

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

Máster en Física Teórica



TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Deformaciones integrables en la correspondencia AdS/CFT

Integrable deformations of the AdS/CFT correspondence

**Fernando Gil de la Vega**

Directores

Rafael Hernández Redondo

Roberto Ruiz Gil

Curso académico 2023-24

# Deformaciones integrables en la correspondencia AdS/CFT

Fernando Gil de la Vega\*  
Universidad Complutense de Madrid

Supervisor: Rafael Hernández Redondo  
Universidad Complutense de Madrid-Departamento de Física Teórica

Supervisor: Roberto Ruiz Gil  
Universidad Autónoma de Madrid-CSIC

En el marco de la correspondencia AdS/CFT, consideraremos un sistema integrable, una cuerda clásica cerrada descrita por la acción de Polyakov para un espaciotiempo y un campo de Kalb-Ramond dados. Consideraremos soluciones de tipo cuerda rotante y encontraremos una expansión de la energía de la cuerda en potencias inversas del momento angular, que tomaremos como grande (tendiendo a infinito). Esta expansión será la que eventualmente podrá ser comparada con otros resultados para comprobar la validez de la correspondencia. Finalmente, veremos que en un límite concreto el espaciotiempo considerado tenderá al espaciotiempo de Schrödinger, y será en dicho límite en el que la relación de dispersión (expansión de la energía) encontrada anteriormente tomará una forma notablemente más sencilla.

## Contents

I. Introducción	1
II. $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ deformado	2
III. Soluciones de cuerda rotante	3
A. Solución de radio constante	4
B. Caso con $(k_0 - k_1)^2 = (w_0 - w_1)^2$ y $(m_1 - m_2)^2 = (\omega_1 - \omega_2)^2$	6
IV. Espaciotiempo de Schrödinger	8
V. Conclusiones	10
Referencias	10

## I. Introducción

La correspondencia AdS/CFT es una relación de dualidad que se cree que existe entre teorías de cuerdas descritas sobre un espaciotiempo con una parte de anti-de Sitter (AdS) y teorías cuánticas de campos con una simetría conforme exacta (invariante bajo transformaciones espaciotemporales que preservan los ángulos), llamadas teorías de campos conformes (CFT). Aunque no hay una comprobación formal de esta correspondencia más que para algunos casos sencillos (donde la supersimetría permite encontrar la expresión exacta de ciertos observables, de manera que se pueden reproducir los resultados

de ambas partes de la dualidad, [1]), hay muchos indicios de esta relación de dualidad en ciertos casos de mayor interés. En particular, se ha estudiado ampliamente la primera relación de dualidad AdS/CFT que se propuso, la correspondencia de una teoría de cuerdas de tipo IIB en un espaciotiempo  $AdS_5 \times S^5$  y una teoría SYM (teoría de Yang-Mills supersimétrica), con  $\mathcal{N} = 4$  (donde  $\mathcal{N}$  denota el número de supersimetrías) en el límite planar. En ese caso, se entienden las dos teorías como dos límites distintos de una misma “teoría subyacente”: en la teoría SYM, la constante de acoplo (de t’Hooft) se toma  $\lambda = g_{YM}^2 N \ll 1$ , mientras que la expansión en la teoría de cuerdas se toma en el límite  $\sqrt{\lambda} \gg 1$ . Para poner a prueba la correspondencia, se busca encontrar las expansiones de ciertos observables en cada teoría, de manera que, a través de esta dualidad, ambas expansiones estén relacionadas. Uno de estos observables, que será del que nos preocuparemos en nuestro caso particular, es el espectro de energía de una cuerda en el límite de momento angular grande,  $J \rightarrow \infty$ , que en el caso de la correspondencia  $AdS_5/CFT_4$  (el caso mencionado anteriormente) guardaría una relación con las dimensiones de escala de ciertos operadores locales en la teoría SYM. Podemos encontrar este análisis en [2], donde se comprueba que los resultados coinciden en ambos miembros de la dualidad. El límite  $J \rightarrow \infty$  se toma porque en ese caso las correcciones cuánticas a la expansión de la energía deben tender a cero, de manera que basta con hacer un análisis clásico. En [3] se ve que la corrección cuántica a un *loop* tiende a cero en este límite y se conjetura que la expansión clásica es exacta a todos los órdenes. Para una discusión más detallada sobre los aspectos generales de la correspondencia AdS/CFT se remite al lector a [4], que presenta el contexto general de lo que brevemente

---

\* Correo institucional: fernangi@ucm.es

hemos discutido. En particular, pueden ser especialmente interesantes los capítulos I.1 [5] (para tener una visión general de la teoría  $\mathcal{N} = 4$  SYM) e II.1 [6] (que tiene cierta relación con el resto de este texto). Lo aquí mencionado debería ser suficiente para entender la motivación y el resto del trabajo.

En nuestro caso, tomaremos este contexto como punto de partida. Consideraremos el sistema de una cuerda en un espaciotiempo diferente a  $AdS_5 \times S^5$  (y cuya teoría CFT dual no es conocida todavía) y buscaremos encontrar la relación de dispersión, también en el límite  $J \rightarrow \infty$ . En particular, buscaremos una expansión de la energía de la siguiente forma:

$$E = c_0 J + c_1 \sqrt{\lambda} + c_2 \frac{\lambda}{J} + \dots, \quad (\text{I.1})$$

donde  $J \rightarrow \infty$ , siendo  $\lambda/J^2$  fijo (constante) y con  $\sqrt{\lambda}/J \ll 1$ . Esta constante de t'Hooft está relacionada con la tensión de la cuerda mediante  $T = \sqrt{\lambda}/2\pi$  según la correspondencia.

Consideraremos una cuerda descrita por la acción de Polyakov (ecuación (2.9) de [7]):

$$S_p = \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} \int d\sigma d\tau \left[ \sqrt{-h} h^{ab} G_{MN} \partial_a X^M \partial_b X^N + \right. \\ \left. - \epsilon^{ab} B_{MN} \partial_a X^M \partial_b X^N \right], \quad (\text{I.2})$$

donde  $G_{MN}$  es la métrica del espaciotiempo,  $h^{ab}$  la métrica inducida sobre la hoja de mundo de la cuerda;  $B_{MN}$  es el campo de Kalb–Ramond, que se es una 2-forma (es decir, es antisimétrico en  $M, N$ ). Trabajaremos en el «gauge» conforme, lo que significa que tomaremos  $h_{ab} = \text{diag}(-1, 1)$ . Además, como consecuencia de elegir este gauge conforme, se deberán satisfacer las condiciones de Virasoro, que son:

$$G_{MN}(\dot{X}^M \dot{X}^N + X'^M X'^N) = 0, \quad (\text{I.3})$$

$$G_{MN}(\dot{X}^M X'^N) = 0, \quad (\text{I.4})$$

donde  $\dot{X}^M = \partial_\tau X^M$  y  $X'^M = \partial_\sigma X^M$ . Estas condiciones son el resultado de que el tensor energía momento es nulo en el gauge conforme.

Un aspecto importante de la correspondencia es la integrabilidad. En el ejemplo mencionado anteriormente, la integrabilidad de la teoría  $\mathcal{N} = 4$  SYM sería consecuencia de la integrabilidad de una teoría IIB en  $AdS_5 \times S^5$  (esta es una manera de considerarlo, pero no la única). La integrabilidad ha resultado ser una característica común en varios sistemas

en el seno de la correspondencia, siendo esta también de especial interés en el caso en el que la teoría de cuerdas está formulada sobre un espaciotiempo  $AdS_3 \times S^3 \times M^4$ , siendo  $M^4 = T^4$  o  $M^4 = S^3 \times S^1$ . En [8] se propuso que la correspondencia AdS/CFT se podría extender también a este espaciotiempo. En particular, se conjetura que una teoría de cuerdas IIB en  $AdS_3 \times S^3 \times M^4$  es dual a una CFT concreta en  $1 + 1$  dimensiones.

Un espaciotiempo similar a este será el que consideraremos nosotros, en el que podremos encontrar ciertas soluciones que, en unos casos especiales, nos permitirán obtener una expansión del tipo (I.1). Para ello, reescribiremos las condiciones de Virasoro (I.3) y (I.4) de una manera más simple, que nos motivará a tomar una simplificación que permita resolverlas de manera sencilla. Además, podremos comparar esta solución (escrita en términos de las “constantes de la cuerda”) con otra expresión de la solución que dependerá de las cargas Noether de la cuerda, la energía, espín y momentos angulares. Será a partir de esta comparación de la que podremos obtener fácilmente la expansión buscada de la energía. Finalmente, consideraremos un límite que nos transformará la parte  $AdS$  del espaciotiempo considerado en el espaciotiempo de Schrödinger en 3 dimensiones, al introducir un parámetro  $\epsilon$  que tenderá a 0. Veremos además que en este límite tendremos que los términos de la expansión toman una forma más manejable al expandirlos en este parámetro  $\epsilon$ .

## II. $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ deformado

Tomaremos la métrica de la ecuación (2.4) de [9], con el cambio de coordenadas dado por

$$\rho = \sinh \tilde{\rho}, \quad r = \sin \theta, \quad (\text{II.1})$$

y dejando iguales el resto de coordenadas ( $t, \psi, \varphi, \phi$ ). Tenemos entonces:

$$ds^2 = d\tilde{\rho}^2 - \cosh^2 \tilde{\rho} dt^2 + \sinh^2 \tilde{\rho} d\psi^2 + \\ - \kappa^2 (\cosh^2 \tilde{\rho} dt - \sinh^2 \tilde{\rho} d\psi)^2 + \\ + d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 + \\ + \kappa^2 (\cos^2 \theta d\varphi + \sin^2 \theta d\phi)^2 + dx_r dx_r. \quad (\text{II.2})$$

Esta métrica describe un espaciotiempo con una parte correspondiente a un espaciotiempo anti-de Sitter  $AdS_3$ , parametrizado por las coordenadas  $(\tilde{\rho}, t, \psi)$ ; otra parte correspondiente a una 3-esfera  $S^3$ , descrita por  $(\theta, \varphi, \phi)$ ; y una última parte correspondiente a un 4-toro  $T^4$  ( $T^4 = S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$ ), cuyas coordenadas denotamos genéricamente por  $x_r$ , con  $r = 6, 7, 8, 9$ . Este espaciotiempo incluye

una deformación dada por el parámetro  $\kappa$ , por lo que nos referiremos a este espaciotiempo como  $AdS_{3\kappa} \times S_\kappa^3 \times T^4$ .

Consideraremos los campos  $B$  de las expresiones (2.2) y (2.6) de [9], que son, respectivamente:

$$\hat{B} = \sinh^2 \tilde{\rho} dt \wedge d\psi + \sin^2 \theta d\varphi \wedge d\phi, \quad (\text{II.3})$$

$$\begin{aligned} \check{B} = & \cosh^2 \tilde{\rho} \cos^2 \theta dt \wedge d\varphi + \cosh^2 \tilde{\rho} \sin^2 \theta dt \wedge d\phi + \\ & - \sinh^2 \tilde{\rho} \cos^2 \theta d\psi \wedge d\varphi - \sinh^2 \tilde{\rho} \sin^2 \theta d\psi \wedge d\phi, \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

de manera que el campo  $B$  que aparece en (I.2) (el campo de Kalb-Ramond) será una combinación lineal de estos,

$$B = s_1 \hat{B} + s_2 \check{B}. \quad (\text{II.5})$$

De las ecuaciones de supergravedad que debe satisfacer el sistema, encontramos las restricciones (que se deducen de las ecuaciones en (2.24) de [9]):

$$s_1^2 \leq 1 + \kappa^2, \quad s_2^2 \leq \kappa^2(1 + \kappa^2). \quad (\text{II.6})$$

El lagrangiano (densidad lagrangiana) de la acción (I.2) con métrica (II.2) y campo (II.5) será:

$$\begin{aligned} L = & \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} \left[ \tilde{\rho}'^2 - \dot{\tilde{\rho}}^2 + 2s_1 \sin^2 \theta (\varphi' \dot{\phi} - \dot{\varphi} \phi') + \right. \\ & + (-1) \cosh^2 \tilde{\rho} (1 + \kappa^2 \cosh^2 \tilde{\rho})(t'^2 - \dot{t}^2) + \\ & + \sinh^2 \tilde{\rho} (1 - \kappa^2 \sinh^2 \tilde{\rho})(\psi'^2 - \dot{\psi}^2) + \\ & + 2\kappa^2 \cosh^2 \tilde{\rho} \sinh^2 \tilde{\rho} (t'\psi' - \dot{t}\dot{\psi}) + \tilde{\theta}'^2 - \dot{\tilde{\theta}}^2 + \\ & + \cos^2 \theta (1 + \kappa^2 \cos^2 \theta)(\varphi'^2 - \dot{\varphi}^2) + \\ & + \sin^2 \theta (1 + \kappa^2 \sin^2 \theta)(\phi'^2 - \dot{\phi}^2) + \\ & + 2\kappa^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\varphi' \phi' - \dot{\varphi} \dot{\phi}) + \\ & + 2s_1 \sinh^2 \tilde{\rho} (t'\dot{\psi} - \dot{t}\psi') + \\ & + 2s_2 \cosh^2 \tilde{\rho} \cos^2 \theta (t'\dot{\varphi} - \dot{t}\varphi') + \\ & + 2s_2 \cosh^2 \tilde{\rho} \sin^2 \theta (t'\dot{\phi} - \dot{t}\phi') + \\ & + (-2s_2) \sinh^2 \tilde{\rho} \cos^2 \theta (\psi'\dot{\varphi} - \dot{\psi}\varphi') + \\ & \left. + (-2s_2) \sinh^2 \tilde{\rho} \sin^2 \theta (\psi'\dot{\phi} - \dot{\psi}\phi') \right], \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

donde no hemos incluido la parte correspondiente a  $T^4$ , ya que al no haber términos en (II.5) que mezclen las coordenadas de  $T^4$  con las de  $S_\kappa^3$  o  $AdS_{3\kappa}$ , la dinámica será independiente.

Las condiciones de Virasoro (I.3) y (I.4) son, respectivamente:

$$\begin{aligned} & \tilde{\rho}'^2 + \dot{\tilde{\rho}}^2 - \cosh^2 \tilde{\rho} (1 + \kappa^2 \cosh^2 \tilde{\rho})(t'^2 + \dot{t}^2) + \\ & + \sinh^2 \tilde{\rho} (1 - \kappa^2 \sinh^2 \tilde{\rho})(\psi'^2 + \dot{\psi}^2) + \\ & + 2\kappa^2 \cosh^2 \tilde{\rho} \sinh^2 \tilde{\rho} (t'\psi' + \dot{t}\dot{\psi}) + \theta'^2 + \dot{\theta}^2 + \\ & + \cos^2 \theta (1 + \kappa^2 \cos^2 \theta)(\varphi'^2 + \dot{\varphi}^2) + \\ & + \sin^2 \theta (1 + \kappa^2 \sin^2 \theta)(\phi'^2 + \dot{\phi}^2) + \\ & + 2\kappa^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\varphi' \phi' + \dot{\varphi} \dot{\phi}) = 0, \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\rho}' \dot{\tilde{\rho}} - \cosh^2 \tilde{\rho} (1 + \kappa^2 \cosh^2 \tilde{\rho}) t' \dot{t} + \\ & + \sinh^2 \tilde{\rho} (1 - \kappa^2 \sinh^2 \tilde{\rho}) \psi' \dot{\psi} + \\ & + \kappa^2 \cosh^2 \tilde{\rho} \sinh^2 \tilde{\rho} (t'\psi' + \dot{t}\dot{\psi}) + \theta' \dot{\theta} + \\ & + \cos^2 \theta (1 + \kappa^2 \cos^2 \theta) \varphi' \dot{\varphi} + \\ & + \sin^2 \theta (1 + \kappa^2 \sin^2 \theta) \phi' \dot{\phi} + \\ & + \kappa^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\dot{\varphi} \phi' + \dot{\phi} \varphi') = 0. \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

### III. Soluciones de cuerda rotante

Querremos encontrar soluciones de cuerda rotante para este sistema, es decir, propondremos soluciones de la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} = & \tilde{\rho}(\sigma), & t = & w_0 \tau + \beta_0(\sigma), & \psi = & w_1 \tau + \beta_1(\sigma), \\ \theta = & \theta(\sigma), & \varphi = & \omega_1 \tau + \alpha_1(\sigma), & \phi = & \omega_2 \tau + \alpha_2(\sigma). \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

Esta propuesta de solución resulta más natural al embeber  $AdS_3$  y  $S^3$  en  $\mathbb{R}^4$  bajo las restricciones  $\eta_{PQ} Y^P Y^Q = -1$  y  $X^M X^M = 1$  respectivamente, siendo  $Y^P$  y  $X^M$  las correspondientes coordenadas cartesianas de  $\mathbb{R}^4$  en cada caso, y haciendo un cambio de coordenadas similar al de las expresiones (2.15), (4.2) y (4.3) de [10]. Además de esta propuesta de solución de cuerda rotante, en ocasiones se buscan soluciones de la misma forma que (III.1) pero cambiando  $\sigma \leftrightarrow \tau$ . Este tipo de soluciones se llaman “de cuerda pulsante”.

Estas variables estarán sujetas a las siguientes condiciones de contorno (condiciones de contorno periódicas) al estar trabajando con una cuerda cerrada:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\sigma + 2\pi) = & \tilde{\rho}(\sigma), & \theta(\sigma + 2\pi) = & \theta(\sigma), \\ \beta_i(\sigma + 2\pi) = & \beta_i(\sigma) + 2\pi k_i, & i = & 0, 1; \\ \alpha_j(\sigma + 2\pi) = & \alpha_j(\sigma) + 2\pi m_j, & j = & 1, 2. \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Si  $k_0 \neq 0$  implicaría que existirían curvas cerradas temporales (CTC). Por este motivo tomaremos

$k_0 = 0$ , pero por ahora lo mantendremos para reflejar la simetría que hay entre las ecuaciones de la parte de  $AdS_3$  con las de  $S^3$ , y finalmente tomaremos  $k_0 = 0$  en el momento de calcular la expansión (I.1) de la energía.

El lagrangiano (II.7) es invariante bajo traslaciones en todas las coordenadas excepto en  $\tilde{\rho}$  y  $\theta$ , de manera que tenemos cuatro cargas Noether conservadas, que son la energía  $E$ , el espín lorentziano  $S$  y los momentos angulares  $J_1$  y  $J_2$ . Concretamente,

$$E = \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{\partial L}{\partial \dot{t}}, \quad S = \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}; \quad (\text{III.3})$$

$$J_1 = \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}, \quad J_2 = \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}. \quad (\text{III.4})$$

En términos de (III.1), tenemos:

$$\begin{aligned} E = & \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma (w_0 \cosh^2 \tilde{\rho} (1 + \kappa^2 \cosh^2 \tilde{\rho}) + \\ & + (-1)w_1 \kappa^2 \cosh^2 \tilde{\rho} \sinh^2 \tilde{\rho} - s_1 \beta'_1 \sinh^2 \tilde{\rho} + \\ & + (-1)s_2 \alpha'_1 \cosh^2 \tilde{\rho} \cos^2 \theta - s_2 \alpha'_2 \cosh^2 \tilde{\rho} \sin^2 \theta), \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

$$\begin{aligned} S = & \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma (-w_1 \sinh^2 \tilde{\rho} (1 - \kappa^2 \sinh^2 \tilde{\rho}) + \\ & + (-1)w_0 \kappa^2 \cosh^2 \tilde{\rho} \sinh^2 \tilde{\rho} + s_1 \beta'_0 \sinh^2 \tilde{\rho} + \\ & + s_2 \alpha'_1 \sinh^2 \tilde{\rho} \cos^2 \theta + s_2 \alpha'_2 \sinh^2 \tilde{\rho} \sin^2 \theta), \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

$$\begin{aligned} J_1 = & \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma (-\omega_1 \cos^2 \theta (1 + \kappa^2 \cos^2 \theta) + \\ & + (-1)\omega_2 \kappa^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - s_1 \alpha'_2 \sin^2 \theta + \\ & + s_2 \beta'_0 \cosh^2 \tilde{\rho} \cos^2 \theta - s_2 \beta'_1 \sinh^2 \tilde{\rho} \cos^2 \theta), \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

$$\begin{aligned} J_2 = & \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma (-\omega_2 \sin^2 \theta (1 + \kappa^2 \sin^2 \theta) + \\ & + (-1)\omega_1 \kappa^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + s_1 \alpha'_1 \sin^2 \theta + \\ & + s_2 \beta'_0 \cosh^2 \tilde{\rho} \sin^2 \theta - s_2 \beta'_1 \sinh^2 \tilde{\rho} \sin^2 \theta). \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Tendremos también las ecuaciones clásicas del movimiento (ecuaciones de Euler-Lagrange). Con el esquema (III.1), las ecuaciones para  $t$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$  y  $\phi$  son ecuaciones de conservación de  $\frac{\partial L}{\partial A'}$ , con  $A = t, \psi, \varphi, \phi$  (funciones sólo de  $\sigma$ ). Las ecuaciones para  $\tilde{\rho}$  y  $\theta$  son, respectivamente,

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{\rho}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \tilde{\rho}} = 0, \quad (\text{III.9})$$

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \quad (\text{III.10})$$

No trabajaremos directamente con estas ecuaciones, de manera que no escribiremos sus formas explícitas, que se obtienen inmediatamente a partir de (II.7). Las soluciones que encontremos deberán satisfacer estas dos ecuaciones para ser soluciones físicamente aceptables.

### A. Solución de radio constante

Siguiendo con el esquema (o ansatz) (III.1), buscaremos soluciones de radio constante, dadas por:

$$\begin{aligned} \beta_0(\sigma) &= \beta_{0i} + k_0 \sigma, & \beta_1(\sigma) &= \beta_{1i} + k_1 \sigma, \\ \alpha_1(\sigma) &= \alpha_{1i} + m_1 \sigma, & \alpha_2(\sigma) &= \alpha_{2i} + m_2 \sigma. \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

$$\tilde{\rho}(\sigma) = \tilde{\rho}_0, \quad \theta(\sigma) = \theta_0$$

Este tipo de soluciones representan una cuerda cerrada de radio constante, “enrollada” en las direcciones  $\psi$ ,  $\varphi$  y  $\phi$   $k_1$ ,  $m_1$  y  $m_2$  veces respectivamente (y  $k_0$  veces en la dirección temporal, pero recordamos que tomaremos  $k_0 = 0$ ).

En este caso, las cargas Noether (III.5)-(III.8) son:

$$\begin{aligned} E = & \sqrt{\lambda} [w_0 \cosh^2 \tilde{\rho} (1 + \kappa^2 \cosh^2 \tilde{\rho}) + \\ & - w_1 \kappa^2 \cosh^2 \tilde{\rho} \sinh^2 \tilde{\rho} - s_1 k_1 \sinh^2 \tilde{\rho} + \\ & - s_2 m_1 \cosh^2 \tilde{\rho} \cos^2 \theta - s_2 m_2 \cosh^2 \tilde{\rho} \sin^2 \theta], \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

$$\begin{aligned} S = & \sqrt{\lambda} [-w_1 \sinh^2 \tilde{\rho} (1 - \kappa^2 \sinh^2 \tilde{\rho}) + \\ & - w_0 \kappa^2 \cosh^2 \tilde{\rho} \sinh^2 \tilde{\rho} + s_1 k_0 \sinh^2 \tilde{\rho} + \\ & + s_2 m_1 \sinh^2 \tilde{\rho} \cos^2 \theta + s_2 m_2 \sinh^2 \tilde{\rho} \sin^2 \theta], \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

$$\begin{aligned} J_1 = & \sqrt{\lambda} [-\omega_1 \cos^2 \theta (1 + \kappa^2 \cos^2 \theta) - s_1 m_2 \sin^2 \theta + \\ & - \omega_2 \kappa^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - s_2 k_1 \sinh^2 \tilde{\rho} \cos^2 \theta + \\ & + s_2 k_0 \cosh^2 \tilde{\rho} \cos^2 \theta], \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

$$\begin{aligned} J_2 = & \sqrt{\lambda} [-\omega_2 \sin^2 \theta (1 + \kappa^2 \sin^2 \theta) + s_1 m_1 \sin^2 \theta + \\ & - \omega_1 \kappa^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - s_2 k_1 \sinh^2 \tilde{\rho} \sin^2 \theta + \\ & + s_2 k_0 \cosh^2 \tilde{\rho} \sin^2 \theta]. \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

Tomando la suma de (III.14) y (III.16) definimos el momento angular total  $J = J_1 + J_2$ :

$$J = \sqrt{\lambda} \left[ ((1 + \kappa^2)(\omega_1 - \omega_2) + s_1(m_1 - m_2)) \sin^2 \theta + s_2(k_0 + (k_0 - k_1) \sinh^2 \tilde{\rho}) - (1 + \kappa^2)\omega_1 \right]. \quad (\text{III.16})$$

A simple vista, las expresiones de  $E$  y  $S$  resultan parecidas (y lo mismo ocurre con  $J_1$  y  $J_2$ ), en el sentido de que en ambas aparecen términos similares donde sólo cambian algunos signos y que en  $E$  aparecen cosenos hiperbólicos y en  $S$  senos hiperbólicos (o senos y cosenos trigonométricos en el caso de  $J_1$  y  $J_2$ ). Por esto, resulta natural tomar las siguientes combinaciones

$$\begin{aligned} \frac{E}{\cosh^2 \tilde{\rho}} + \frac{S}{\sinh^2 \tilde{\rho}} &= \\ &= \sqrt{\lambda} \left( (w_0 - w_1) - s_1 k_1 \frac{\sinh^2 \tilde{\rho}}{\cosh^2 \tilde{\rho}} + s_1 k_0 \right), \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

$$\begin{aligned} \frac{J_1}{\cos^2 \theta} - \frac{J_2}{\sin^2 \theta} &= \\ &= \sqrt{\lambda} \left( (\omega_2 - \omega_1) - s_1 m_2 \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - s_1 m_1 \right). \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

Estas expresiones serán útiles más adelante. Las condiciones de Virasoro (II.8) y (II.9) son:

$$\begin{aligned} &-(k_0^2 + w_0^2) \cosh^2 \tilde{\rho} + (k_1^2 + w_1^2) \sinh^2 \tilde{\rho} + \\ &+ (-1)(k_0^2 + w_0^2) \kappa^2 \cosh^4 \tilde{\rho} - (k_1^2 + w_1^2) \kappa^2 \sinh^4 \tilde{\rho} + \\ &+ 2\kappa^2(k_0 k_1 + w_0 w_1) \cosh^2 \tilde{\rho} \sinh^2 \tilde{\rho} + \\ &+ (m_1^2 + \omega_1^2) \cos^2 \theta + (m_2^2 + \omega_2^2) \sin^2 \theta + \\ &+ (m_1^2 + \omega_1^2) \kappa^2 \cos^4 \theta + (m_2^2 + \omega_2^2) \kappa^2 \sin^4 \theta + \\ &+ 2\kappa^2(m_1 m_2 + \omega_1 \omega_2) \sin^2 \theta \cos^2 \theta = 0, \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

$$\begin{aligned} &-k_0 w_0 \cosh^2 \tilde{\rho} + k_1 w_1 \sinh^2 \tilde{\rho} + \\ &+ (-1)k_0 w_0 \kappa^2 \cosh^4 \tilde{\rho} - k_1 w_1 \kappa^2 \sinh^4 \tilde{\rho} + \\ &+ \kappa^2(w_0 k_1 + w_1 k_0) \cosh^2 \tilde{\rho} \sinh^2 \tilde{\rho} + \\ &+ m_1 \omega_1 \cos^2 \theta + m_2 \omega_2 \sin^2 \theta + \\ &+ m_1 \omega_1 \kappa^2 \cos^4 \theta + m_2 \omega_2 \kappa^2 \sin^4 \theta + \\ &+ \kappa^2(\omega_1 m_2 + \omega_2 m_1) \sin^2 \theta \cos^2 \theta = 0, \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Queremos expresar la solución en términos de las constantes  $w_i$ ,  $\omega_i$ ,  $m_i$  y  $k_1$ . Para ello, haremos uso

de  $\cosh^2 \tilde{\rho} = 1 + \sinh^2 \tilde{\rho}$  y  $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ , de manera que podemos escribir las condiciones de Virasoro únicamente en términos de las constantes y de  $\sinh \tilde{\rho}$  y  $\sin \theta$ . Renombrando estas dos cantidades como

$$x = \sinh^2 \tilde{\rho}, \quad y = \sin^2 \theta,$$

las ecuaciones (III.19) y (III.20) toman la forma de ecuaciones de elipses (o hipérbolas):

$$A_1 x^2 + B_1 x + C_1 y^2 + D_1 y + E_1 = 0, \quad (\text{III.21})$$

$$A_2 x^2 + B_2 x + C_2 y^2 + D_2 y + E_2 = 0; \quad (\text{III.22})$$

donde los coeficientes son

$$\begin{aligned} A_1 &= -\kappa^2 ((k_0 - k_1)^2 + (w_1 - w_0)^2), \\ B_1 &= (k_1 + k_0)(k_1 - k_0) + (w_1 + w_0)(w_1 - w_0) + \\ &\quad + (-2)\kappa^2(k_0(k_0 - k_1) + w_0(w_0 - w_1)), \\ C_1 &= \kappa^2 ((m_1 - m_2)^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2), \\ D_1 &= (m_2 + m_1)(m_2 - m_1) + (\omega_2 + \omega_1)(\omega_2 - \omega_1) + \\ &\quad + (-2)\kappa^2(m_1(m_1 - m_2) + \omega_1(\omega_1 - \omega_2)), \\ E_1 &= (1 + \kappa^2)(m_1^2 + \omega_1^2 - k_0^2 - w_0^2); \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

$$\begin{aligned} A_2 &= -\kappa^2(k_0 - k_1)(w_0 - w_1), \\ B_2 &= k_1 w_1 - k_0 w_0 + \\ &\quad + (-1)\kappa^2(k_0(w_0 - w_1) + w_0(k_0 - k_1)), \\ C_2 &= \kappa^2(m_1 - m_2)(\omega_1 - \omega_2), \\ D_2 &= m_2 \omega_2 - m_1 \omega_1 + \\ &\quad + (-1)\kappa^2(m_1(\omega_1 - \omega_2) + \omega_1(m_1 - m_2)), \\ E_2 &= (1 + \kappa^2)(m_1 \omega_1 - k_0 w_0). \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Suponiendo que  $\kappa^2 \neq 0$ ,  $k_0 = 0 \neq k_1$ ,  $w_0 \neq w_1$ ,  $m_1 \neq m_2$  y  $\omega_1 \neq \omega_2$ , estas expresiones pueden reescribirse de la siguiente manera:

$$A_1 \left( x + \frac{B_1}{2A_1} \right)^2 + C_1 \left( y + \frac{D_1}{2C_1} \right)^2 + E_1 - \frac{B_1^2}{4A_1} - \frac{D_1^2}{4C_1} = 0, \quad (\text{III.25})$$

$$A_2 \left( x + \frac{B_2}{2A_2} \right)^2 + C_2 \left( y + \frac{D_2}{2C_2} \right)^2 + E_2 - \frac{B_2^2}{4A_2} - \frac{D_2^2}{4C_2} = 0. \quad (\text{III.26})$$

Si no se diera alguna de las suposiciones del párrafo anterior, trataríamos las ecuaciones (III.21) y (III.22) con las simplificaciones convenientes de (III.23) y (III.24).

Para resolver estas ecuaciones, sería especialmente simple el caso en el que se cumplan las siguientes condiciones:

$$\frac{B_1}{2A_1} = \frac{B_2}{2A_2}, \quad \frac{D_1}{2C_1} = \frac{D_2}{2C_2}.$$

Simplificando estas expresiones a partir de (III.23) y (III.24), vemos que estas son equivalentes a

$$\kappa^2(1 + \kappa^2)(k_0 w_1 - w_0 k_1) \cdot [(k_0 - k_1)^2 - (w_0 - w_1)^2] = 0, \quad (\text{III.27})$$

$$\kappa^2(1 + \kappa^2)(m_1 \omega_2 - m_2 \omega_1) \cdot [(m_1 - m_2)^2 - (\omega_1 - \omega_2)^2] = 0. \quad (\text{III.28})$$

En ese caso, podemos despejar  $\left(x + \frac{B_1}{2A_1}\right)^2$  y  $\left(y + \frac{D_1}{2C_1}\right)^2$  haciendo combinaciones lineales de (III.25) y (III.26). Vemos que estas condiciones se cumplen si  $1 + \kappa^2 = 0$ . A lo largo del resto del análisis, veremos que aparecen factores  $(1 + \kappa^2)$  a menudo, de manera que un caso particularmente simple para analizar sería tomar  $\kappa^2 = -1$ , aunque en este texto no será considerado. Estas condiciones se satisfacen también si  $\kappa^2 = 0$ , pero este caso no tendría sentido tratarlo porque eliminaríamos la deformación del espaciotiempo, que es precisamente el interés que tenemos en (II.2).

### B. Caso con $(k_0 - k_1)^2 = (w_0 - w_1)^2$ y $(m_1 - m_2)^2 = (\omega_1 - \omega_2)^2$

En este caso, se satisfacen las expresiones (III.27) y (III.28), de manera que podemos encontrar fácilmente las soluciones de las ecuaciones (III.21) y (III.22). Estas son

$$x = x_0 \pm \sqrt{\frac{C_1 \hat{E}_2 - \hat{E}_1 C_2}{A_1 C_2 - C_1 A_2}}, \quad (\text{III.29})$$

$$y = y_0 \pm \sqrt{\frac{A_1 \hat{E}_2 - \hat{E}_1 A_2}{C_1 A_2 - A_1 C_2}}, \quad (\text{III.30})$$

donde hemos renombrado

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{B_1}{2A_1} = -\frac{B_2}{2A_2}, & y_0 &= -\frac{D_1}{2C_1} = -\frac{D_2}{2C_2}, \\ \hat{E}_i &= E_i - \frac{B_i^2}{4A_i} - \frac{D_i^2}{4C_i}. \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

Las condiciones  $(k_0 - k_1)^2 = (w_0 - w_1)^2$  y  $(m_1 - m_2)^2 = (\omega_1 - \omega_2)^2$  se satisfacen en los casos  $w_0 - w_1 = \pm(k_0 - k_1)$ ,  $\omega_1 - \omega_2 = \pm(m_1 - m_2)$ . De las 4 combinaciones, sólo 2 son realmente posibles. Si en los dos casos elegimos el signo positivo (respectivamente negativo), encontramos que  $A_1 = 2A_2$  ( $A_1 = -2A_2$ ), y lo mismo ocurre con los  $B_i$ ,  $C_i$  y  $D_i$ , pero  $E_1 \neq 2E_2$  ( $E_1 \neq -2E_2$ ), de manera que el sistema de ecuaciones (III.21) y (III.22) es incompatible. Las “soluciones” (III.29), (III.30) no lo son realmente, ya que en este caso los denominadores de las fracciones en las raíces serían 0.

Por tanto, únicamente deberemos considerar los casos en los que tomemos signos distintos en las igualdades. Llamaremos primer caso a  $w_0 - w_1 = k_0 - k_1$ ,  $\omega_1 - \omega_2 = -(m_1 - m_2)$ , y segundo caso a  $w_0 - w_1 = -(k_0 - k_1)$ ,  $\omega_1 - \omega_2 = m_1 - m_2$ . Reescribimos en las expresiones anteriores  $w_0 = w_1 + k_0 - k_1$ ,  $\omega_1 = \omega_2 - m_1 + m_2$  para el primer caso y  $w_0 = w_1 - k_0 + k_1$ ,  $\omega_1 = \omega_2 + m_1 - m_2$  para el segundo, por lo que se tiene que las partes de las soluciones (III.29) y (III.30) son (signo superior para el primer caso y signo inferior para el segundo):

$$x_0 = -\frac{1}{2} - \frac{1 + \kappa^2}{2\kappa^2} \frac{k_0 \pm w_1}{k_0 - k_1}, \quad (\text{III.32})$$

$$y_0 = \frac{1}{2} + \frac{1 + \kappa^2}{2\kappa^2} \frac{m_1 \mp \omega_2}{m_1 - m_2}, \quad (\text{III.33})$$

$$\begin{aligned} \frac{C_1 \hat{E}_2 - \hat{E}_1 C_2}{A_1 C_2 - C_1 A_2} &= \\ &= -\frac{1}{4\kappa^2} + \frac{1 + \kappa^2}{4\kappa^2} \left( \frac{m_2 \pm \omega_2}{k_0 - k_1} \right)^2 + \\ &\quad + \frac{1 + \kappa^2}{4\kappa^4} \left( \frac{k_0 \pm w_1}{k_0 - k_1} \right)^2, \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

$$\begin{aligned} \frac{A_1 \hat{E}_2 - \hat{E}_1 A_2}{C_1 A_2 - A_1 C_2} &= \\ &= -\frac{1}{4\kappa^2} + \frac{1 + \kappa^2}{4\kappa^2} \left( \frac{k_1 \mp w_1}{m_1 - m_2} \right)^2 + \\ &\quad + \frac{1 + \kappa^2}{4\kappa^4} \left( \frac{m_1 \mp \omega_2}{m_1 - m_2} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

Las expresiones (III.17) y (III.18) quedan:

$$\begin{aligned} \frac{E}{\cosh^2 \tilde{\rho}} + \frac{S}{\sinh^2 \tilde{\rho}} &= \\ &= \sqrt{\lambda} \left( \pm \frac{1 + (1 \pm s_1) \sinh^2 \tilde{\rho}}{\cosh^2 \tilde{\rho}} (k_0 - k_1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s_1}{\cosh^2 \tilde{\rho}} k_0 \right), \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

$$\begin{aligned} \frac{J_1}{\cos^2 \theta} - \frac{J_2}{\sin^2 \theta} &= \\ &= \sqrt{\lambda} \left( \pm \left( \frac{1 \pm (s_1 \mp 1) \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) (m_1 - m_2) + \right. \\ &\quad \left. + (-1) \frac{s_1}{\cos^2 \theta} m_1 \right). \end{aligned} \quad (\text{III.37})$$

Lo siguiente que deberemos hacer es expresar las constantes  $w_1$  y  $\omega_2$  en términos de  $k_i$ ,  $m_i$  y  $E$ ,  $S$  y  $J_i$ . La razón de esto es que estas cantidades son las cantidades “más físicas”, ya que  $k_i$  y  $m_i$  tienen que ver con la geometría de la cuerda y  $E$ ,  $S$  y  $J_i$  son constantes del movimiento. En nuestro caso, estamos interesados en las soluciones con el momento angular total  $J$  (dado por (III.20)) tendiendo a  $+\infty$ , de manera que nos resultará conveniente considerar el cambio de variable

$$J_1 := \frac{1}{2}(J + J'), \quad J_2 := \frac{1}{2}(J - J'), \quad (\text{III.38})$$

donde claramente hemos tomado  $J' := J_1 - J_2$ . Con este cambio de variable, multiplicando la expresión (III.37) por  $\cos^2 \theta$  se tiene

$$\begin{aligned} J - \frac{J - J'}{2 \sin^2 \theta} &= \\ &= \sqrt{\lambda} \left( \pm (1 \pm (s_1 \mp 1) \sin^2 \theta) (m_1 - m_2) - s_1 m_1 \right). \end{aligned} \quad (\text{III.39})$$

De esta expresión podemos sacar una ecuación para  $\sin^2 \theta$ . Renombrando  $J = \sqrt{\lambda} \mathcal{J}$ ,  $J' = \sqrt{\lambda} \mathcal{J}'$  llegamos a

$$\begin{aligned} (s_1 \mp 1)(m_1 - m_2) \sin^4 \theta + \frac{\mathcal{J} - \mathcal{J}'}{2} + \\ + (\pm(m_1 - m_2) - s_1 m_1 - \mathcal{J}) \sin^2 \theta = 0. \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

Haciendo lo mismo para la expresión (III.36), multiplicando por  $\cosh^2 \tilde{\rho}$  y tomando  $E = \sqrt{\lambda} \mathcal{E}$ ,  $S = \sqrt{\lambda} \mathcal{S}$  encontramos la siguiente ecuación para  $\sinh^2 \tilde{\rho}$ :

$$\begin{aligned} (s_1 k_0 \pm (k_0 - k_1) - \mathcal{E} - \mathcal{S}) \sinh^2 \tilde{\rho} + \\ + (s_1 \pm 1)(k_0 - k_1) \sinh^4 \tilde{\rho} - \mathcal{S} = 0. \end{aligned} \quad (\text{III.41})$$

Estas son dos ecuaciones de segundo grado, por lo que podemos obtener fácilmente  $\sin^2 \theta$  y  $\sinh^2 \tilde{\rho}$  en términos de las constantes:

$$\sin^2 \theta = \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4a_1 d_1}}{2a_1}, \quad (\text{III.42})$$

con

$$a_1 = (s_1 \mp 1)(m_1 - m_2),$$

$$b_1 = \mathcal{J} \mp (m_1 - m_2) + s_1 m_1$$

$$d_1 = \frac{\mathcal{J} - \mathcal{J}'}{2};$$

$$\sinh^2 \tilde{\rho} = \frac{b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 4a_2 d_2}}{2a_2}, \quad (\text{III.43})$$

$$a_2 = (s_1 \pm 1)(k_0 - k_1),$$

$$b_2 = \mathcal{E} + \mathcal{S} - s_1 k_0 \mp (k_0 - k_1)$$

$$d_2 = -\mathcal{S}.$$

Podemos ahora igualar las soluciones (III.43) y (III.42) con (III.29) y (III.30), de manera que queda un sistema de dos ecuaciones para  $w_1$  y  $\omega_2$ . Una vez resuelto, lo último que nos quedaría por hacer sería encontrar una expansión de la energía de la forma (I.1). Para hacer esto, vamos a tomar

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = (s_1 \mp (1 + \kappa^2)) (m_1 - m_2) \sin^2 \theta + \\ - (1 + \kappa^2)(\omega_2 \mp (m_1 - m_2)) + \\ + s_2(k_0 + (k_0 - k_1) \sinh^2 \tilde{\rho}), \end{aligned} \quad (\text{III.44})$$

que es la expresión (III.16) dividida entre  $\sqrt{\lambda}$ . Finalmente, con las soluciones de  $w_1$ ,  $\omega_2$ , y tomando como  $\sinh^2 \tilde{\rho}$  y  $\sin^2 \theta$  las soluciones (III.43) y (III.42) respectivamente, la expresión (III.44) nos daría una relación entre la energía  $\mathcal{E}$  y el momento angular  $\mathcal{J}$  (además de  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{J}'$ ,  $k_i$  y  $m_i$ ), de la cual en principio podríamos tratar de despejar  $\mathcal{E}$ . En lugar de hacer esto, como únicamente necesitamos la expansión de  $\mathcal{E}$  como potencias de  $\mathcal{J}$ , expresaremos:

$$\mathcal{E} = c_0 \mathcal{J} + c_1 + \frac{c_2}{\mathcal{J}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mathcal{J}^2}\right), \quad (\text{III.45})$$

$$w_1 = \alpha_0 \mathcal{J} + \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\mathcal{J}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mathcal{J}^2}\right), \quad (\text{III.46})$$

$$\omega_2 = \beta_0 \mathcal{J} + \beta_1 + \frac{\beta_2}{\mathcal{J}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mathcal{J}^2}\right). \quad (\text{III.47})$$

Notemos que la expansión (III.45) es la misma que (I.1) dividida entre  $\sqrt{\lambda}$ . Es por esto que hemos llamado a los coeficientes de la misma manera. Con estas expansiones, podemos hacer el mismo proceso orden a orden. Expandiendo en serie de  $1/\mathcal{J}$  las dos expresiones que tenemos para  $\sinh^2 \tilde{\rho}$  las igualamos entre sí (y lo mismo hacemos para las soluciones de  $\sin^2 \theta$ ), tenemos que, orden a orden, los términos tienen que ser iguales. De la misma manera, tomando la expansión de (III.43) y (III.42) e incluyéndolas en (III.44) junto con (III.47), tenemos que los términos de la expansión del miembro derecho deben ser todos nulos excepto el primero, que debe ser igual a 1.

Para el orden lineal en  $\mathcal{J}$  tendremos 3 ecuaciones de las que podremos despejar  $c_0$ ,  $\alpha_0$  y  $\beta_0$  en términos de las constantes. De los términos sin dependencia en  $\mathcal{J}$ , obtenemos otras tres ecuaciones que fijan  $c_1$ ,  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  en términos de las constantes y de  $c_0$ ,  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ . Incluyendo más términos en (III.45), (III.46) y (III.47) podemos continuar el proceso para obtener más órdenes en el resultado final.

Haciendo uso del programa *Maple* podemos hacer este proceso fácilmente. Vemos que (III.29), (III.30), (III.42) y (III.43) resultan en  $2^4 = 16$  posibles combinaciones al igualar las expresiones para los senos trigonométricos e hiperbólicos entre sí (16 para cada signo de  $w_0$  y  $w_1$ , es decir, 32 en total). En todos estos casos, como tanto  $\sin \theta$  como  $\sinh \tilde{\rho}$  son reales, tendremos que exigir que sus cuadrados sean positivos (en caso contrario no sería una solución aceptable).

Tomaremos en lo que sigue  $w_0 - w_1 = k_0 - k_1$ ,  $w_1 - \omega_2 = -(m_1 - m_2)$ . Además, exigiremos que el coeficiente de  $\mathcal{E}$  lineal en  $\mathcal{J}$ ,  $c_0$ , sea positivo (lo intuitivo sería que tanto el momento angular como la energía lo sean). Además, para este resultado tomaremos  $k_0 = 0$  para no tener curvas cerradas temporales (que, como ya mencionamos, lo podríamos haber anulado desde el principio). Tomando en las 4 soluciones la opción de signo positivo, el primer coeficiente de (III.45) resulta ser:

$$c_0 = \pm \frac{\left(\sqrt{(\kappa^4 - s_2^2)^2 + 4s_2^2 \pm 2s_2}\right) (s_1 + 1)}{(\kappa^4 - s_2^2) (s_1 - 1)}, \quad (\text{III.48})$$

donde tomamos el signo tal que  $c_0 > 0$ . La expresión de  $c_1$  resulta considerablemente más extensas y no la incluiremos. En  $c_1$ , además de  $c_0$ , aparecen los coeficientes  $\beta_0$  y  $\alpha_0$ , que vienen dados por

$$\beta_0 = \frac{c_0 s_2 (s_1 - 1) - \kappa^2 (s_1 + 1)}{(1 + \kappa^2) (s_1^2 - 1)}, \quad (\text{III.49})$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{(1 + \kappa^2) (s_1 - 1)} \left( (1 + \kappa^2) \left( (1 + \kappa^2) (s_1^2 - 1) \right)^2 \cdot \beta_0^2 + 4(1 + \kappa^2) (s_1^2 - 1) \beta_0^2 + 4\kappa^2 \right)^{1/2}. \quad (\text{III.50})$$

Igualmente obtenemos una expresión de  $c_2$  en términos de (III.48),  $c_1$ , (III.49), (III.50),  $\beta_1$  y  $\alpha_1$  (siendo estos dos últimos también conocidos).

Para el resto de soluciones, obtenemos un resultado similar en los otros 3 casos en los que tomamos el signo positivo en (III.42) y (III.43) (misma  $c_0$  y “parecidos”  $c_1$  y  $c_2$ , donde este parecido tendrá sentido en la sección siguiente). En los dos casos con signo positivo para (III.42) y (III.43) y signo negativo en (III.29), se obtiene

$$c_0 = \frac{(s_1 + 1) \kappa^2}{(s_1 - 1) (\kappa^2 + s_2)}, \quad (\text{III.51})$$

donde en estos casos sólo hay una solución de  $c_0$ ; y donde nuevamente encontramos  $c_1$  y  $c_2$  similares. Para las soluciones con el signo positivo de (III.43) y el negativo en (III.29) y (III.42), tenemos:

$$c_0 = \frac{s_1 + 1}{\kappa^2 + s_2}. \quad (\text{III.52})$$

Por último, si tomamos el signo negativo en (III.43), estas tres ecuaciones no fijan los coeficientes de (III.45), sino que imponen condiciones sobre las constantes  $s_i$ ,  $m_i$ ,  $k_i$  y  $\kappa$  (que en principio están fijadas a priori, de manera que este caso generalmente daría lugar a un sistema incompatible), por lo que no las consideraremos.

#### IV. Espaciotiempo de Schrödinger

Consideremos la transformación

$$\kappa \mapsto \epsilon \kappa, \quad t \mapsto \epsilon t, \quad \psi \mapsto \epsilon \psi, \quad \tilde{\rho} \mapsto \tilde{\rho} - \log \epsilon;$$

$$\sinh(\tilde{\rho}) \mapsto \frac{e^{\tilde{\rho}}}{2\epsilon} - \frac{\epsilon}{2e^{\tilde{\rho}}}, \quad \cosh(\tilde{\rho}) \mapsto \frac{e^{\tilde{\rho}}}{2\epsilon} + \frac{\epsilon}{2e^{\tilde{\rho}}},$$

siendo  $\epsilon$  un número real positivo. Incluyendo esta transformación en (II.2) y tomando el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  se tiene

$$ds^2 \rightarrow d\tilde{\rho}^2 - \frac{e^{2\tilde{\rho}}}{4} dt^2 + \frac{e^{2\tilde{\rho}}}{4} d\psi^2 - \frac{e^{4\tilde{\rho}}}{16} \kappa^2 (dt - d\psi)^2 + d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 + dx_r dx_r. \quad (\text{IV.1})$$

Si ahora hacemos el cambio de variable

$$\psi = \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2}, \quad t = \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{2}, \quad z = e^{-\tilde{\rho}};$$

$$ds^2 \rightarrow \frac{dz^2}{z^2} + \frac{1}{4z^2} d\zeta_1 \cdot d\zeta_2 - \frac{1}{16z^4} \kappa^2 d\zeta_2^2 + d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 + dx_r dx_r, \quad (\text{IV.2})$$

de manera que la primera parte corresponde a un espaciotiempo de Schrödinger en 3 dimensiones.

A continuación, queremos aplicar este límite a las soluciones de (III.45) encontradas en el apartado anterior, donde este límite simplemente corresponde a tomar

$$\kappa \mapsto \epsilon \kappa, \quad k_1 \mapsto \epsilon k_1.$$

Sin embargo, debemos tener en cuenta los intervalos entre los que se pueden encontrar  $s_1$  y  $s_2$ . En particular, al tomar  $\kappa \mapsto \epsilon \kappa$ , por (II.6) se tiene que  $s_2^2 \leq \epsilon^2 \kappa^2 (1 + \epsilon^2 \kappa^2)$ , por lo que  $s_2$  será también de orden  $\mathcal{O}(\epsilon)$ . Por esto, renombraremos  $s_2 = \epsilon \hat{s}_2$ , de manera que en los resultados siguientes se aprecien claramente los órdenes de cada término. Con esta transformación obtenemos que, para los 4 casos en los que tomamos el signo positivo en las soluciones (III.42) y (III.43), se tiene que los coeficientes son (en los 4 casos iguales, siendo este resultado a lo que nos referíamos en el apartado anterior al decir que los coeficientes son “parecidos”):

$$c_0 = \pm \frac{2(\text{sgn}(\hat{s}_2) \pm 1)(s_1 + 1)}{\hat{s}_2(s_1 - 1)} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (\text{IV.3})$$

$$c_1 = \frac{(m_1 + m_2)(1 - s_1^2)}{2\hat{s}_2} \frac{1}{\epsilon} - \mathcal{S} + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (\text{IV.4})$$

$$c_2 = \frac{1}{4\hat{s}_2} (((m_1 + m_2)s_1 - m_1 + m_2 + 2\mathcal{J}') \cdot (m_1 - m_2)(1 - s_1^2)) \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (\text{IV.5})$$

Aunque los términos  $c_1$  y  $c_2$  dependen de  $c_0$ , vemos que estos son iguales para los dos signos del primer término de la energía.

Los tres términos divergen como  $1/\epsilon$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Este comportamiento lo podríamos haber anticipado, ya que la energía es la carga Noether asociada a la invariancia bajo traslaciones en la coordenada  $t$ . Por tanto, al tomar  $t \mapsto t_\epsilon := \epsilon t$ ,

$$E = \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \mapsto \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{\partial L}{\partial \dot{t}_\epsilon} = \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{d\dot{t}}{d\dot{t}_\epsilon} \frac{\partial L}{\partial \dot{t}}. \quad (\text{IV.6})$$

Como  $d\dot{t}/d\dot{t}_\epsilon = 1/\epsilon$ , cabría esperar esta dependencia en  $\epsilon$  de los coeficientes de (III.45). Este es un argumento de por qué es este comportamiento esperable, pero no implica que sea necesario, ya que estamos ignorando la dependencia en  $\epsilon$  del resto de coordenadas y de  $\kappa$  (y, por lo que comentamos anteriormente, de  $s_2$ ).

Para los casos con signo positivo en (III.42) y (III.43) y signo negativo en (III.29) los términos son:

$$c_0 = \frac{(s_1 + 1)\kappa^2}{(s_1 - 1)\hat{s}_2} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (\text{IV.7})$$

$$c_1 = \frac{(m_1 + m_2)(1 - s_1^2)}{2\hat{s}_2} \frac{1}{\epsilon} - \mathcal{S} + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (\text{IV.8})$$

$$c_2 = \frac{1}{\epsilon^2} \frac{4(m_1 - m_2)^2(1 - s_1^2)}{\kappa^2 (\text{sgn}(\kappa^2 k_1 \hat{s}_2 (s_1 - 1)) - 1)^2} \cdot \frac{1}{(\text{sgn}(\kappa^2 (m_1 - m_2) \hat{s}_2 (s_1 - 1)) + 1)^2} + \frac{1}{\epsilon} \frac{4(m_1 - m_2)(1 - s_1^2)}{\kappa^2 (\text{sgn}(\kappa^2 k_1 \hat{s}_2 (s_1 - 1)) - 1)^2} \cdot \frac{(m_1 + m_2)s_1 + 2\mathcal{J}'}{(\text{sgn}(\kappa^2 (m_1 - m_2) \hat{s}_2 (s_1 - 1)) + 1)^2} + \mathcal{O}(\epsilon^0). \quad (\text{IV.9})$$

En este caso, el primer coeficiente es de orden  $\mathcal{O}(\epsilon)$  y el tercero de orden  $\mathcal{O}(\epsilon^{-2})$ , de manera que en este caso las dependencias en  $\epsilon$  que no hemos considerado en (IV.6) hacen que el argumento anterior del comportamiento esperado no sea válido. A consecuencia de esta dependencia distinta en potencias de  $\epsilon$ , podríamos simplemente descartar este caso, dependiendo del interés que tengamos en estos resultados.

Por último, en los casos en el que tomamos signo positivo en (III.43) y negativo en (III.29) y (III.42), se obtiene

$$c_0 = \frac{1 + s_1}{\hat{s}_2} \frac{1}{\epsilon} - \frac{(1 + s_1)\kappa^2}{\hat{s}_2^2} + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (\text{IV.10})$$

$$c_1 = \frac{(1 + s_1)^2 m_2 + (1 - s_1^2) m_1}{2\hat{s}_2} \frac{1}{\epsilon} - \mathcal{S} + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (\text{IV.11})$$

$$c_2 = \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{4\hat{s}_2} ((m_1 - m_2)(s_1^2 - 1) \cdot ((m_1 + m_2)s_1 + m_2 - m_1 + 2\mathcal{J}')) + \frac{(m_2 - m_1)^3(1 + s_1)}{2(1 + m_1 - m_2)} + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (\text{IV.12})$$

## V. Conclusiones

A modo de recapitulación, partiendo de la acción de Polyakov (I.2) para una cuerda cerrada en el espaciotiempo  $AdS_{3\kappa} \times S_\kappa^3 \times T^4$  (cuya métrica viene dada por (II.2)), y acoplada a los campos de Kalb-Ramond (II.3) y (II.4), hemos encontrado una expansión de la energía en potencias inversas del momento angular total. Para ello, hemos tomado el caso en el que las constantes  $k_i$  y  $w_i$ , y también  $m_i$  y  $\omega_i$ , guardan una cierta relación que simplifica considerablemente los cálculos. El mismo procedimiento se podría haber seguido en el caso general, aunque resultaría en un cálculo más exigente a nivel computacional. Por último, consideramos un límite especial que nos conduce al espaciotiempo de Schrödinger (en

la parte de  $AdS_{3\kappa}$ ) y en el que los coeficientes de la expansión se simplifican enormemente. Debido a la falta de espacio, no se han considerado otros límites o casos que podría resultar conveniente estudiar, como el ya mencionado  $\kappa^2 = -1$ , y otros que también podrían conducir a simplificaciones o resultados interesantes.

Otro caso que se podría estudiar es, dada la misma métrica (II.2), proponer soluciones como (III.1) pero intercambiando los papeles de  $\tau$  y  $\sigma$ . Como ya mencionamos, ese ansatz se conoce como ansatz de cuerda pulsante. En [11] podemos encontrar este estudio hecho para el caso de un espaciotiempo  $AdS_3 \times S^3 \times T^4$  sin deformar.

Se podrían buscar también soluciones de otro tipo, con un ansatz diferente o con estos ansatz ya mencionados pero, por ejemplo, sin tomar soluciones de radio constante. Esto claramente complicaría notablemente el trabajo. En [12] encontramos un análisis similar al de este texto, en el que se toma el ansatz de cuerda rotante pero no se imponen soluciones de radio constante. Este desarrollo se hace sobre un espaciotiempo  $AdS_5 \times S^5$   $\eta$ -deformado (que es una variante de  $AdS_5 \times S^5$  con una deformación dada por un parámetro  $\eta$ ).

Por último, podría resultar interesante considerar la cuantización de la cuerda. En este texto hemos trabajado únicamente de manera clásica, pero se podrían haber encontrado resultados útiles, ya sean correcciones cuánticas a la energía (que, como se dijo en la introducción, son nulas en el límite  $J \rightarrow \infty$ ) u otras propiedades de la teoría. En [13] se cuantiza una teoría de cuerdas tipo IIB en un espaciotiempo  $AdS_3 \times S^3 \times T^4$  (sin deformación).

- 
- [1] E. D'HOKER, D. Z. FREEDMAN, *Supersymmetric gauge theories and the AdS/CFT correspondence*, TASI Lecture Notes (2001), arXiv:hep-th/0201253.
  - [2] V. A. KAZAKOV ET AL., *Classical/quantum integrability in AdS/CFT*, JHEP vol. 05, 024 (2004), arXiv:hep-th/0402207.
  - [3] S. FROLOV, A. A. TSEYTLIN, *Quantizing three-spin string solution in  $AdS_5 \times S^5$* , Nucl. Phys. B **668**, 77 (2003), arXiv:hep-th/0306130.
  - [4] N. BIESERT ET AL., *Review of AdS/CFT Integrability: An Overview*, Lett. Math. Phys vol. 99, 3 (2012), arXiv:1012.3982.
  - [5] J. A. MINAHAN, *Review of AdS/CFT Integrability, Chapter I.1: Spin chains in  $\mathcal{N} = 4$  Super Yang-Mills*, Lett. Math. Phys vol. 99, 33 (2012), arXiv:1012.3983.
  - [6] A. TSEYTLIN, *Review of AdS/CFT Integrability, Chapter II.1: Classical  $AdS_5 \times S^5$  string solutions*, Lett. Math. Phys vol. 99, 103 (2012), arXiv:1012.3986.
  - [7] R. HERNÁNDEZ, J. M. NIETO, *Spinning strings in  $AdS_3 \times S^3$  with NS-NS flux*, J. Nucl. Phys. B. vol. 888 (2014) 236.
  - [8] J. MALDACENA, *The Large N Limit of Superconformal field theories and supergravity*, Int. J. Theor. Phys., vol. 38, (1998), arXiv:hep-th/9711200.
  - [9] B. HOARE, F. K. SEIBOLD, A. A. TSEYTLIN, *Integrable supersymmetric deformations of  $AdS_3 \times S^3 \times T^4$* , JHEP vol. 09 (2022) 18.
  - [10] A. A. TSEYTLIN, *Spinning strings and AdS/CFT duality*, World Scientific vol. 2 (2004) 1648.
  - [11] R. HERNÁNDEZ, J. M. NIETO, R. RUIZ, *Pulsating strings with mixed three-form flux*, JHEP vol. 04 (2018) 078, arXiv:1803.03078.
  - [12] R. HERNÁNDEZ, J. M. NIETO, *Spinning strings in the  $\eta$ -deformed Neumann-Rosochatius system*, Phys. Rev. D no.8 (2017), arXiv:1707.08032.
  - [13] N. BERKOVITS, C. VAFA, E. WITTEN, *Conformal Field Theory Of AdS Background With Ramond-Ramond Flux*, JHEP vol. 03 018 (1999), arXiv:hep-th/9902098.