partial_\gamma h^{\beta\gamma} + \partial_\beta \partial_\gamma h^{\alpha\gamma}) \\ & - (1 + 2a_4)\eta^{\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - (1 + 2a_4)\partial^\alpha \partial^\beta h \\ & + (1 + a_4 + a_5)\eta^{\alpha\beta} \square h = 16\pi G T^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4)$$

La conservación de la energía en espacio plano, $\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ impone

$$a_4 \square \partial_\beta h^{\alpha\beta} + (a_5 - a_4) \partial^\alpha \square h = 0 \quad (5)$$

de forma que si tomamos $a_4 \neq 0$, $a_5 = 0$ las ecuaciones se reducen, usando el tensor de traza reversa $h^{\alpha\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\beta} \bar{h}/2$, a la ecuación $\square \bar{h}^{\alpha\beta} = 16\pi G T^{\alpha\beta}$. Usando una transformación similar $h^{\alpha\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta} - \eta^{\alpha\beta} \bar{h}/4$ con $a_4 = 0$, $a_5 \neq 0$, recuperamos las ecuaciones de Einstein linealizadas. De forma que la introducción de uno de estos dos términos no modifican la Relatividad General a orden lineal [11].

Viendo que estos dos términos son consistentes con la gravedad newtoniana por separado, nuestro objetivo ahora es ver si las nuevas ecuaciones de Einstein completas pueden tener una solución para una métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, tal que la evolución de estas soluciones sea compatible con las observaciones cosmológicas.

A. Variaciones de \mathcal{L}_4 y \mathcal{L}_5

Si queremos resolver la ecuación de Friedmann con las contribuciones $a_4 \mathcal{L}_4$, $a_5 \mathcal{L}_5$ necesitamos desarrollar las ecuaciones de Einstein en forma tensorial, y no únicamente a orden lineal. Para desarrollar estas ecuaciones, queremos escribir las variaciones de la forma

$$\begin{aligned} \delta S = & -\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[G_{\mu\nu} + \sum_{n=4}^5 a_n \mathcal{M}_{\mu\nu}^n \right] \\ & + \int d^4x \sqrt{-g} \delta \mathcal{L}_m \end{aligned} \quad (6)$$

donde $\kappa = 8\pi G$ y n etiqueta los distintos términos métricos adicionales. Las variaciones del primer término, \mathcal{L}_4 son

$$\begin{aligned} \delta S_4 = & -\frac{a_4}{2\kappa} \int d^4x \delta(\sqrt{g} \mathcal{L}_4) \\ = & -\frac{a_4}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{g} \left(\frac{\delta g}{2g} \mathcal{L}_4 + \delta \mathcal{L}_4 \right) \end{aligned} \quad (7)$$

donde la variación del lagrangiano es

$$\delta \mathcal{L}_4 = -2\delta \Gamma^\lambda g_{\lambda\omega} \Gamma^\omega - \Gamma^\lambda \Gamma^\omega \delta g_{\lambda\omega} \quad (8)$$

Hemos usado la notación $\Gamma^\mu = g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu$, donde $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ es el símbolo de Christoffel de segunda especie. Calculamos las variaciones de estos términos a partir de la fórmula de Jacobi y de una identidad de la métrica. Dicha fórmula relaciona las derivadas del determinante y de la traza de una matriz y su inversa

$$\begin{aligned} \frac{\delta \det(M)}{\det(M)} = \text{Tr} \left[\frac{\delta M}{M} \right] & \rightarrow \frac{\delta g}{g} = g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = & -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (9)$$

De estas fórmulas se deduce la siguiente relación

$$g^{\nu\rho} \Gamma_{\nu\rho}^\mu = -\frac{\partial_\sigma (\sqrt{|g|} g^{\mu\sigma})}{\sqrt{|g|}} = -\frac{1}{2} \frac{g^{\mu\sigma} \partial_\sigma |g|}{|g|} - \partial_\sigma g^{\mu\sigma} \quad (10)$$

Usando

$$-g_{\alpha\nu} g_{\beta\rho} \partial_\mu g^{\nu\rho} = \partial_\mu g_{\alpha\beta} \quad (11)$$

para poder expresar todas las variaciones en función de $\sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}$, la variación nos da el siguiente *tensor*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mu\nu}^4 = & \frac{1}{2} g_{\lambda\omega} \Gamma^\lambda \Gamma^\omega g_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda \Gamma^\omega g_{\mu\lambda} g_{\nu\omega} \\ & + \partial_\alpha (\Gamma^\alpha \sqrt{-g}) \frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{-g}} \\ & - [\partial_\mu (g_{\nu\omega} \Gamma^\omega) + \partial_\nu (g_{\mu\omega} \Gamma^\omega)] \end{aligned} \quad (12)$$

que es el símbolo que rompe la invariancia bajo difeomorfismos. En general $\nabla^\mu \mathcal{M}_{\mu\nu}^4 \neq 0$. Así mismo, este objeto no se transforma correctamente bajo cambios de coordenadas. El siguiente término $a_5 \mathcal{L}_5$ varía siguiendo

$$\begin{aligned} \delta S_5 = & -\frac{a_5}{2\kappa} \int d^4x \delta(\sqrt{g} \mathcal{L}_5) \\ = & -\frac{a_5}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{g} \left(\frac{\delta g}{2g} \mathcal{L}_5 + \delta \mathcal{L}_5 \right) \end{aligned} \quad (13)$$

donde

$$\delta \mathcal{L}_5 = -\delta g^{\alpha\beta} \Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda \Gamma_{\mu\beta}^\mu - 2g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda \Gamma_{\mu\beta}^\mu \quad (14)$$

El símbolo correspondiente es

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mu\nu}^5 &= \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda\Gamma_{\rho\beta}^\rho - \partial_\alpha(g_{\mu\nu})g^{\alpha\beta}\Gamma_{\rho\beta}^\rho \\ &- \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda\Gamma_{\rho\nu}^\rho - \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\partial_\alpha(g_{\lambda\sigma})g^{\alpha\beta}\Gamma_{\rho\beta}^\rho g_{\mu\nu} \\ &- \partial_\alpha(g^{\alpha\beta}g^{\lambda\sigma}\Gamma_{\rho\beta}^\rho)g_{\lambda\mu}g_{\sigma\nu} \end{aligned} \quad (15)$$

de forma que en general $\nabla^\mu\mathcal{M}_{\mu\nu}^5 \neq 0$. Este objeto es un símbolo que tampoco se transforma correctamente bajo transformaciones generales de coordenadas.

Las ecuaciones de Einstein se ven modificadas por estos dos términos adicionales

$$G_{\mu\nu} + a_4\mathcal{M}_{\mu\nu}^4 + a_5\mathcal{M}_{\mu\nu}^5 = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (16)$$

Vamos a estudiar los dos casos donde solo uno de estos dos términos aparece en las ecuaciones, es decir, $a_4 = 0$ ó $a_5 = 0$. Estudiemos ahora las soluciones de la métrica FLRW en esta teoría efectiva, en ambos casos.

III. EFECTO DE $a_i\mathcal{L}_i$ EN UNA COSMOLOGÍA FLRW

Queremos resolver las ecuaciones de Einstein modificadas con los términos adicionales desarrollados arriba

$$G_{\mu\nu} + a_4\mathcal{M}_{\mu\nu}^4 + a_5\mathcal{M}_{\mu\nu}^5 = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (17)$$

para un espaciotiempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker en coordenadas cartesianas y con secciones espaciales planas

$$ds^2 = b^2(\tilde{t})d\tilde{t}^2 - a^2(\tilde{t})(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (18)$$

Dado que la abundancia de curvatura es pequeña y tiene un valor compatible con $\Omega_k = 0$ [5], y considerando que no ha existido una época cosmológica dominada por curvatura, suponemos que la curvatura espacial es nula, $k = 0$. En el Apéndice B se estudia el efecto de la curvatura sobre los resultados, y se discute la posibilidad de usar diferentes sistemas de coordenadas.

$a(\tilde{t})$ es el factor de escala, $d\tilde{t}$ el tiempo coordenado y $b(\tilde{t})d\tilde{t} = dt$ el tiempo cosmológico. En una teoría invariante bajo difeomorfismos podemos absorber $b(\tilde{t})$ al redefinir la coordenada temporal, pero ahora $\mathcal{M}_{\mu\nu}^i$ depende del sistema de coordenadas y no obtenemos el mismo resultado calculándolo en $b(\tilde{t}) = 1$, que para un $b(\tilde{t})$ arbitrario haciendo después el cambio de variable $b(\tilde{t})d\tilde{t} = dt$.

Consideramos un Universo cuyo contenido material es una suma de fluidos perfectos no interactuantes. En esta métrica, un vector contravariante dirigido al futuro con norma 1 toma la forma $u^\mu = (b^{-1}(\tilde{t}), 0, 0, 0)$. Esta será la velocidad comóvil con el sistema de referencia del fluido.

El tensor energía-momento de un fluido perfecto toma la forma

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} \\ T_{00} &= \rho b^2(\tilde{t}); \quad T_{0i} = 0; \quad T_{ij} = pa^2(\tilde{t})\delta_{ij} \end{aligned} \quad (19)$$

La ecuación de conservación del tensor energía-momento, $\nabla_\mu T^{\mu\nu}$ es equivalente a la siguiente condición sobre la energía

$$b^{-2}(\tilde{t})(\rho' + 3\tilde{H}[\rho + p]) = 0 \quad (20)$$

Aquí $f' = df/d\tilde{t}$, mientras que en tiempo cosmológico $\dot{f} = df/dt$. $\tilde{H} = a'/a$ y $H = \dot{a}/a$ es el parámetro de Hubble ordinario. Haciendo el cambio de variable $dt = b(\tilde{t})d\tilde{t}$, recuperamos la ecuación en tiempo cosmológico con $\dot{\rho}$, H salvo un factor $b^{-1}(t)$.

Salvo el factor común $b^{-2}(\tilde{t})$, tenemos la misma ecuación de conservación que en el tiempo cosmológico, y por tanto la densidad de energía de un fluido $p = \omega\rho$ se comporta igual

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+\omega)} \quad (21)$$

En este sistema de coordenadas, la Ecuación de Friedmann toma la siguiente forma

$$\left(\frac{a'}{ab}\right)^2 + \frac{k}{a^2} + \sum_{n=4}^5 a_n \frac{\mathcal{M}_{00}^n}{3b^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (22)$$

recordando que $\rho = T_{00}/b^2(\tilde{t})$ es la suma de densidades de energía de los fluidos. La ecuación de la aceleración es

$$\frac{a''}{ab^2} - \frac{a'b'}{ab^3} - \sum_{n=4}^5 \frac{a_n}{2} \left(\frac{\mathcal{M}_{ii}^n}{a^2} + \frac{\mathcal{M}_{00}^n}{3b^2} \right) = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (23)$$

donde \mathcal{M}_{ii}^n es cualquier término espacial diagonal, que son idénticos como consecuencia de la simetría espacial de la métrica. A diferencia de en Relatividad General, las dos ecuaciones (la ecuación de Friedmann y la de aceleración) son independientes ya que tenemos dos variables por determinar, $a(\tilde{t})$ y $b(\tilde{t})$.

Podemos realizar el cambio de coordenadas $dt = b(\tilde{t})d\tilde{t}$ del tiempo coordenado al cosmológico, de modo que las ecuaciones adquieren la forma conocida

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \sum_{n=4}^5 a_n \frac{\mathcal{M}_{00}^n}{3b^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (24)$$

Utilizando la ecuación de conservación de la energía, escribimos nuestra ecuación de Friedmann modificada

$$H^2 = H_0^2 \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} a^{-3(1+\omega(\alpha))} - \sum_{n=4}^5 a_n \frac{\mathcal{M}_{00}^n}{3b^2} \quad (25)$$

Si $\mathcal{M}_{\mu\nu}^n$ se comporta como el tensor energía-momento de un fluido con ecuación de estado constante ω , cumpliendo el tensor en forma mixta la relación siguiente

$$\omega (\mathcal{M}^n)_0^0 = - (\mathcal{M}^n)_i^i \quad (26)$$

entonces la ecuación de Friedmann es la ordinaria con la contribución de un fluido con ecuación de estado $p = \omega\rho$ y abundancia Ω_i no determinada por las ecuaciones

$$H^2 = H_0^2 \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} a^{-3(1+\omega(\alpha))} + H_0^2 \Omega_n a^{-3(1+\omega)} \quad (27)$$

resultado desarrollado en el Apéndice A y que sigue de la dependencia lineal (en Relatividad General) entre la ecuación de Friedmann y la de aceleración. Recuperamos estas ecuaciones con la contribución de un fluido perfecto adicional; donde ahora la ecuación de Friedmann es de primer orden en $a(t)$, parámetro que queda completamente determinado. Comparando con la ecuación (25)

$$H_0^2 \Omega_n a^{-3(1+\omega_n)} = -a_n \frac{\mathcal{M}_{00}^n}{3b^2} \quad (28)$$

obtenemos una segunda ecuación, en general de segundo orden en $a(t)$ (ya conocida) y $b(t)$. De forma que la ecuación de Friedmann solo tendrá solución en un subgrupo de sistemas de referencia temporales donde $dt = b(\tilde{t})d\tilde{t}$, siendo $b(t)$ las soluciones a esta última ecuación. Dado que el tensor se comportará como un fluido perfecto en cualquier sistema de coordenadas, si escogemos un sistema de referencia donde $b(t)$ no es solución aparecerá una abundancia adicional asociada a este fluido dependiente del tiempo, de forma similar a como aparecen fuerzas de inercia en sistemas de referencia no inerciales.

Este resultado es de crucial importancia, ya que simplifica los cálculos en caso de tratar con un fluido perfecto, y nos permite ignorar la estructura interna del tensor.

A. Cosmología con $a_4\mathcal{L}_4$

Vamos a estudiar nuestro primer caso, aquel con $a_4 \neq 0$, $a_5 = 0$. Nuestro tensor $\mathcal{M}_{\mu\nu}^4$ tiene la siguiente expresión en una métrica FLRW, en tiempo cosmológico $dt = b(\tilde{t})d\tilde{t}$

$$\frac{\mathcal{M}_{00}^4}{3b^2} = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{1}{3} \left[\frac{\ddot{b}}{b} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{b}}{b} \right)^2 \right] \quad (29)$$

Hemos calculado el tensor en un sistema de referencia general, $b(\tilde{t})d\tilde{t}$ y luego hemos realizado un cambio de variable al tiempo cosmológico dt . La dependencia en $b(t)$ no desaparece, ya que este objeto no se transforma como un tensor.

La componente espacial presenta la siguiente relación con la temporal

$$\frac{\mathcal{M}_{ii}^4}{a^2} = \frac{\mathcal{M}_{00}^4}{b^2} \quad (30)$$

Al subir y bajar índices con la métrica, desaparecen los términos $a(t), b(t)$ de forma que esta relación es equivalente a

$$(\mathcal{M}^4)_0^0 = - (\mathcal{M}^4)_i^i \quad (31)$$

luego el término a_4 se comporta como un fluido perfecto con ecuación de estado $\omega = 1$ y densidad de energía $\rho = \rho_0 a^{-3(1+\omega)} = \rho_0 a^{-6}$, es decir, se comporta como un fluido rígido [13]. Más adelante veremos algunas propiedades de esta componente, pero primero vamos a tratar de encontrar para qué $b(t)$ existe solución a la ecuación de Friedmann.

Como vimos en el apartado anterior, nuestro fluido perfecto cumplirá la ecuación de Friedmann

$$H^2 = H_0^2 \Omega_4 a^{-6} + H_0^2 \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} a^{-3(1+\omega(\alpha))} \quad (32)$$

donde Ω_4 es la abundancia del fluido, y es una constante de integración arbitraria que veremos más adelante cómo se relaciona con a_4 . Comparando con la ecuación original tenemos

$$\frac{H_0^2 \Omega_4}{a_4} a^{-6} = \frac{1}{3} \left[\frac{\ddot{b}}{b} - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{b}}{b} \right)^2 \right] - \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right] \quad (33)$$

Como $a(t)$ está determinado por la ecuación de Friedmann, esta es una ecuación diferencial de segundo orden en $b(t)$. Consideramos $b(t) = b(a(t))$ sin pérdida de generalidad ya que ambas funciones dependen exclusivamente de t . Derivamos respecto a $a(t)$ empleando la notación $f' = df/da$ (no confundir con la notación usada antes, $f' = df/d\tilde{t}$), y llamamos $H_b = \dot{b}/b$

$$H_b' H a + \frac{1}{2} H_b^2 = 3H' a H + \frac{9}{2} H^2 + \frac{3H_0^2 \Omega_4}{a_4} a^{-6} \quad (34)$$

donde

$$H' a H + \frac{3}{2} H^2 = -\frac{3}{2} H_0^2 \Omega_4 a^{-6} - \frac{3H_0^2}{2} \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} \omega a^{-3(1+\omega)} \quad (35)$$

Si ahora despejo $H(a)$ usando la ecuación de Friedmann, y hago el cambio de variable $y = H_b/H_0$ queda

$$y' \sqrt{\Omega_4 a^{-4} + \Omega_R a^{-2} + \Omega_M a^{-1} + \Omega_\Lambda a^2} + \frac{y^2}{2} = -\frac{9}{2} \left(\Omega_4 a^{-6} + \frac{\Omega_R}{3} a^{-4} - \Omega_\Lambda \right) + \frac{3\Omega_4}{a_4} a^{-6} \quad (36)$$

Esta es una ecuación diferencial de Ricatti, que necesita una única condición inicial. Tomando los parámetros de la Cosmología estándar $\Omega_M = 0.311$, $\Omega_\Lambda = 0.688$, $\Omega_R = 4.17 \times 10^{-5} h^{-2}$, y el siguiente valor para la abundancia y la constante de acoplo de fluido rígido, $\Omega_4 = a_4 = 4.5 \times 10^{-17}$, elección arbitraria que explicaremos más adelante, junto a la condición inicial $y(1) = 1$ tenemos la solución Fig. 1

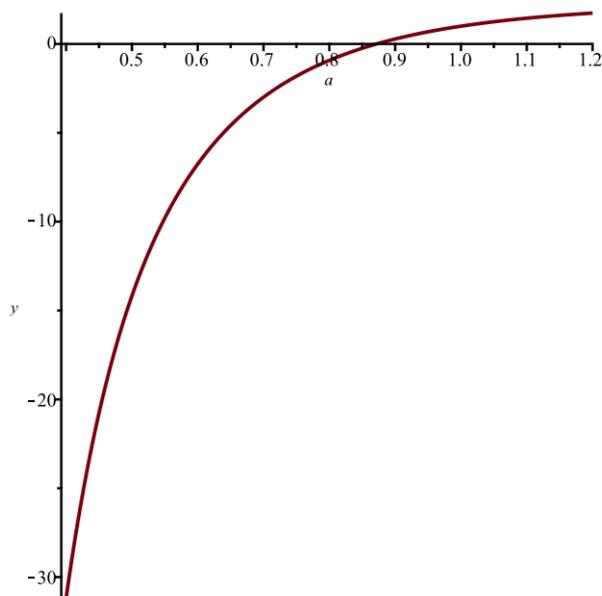


Figura 1: Solución de la ecuación de Ricatti para $y(a) = H_b/H_0$, $a_4 = \Omega_4 = 4.5 \times 10^{-17}$

que diverge en $a = 0$, $y(0) \rightarrow -\infty$. Se pueden encontrar algunas soluciones analíticas. Para la época dominada por fluido rígido, $\Omega_4 \neq 0$, $\Omega_i = 0$, la solución es

$$y(a) = \frac{\sqrt{6\Omega_4}}{\sqrt{a_4} a^3} \tanh \left[\sqrt{6} \frac{\ln(a) - C}{2\sqrt{a_4}} \right] + \frac{3\sqrt{\Omega_4}}{a^3} \quad (37)$$

Podemos reescribir la ecuación en función de $b(a)$, y de derivadas primeras y segundas de $a(t)$ pasando de una ecuación de primer orden en H_b a una de segundo orden en $b(a)$.

Para ello, expreso H_b y H'_b como funciones de $b(a)$, y desarrollo. Encontramos la siguiente ecuación

$$\left[\frac{b''}{b} - \frac{1}{2} \left(\frac{b'}{b} \right)^2 \right] (\Omega_4 a^{-6} + \Omega_R a^{-4} + \Omega_M a^{-3} + \Omega_\Lambda) a^2 - \frac{b'}{b} \left(2\Omega_4 a^{-6} + \frac{\Omega_M a^{-3}}{2} + \Omega_R a^{-4} \right) a = -\frac{9}{2} \left(\Omega_4 a^{-6} + \frac{\Omega_R}{3} a^{-4} - \Omega_\Lambda \right) + \frac{3\Omega_4}{a_4} a^{-6} \quad (38)$$

Hemos sustituido la ecuación de Friedmann con todas sus componentes (materia, radiación y constante cosmológica) para que la solución sea lo más general posible. La ecuación es diferencial de segundo orden, y presenta los siguientes problemas:

1. Requiere dos condiciones iniciales para $b(t)$. Una es una elección del instante inicial $b(0)$, la segunda condición no parece física.
2. La ecuación genera una familia de soluciones para un a_4 y un Ω_4 dados, de forma que no relaciona ambos. Sería necesaria una tercera condición inicial para imponer una relación entre el acoplo a_4 y la abundancia Ω_4 ; condición que tampoco sería física.

Escogemos las condiciones iniciales $b(1) = 1$, $b'(1) = 1$, es decir, $\dot{b}(1) = H_0$, de manera análoga a $a(t)$ solo que la segunda relación no es una condición inicial en el caso de $a(t)$, sino que se sigue de resolver la ecuación de Friedmann que es de primer orden. Podemos representar infinitas soluciones en función de qué Ω_4 , a_4 escojamos. Si tomamos $\Omega_4 = 4.5 \times 10^{-17}$, $a_4 = \Omega_4$ obtenemos la solución Fig. 2.

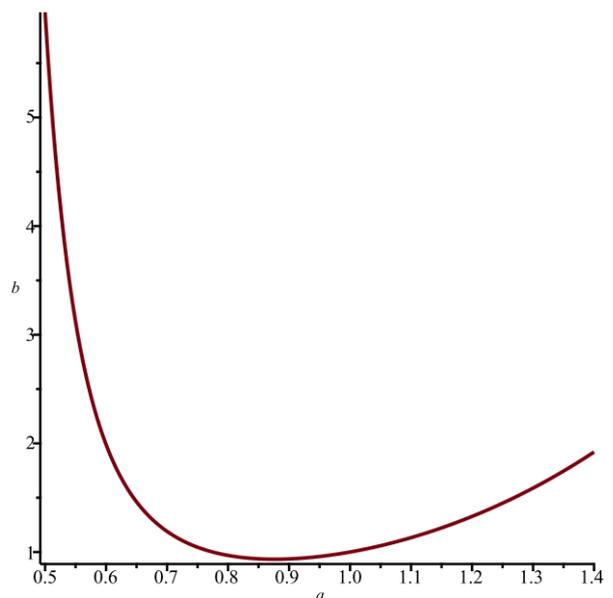


Figura 2: Evolución de $b(t)$ en función de $a(t)$, $a_4 = \Omega_4 = 4.5 \times 10^{-17}$

A diferencia del factor de escala $a(t)$, que puede medirse a partir del redshift de objetos, el factor $b(t)$ no es observable y no puede medirse; solo presentamos las soluciones estudiadas por completitud.

Esta solución tiende a infinito con $a \rightarrow \infty$, tiene una singularidad en $b(0)$, y depende de varios parámetros que hemos escogido arbitrariamente al igual que la solución a la ecuación de Ricatti. Otras soluciones presentan las mismas dos propiedades mencionadas. El mínimo de $b(t)$ depende de las condiciones iniciales.

Podemos resolver la ecuación para $b(t)$ tomando $\Omega_M = \Omega_\Lambda = 0$, y probando con soluciones cerca de la igualdad fluido rígido - radiación, o bien en la época dominada por fluido rígido. Podríamos esperar que los resultados de interés para $b(t)$ se encuentren en esta época, aquella dominada por el fluido perfecto generado por $a_4 \mathcal{M}^4$.

El comportamiento de $b(a)$ con la primera condición es

$$b(a) = C_1 a^3 + \frac{C_1^2 a^3}{4C_2} \left(\sqrt{\Omega_4 \left(\Omega_R + \frac{\Omega_4}{a^2} \right) + \frac{\Omega_4}{a}} \right)^{\sqrt{\frac{6}{a_4}}} + C_2 a^3 \left(\sqrt{\Omega_4 \left(\Omega_R + \frac{\Omega_4}{a^2} \right) + \frac{\Omega_4}{a}} \right)^{-\sqrt{\frac{6}{a_4}}} \quad (39)$$

mientras que la solución en la época dominada por fluido rígido, $\Omega_R = 0$, $\Omega_4 = 1$ es

$$b(a) = C_1 a^3 + \frac{C_1^2}{4C_2} a^{3+\sqrt{\frac{6}{a_4}}} + C_2 a^{3-\sqrt{\frac{6}{a_4}}} \quad (40)$$

Algunos resultados de interés que se pueden extraer de estas ecuaciones.

- La solución es singular en $b(0)$ siempre que se cumpla $a_4 < 2/3$, esto es, que la constante de acoplo del nuevo término gravitatorio sea algo menor que la del término de Einstein-Hilbert.
- En la época dominada por radiación, $\Omega_4 = 0$, $b(a)$ es un polinomio cúbico, $b(a) = C_1 a^3$.
- Con unas condiciones iniciales adecuadas, $C_1 = 0$, $C_2 = C$, la solución tiende asintóticamente a 0 a tiempos largos, $\lim_{a \rightarrow \infty} b(a) = 0$. Esta condición es compatible con $b(1) = 1$.
- Cuanto más pequeña sea la constante a_4 , el término de fluido rígido se comporta como un polinomio de mayor índice.

Podemos estudiar los casos con materia y constante cosmológica para inferir el verdadero comportamiento de $b(a)$ a tiempos largos. Como la dependencia en a_4 va con el término de fluido rígido, Ω_4 , cuando este se anula tenemos las siguientes soluciones que no dependen del valor del acoplo del nuevo término

$$b(a)_R = \frac{C_1^2}{4C_2} a^3 + C_1 a^2 + C_2 a \quad (41)$$

$$b(a)_M = \frac{C_1^2}{9} a^3 + \frac{C_1}{3C_2} a^{\frac{3}{2}} + \frac{C_2^2}{4} \quad (42)$$

$$b(a)_\Lambda = \frac{C_1^2}{4C_2} a^{1+\sqrt{10}} + C_1 a + C_2 a^{1-\sqrt{10}} \quad (43)$$

Podemos encontrar algunas propiedades interesantes en las siguientes soluciones:

1. Todas son polinómicas
2. La solución de radiación coincide asintóticamente con el límite anterior para $a(t) \gg 1$
3. La solución de constante cosmológica tiende asintóticamente a 0 con la condición $C_1 = 0$.

B. Cotas observacionales a la abundancia de fluido rígido

Un fluido rígido ($\omega = 1$) tendría efectos sobre el Universo joven. Denotaremos su abundancia con Ω_4 . Su densidad cae con el cuadrado del volumen, $\rho_4 \propto a^{-6}$, de forma que una pequeña abundancia actual tomará valores grandes en el pasado. Una forma de acotar su abundancia es viendo su efecto sobre el tamaño del horizonte de sonido $r_s(z_{dec})$. Utilizando los parámetros cosmológicos medidos por Planck 2018 (TT,TE,EE+lowE+lensing) [5]

$$r_s(z_{dec})[\text{Mpc}] = 144.43 \pm 0.26 \quad (44)$$

El horizonte de sonido está dado por la siguiente expresión

$$r_s(\eta) = \int_0^\eta c_s(\hat{\eta}) d\hat{\eta} = \int_{z_{dec}}^\infty \frac{c_s(z)}{H(z)} dz \quad (45)$$

c_s es la velocidad del sonido en el plasma de bariones y fotones y no depende de la abundancia de fluido rígido. El valor de $H(z)$ que aparece en el denominador sí depende y aumenta con Ω_4 , de forma que a mayor abundancia de fluido rígido menor valor tendrá el horizonte de sonido r_s .

Al 68% C.L tenemos la cota inferior dada por la expresión (44). Imponiendo esta cota a Ω_4 , tomando el valor medio del resto de parámetros cosmológicos sin considerar sus errores obtenemos un límite a la abundancia

$$\Omega_4 < 4.5 \times 10^{-17} \quad (46)$$

Otra forma de obtener una cota es limitando cómo la abundancia de fluido rígido modifica la abundancia de ${}^4\text{He}$, valor que se ha medido experimentalmente [14], obteniendo $\rho_4^{10 \text{ MeV}}/\rho_R^{10 \text{ MeV}} < 30$, donde $\rho_4^{10 \text{ MeV}}$ es la abundancia de fluido rígido cuando la temperatura es de 10 MeV, y $\rho_R^{10 \text{ MeV}}$ la de especies a la misma temperatura. La abundancia es $\rho_4 = \rho_4^{10 \text{ MeV}}(a/a_{10})^{-6}$, de forma que esta cota equivale para la abundancia actual a

$$\frac{\Omega_4}{\Omega_R} < 30 \left(\frac{T_0}{T(10 \text{ MeV})} \sqrt[3]{\frac{g_{*S}(10 \text{ MeV})}{g_{*S}(T_0)}} \right)^2 \quad (47)$$

La temperatura actual del CMB es $T_0 = 2.34 \times 10^{-4}$ eV, luego

$$\frac{\Omega_4}{\Omega_R} < 30 \left(2.34 \frac{10^{-4}}{10^7} \sqrt[3]{\frac{10.75}{3.91}} \right)^2 = 3.22 \times 10^{-20} \quad (48)$$

Sabiendo que actualmente $\Omega_R = 4.17 \times 10^{-5} h^{-2}$, tenemos $\Omega_4 < 3 \times 10^{-24}$. Esta cota es 7 órdenes de magnitud más restrictiva que la anterior.

En un fluido rígido, la velocidad del fluido iguala a la de la luz, $c_s^2 = \partial p / \partial \rho = 1$, y se corresponde con un campo escalar en el régimen en que toda su energía es cinética, $\rho = p$ [13]. Una cosmología con un campo escalar tendrá una época dominada por fluido rígido entre inflación y radiación [14]. Una época dominada por fluido rígido se conoce como *kination* y podría amplificar las ondas gravitacionales primordiales generadas durante inflación [15][16]. No explica ni es empleada en aliviar la tensión de Hubble [17].

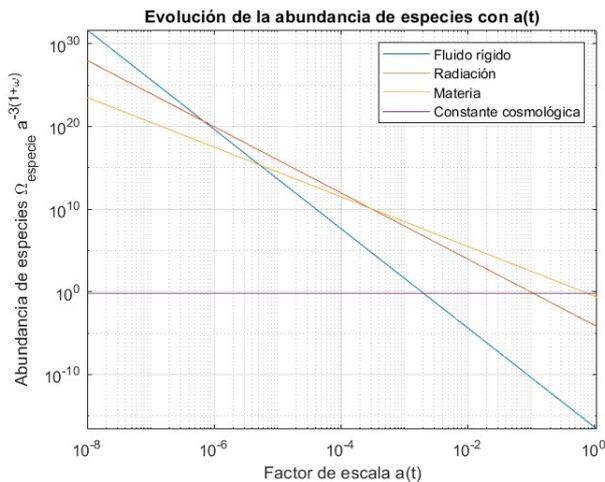


Figura 3: Abundancias de energía oscura, materia, radiación y fluido rígido ($\Omega_4 = 4.5 \times 10^{-17}$) en función de $a(t)$. Existe una época dominada por fluido rígido desde Inflación hasta $a = 10^{-6}$ donde domina la radiación.

C. Cosmología con $a_5 \mathcal{L}_5$

El desarrollo es idéntico al del caso $a_4 \mathcal{L}_4$. La densidad de energía y la presión del término 5 son

$$\frac{\mathcal{M}_{00}^5}{3b^2} = - \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{7}{2} \left[\frac{\dot{a}}{a} \right]^2 + \frac{1}{3} \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{1}{6} \left[\frac{\dot{b}}{b} \right]^2 + 2 \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} \right) \quad (49)$$

$$\frac{\mathcal{M}_{ij}^5}{3b^2} = \frac{a^2}{b^2} \delta_{ij} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2} \left[\frac{\dot{a}}{a} \right]^2 + \frac{1}{3} \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{1}{2} \left[\frac{\dot{b}}{b} \right]^2 \right) \quad (50)$$

Dentro de ambos paréntesis, solo coinciden los términos con segundas derivadas. Esto significa que la ecuación de estado no es constante, por lo que $\mathcal{M}_{\mu\nu}^5$ se comporta como un fluido perfecto con ecuación de estado dependiente del tiempo. Esto nos impide seguir el enfoque de la sección anterior. La solución en este caso pasa por resolver dos ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas para dos funciones, $a(t)$ y $b(t)$, y primeras y segundas derivadas.

IV. CONCLUSIONES

Hemos estudiado la viabilidad cosmológica de dos modelos de gravedad que rompen la invariancia bajo difeomorfismos y que son equivalentes a Relatividad General en el régimen lineal. Hemos visto que al resolver nuestras ecuaciones de Einstein modificadas para un espaciotiempo FLRW, homogéneo, isótropo y en expansión, el papel de estos tensores se puede reducir al de fluidos perfectos con una ecuación de estado dependiente del tiempo. En el caso del término $a_4 \mathcal{L}_4$, con ecuación de estado $\omega = 1$, el efecto de este tensor es el de un fluido rígido que modifica la evolución cosmológica a tiempos cortos y hemos estimado la cota a la abundancia para que sea compatible con las observaciones del fondo cósmico de microondas y de la abundancia de ${}^4\text{He}$. Aunque el término $a_5 \mathcal{L}_5$ presenta una ecuación más difícil de resolver, ambos se pueden incorporar al modelo cosmológico estándar como componentes adicionales. La abundancia de estos fluidos no está determinada, es una constante de integración sin relación con las constantes de acoplo a_4, a_5 , de forma similar a la aparición de la constante cosmológica en gravedad unimodular.

No obstante, la no invariancia bajo cambios de coordenadas presenta algunos problemas. En ciertos sistema de coordenadas no es posible obtener soluciones homogéneas e isótropas de las ecuaciones originales debido a la no invariancia bajo difeomorfismos. Habría que estudiar el término a_5 porque no sabemos si su comportamiento puede ser el de una energía oscura en algún caso.

V. APÉNDICES

Apéndice A: Tensor con ecuación de estado constante en una cosmología FLRW

Si se introduce un tensor simétrico $A_{\mu\nu}$ con ecuación de estado constante en las ecuaciones de Einstein tenemos

$$G_{\mu\nu} + A_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}; \quad A_i^i = -\omega A_0^0 \quad (\text{A1})$$

Sobre una cosmología FLRW con secciones espaciales planas las ecuaciones de Friedmann toman la siguiente forma

$$H^2 = H_0^2 \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} a^{-3(1+\omega(\alpha))} - \frac{A_{00}}{3b^2} - 2\frac{\ddot{a}}{3a} - \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \omega \frac{A_{00}}{3b^2} = \frac{8\pi G}{3} p \quad (\text{A2})$$

Una combinación lineal de ambas ecuaciones elimina $A_{\mu\nu}$

$$\frac{2\dot{H}}{3\omega} + H^2 + \frac{H^2}{\omega} = H_0^2 \sum_{\lambda=\omega_n} \Omega_{\lambda} a^{-3(1+\lambda)} \left(1 - \frac{\lambda}{\omega}\right) \quad (\text{A3})$$

$H = \dot{a}/a$ es el parámetro de Hubble, $\ddot{a}/a = \dot{H} + H^2$. Suponemos que el contenido material del Universo es un conjunto de fluidos perfectos etiquetados con n , donde λ recorre las distintas ecuaciones de estado $\omega_n = \lambda$ y abundancias $\Omega_n \equiv \Omega_{\lambda}$. Los fluidos con la misma ecuación de estado que $A_{\mu\nu}$, $\lambda = \omega$ no contribuyen en la ecuación y se recuperan posteriormente; su abundancia pasa a ser una constante de integración. Hacemos el cambio de variable $H(t) \rightarrow H(a)$, con $\dot{f} = df/dt = df/da \cdot da/dt = f'Ha$, obteniendo una ecuación diferencial de primer orden en $H(a)$. Dividiendo por $2Ha/3\omega$ llegamos a

$$H' + \frac{3H}{2a}(\omega + 1) = \frac{3H_0^2}{2H} \sum_{\lambda=\omega_n} a^{-3(\frac{4}{3}+\lambda)}(\omega - \lambda) \quad (\text{A4})$$

Esta es una ecuación diferencial de Bernoulli, de la forma

$$H' + P(a)H = Q(a)H^{\alpha} \quad (\text{A5})$$

donde $Q(a)$ es el término inhomogéneo correspondiente a las abundancias de los distintos componentes, $\alpha = -1$ y $P(a) = \frac{3}{2a}(1 + \omega)$. Hacemos el cambio de variable $y(a) = H^{1-\alpha}(a) = H^2(a)$, cambio que es independiente de ω . El parámetro de Hubble es ahora $H(a) = \sqrt{y(a)}$.

$$y' + \frac{3y}{2a}(\omega + 1) = \frac{3H_0^2}{2} \sum_{\lambda=\omega_n} \Omega_{\lambda} a^{-3(\frac{4}{3}+\lambda)}(\omega - \lambda) \quad (\text{A6})$$

Ahora tenemos una ecuación diferencial lineal, donde el término inhomogéneo contiene toda la física del contenido del Universo. Si resolvemos el caso homogéneo, se tiene

$$y = \xi a^{-3(1+\omega)}, \quad \xi = e^C \quad (\text{A7})$$

donde ξ es una constante de integración arbitraria positiva, y vemos que $y = H^2 \propto \rho(\omega)$ se comporta como la densidad de energía de un fluido perfecto con ecuación de estado $\rho = \omega p$. Al resolver la ecuación inhomogénea recuperamos el resto de componentes

$$\begin{aligned} \frac{C' e^C}{2} a^{-3(1+\omega)} &= \frac{3H_0^2}{2} \sum_{\lambda=\omega_n} \Omega_{\lambda} a^{-3(\frac{4}{3}+\lambda)}(\omega - \lambda) \\ &\rightarrow \int dC e^C = 3H_0^2 \int da \sum_{\lambda=\omega_n} \Omega_{\lambda} a^{-3(\frac{1}{3}+\lambda-\omega)} \\ (\omega - \lambda) \rightarrow e^C &= 3H_0^2 \sum_{\lambda=\omega_n} \Omega_{\lambda} a^{-3(\lambda-\omega)} \frac{\omega - \lambda}{3\omega - 3\lambda} \\ \rightarrow y_{Inhom} &= e^{C(a)} y_{Hom} = H_0^2 \sum_{\lambda=\omega_n} \Omega_{\lambda} a^{-3(1+\lambda)} \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

De forma que si el tensor $A_{\mu\nu}$ se comporta como un fluido perfecto con parámetro ω , nuestras ecuaciones se reducen a la ecuación de Friedmann y $A_{\mu\nu}$ contribuye como un fluido perfecto

$$H^2 = H_0^2 \Omega_A a^{-3(1+\omega)} + H_0^2 \sum_{\lambda=\omega_n} \Omega_{\lambda} a^{-3(1+\lambda)} \quad (\text{A9})$$

Donde $e^C = H_0^2 \Omega_A$ es una constante de integración positiva y Ω_A la abundancia del tensor $A_{\mu\nu}$, no determinada por las ecuaciones.

La estructura del tensor $A_{\mu\nu}$ es ignorada por la ecuación de Friedmann y la ecuación de aceleración debido a la dependencia lineal entre ambas.

Apéndice B: Soluciones en otros sistemas de coordenadas

La ruptura de la invariancia bajo difeomorfismos implica que solo existen soluciones a las ecuaciones de Einstein en ciertos subgrupos de sistemas de coordenadas. En este apéndice analizamos algunos sistemas de coordenadas que son de interés, y el efecto de la curvatura sobre dichas soluciones.

1. Soluciones en coordenadas esféricas

Dado que los términos introducidos en el lagrangiano rompen la invariancia bajo difeomorfismos, las ecuaciones dependerán del sistema de coordenadas. En particular, no

existirán soluciones en ciertos sistemas de coordenadas, por ejemplo en coordenadas esféricas.

Si tomamos la métrica FLRW con secciones espaciales planas en coordenadas esféricas

$$ds^2 = b^2(\tilde{t})d\tilde{t}^2 - a^2(\tilde{t}) [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2] \quad (\text{B1})$$

Tanto el tensor energía-momento como el tensor de Einstein son diagonales. No obstante, los términos $\mathcal{M}_{\mu\nu}^4$ y $\mathcal{M}_{\mu\nu}^5$ son no diagonales.

$$\mathcal{M}_{r\theta}^4 = -\mathcal{M}_{r\theta}^5 = \frac{2 \cos \theta}{r \sin \theta} \quad (\text{B2})$$

Estas ecuaciones solo tienen solución con un $T_{\mu\nu}$ no diagonal y con la distribución mostrada dependiente de las coordenadas, es decir, es necesario romper la isotropía y la homogeneidad de la distribución de materia y energía. Este es un problema de la elección de coordenadas, ya que el espaciotiempo que representa la métrica sí tiene solución homogénea e isotrópica en coordenadas cartesianas.

2. Soluciones con curvatura no nula

No es posible resolver las ecuaciones con curvatura no nula en coordenadas esféricas, ya que como ocurría en el caso sin curvatura, no existen soluciones homogéneas e isotrópicas

$$\mathcal{M}_{r\theta}^4 = \frac{\cos \theta(3kr^2 - 2)}{\sin \theta r(kr^2 - 1)}; \mathcal{M}_{r\theta}^5 = -\frac{\cos \theta(kr^2 - 2)}{\sin \theta r(kr^2 - 1)} \quad (\text{B3})$$

Si escribimos la métrica FLRW con secciones espaciales curvas en coordenadas cartesianas [18]

$$ds^2 = b^2(\tilde{t})d\tilde{t}^2 - a^2(\tilde{t}) \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(1 + \frac{k}{4}[x^2 + y^2 + z^2])^2} \quad (\text{B4})$$

no encontramos tampoco solución en un Universo homogéneo e isotrópico. Existen componentes no diagonales y dependientes de las coordenadas que no se pueden anular

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{zy}^4 &= \frac{12k^2zy}{(kr^2 + 4)^2} \\ \mathcal{M}_{xy}^5 &= -\frac{36k^2xy}{(kr^2 + 4)^2} \\ \mathcal{M}_{y0}^4 &= \frac{2ky(b'a - 3a'b)}{(kr^2 + 4)ab} \\ \mathcal{M}_{x0}^5 &= -\frac{6kx(b'a + 3a'b)}{(kr^2 + 4)ab} \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

Si bien se pueden buscar soluciones para anular los términos $0i$, tales $a(t)$ y $b(t)$ pueden no ser solución de la ecuación de Friedmann. Independientemente de esto, los términos ij no se anulan en ningún caso.

Esto implica que no es posible encontrar soluciones compatibles con el Principio Cosmológico y curvatura no nula. Aunque se podrían encontrar soluciones con contribuciones *de curvatura* en un espacio plano introduciendo un fluido perfecto con ecuación de estado $\omega = -1/3$ y energía $\rho/\rho_c = -k/a^2 = \Omega_K a^{-2}$, estas no tendrían en cuenta el efecto de la curvatura sobre $\mathcal{M}_{\mu\nu}^n$ y no serían soluciones completas.

-
- [1] G. Nordström, *Annalen der Physik* **347**, 533 (1913).
[2] É. Cartan, in *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, Vol. 40 (1923) pp. 325–412.
[3] C. M. Will, *Living reviews in relativity* **17**, 1 (2014).
[4] C. M. Will, *Theory and experiment in gravitational physics* (Cambridge university press, 2018).
[5] N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. Banday, R. Barreiro, N. Bartolo, S. Basak, *et al.*, *Astronomy & Astrophysics* **641**, A6 (2020).
[6] D. Lovelock, *Journal of Mathematical Physics* **12**, 498 (1971).
[7] D. Lovelock, *Journal of Mathematical Physics* **13**, 874 (1972).
[8] H. Velten and T. R. Caramês, *Universe* **7**, 38 (2021).
[9] E. Alvarez, D. Blas, J. Garriga, and E. Verdaguer, *Nuclear Physics B* **756**, 148 (2006).
[10] R. Bufalo, M. Oksanen, and A. Tureanu, *The European Physical Journal C* **75**, 1 (2015).
[11] M. M. Anber, U. Aydemir, and J. F. Donoghue, *Physical Review D* **81**, 084059 (2010).
[12] A. Gómez Nicola, *Symmetry* **12**, 945 (2020).
[13] P.-H. Chavanis, *Physical Review D* **92**, 103004 (2015).
[14] S. Dutta and R. J. Scherrer, *Physical Review D* **82**, 083501 (2010).
[15] K. Kamada, J. Kume, Y. Yamada, and J. Yokoyama, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2020**, 016 (2020).
[16] B. Spokoiny, *Physics Letters B* **315**, 40 (1993).
[17] E. Di Valentino, O. Mena, S. Pan, L. Visinelli, W. Yang, A. Melchiorri, D. F. Mota, A. G. Riess, and J. Silk, *Classical and Quantum Gravity* **38**, 153001 (2021).
[18] A. I. Nesterov and L. V. Sabinin, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* **3**, 1481 (2006).