

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**

**Máster en Física Teórica**



**TRABAJO FIN DE MÁSTER**

**Funciones de fragmentación y Cromodinámica en  
un ordenador cuántico**

**Fragmentation functions and Chromodynamics  
on a quantum computer**

**Nicolás Alberto Martínez de Arenaza**

Director:

Felipe José Llanes Estrada

**Curso Académico 2024-25**



## **Declaración responsable sobre autoría y uso ético de herramientas de Inteligencia Artificial (IA)**

Yo, Nicolás Alberto Martínez de Arenaza,

con DNI/NIE/PASAPORTE: 21145355Y,

declaro de manera responsable que el presente Trabajo Fin de Máster (TFM) titulado:

Funciones de fragmentación y Cromodinámica en un ordenador cuántico

es el resultado de mi trabajo intelectual personal y creativo, y ha sido elaborado de acuerdo con los principios éticos y las normas de integridad vigentes en la comunidad académica y, más específicamente, en la Universidad Complutense de Madrid.

Soy, pues, la persona autora del material aquí incluido y, cuando no ha sido así y he tomado el material de otra fuente, lo he citado o bien he declarado su procedencia de forma clara —incluidas, en su caso, herramientas de inteligencia artificial—. Las ideas y aportaciones principales incluidas en este trabajo, y que acreditan la adquisición de competencias, son mías y no proceden de otras fuentes o han sido reescritas usando material de otras fuentes.

Asimismo, aseguro que los datos y recursos utilizados son legítimos, verificables y han sido obtenidos de fuentes confiables y autorizadas. Además, he tomado medidas para garantizar la confidencialidad y privacidad de los datos utilizados, evitando cualquier tipo de sesgo o discriminación injusta en el tratamiento de la información.

En Madrid, a 9 de Junio de 2025.

FIRMA

# Funciones de fragmentación y Cromodinámica en un ordenador cuántico

Nicolás Alberto Martínez de Arenaza

Supervisor: Felipe José Llanes Estrada  
*Departamento de Física Teórica*

En este trabajo se presenta una implementación del Hamiltoniano de la cromodinámica cuántica (QCD) en el frente de luz, para estudiar funciones de fragmentación en un ordenador cuántico. La metodología empleada permite estudiar procesos no perturbativos de QCD. A pesar de las limitaciones actuales de los ordenadores cuánticos, este trabajo constituye una buena base para futuras simulaciones en computación cuántica.

## I. INTRODUCCIÓN

En los últimos años, la computación cuántica se ha consolidado como una herramienta con gran potencial para resolver problemas complejos que, en física teórica, resultan casi imposibles de tratar utilizando métodos clásicos. Concretamente, la cromodinámica cuántica (QCD), que es la teoría que describe la interacción fuerte entre quarks y gluones, tiene una estructura no abeliana que complica su tratamiento analítico en el régimen infrarrojo, en el cual los métodos perturbativos dejan de ser válidos. Este trabajo ayuda al desarrollo de nuevas técnicas para la simulación de QCD mediante computación cuántica, y se centra específicamente en el estudio de las funciones de fragmentación, que sirven para comprender el proceso de hadronización en colisionadores de altas energías.

Las funciones de fragmentación no se calculan en QCD reticular porque dependen de correladores con separación temporal, mientras que los cálculos en el retículo se realizan en espacio euclídeo. Así, las oscilaciones propias de las exponenciales de fase  $e^{ik_\mu x^\mu}$  del espacio de Minkowski se convierten en exponenciales decrecientes  $e^{-x \cdot k}$ , facilitando un tratamiento típico de física estadística. Esta formulación euclidiana impide estudiar las dinámicas de hadronización que ocurren en el espacio de Minkowski, que describen la transición de un quark libre a un hadrón. Por ello, la estructura no local y la dependencia en el tiempo real de las funciones de fragmentación hacen muy difícil su estudio en QCD reticular.

Para conseguir el objetivo descrito en el resumen, en la sección II introducimos la formulación en el frente de luz, una base oportuna para estudiar sistemas relativistas. En dicha formulación, se presentan las magnitudes físicas que forman el álgebra de Poincaré, fundamentales para describir la dinámica del sistema. A continuación, en la sección III, se desarrolla el hamiltoniano de QCD en este formalismo. Posteriormente, en la sección IV, se definen las funciones de fragmentación en el frente de luz.

Una vez establecido el marco teórico, en la sección V se expone la codificación del sistema físico en un ordenador cuántico, empleando un modelo alternativo a la transformación de Jordan-Wigner. Esta codificación es más eficiente en cuanto al número de qubits requeridos, ya que permite representar un mayor número de modos por par-

tícula. A continuación, en la sección VI, se analizan las limitaciones de los ordenadores cuánticos actuales, y se determinan las especificaciones técnicas necesarias para que el código implementado pueda ejecutarse en dichos dispositivos. Posteriormente, en la sección VII, se detalla el hamiltoniano que se ha seleccionado para la simulación y se estudia el error introducido por el tamaño finito del espacio de Fock (número de partículas representadas en el circuito) y el paso de Trotter, lo cual restringe el intervalo temporal en el que la evolución del sistema puede considerarse sin apenas errores de discretización en  $t$ .

En la sección VIII se introduce la función de onda empleada para describir el mesón  $J/\psi$  (hadron bosónico compuesto por un par quark-antiquark, en este caso  $c\bar{c}$ , ligado mediante interacción fuerte), basada en modelos existentes en el frente de luz. Finalmente, en la sección IX se presentan los resultados de la simulación, analizándose tanto las limitaciones del modelo propuesto como las posibles líneas de mejora y extensiones del trabajo.

## II. FRENTE DE LUZ

Dirac observó [1] que los conceptos dinámicos del espacio y el tiempo en mecánica cuántica pueden generalizarse con el trabajo anterior de Einstein: si definimos “espacio” como la hipersuperficie del espacio-tiempo en la que se establecen las condiciones iniciales, entonces, “tiempo” es solo la dirección ortogonal a esta hipersuperficie [2].

Esta idea se implementa de la siguiente forma: en el espacio-tiempo habitual tenemos el cuadri-vector  $x^\mu$  cuya primera coordenada es  $x^0$ , la temporal. Las otras tres coordenadas  $\vec{x}$  son las espaciales. Para definir normas y productos escalares se introduce una métrica de Minkowski,  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+ - - -)$ . El producto escalar de dos cuadri-vectores  $x^\mu$  y  $y^\mu$  se calcula mediante  $x^\mu y_\mu = x^\mu y^\nu g_{\mu\nu} = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}$ .

Dirac descubrió tres posibilidades diferentes para construir una teoría con dinámica hamiltoniana en el espacio-tiempo [1]. Consideró las diez magnitudes dinámicas fundamentales (es decir, los generadores del grupo de Poincaré): la energía total del sistema  $P^0$ , los tres componentes del momento  $P^i$ , el momento angular alrededor del origen  $M^{ij}$  y el operador de impulso  $M^{i0}$ , que no con-

duce a ninguna cantidad conservada en la cuantización habitual, al no conmutar con el hamiltoniano  $P_0$ ,

$$\begin{aligned} [P^\mu, P^\nu] &= 0, \quad [M^{\mu\nu}, P^\rho] = -g^{\mu\rho}P^\nu + g^{\nu\rho}P^\mu \\ [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= +g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma}M^{\rho\mu} - (\mu \leftrightarrow \nu). \end{aligned} \quad (1)$$

Para construir una teoría de un sistema dinámico hay que obtener expresiones para diez magnitudes fundamentales que satisfagan la ecuación (1), y esta puede cumplirse de tres formas dinámicas diferentes: “la forma instantánea”, “la forma puntual” y “la forma frontal”.

Nosotros nos centraremos en la forma frontal, también conocida como frente de luz. En este caso la hipersuperficie “de cuantización espacial” es un frente de luz, definido por la ecuación  $x^+ \equiv \tilde{x}^0 = x^0 + x^3$  siendo  $x^+$  la coordenada análoga al “tiempo”, mientras que  $x^- \equiv x^0 - x^3$ ,  $x^1, x^2$  son las coordenadas espaciales. En el frente de luz, las coordenadas  $+$ ,  $-$ , son denotadas con las letras  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente. Su métrica no es diagonal, en la convención de Brodsky, Pauli y Pinsky [2] en el plano  $(x^+, x^-)$  toma la forma

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

mientras que en el plano  $(x_1, x_2) = x_\perp$  es igual que la de Minkowski. El producto escalar  $x \cdot y$  es  $x^\mu y^\nu g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(x^+ y^- + x^- y^+) - x^\perp \cdot y^\perp$ . Para un sistema con  $k$  partículas, las cantidades fundamentales son

$$\begin{aligned} P^i &= \sum_k p_k^i, \quad P^+ = \sum_k p_k^+, \quad M^{12} = \sum_k (q_k^1 p_k^2 - q_k^2 p_k^1) \\ M^{i+} &= \sum_k q_k^i p_k^+, \quad M^{-+} = \sum_k q_k^- p_k^+, \\ M^{i-} &= \sum_k \left( \frac{q^i \left( (p_k^\perp)^2 + m_k^2 \right)}{p_k^+} - q_k^- p_k^i \right) + V^i, \\ P^- &= \sum_k \frac{(p_k^\perp)^2 + m_k^2}{p_k^+} + V, \end{aligned} \quad (3)$$

donde los posibles potenciales  $V$  y  $V^i$  describen las interacciones entre partículas; deben garantizar el álgebra de Poincaré, ec. (1). El número de generadores dinámicos (dependientes de  $V$  y  $V^i$ ) es tres, el mínimo posible.

### III. REDUCCIÓN DEL HAMILTONIANO

QCD es la teoría gauge que describe la interacción entre quarks (fermiones) y gluones (bosones de gauge). Escribamos el hamiltoniano de QCD en el frente de luz, como la masa invariante del sistema (al cuadrado) [2]

$$H = P^+ P^- - P_\perp^2. \quad (4)$$

En el frente de luz se puede realizar un impulso longitudinal, siendo  $J_3 = J_z$  invariante. Esto nos permite simplificar la expresión (4), ya que  $P_\perp = 0$ , el hamiltoniano

es entonces  $H = P^+ P^-$ . Siendo  $P^+$  el momento longitudinal total del sistema, cuyo valor fijamos en 1 GeV. A su vez, debemos fijar el valor de la constante de acoplamiento fuerte  $g$ ; como el momento máximo de la malla es de 1 GeV, alcanzamos escalas no perturbativas [3]. Para ello, utilizamos la evolución de  $\alpha_s$  en la ecuación (9) de [4], obteniendo un valor de  $g(1\text{GeV}) = 4.09$ .

En la ec. (5) se explicita  $P^-$ , donde la suma sobre  $r$  y  $s$  es de 1 a 8,  $\tilde{B}_{r,\mu\nu} = \sum_{s,t=1}^8 f^{rst} \tilde{A}_{r,\mu} \tilde{A}_{s,\nu}$  y  $\nu$  son índices de color y  $\tilde{J}_r^\mu = \tilde{\Psi} \gamma^\mu T_r \tilde{\Psi} + \sum_{s,t=1}^8 f^{rst} (\partial^\mu \tilde{A}_s^\nu) \tilde{A}_{t,\nu}$  es la corriente de color,

$$\begin{aligned} P^- &= -\frac{g^2}{2} \int dx_+ d^2 x_\perp \tilde{J}_r^\mu \frac{1}{(\partial^+)^2} \tilde{J}_r^\mu + g \\ &+ \int dx_+ d^2 x_\perp \tilde{J}_r^\mu \tilde{A}_{r,\mu} + \frac{g^2}{4} \int dx_+ d^2 x_\perp \tilde{B}_r^{\mu\nu} \tilde{B}_{r,\mu\nu} \\ &- \frac{g^2}{2} \int dx_+ d^2 x_\perp i \tilde{\Psi} \gamma^\mu T_r \tilde{A}_{r,\mu} \frac{\gamma^+}{\partial^+} (\gamma^\nu T_s \tilde{A}_{s,\nu} \tilde{\Psi}) \\ &+ \frac{1}{2} \int dx_+ d^2 x_\perp \left( \tilde{\Psi} \gamma^+ \frac{m^2 - \nabla_\perp^2}{i \partial^+} \tilde{\Psi} - \tilde{A}_r^\mu \nabla_\perp^2 \tilde{A}_{r,\mu} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Los campos libres son expandibles en modos normales,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_r^\mu &= \sum_\sigma \int [p] \epsilon_\sigma^\mu(p) e^{-ipx} a_{p\sigma r} + \epsilon_{\sigma}^{\mu*}(p) e^{ipx} a_{p\sigma r}^\dagger \\ \tilde{\Psi}_{\alpha r} &= \sum_\sigma \int [p] u_{\alpha\sigma}(p) e^{-ipx} b_{p\sigma r} + v_{\alpha\sigma}(p) e^{ipx} d_{p\sigma r}^\dagger, \end{aligned} \quad (6)$$

donde utilizamos la notación  $\int [p] = \int \frac{dp^+ d^2 p_\perp}{\sqrt{2p^+ (2\pi)^3}}$ . El lagrangiano es invariante bajo recalibraciones y hemos fijado el gauge del frente de luz como  $A_a^+ = 0$ .

Al definir este gauge, los gluones solo tienen dos grados de libertad transversales. Por otro lado, aunque  $A^-$  no es cero, queda determinado por la fijación del gauge y, por tanto, no tiene una dinámica independiente. Los vectores de polarización  $\epsilon$  y los espinores  $u, v$  están recogidos en la primera sección del material suplementario<sup>1</sup>. Los operadores de creación y destrucción  $a_p, a_p^\dagger$  crean y destruyen partículas individuales  $p$ , y se denotan abreviadamente con un solo índice, por ejemplo  $a_{p_1 \sigma_1 r_1} = a_1$ . Cumplen las siguientes relaciones de (anti)conmutación canónicas:

$$\begin{aligned} [a_p, a_{p'}^\dagger] &= \{b_p, b_{p'}^\dagger\} = \{d_p, d_{p'}^\dagger\} = \delta_{p,p'} \\ &\equiv \delta(p^+ - p'^+) \delta^2(p_\perp - p'_\perp) \delta_\sigma^{\sigma'} \delta_r^{r'} \end{aligned} \quad (7)$$

y  $[a, b] = [a, d] = \{b, d\} = 0$ . El hamiltoniano es  $H = T + U$  donde  $T$  es la energía cinética, la parte de  $H$  independiente de la constante de acoplamiento  $g$ ,

$$T = \sum_p (t_1(p) b_p^\dagger b_p + t_2(p) d_p^\dagger d_p + t_3(p) a_p^\dagger a_p), \quad (8)$$

<sup>1</sup> Véase en [https://teorica.fis.ucm.es/ft11/PARTICULAS.DIR/Material\\_suplementario-1.pdf](https://teorica.fis.ucm.es/ft11/PARTICULAS.DIR/Material_suplementario-1.pdf)

con las funciones auxiliares

$$t_{1,q}(p) = t_{2,\bar{q}}(p) = \left( \frac{m^2 + p_\perp^2}{x_q} \right)_q, t_{3,g}(p) = \left( \frac{p_\perp^2}{x_g} \right)_g \quad (9)$$

donde  $q$  representa a los quarks,  $g$  a los gluones, y  $\bar{q}$  a los antiquarks;  $x_\mu$  es la fracción del momento longitudinal de una partícula  $\mu$  respecto al momento total del sistema

$$x_\mu = \frac{p_\mu^+}{P^+}. \quad (10)$$

La energía de interacción se descompone en  $U = V + F + S + C$ , términos que examinaremos. La interacción o “vértice” de emisión/absorción de un gluón,  $V$ , es

$$V = \sum_{1,2,3} \left[ b_1^\dagger b_2 a_3 V_1(1;2,3) + d_1^\dagger d_2 a_3 V_2(1;2,3) + a_1^\dagger d_2 b_3 V_3(1;2,3) + a_1^\dagger a_2 a_3 V_4(1;2,3) + h.c. \right]. \quad (11)$$

Las funciones  $V_n(1;2,3)$  dependen de las variables  $q^+$ ,  $q_\perp$ , el color, el sabor y la helicidad, y se dan en las tablas I y III. Hemos utilizado una notación compacta, donde los términos 1, 2 representan  $p_1, p_2$ ,  $b_n = b(p_n)$  y  $V_n(1;2,3) = V_n(p_1; p_2, p_3)$ ; por ello  $\sum_{1,2,3}$  suma sobre los tres momentos discretizados. Por otro lado,  $V_2 = -V_1^*$ . Por último, hemos utilizado la notación  $V_i \equiv \sum_j V_{i,j}$ ; esta notación también ha sido utilizada para  $F$ ,  $S$  y  $C$ .

En este trabajo no hemos implementado los términos  $C$ ,  $S$  y  $F$  debido al reducido número de partículas que utilizamos. Aún así, hemos calculado estos términos para futuros trabajos, véase material suplementario.

La interacción de bifurcación  $F$  cambia en dos el número de partículas,

$$F = \sum_{1,2,3,4} \left[ b_1^\dagger b_2 d_3 b_4 F_1(1;2,3,4) + d_1^\dagger d_2 b_3 d_4 F_2(1;2,3,4) + b_1^\dagger b_2 a_3 a_4 F_3(1;2,3,4) + d_1^\dagger d_2 a_3 a_4 F_4(1;2,3,4) + a_1^\dagger a_2 d_3 b_4 F_5(1;2,3,4) + a_1^\dagger a_2 a_3 a_4 F_6(1;2,3,4) + h.c. \right] \quad (12)$$

Las funciones  $F_n(1;2,3,4)$  se recogen en las tablas 2 y 4 del material suplementario, donde  $F_2 = F_1$ ,  $F_4 = F_3$  (lógicamente, estas igualdades requieren los cambios necesarios de los operadores  $v \Rightarrow \bar{u}$ ).

El término gaviota,  $2 \rightarrow 2$ ,  $S$ , se muestra a continuación

$$S = \sum_{1,2,3,4} \left[ b_1^\dagger b_2^\dagger b_3 b_4 S_1(1,2;3,4) + d_1^\dagger d_2^\dagger d_3 d_4 S_2(1,2;3,4) + b_1^\dagger d_2^\dagger b_3 d_4 S_3(1,2;3,4) + b_1^\dagger a_2^\dagger b_3 a_4 S_4(1,2;3,4) + d_1^\dagger a_2^\dagger d_3 a_4 S_5(1,2;3,4) + b_1^\dagger d_2^\dagger a_3 a_4 S_6(1,2;3,4) + a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 a_4 S_7(1,2;3,4) \right]. \quad (13)$$

|       |                                                                                                                                                                                       |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $V_1$ | $\frac{\Delta v}{\sqrt{q_1 q_2 q_3}} (\bar{u}_1 \not{\epsilon}_3 T^{a_3} u_2)$                                                                                                        |
| $V_2$ | $-\frac{\Delta v}{\sqrt{q_1 q_2 q_3}} (\bar{v}_2 \not{\epsilon}_3 T^{a_3} v_1)$                                                                                                       |
| $V_3$ | $\frac{\Delta v}{\sqrt{q_1 q_2 q_3}} (\bar{v}_2 \not{\epsilon}_1 T^{a_1} u_3)$                                                                                                        |
| $V_4$ | $\frac{f_{a_2 a_3} \Delta v}{\sqrt{q_1 q_2 q_3}} [(\epsilon_1^* q_3)(\epsilon_2 \epsilon_3) + (\epsilon_3 q_1)(\epsilon_1^* \epsilon_2) + (\epsilon_3 q_2)(\epsilon_1^* \epsilon_2)]$ |

TABLA I: Vértices de interacción en términos de los espinores de Dirac. Aquí,  $\Delta v = \hat{g} \delta(q_1^+ - q_2^+ - q_3^+)$   $\delta^{(2)}(\vec{q}_{\perp,1} - \vec{q}_{\perp,2} - \vec{q}_{\perp,3})$  siendo  $\hat{g} = \frac{g P^+}{\sqrt{2(2\pi)^3}}$ .

|                              |                                                                                                                                                                |
|------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $M$                          | $\frac{1}{\sqrt{p^+ q^+}} (\bar{u}(p) M u(q)) \delta_{\lambda_p, \lambda_q}$                                                                                   |
| $\gamma_\perp \cdot a_\perp$ | $a_\perp \cdot \left( \frac{p_\perp}{p^+} + \frac{q_\perp}{q^+} \right) - i \lambda_q a_\perp \wedge \left( \frac{p_\perp}{p^+} - \frac{q_\perp}{q^+} \right)$ |
| $\gamma^+$                   | 0                                                                                                                                                              |
| $M$                          | $\frac{1}{\sqrt{p^+ q^+}} (\bar{u}(p) M u(q)) \delta_{\lambda_p, -\lambda_q}$                                                                                  |
| $\gamma_\perp \cdot a_\perp$ | $a_\perp(\lambda_q) \left( \frac{m}{p^+} - \frac{m}{q^+} \right)$                                                                                              |
| $\gamma^+$                   | 2                                                                                                                                                              |
| $M$                          | $\frac{1}{\sqrt{p^+ q^+}} (\bar{v}(p) M u(q)) \delta_{\lambda_p, \lambda_q}$                                                                                   |
| $\gamma_\perp \cdot a_\perp$ | $a_\perp(\lambda_q) \left( \frac{m}{p^+} + \frac{m}{q^+} \right)$                                                                                              |
| $\gamma^+$                   | 0                                                                                                                                                              |
| $M$                          | $\frac{1}{\sqrt{p^+ q^+}} (\bar{v}(p) M u(q)) \delta_{\lambda_p, -\lambda_q}$                                                                                  |
| $\gamma_\perp \cdot a_\perp$ | $a_\perp \cdot \left( \frac{p_\perp}{p^+} + \frac{q_\perp}{q^+} \right) - i \lambda_q a_\perp \wedge \left( \frac{p_\perp}{p^+} - \frac{q_\perp}{q^+} \right)$ |
| $\gamma^+$                   | 2                                                                                                                                                              |

TABLA II: Elementos de matriz [2] en función de los espinores de Dirac  $\bar{u}(p) M u(q)$  y  $\bar{v}(p) M u(q)$ .

En este tipo de interacción, se mantiene fijo el número de partículas. Las funciones  $S_n(1,2;3,4)$  se recogen en las tablas I y V del material suplementario, con  $S_2 = S_1$  y  $S_5 = S_4$ . Los operadores de contracción  $C$  surgen al escribir  $P^-$  en orden normal. Contribuyen a la autoenergía de los fermiones y a la polarización del vacío, respectivamente,

$$C = \sum_q (C_1(q) b_q^\dagger b_q + C_2(q) d_q^\dagger d_q + C_3(q) a_q^\dagger a_q). \quad (14)$$

donde  $C_2 = C_1$ . Su estructura permite interpretarlos como términos de masa/autoenergía.

En la tabla I y en las tablas I, II y III del material suplementario, se presentan los distintos coeficientes del hamiltoniano en función de helicidad y sabores. Para ello, hemos empleado las ecuaciones (6) y (7) partiendo de la ecuación (5). De esta manera, se reproducen los términos presentados en [2], corrigiendo pequeñas erratas en algunos coeficientes.

A continuación, en la III y las tablas IV, V y VI del material suplementario observamos  $V_n$ ,  $F_n$ ,  $S_n$  y  $C_n$  respectivamente en función de las helicidad, el color, el momento intrínseco y el sabor. Para ello, utilizaremos la tabla II, donde por definición, el vector  $a$  cumple  $a_\perp(\lambda) = -\lambda a_x - i a_y$  con  $\lambda = \pm 1$  y  $a_\perp \wedge b_\perp = a_x b_y - a_y b_x$ . También hemos utilizado la ecuación (15).

$$\bar{v}(p) v(q) = -\bar{u}(p) u(q), \quad \bar{v}(p) \gamma^+ v(q) = \bar{u}(p) \gamma^+ u(q). \quad (15)$$

|           |                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $V_{1,1}$ | $\Delta v \sqrt{\frac{1}{x_3}} m_F \left[ \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right] \delta_{-\lambda_1}^{\lambda_2} \delta_{\lambda_1}^{\lambda_3} \delta_{f_1}^{f_2} T_{c_1 c_2}^{a_3}$                                                                                       |
| $V_{1,2}$ | $\Delta v \sqrt{\frac{2}{x_3}} \vec{\epsilon}_{\perp,3} \cdot \left[ \left( \frac{\vec{k}_{\perp}}{x} \right)_3 - \left( \frac{\vec{k}_{\perp}}{x} \right)_2 \right] \delta_{\lambda_1}^{\lambda_2} \delta_{\lambda_1}^{\lambda_3} \delta_{f_1}^{f_2} T_{c_1 c_2}^{a_3}$   |
| $V_{1,3}$ | $\Delta v \sqrt{\frac{2}{x_3}} \vec{\epsilon}_{\perp,3} \cdot \left[ \left( \frac{\vec{k}_{\perp}}{x} \right)_3 - \left( \frac{\vec{k}_{\perp}}{x} \right)_1 \right] \delta_{\lambda_1}^{\lambda_2} \delta_{-\lambda_1}^{\lambda_3} \delta_{f_1}^{f_2} T_{c_1 c_2}^{a_3}$  |
| $V_{3,1}$ | $\Delta v \sqrt{\frac{1}{x_1}} m_F \left[ \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right] \delta_{\lambda_2}^{\lambda_3} \delta_{\lambda_1}^{\lambda_3} \delta_{f_2}^{f_3} T_{c_2 c_3}^{a_1}$                                                                                        |
| $V_{3,2}$ | $\Delta v \sqrt{\frac{2}{x_1}} \vec{\epsilon}_{\perp,1} \cdot \left[ \left( \frac{\vec{k}_{\perp}}{x} \right)_1 - \left( \frac{\vec{k}_{\perp}}{x} \right)_3 \right] \delta_{-\lambda_2}^{\lambda_3} \delta_{-\lambda_1}^{\lambda_3} \delta_{f_2}^{f_3} T_{c_2 c_3}^{a_1}$ |
| $V_{3,3}$ | $\Delta v \sqrt{\frac{2}{x_1}} \vec{\epsilon}_{\perp,1} \cdot \left[ \left( \frac{\vec{k}_{\perp}}{x} \right)_1 - \left( \frac{\vec{k}_{\perp}}{x} \right)_2 \right] \delta_{-\lambda_2}^{\lambda_3} \delta_{\lambda_1}^{\lambda_3} \delta_{f_2}^{f_3} T_{c_2 c_3}^{a_1}$  |
| $V_{4,1}$ | $-\Delta v \sqrt{\frac{x_3}{2x_1 x_2}} \vec{\epsilon}_{\perp,1}^* \cdot \left[ \left( \frac{\vec{k}_{\perp}}{x} \right)_1 - \left( \frac{\vec{k}_{\perp}}{x} \right)_3 \right] \delta_{-\lambda_2}^{\lambda_3} i f_{a_2 a_3}^{a_1}$                                        |
| $V_{4,2}$ | $-\Delta v \sqrt{\frac{x_2}{2x_1 x_3}} \vec{\epsilon}_{\perp,3} \cdot \left[ \left( \frac{\vec{k}_{\perp}}{x} \right)_3 - \left( \frac{\vec{k}_{\perp}}{x} \right)_2 \right] \delta_{\lambda_1}^{\lambda_2} i f_{a_2 a_3}^{a_1}$                                           |
| $V_{4,3}$ | $-\Delta v \sqrt{\frac{x_1}{2x_2 x_3}} \vec{\epsilon}_{\perp,3} \cdot \left[ \left( \frac{\vec{k}_{\perp}}{x} \right)_3 - \left( \frac{\vec{k}_{\perp}}{x} \right)_1 \right] \delta_{\lambda_1}^{\lambda_2} i f_{a_2 a_3}^{a_1}$                                           |

TABLA III: Vértices de interacción en términos de helicidad y factor de color, con  $\Delta v$  y  $\hat{g}$  dados en la tabla I.

#### IV. FUNCIONES DE FRAGMENTACIÓN

En los últimos años, diversos trabajos han explorado el uso de ordenadores cuánticos [5] en distintas áreas de la física, como la física atómica [6], la física de partículas [7–10] y la física química [11]. En este trabajo, nosotros estudiamos las funciones de fragmentación, un área que recientemente ha comenzado a abordarse mediante computación cuántica [12, 13].

Los teoremas de factorización para procesos inclusivos en QCD son la base teórica de la mayor parte de la fenomenología actual de QCD. Cuando dicha factorización se aplica a distribuciones de hadrones en el estado final, aparecen las funciones de fragmentación (ffs). Estas se utilizan para las distribuciones de hadrones que surgen de partones procedentes de la difusión profunda.

En el modelo de partones  $d_{h/j}(z)$  es la probabilidad de que en el chorro  $j$  iniciado por un partón se encuentre el hadrón  $h$  con fracción  $z$  del momento  $P^+$  del chorro.

Al igual que las densidades de partones, satisfacen reglas de suma para las cantidades conservadas [14–20].

En QCD, la definición de la función de fragmentación contiene un estado partónico inicial creado mediante la aplicación de un operador de creación en el frente de luz para un campo fermiónico (o bosónico) sobre el vacío, de ahí la conveniencia de describir el hamiltoniano de QCD empleando esta formulación, véase III. La definición estándar de una función de fragmentación para un quark “desnudo” se toma de [21]:

$$d_{(0),h/j}(z) \langle j, p_1 | j, p_2 \rangle \equiv \frac{Tr_{color}}{N_{c,j}} \sum_X \langle j, p_1 | h, X_{out} \rangle \langle h, X_{out} | j, p_2 \rangle. \quad (16)$$

Aquí,  $|j, p_1\rangle$  y  $|j, p_2\rangle$  son estados iniciales de quarks con sabor  $j$ , y momento  $p$ , obtenidos al aplicar un operador de creación en el frente de luz al vacío. El hadrón  $h$  en el estado final transporta una fracción  $z$  del momento

del quark, es decir,  $k^- = zp^-$  (siendo  $k$  el momento del hadrón). Los estados de salida son  $|h, X_{out}\rangle$  con  $h$  etiquetando las especies de partículas medidas y la suma sobre  $X$  representando una suma completa sobre todas las demás contribuciones al estado final. Por otro lado,  $Tr_{color}$  es la traza sobre el color y  $N_{c,j}$  es el número de colores de la partícula  $j$ , que depende del grupo de simetría. Para el estudio de la sección IX al ser  $j$  un quark charm en el grupo de simetría  $SU(2)$   $N_{c,j} = 2$ , esperamos que la contribución de los dos colores sea la misma, por ello, hemos simplificado la traza con el número de colores.

En [21] los operadores de creación y aniquilación en el frente de luz incorporan un factor  $(2\pi)^3 2p^+$  en los conmutadores. En nuestra formulación, dicho factor ha sido absorbido en la integral, véase el texto que sigue a la ec. (6), por lo que no aparece explícitamente en el denominador de la ecuación (16). A su vez, consideramos nulo el momento transversal,  $\mathbf{p}_{\perp} = 0$ .

#### V. CODIFICACIÓN

Hemos utilizado la codificación propuesta en [22], que asigna un “registro” a cada partícula del sistema. Cada registro consiste en un conjunto de cubits que almacenan los números cuánticos de la partícula representada. Además, incluye un cubit adicional de “presencia/ausencia” (P/A) (un controlador para determinar si el registro representa una partícula o si debe considerarse vacío y disponible). En caso de necesitar una partícula adicional, se debe activar un registro vacío y establecer su cubit de presencia en 1. Para una partícula con momento, espín y color, el estado de vacío (correspondiente a la ausencia de la partícula) se define como:

$$|\Omega\rangle \equiv |0\rangle_{P/A} \otimes |0\rangle_{spin} \otimes |00\rangle_{color} \otimes |0 \dots 0\rangle_p \quad (17)$$

donde  $p$  indica el momento. En este enfoque, la cantidad de cubits necesarios para codificar  $n$  partículas con  $N_p$  modos por partícula es de orden  $n \log_2 N_p$ . Este escalado resulta más eficiente que la transformación de Jordan-Wigner [23], que requiere  $O(N_p)$ , siempre que el sistema involucre un número moderado de partículas con una gran cantidad de estados accesibles para cada una.

Para implementar los operadores de creación y destrucción, utilizamos las ecuaciones (50) y (85) de [22]:

$$b_p^{(n)} = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}_0^{(n-j)} \otimes (\mathbb{C}_{01} \otimes \mathfrak{s}_p)_j \otimes \mathbb{P}_{j-1}^{(j-1)} \cdot \mathcal{A}_{j \leftarrow j-1} \quad (18)$$

$$a_q^{(n)} = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}_0^{(n-j)} \otimes (\mathbb{C}_{01} \otimes \mathfrak{s}_p)_j \otimes \mathbb{P}_{j-1}^{(j-1)} \cdot \mathcal{S}_{j \leftarrow (j-1)}.$$

$\mathbb{P}_j^{(n)}$  es un proyector sobre estados con exactamente  $j$  partículas en una memoria de como máximo  $n$  cubits. El término  $a_q^{(n)}$  representa el operador de aniquilación de los bosones en una memoria con  $n$  registros de partículas, y el

término  $b_q^{(n)}$  es el operador respectivo para los fermiones. Los operadores  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{S}$  antisimetrizan y simetrizan los estados, respectivamente. El operador  $\mathbb{C}_{ij}$  es un operador de control, que actúa sobre el cubit de presencia/ausencia del registro, cumpliéndose

$$\mathbb{C}_{ij} |k\rangle = \delta_{jk} |i\rangle \quad (19)$$

$\mathbb{C}_{10}$  impide el intento de crear una partícula si el registro ya está ocupado por otra (es decir, el cubit de presencia es  $|1\rangle$ ). Por último,  $\mathfrak{s}_p$  es un operador de “supresión” que puede borrar los números cuánticos del registro para devolver el estado  $|p\rangle$  al estado de referencia,  $|\Omega\rangle$ . Por tanto, el operador de “asignación”  $\mathfrak{s}_p^\dagger$  convierte el vacío al estado  $|p\rangle$ ,  $|\Omega\rangle \rightarrow |p\rangle$ . Para más información sobre el funcionamiento de dichos operadores, véase [22].

En la codificación empleada, cada registro ha sido diseñado para representar los grados de libertad de una partícula individual, asignando un cubit para indicar su presencia, uno para el espín y uno para el color en el caso de los quarks (dos para los gluones) al considerar el grupo de simetría de  $SU(2)$  en la sección IX. El sabor no ha sido incluido en esta implementación.

Con el fin de optimizar el número de cubits empleados, y por ende, el tiempo de ejecución, se ha adoptado una codificación asimétrica del momento longitudinal, que permite representar un mayor número de estados del mesón en comparación con una codificación simétrica, utilizando una cantidad menor de cubits. En concreto, en la sección IX se han utilizado tres cubits para codificar el momento de los quarks, lo que permite representar los valores del 1 al 7 (sin normalizar). Para los antiquarks se han utilizado dos cubits, permitiendo representar momentos entre 1 y 4, mientras que para los gluones se ha empleado un único cubit, codificando los valores de momento 4 y 6. En consecuencia, la representación completa requiere 6 cubits para cada quark, 5 para cada antiquark y 5 adicionales para cada gluón. Por último, se han incorporado 4 cubits auxiliares destinados a implementar las operaciones de antisimetrización, dando lugar a un circuito cuántico compuesto por un total de 26 cubits al implementar dos quarks, un antiquark y un gluón.

## VI. LIMITACIONES DEL HARDWARE CUÁNTICO

A continuación, hablaremos de las características de los ordenadores cuánticos. Debido a la presencia de errores asociados a la ejecución de puertas cuánticas en los dispositivos actuales —como los desarrollados por IBM—, se ha optado por utilizar por el momento un simulador, ya que el circuito empleado en la sección IX es demasiado profundo para su ejecución en el hardware actual. Los ordenadores cuánticos de IBM son del tipo Noisy Intermediate-Scale Quantum (NISQ), se caracterizan por una capacidad de memoria de cubits de una centena, pero sin corrección de errores a gran escala. Las fidelidades

típicas de las puertas de dos cubits alcanzan entre el 98 % y el 99.5 %.

Si quisiéramos ejecutar el circuito descrito en la sección IX con un único paso de Trotter en un ordenador cuántico de IBM tendríamos una profundidad ( $\mathcal{D}$ ) de veinte millones de puertas. El simulador asigna  $\mathcal{D} = 1$  a la mayoría de las puertas, implicando que transformar una puerta en su versión controlada no aumente su profundidad; en cambio, el simulador las descompone en puertas más sencillas, aumentando  $\mathcal{D}$ . Por ejemplo, una puerta sencilla como la Toffoli requiere sesenta puertas para implementarla en el ordenador cuántico de IBM “*ibm\_sherbrooke*”. Pero este código ha sido preparado para ser implementado en un simulador cuántico, minimizando los cubits auxiliares para reducir el número de estos en el sistema, ya que la memoria aumenta de forma exponencial con los cubits en el simulador. Por ello, hemos utilizado multicontrols en los cubits para realizar las rotaciones, priorizando el número de cubits frente a la  $\mathcal{D}$ . Si utilizáramos más cubits auxiliares, podríamos realizar la rotación controlando con uno solo, como se describe en la figura 4.10 de [24]. De esta forma, podríamos reducir  $\mathcal{D}$  un factor veinte, de forma que, estimamos  $\mathcal{D} \sim 10^6$  con el ordenador cuántico.

Por tanto, para tener un error inferior al 10 %, el error por puerta (sin corrección de errores) debe ser  $\epsilon < 10^{-7}$  %, error bastante inferior a los actuales.

A continuación, estudiamos los tiempos de coherencia; en IBM<sup>2</sup> son ( $T_1$  y  $T_2$ ) que están comprendidos en el intervalo 100–400  $\mu s$ .  $T_1$  es el tiempo de relajación, que mide cuánto tarda un cubit en perder energía y caer del estado excitado al estado base, mientras que  $T_2$  es el tiempo de desfaseamiento, que mide cuánto tiempo permanece coherente la fase relativa de un cubit antes de perder información cuántica por interacción con el entorno.

Debido a esto, los circuitos cuánticos en estos dispositivos están limitados en profundidad: tras unas 100–300 puertas cuánticas, los errores acumulados debido a la decoherencia y operaciones imperfectas reducen considerablemente la precisión de los resultados [25].

Para calcular el tiempo de simulación de un paso de Trotter del circuito descrito en la sección IX debemos estudiar el tiempo de implementación de las puertas; este ha disminuido rápidamente con el tiempo. Por ejemplo, en 2017, el tiempo de cada puerta era de 130 ns (nanosegundos) para puertas de un cubit y entre 250 y 450 ns para puertas de dos cubits [26]. En cambio, actualmente cada puerta puede costar en torno a 60–88 ns [27].

La ventaja del ordenador cuántico es el paralelismo, que permite ejecutar puertas cuánticas simultáneamente. Concretamente, para poder ejecutar el circuito descrito en la sección IX se necesitan 26 cubits. Si consideramos que por cada capa podemos implementar, en el mejor de

<sup>2</sup> Véase en <https://www.ibm.com/quantum/blog/eagle-quantum-processor-performance>

los casos, 26 puertas (considerando por simplicidad solo puertas de un cubit), tendríamos unas 38462 capas.

Asumiendo un tiempo de ejecución de 70 ns por capa, se necesitarían tiempos de coherencia del orden de 3.7 ms, lo cual es aproximadamente ocho veces superior al rango actual (100–400  $\mu$ s).

Aunque IBM (entre otros) está mejorando las técnicas de mitigación de errores, en la actualidad, el uso de simuladores clásicos sigue siendo crucial para probar algoritmos cuánticos. Uno de los principales inconvenientes de utilizar un simulador cuántico actual es el reducido número de cubits simulables (ya que la memoria necesaria escala con  $2^n$  la dimensión de Hilbert, para  $n$  cubits).

Aún así, podemos centrarnos en la implementación de una parte del hamiltoniano de QCD, lo que sí podemos hacer con la capacidad disponible. En paralelo, hemos realizado el cálculo completo del hamiltoniano general de QCD en el frente de luz, que podrá ser ejecutado en cuanto se disponga de ordenadores cuánticos con mayor capacidad.

## VII. IMPLEMENTACIÓN

Por el momento, nos hemos centrado en la ejecución de los términos  $V$ , expresados en la ecuación (11). Estos describen los vértices de interacción entre un quark y un gluón (procesos del tipo  $q \rightarrow qg$ ,  $g \rightarrow q\bar{q}$ , etc), siendo el bloque fundamental de las interacciones de QCD, aunque no hemos simulado por ahora el vértice  $V_4$  al suponer un aumento en el número de gluones. A su vez, los términos  $F$  (bifurcación),  $I$  (autoenergía y polarización del vacío) y  $S$  (interacción tipo gaviota), aunque relevantes para una descripción completa del sistema, suponen una complejidad computacional bastante mayor (y además, estas contribuciones serían menos relevantes en un régimen de acoplamiento débil, por ser de orden  $g^2$ ). En la simulación de la sección IX no se activó  $V_2$  debido al pequeño número de momentos de la malla.

En resumen, esta primera implementación busca ser una prueba de concepto sólida, centrada en las interacciones más accesibles en el simulador cuántico, con vistas a futuras ampliaciones que incorporen el resto de los términos del hamiltoniano cuando los ordenadores cuánticos hayan superado las limitaciones actuales relacionadas con la decoherencia y el ruido.

Por ello, hemos considerado el hamiltoniano

$$H = T + V_1 + V_3 \quad (20)$$

es decir, implementamos los vértices de la figura 1. A continuación, describimos cómo implementar la ecuación (16) en el ordenador cuántico. En primer lugar, examinamos la evolución del hamiltoniano, es decir

$$U(\Delta t) = \exp(-iH\Delta t) \quad (21)$$

$H$  es el hamiltoniano implementado en la ecuación (20). Es necesario transformar la exponencial (21) en un pro-

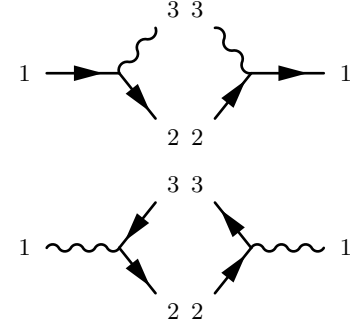


FIG. 1: Vértices de interacción implementados en el simulador cuántico. La primera fila corresponde al potencial  $V_1$  (emisión/absorción de un gluón por un quark), y la segunda a  $V_3$  (creación o aniquilación de un par quark-antiquark tipo Breit-Wheeler), con sus correspondientes hermíticos conjugados.

ducto de exponenciales. Debido a la no conmutatividad y a la regla de Baker-Campbell-Hausdorff,  $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}$  para exponentes no conmutativos, esperamos errores del orden de  $(\Delta t)^2$ . Por tanto, al implementar la fórmula de Lee-Trotter [28] se obtiene

$$U(\Delta t) = e^{-iT\Delta t} \sum_{j=1,3} e^{-i(V_j+h.c.)\Delta t} + O((\Delta t)^2). \quad (22)$$

A continuación, representamos en la figura 2 la profundidad del circuito (número de puertas lógicas necesarias) implementado en el simulador, como función del número de modos o estados para el gluón; dichos estados aumentan su número de forma exponencial al aumentar el número de cubits para la representación del momento. En esta figura se observa que la profundidad escala linealmente con el número de modos.

Aunque en la figura 2 pudiera parecer contradictorio que la línea correspondiente a SU(3) se sitúe por debajo de la de SU(2), en realidad, para un mismo número de cubits dedicados al momento, tanto la profundidad del circuito como el número de modos del gluón son mayores en SU(3) que en SU(2), como era de esperar. La aparente inversión se debe a que el punto de SU(2) que se encuentra justo por encima del correspondiente a SU(3) en la gráfica utiliza un cubit adicional para la codificación del momento, lo que explica el aumento en profundidad.

Ahora, calculamos el tamaño del paso de Trotter que podemos emplear. Para ello, hemos calculado por separado la probabilidad de emitir un gluón al inicializar el estado con un quark, considerando SU(2) y una distribución asimétrica de los cubits para momento, tal y como hemos explicado en la sección V. Además, en la figura 3 hemos representado el valor teórico y el error que se produce al realizar el corte de solo considerar un gluón en el vértice  $V_1$ . Este cálculo se puede realizar de forma analítica para un número de partículas finito; concretamente, para el caso de que haya un gluón, la probabilidad es

$$P_{1g} = \langle \Omega_{\bar{q}}, k_g, p_g | \exp(-iV_1 t) | \Omega_g, \Omega_{\bar{q}}, q_q \rangle = \cos^2(V \cdot t) \quad (23)$$

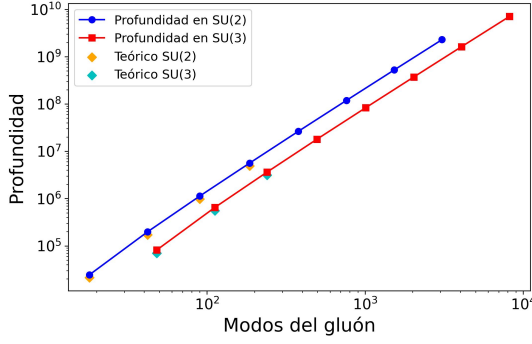


FIG. 2: Relación entre la profundidad del circuito y el número de modos del gluón en los grupos SU(2) y SU(3), al incrementar el número de cubits dedicados al momento de las partículas, comenzando con una codificación inicial de dos cubits. Los puntos azules y rojos son una estimación de la profundidad máxima del circuito, obtenida bajo la hipótesis de que cada interacción contribuye con una profundidad equivalente. Esta suposición conduce a una cota superior respecto al valor teórico, ya que no considera posibles optimizaciones debida a la transpilación completa del circuito. Los puntos naranjas y verdes corresponden a los valores exactos obtenidos tras transpilar el circuito completo.

$k$  y  $p$  son un estado genérico del gluón y quark respectivamente,  $q$  es el estado inicial del quark con el que inicializamos el estado. Tanto en la ecuación (23) como en la (24) se ha obviado escribir los estados para el segundo quark, con el fin de no sobrecargar las expresiones. Por otro lado,  $V$  se define como  $V^2 \equiv \sum_j V_{i \rightarrow j} V_{j \rightarrow i}$  siendo  $i$  el estado inicial del quark inicial y  $j$  todas las posibles interacciones para ese quark, que vienen dadas por el término  $V_1$  de la tabla III. Para simplificar la notación hemos omitido el subíndice del vértice  $V_1$ , lo mismo sucederá para el vértice  $V_3$ . Para calcular dicha probabilidad, hemos utilizado el desarrollo de Taylor de la exponencial.

A continuación, para estimar el error cometido debido al espacio de Fock, hemos calculado hasta quinto orden en el desarrollo de Taylor la probabilidad de emitir un gluón en un registro con hasta dos gluones, habiendo obtenido:

$$P_{2g} \equiv \langle \Omega_{\bar{q}}, k_{g_1}, k'_{g_2}, p_g | \exp(-iV_1 t) | \Omega_{g_1}, \Omega_{g_2} \Omega_{\bar{q}}, q_q \rangle$$

$$\approx 1 - \frac{(V^2 t^2)}{2} + \frac{(t^4 \cdot (V^4 + \bar{V}^4))}{4!} + \mathcal{O}(t^6) \quad (24)$$

siendo  $k'_{g_2}$  un estado genérico (incluyendo el estado vacío) para el segundo gluón.  $\bar{V}$  se define como  $\bar{V}^4 \equiv \sum_{j,k} V_{i \rightarrow j} V_{j \rightarrow k} V_{k \rightarrow j} V_{j \rightarrow i}$ , donde  $i$  representa el estado inicial del quark, y  $j, k$  corresponden a los estados intermedios accesibles mediante interacciones sucesivas, bajo la hipótesis de que el momento del quark disminuye en cada emisión; es decir, el momento asociado al estado  $i$  es mayor que el del estado  $j$ , y este, a su vez, es mayor

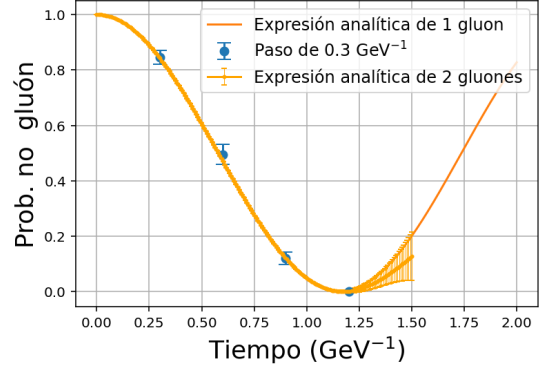


FIG. 3: La probabilidad de la no emisión de un gluón al inicializar el estado con un quark de momento máximo y evolucionar con el vértice  $V_1$ , se compara con el valor analítico, en una memoria de un solo gluón (ecuación (23)) y al considerar dos gluones (ecuación (24)).

que el del estado  $k$ .

Para estimar el error cometido debido al truncamiento en la expansión, utilizamos el resto de Taylor:

$$R_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (t - t_0)^{n+1} \quad (25)$$

tomando  $t_0 = 0$ , la incertidumbre viene dada por

$$I = \frac{(V^6 + \bar{V}^2 \cdot V^4 + \tilde{V}^6) \cdot t}{6!} \quad (26)$$

con  $\tilde{V}$ :  $\tilde{V}^6 \equiv \sum_{j,k} V_{i \rightarrow j} V_{j \rightarrow k} V_{k \rightarrow j} V_{j \rightarrow k} V_{k \rightarrow j} V_{j \rightarrow i}$ . Para la codificación asimétrica que estamos considerando  $\tilde{V}$  y  $\bar{V}$  son cero, debido a la reducida malla de momentos.

Las probabilidades obtenidas se representan en las figuras 3 y 4. Para el vértice  $V_3$  (figura 4), inicializamos el registro con un gluón de momento 6/7, es decir, el máximo que se puede formar con el quark con momento máximo que inicializaremos en la sección IX. Esta probabilidad no varía al aumentar el registro de gluones.

En la figura 3 se observa que el error asociado al tamaño finito de la malla es prácticamente despreciable para tiempos inferiores a 1,25  $\text{GeV}^{-1}$ . Asimismo, es posible estimar un tamaño de paso adecuado para representar con precisión las expresiones analíticas. En particular, tanto en la figura 3 como en la figura 4, los resultados simulados son compatibles con las predicciones analíticas al emplear un paso de 0,3  $\text{GeV}^{-1}$ . No obstante, una reducción en el tamaño del paso de Trotter conlleva una disminución del error en la evolución temporal.

En estos ejemplos hemos comenzado con un quark o un gluón, pero las ffs requieren hadrones, y como ejemplo, fragmentaremos al mesón  $J/\psi$ . A continuación, explicaremos la función de onda que se ha utilizado.

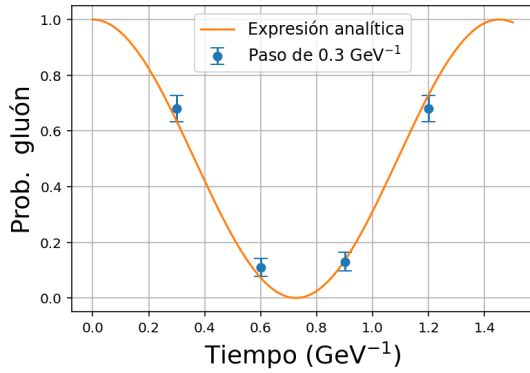


FIG. 4: La probabilidad de obtener un gluón al inicializar el estado con un gluón de momento  $6/7$  y evolucionar con en el vértice  $V_3$ . La expresión analítica ha sido calculada con la ecuación (23).

### VIII. FUNCIÓN DE ONDA DEL MESÓN

Hemos considerado oportuno emplear el mesón  $J/\psi$ , compuesto por  $c\bar{c}$ , utilizando la función de onda en el frente de luz propuesta por Meijian Li et al [29] (idealmente, esta debería obtenerse diagonalizando  $H_{QCD}$ ).

El mesón  $J/\psi$  se trata como un estado puro  $1S$  (estado fundamental) en el frente de luz, con números cuánticos  $J^{PC} = 1^{--}$ , considerando que únicamente está compuesto por  $c\bar{c}$ , sin considerar ninguna combinación con gluones u otros quarks. Los parámetros de su función de onda son el confinamiento transversal,  $\kappa$ , y la masa efectiva del quark,  $m_f$ . Estos se determinan ajustando la constante de desintegración del  $J/\psi$ . Con esto se obtiene una función de onda que, a pesar de su simplicidad, reproduce correctamente los datos experimentales, como la producción del mesón en colisionadores hadrónicos. Por tanto, siguiendo el modelo presentado en [29], la función de onda del mesón  $J/\Psi$  es

$$\psi_{J/\Psi}^m(x, s, c) = \frac{\chi_0(x)}{\sqrt{4\pi x(1-x)}} \sigma_s^m \eta_c; \quad (27)$$

se ha considerado únicamente la dependencia longitudinal de la función de onda, asumiendo que la parte transversal toma un valor constante e igual a uno. La variable  $s$  recorre todos los pares de estados de espín y  $m$  toma tres valores, de modo que:

$$\begin{aligned} \bullet m = -1 : \sigma_{\downarrow\downarrow}^{-1} &= 1 & \bullet m = 1 : \sigma_{\uparrow\uparrow}^1 &= 1 \\ \bullet m = 0 : \sigma_{\downarrow\uparrow}^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sigma_{\uparrow\downarrow}^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

con todas las demás combinaciones nulas. La variable  $c$  recorre todos los pares color/anticolor, pero para conseguir que el estado sea un singlete, solo existen tres combinaciones distintas de cero y  $\eta_{r\bar{r}} = \eta_{b\bar{b}} = \eta_{g\bar{g}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$  para  $SU(3)$ . En la sección IX utilizamos  $SU(2)$ , por tanto, tendremos dos combinaciones distintas de cero,  $\eta_{1\bar{1}} = \eta_{2\bar{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , siendo 1 y 2 los posibles colores de

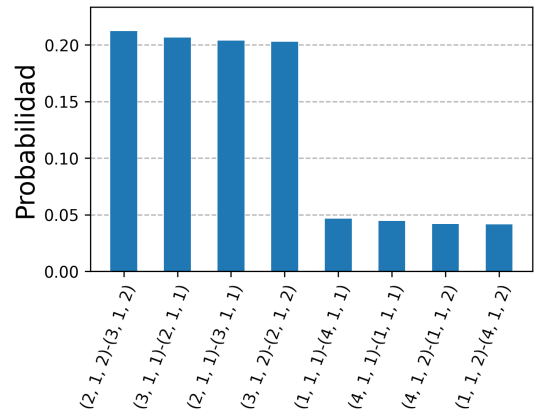


FIG. 5: Probabilidad de los estados de la función de onda del mesón con momento  $5/7$  del momento máximo del quark inicial  $(7,1,1)$ , con la notación (momento, spin, color de  $SU(2)$ ). El eje  $OY$  representa los números cuánticos del quark y antiquark que forman el mesón.

los quarks.

La variable  $x$  es la fracción del momento longitudinal del quark respecto al mesón, por lo que la del antiquark es  $1 - x$ . La función  $\chi_0(x)$  se define como:

$$\chi_0(x) = \sqrt{N} x^{\beta/2} (1-x)^{\alpha/2}, \quad (28)$$

donde  $N$  es una constante de normalización tal que

$$\int_0^1 dx \psi_{J/\Psi}^m(x) \psi_{J/\Psi}^{m'}(x) = \delta_{m,m'}. \quad (29)$$

Los exponentes  $\alpha$  y  $\beta$  son empíricamente,

$$\alpha = 4m_q^2/\kappa, \quad \beta = m_q^2/\kappa, \quad (30)$$

con  $m_q = 1,27 \text{ GeV}$  y  $\kappa = 1,34 \text{ GeV}$ . En la gráfica 5 observamos la función de onda del mesón para momento  $5/7$  del momento máximo del quark inicial.

### IX. MEDICIÓN Y RESULTADOS

En esta sección, detallamos la simulación que hemos realizado y cómo implementamos la medición de la función de fragmentación.

En primer lugar, inicializamos el sistema con un quark de momento máximo, es decir,  $P^+$ . Posteriormente, lo dejamos evolucionar en el tiempo con la ecuación (22). Utilizando un paso de Trotter de  $0,3 \text{ GeV}^{-1}$  hasta un tiempo de  $1,2 \text{ GeV}^{-1}$ , como hemos explicado en la sección VII. Para tiempos superiores, empiezan a ser relevantes los errores cometidos debido al tamaño del sistema.

Por otro lado, estudios recientes [30] estiman un radio efectivo para el mesón  $J/\psi$  de  $r_{\text{eff}}(J/\psi) = 0,321 \pm$

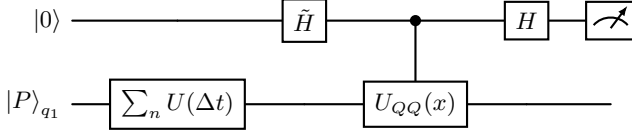


FIG. 6: Medición del valor esperado de la función de fragmentación (ecuación (16)) para un tiempo  $\Delta t$ .  $\tilde{H}$  es la puerta Hadamard (para la medición de la parte real valor real) o las puertas  $HS^\dagger$  (para la medición de la parte imaginaria).  $|P_{q1}\rangle$  es la inicialización del sistema con un quark con momento  $P$  máximo. La expresión de  $U(\Delta t)$  se proporciona en la ecuación (22), se representa en la figura 7. Por otro lado,  $n$  es el número de pasos de Trotter que realizamos, concretamente  $n = 4$ .

0,014 fm, lo que equivale a  $1,63 \pm 0,07 \text{ GeV}^{-1}$  en unidades naturales. Este valor representa una escala temporal para la formación del estado ligado.

Para realizar la medición, definimos  $U_{QQ}(x)$ . Esta puerta implementa la puerta inversa a la de preparación del mesón, es decir:

$$U_{QQ}(k) \left| \psi_{J/\Psi}^m(k) \right\rangle = |\tilde{\Omega}\rangle_q |\tilde{\Omega}\rangle_{\bar{q}} \quad (31)$$

con  $|\tilde{\Omega}\rangle = \mathcal{C}_{10}|\Omega\rangle$  y  $|\Omega\rangle$  viene dado en la ecuación (17). Es decir,  $U_{QQ}(x)$  es un operador de aniquilación para el objeto compuesto, con la salvedad de dejar inicializado el qubit de presencia.  $k$  el momento del mesón, es decir, la fracción del momento del mesón con respecto al momento inicial del quark será  $z = \frac{k}{P_+}$ . Así, podemos realizar una medición sobre los quarks-antiquarks, y si obtenemos el estado  $\tilde{\Omega}$ , significa que hemos medido un mesón.

Para realizar esta medición, se utiliza el test de Hadamard. Este consta de dos partes, dependiendo de si medimos la parte real o imaginaria. La parte real consiste en preparar un cubit auxiliar en el estado  $|0\rangle$ , aplicar una puerta Hadamard  $H$ , preparar el estado  $|\psi\rangle$  en los cubits del sistema, aplicar una puerta controlada  $U$  con el auxiliar como control, aplicar una segunda  $H$  al cubit auxiliar y medirlo. Para la parte imaginaria  $\text{Im}(\langle\psi|U|\psi\rangle)$ , se sustituye la primera Hadamard por  $HS^\dagger$  ( $S^\dagger$  deja invariante el estado  $|0\rangle$  e introduce una fase relativa de  $-i$  al estado  $|1\rangle$ ) [24]. De forma esquemática, el circuito se encuentra en la figura 6.

De este modo, se puede medir la probabilidad de obtener el mesón  $J/\psi$  al inicializar el circuito con un quark charm en el estado (7,1,1) y dejarlo evolucionar durante un tiempo  $\Delta t$ , utilizando el circuito de la figura 6. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 8.

En los dos primeros pasos no se obtuvieron resultados numéricos distintos de cero.

Dado que las funciones de fragmentación se definen formalmente para tiempos asintóticamente grandes, donde

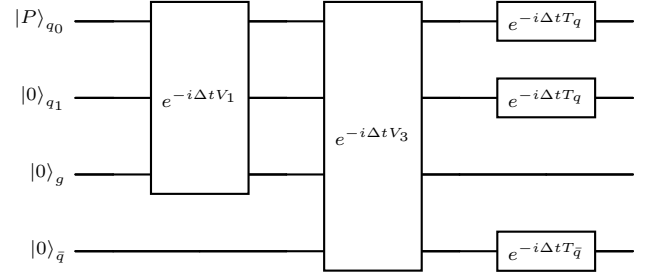


FIG. 7: Puerta  $U(\Delta t)$  descrita en la ec. (22), aplicada al iniciar el sistema con un quark de momento  $P$  máximo.

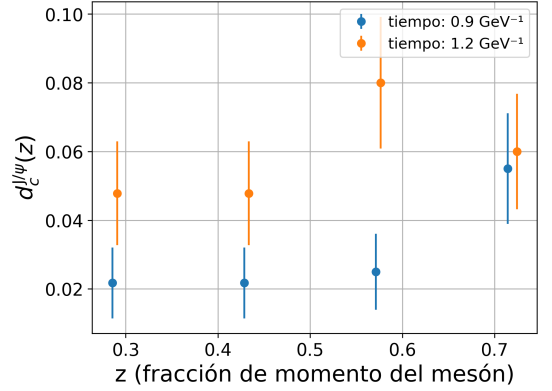


FIG. 8: Evolución temporal de la función de fragmentación del mesón aproximado por la ecuación (27) al ejecutar 200 veces el circuito de la figura 6.

el sistema ha podido evolucionar hacia un estado hadrónico bien definido, la capacidad de simulación se queda corta para describir adecuadamente la formación del mesón  $J/\psi$ , al cubrir un tiempo inferior a  $r_{\text{eff}}$ , estudiado en la sección VIII. En este régimen, el sistema aún no ha colapsado a un estado ligado, por lo que no resulta físicamente consistente comparar todavía los resultados obtenidos con las funciones de fragmentación obtenidas en fenomenología. Estas son del orden  $10^{-3}$  para la  $d_c^{J/\psi}(z)$  de la figura 3 de [31], calculadas de forma teórica, utilizando el modelo efectivo de Nambu–Jona-Lasinio (NJL). No hemos localizado ninguna extracción experimental de la función de fragmentación del mesón  $J/\psi$ , por ello, hemos comparado con estudios teóricos.

Para mejorar nuestro resultado, es necesario extender el tiempo de evolución de la simulación y ello conlleva incrementar el espacio de Fock para reducir el error debido a considerar un único gluón en el sistema.

Otra limitación del modelo empleado es el uso de una función de onda para el mesón que no minimiza el hamiltoniano empleado. Para ello, deberíamos estudiar el estado fundamental del hamiltoniano y sus primeros estados excitados en esta codificación, para encontrar una función de onda que sea consistente con el hamiltoniano utilizado. Este estudio se realizará en próximos trabajos.

## X. CONCLUSIÓN

En este trabajo se ha desarrollado un programa cuántico capaz de implementar la evolución temporal de las funciones de fragmentación de forma no perturbativa. Podemos simular la formación de estados ligados a partir de configuraciones partónicas iniciales, incorporando una codificación eficiente del sistema. El enfoque presentado sienta las bases para futuras extensiones que integren una mayor complejidad dinámica (implementación de un mayor número de partículas y de más términos del hamiltoniano de QCD) para investigar la hadronización con el potencial de los ordenadores cuánticos.

Debido a las limitaciones de los ordenadores cuánticos actuales, se ha recurrido al uso de simuladores clásicos para realizar los cálculos. Esta elección implica que el tiempo de ejecución escala exponencialmente con el número de cubits empleados. Por ello, se han requerido dos semanas de simulación utilizando el clúster del Departamento de Física Teórica para llevar a cabo un cálculo que, en un ordenador cuántico, podría completarse en un tiempo inferior a un minuto.

Por ello, se ha considerado el grupo  $SU(2)$ , una parte reducida del Hamiltoniano y discretización mínima para el momento de las partículas. No obstante, el código está preparado para emplearse en  $SU(3)$  con más partículas y más cubits para su momento, una vez que mejoren los ordenadores cuánticos.

En la simulación realizada, se ha estudiado un régimen en el que la evolución del quark inicial todavía no ha alcanzado el tiempo suficiente para recuperar con confianza el mesón. Esta limitación se debe al error debido al tamaño finito del espacio de Fock simulable, que restringe el tiempo de evolución accesible y, por tanto, impide observar la dinámica completa de hadronización.

Por último, hemos explorado diferentes posibles extensiones. En primer lugar, se propone utilizar funciones de onda obtenidas mediante la minimización del Hamiltoniano implementado. Además, vamos a incluir el resto de los términos del Hamiltoniano de QCD —como las autoenergías, bifurcaciones y procesos tipo gaviota—. A su vez, aumentar el espacio de Fock nos permitirá estudiar el proceso de hadronización para tiempos más largos, lo que implicará obtener funciones de fragmentación más fieles a las propuestas de forma teórica.

Todo esto está supeditado a la mejora continua de los ordenadores cuánticos y a las diversas técnicas de mitigación de errores, lo que permitirá estudiar regímenes no perturbativos de QCD de manera precisa.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo hubiera sido imposible sin la inestimable ayuda de J. J. Gálvez, doctorando del departamento de física teórica.

## REFERENCIAS

[1] P. A. M. Dirac, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 392 (1949).

[2] S. J. Brodsky, H.-C. Pauli, and S. S. Pinsky, *Physics Reports* **301**, 299 (1998).  
 [3] A. Deur, V. Burkert, J.-P. Chen, and W. Korsch, *Particles* **5**, 171 (2022).  
 [4] S. J. Brodsky, G. F. de T ramond, and A. Deur, *Phys. Rev. D* **81**, 096010 (2010).  
 [5] S. Lloyd, *Science* **273**, 1073 (1996).  
 [6] E. A. Martinez and et al., *Nature* **534**, 516–519 (2016).  
 [7] J. Barata, N. Mueller, A. Tarasov, and R. Venugopalan, *Physical Review A* **103**, 042410 (2021).  
 [8] N. M. de Arenaza, J. J. Gálvez-Viruet, and F. J. Llanes-Estrada, *Eur. Phys. J. A* **60**, 216 (2024).  
 [9] K. Lee, F. Turro, and X. Yao, (2024), [arXiv:2409.13830](https://arxiv.org/abs/2409.13830) [[hep-ph](#)].  
 [10] S. P. Jordan, K. S. M. Lee, and J. Preskill, *Science* **336**, 1130 (2012).  
 [11] J. D. Whitfield, J. Biamonte, and A. Aspuru-Guzik, *Molecular Physics* **109**, 735 (2011).  
 [12] T. Li, H. Xing, and D.-B. Zhang, (2024), [arXiv:2406.05683](https://arxiv.org/abs/2406.05683) [[hep-ph](#)].  
 [13] W. Qian, R. Basili, S. Pal, G. Luecke, and J. P. Vary, *Phys. Rev. Res.* **4**, 043193 (2022).  
 [14] D. Kotlorz and O. V. Teryaev, (2025), [arXiv:2502.00733](https://arxiv.org/abs/2502.00733) [[hep-ph](#)].  
 [15] J. Gao, X. Shen, H. Xing, Y. Zhao, and B. Zhou, (2025), [arXiv:2502.17837](https://arxiv.org/abs/2502.17837) [[hep-ph](#)].  
 [16] A. Majumder and X.-N. Wang, *Phys. Rev. D*, 014007 (2004).  
 [17] S. Meissner, A. Metz, and D. Pitonyak, *Physics Letters B* **690**, 296 (2010).  
 [18] J. C. Collins and D. E. Soper, *Nuclear Physics B* **194**, 445 (1982).  
 [19] J. Collins, *Foundations of Perturbative QCD* (Cambridge University Press, 2023).  
 [20] D.-J. Yang and H.-n. Li, *Phys. Rev. D* **102**, 036023 (2020).  
 [21] J. Collins and T. C. Rogers, *Phys. Rev. D* **109**, 016006 (2024).  
 [22] J. J. Gálvez-Viruet and F. J. Llanes-Estrada, *Phys. Rev. D* **110**, 116018 (2024).  
 [23] P. Jordan and E. Wigner, *Zeitschrift f r Physik* **47**, 631 (1928).  
 [24] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition* (Cambridge University Press, 2010).  
 [25] K. T. Matchev, R. M. Soni, J. R. Torres, and J. Tzeffron, (2024), [arXiv:2503.10204](https://arxiv.org/abs/2503.10204) [[quant-ph](#)].  
 [26] N. M. L. et.al, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **114**, 3305 (2017).  
 [27] H. Amer, E. Piliouras, E. Barnes, and S. E. Economou, (2025), [arXiv:2504.09767](https://arxiv.org/abs/2504.09767) [[quant-ph](#)].  
 [28] H. F. Trotter, *Proceedings of the American Mathematical Society* **10**, 545 (1959).  
 [29] M. Li, Y. Li, G. Chen, T. Lappi, and J. P. Vary, *The European Physical Journal C* **82** (2022).  
 [30] D. Hatton, C. Davies, and G. Lepage, *Physical Review D* **102** (2020).  
 [31] A. A. Prokhorov, A. V. Lipatov, M. A. Malyshev, and S. P. Baranov, *EPJC* **80** (2020).