

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**

**Máster en Física Teórica**



**TRABAJO DE FIN DE MÁSTER**

**Cálculo de la amplitud kaón-nucleón en ChPT  
unitarizada**

**Calculation of the kaon-nucleon amplitude in unitarized  
ChPT**

**Alejandro Canoa Monsalve**

Directores

José Ramón Peláez Sagredo  
Jacobó Ruiz de Elvira Carrascal

Curso académico 2022-23

# Cálculo de la amplitud kaón-nucleón en ChPT unitarizada

Alejandro Canoa Monsalve and Tutors: José Ramón Peláez Sagredo, Jacobo Ruiz de Elvira Carrascal  
*Departamento de Física Teórica. Universidad Complutense de Madrid*  
(Dated: 7 de septiembre de 2023)

En el presente trabajo estudio la interacción kaón-nucleón en onda  $s$  en el sector de extrañeza  $S = -1$  por medio de la Teoría de Perturbaciones Quiral unitarizada, y en particular, la zona de bajas energías y los estados atómicos a los que da lugar. Por ello, explico cómo extender la teoría de perturbaciones quiral para incluir el acoplo a bariones, así como las modificaciones que introduce el proceso de unitarización. Seguidamente, calculo secciones eficaces y longitudes de dispersión a bajas energías. El trabajo concluye con la descripción de la situación actual del problema, incluyendo su relación con los átomos kaónicos.

## I. INTRODUCCIÓN

A bajas energías, la teoría que explica la interacción fuerte, la Cromodinámica Cuántica (QCD), es no perturbativa, lo que obliga al empleo de teorías efectivas. Estas se basan en considerar todos los términos que, dependiendo solo de los grados de libertad relevantes en una cierta escala cinemática, sean compatibles con la simetría del problema, y en establecer un criterio de contaje de potencias consistente que nos permita realizar un desarrollo perturbativo.

La teoría efectiva a bajas energías de QCD es la Teoría de Perturbaciones Quiral (ChPT), construida a partir de una expansión en energías (equivalentemente, en masas y momentos) de un lagrangiano para los llamados bosones de Nambu-Goldstone (NGB). Estos son los modos sin masa que aparecen cuando un sistema físico, definido por un lagrangiano invariante bajo un grupo de simetría  $G$ , posee un estado de vacío que no es invariante bajo  $G$ , únicamente bajo un subgrupo suyo  $H$ . En ChPT,  $G = SU(3)_L \times SU(3)_R$  es el grupo quiral, que es una simetría aproximada del lagrangiano de QCD, y  $H = SU(3)_{L+R} = SU(3)_V$  es el subgrupo que deja el vacío invariante. Este patrón de ruptura espontánea de simetría queda refrendado experimentalmente por la ausencia de degeneración entre los multipletes vectoriales y axiales, y el gap de masa entre el octete de mesones pseudoescalares ( $\eta, K, \pi$ ) y el resto de hadrones. Estos mesones, pese a tener una pequeña masa debido a la ruptura explícita de simetría que introduce la masa de los quark ligeros, se interpretan como los grados de libertad de ChPT. Además, bajo condiciones que garanticen que el momento transferido sea pequeño, ChPT resulta adecuada para describir la dinámica mesón-barión, como veremos en la sección II.

El formalismo anterior tiene también limitaciones, ya que no es capaz de generar resonancias al tratarse, básicamente, de una expansión polinómica en momentos y masas. Un refinamiento de la teoría anterior que solventa este problema es la Teoría de Perturbaciones Quiral unitarizada, cuyas particularidades se exponen

en la sección III.

El presente trabajo presenta tres objetivos

- Calcular la amplitud mesón barión a orden más bajo, a lo que dedicaré la sección II.
- Desarrollar la Teoría de Perturbaciones Quiral unitarizada, que partiendo del lagrangiano a orden más bajo, hace uso de las ligaduras que impone la unitariedad de la matriz  $S$  para construir un formalismo que involucra los distintos canales de desintegración. Calcularé con este formalismo la longitud de dispersión y la sección eficaz  $K^-p$ , comparándolas con datos experimentales (secciones III y V).
- Describir el estado del arte en el estudio teórico y la situación experimental en la interacción kaón-nucleón a bajas energías (secciones IV y VI).

## II. ACOPLO A BARIONES EN CHPT

### A. Lagrangiano efectivo mesón-barión a orden más bajo

El lagrangiano siguiente describe la interacción mesón barión a orden más bajo en ChPT [1]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\phi B}^1 = & Tr(\bar{B}(i\not{D} - M_0)B) - \frac{D}{2}Tr(\bar{B}\gamma^\mu\gamma_5\{u_\mu, B\}) \\ & - \frac{F}{2}Tr(\bar{B}\gamma^\mu\gamma_5[u_\mu, B]). \end{aligned} \quad (1)$$

Aquí,  $B = \sum_{i=1}^8 B_i \lambda_i$ ,  $\lambda_i = T_i/2$ , parametriza el octete de bariones ligeros  $J = \frac{1}{2}^+$ , con  $T_i$  las matrices de Gell-Mann generadoras del álgebra de  $SU(3)$  y cada  $B_i = B_i(x)$  un espinor de Dirac que representa campos fermiónicos locales independientes,

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\Lambda \end{pmatrix}, \quad (2)$$

Los campos de los NGB  $\phi_i(x)$  aparecen en el término axial  $u_\mu$  y en la derivada covariante  $D_\mu$  a través de la conexión  $\Gamma_\mu$

$$D_\mu B = \partial_\mu B + [\Gamma_\mu, B], \quad \Gamma_\mu = \frac{1}{2}(u^\dagger \partial_\mu u + u \partial_\mu u^\dagger), \quad (3)$$

$$u_\mu = i(u^\dagger \partial_\mu u - u \partial_\mu u^\dagger) = iu^\dagger \partial_\mu U u^\dagger, \quad (4)$$

donde  $U$ , descrita por

$$U(x) = u^2(x) = \exp\left(\frac{i\sqrt{2}\phi(x)}{f}\right), \quad (5)$$

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^8 \lambda_i \phi_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta \end{pmatrix}, \quad (6)$$

es una representación matricial de los NGB sobre la que incidiremos más adelante. También encontramos las matrices de Dirac  $\gamma^\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , y  $\gamma^5$  con las que se construyen invariantes Lorentz y bajo paridad, respectivamente. Los términos de la Ec. 1 no fijados por la simetría son la constante de desintegración mesónica  $f$  (contenida dentro de la parametrización para los NGB), la masa de los bariones en el límite quiral  $M_0$  y dos constantes de baja energía,  $B$  y  $F$ , cuyo valor se determina mediante ajuste a las desintegraciones semileptónicas  $B \rightarrow B' + e^- + \bar{\nu}_e$  a nivel árbol [1].

La construcción explícita del anterior lagrangiano, así como su interpretación geométrica, supera los objetivos del trabajo. Sin entrar en detalle, hace uso de la introducción de campos externos (propuesta por Gasser y Leutwyler [2]), en un formalismo pensado para procesos más allá de la dispersión mesón-barión que involucren acoplos a teorías gauge locales, como al acoplar a los NGB bosones gauge electrodebiles, lo que también explica la presencia de la derivada covariante. Una introducción a este formalismo puede encontrarse también en [1]. De la expresiones generales, solo me he quedado para la Ec. (1) con los términos relevantes para la dispersión mesón-barión, que son los que aparecen en las Ecs. (3) y (4).

Sin embargo, podemos motivar la Ec. (1), viendo que tiene el contejo de potencias correcto, es invariante Lorentz y no cambia bajo transformaciones quirales, si bien no esbozamos todos los pasos. En primer lugar, respecto a la ordenación de los lagrangianos, nótese que al acoplarse los bariones (fermiones) a las estructuras de Dirac ( $\gamma^\mu$ ), basta con un término derivativo (equivalentemente, un momento) para tener dinámica no trivial; esto es

$$\mathcal{L}_{\phi B} = \mathcal{L}_{\phi B}^{(1)} + \mathcal{L}_{\phi B}^{(2)} + \dots, \quad \mathcal{L}_{\phi B}^{(k)} \sim O(p^k), \quad (7)$$

con lo que el lagrangiano a orden más bajo tiene orden  $O(p)$ . Teniendo en cuenta que  $M_0 \sim O(p)$ , se ve que cada

sumando es de orden  $p$ , pues tiene una derivada, bien en los campos bariónicos, bien en los NGB al expandir  $u$  y  $U$ .

Por otro lado, para estudiar la invariancia quiral, resulta esencial ver el comportamiento bajo tales transformaciones de los NGB. Los campos de los NGB están en isomorfismo con el grupo cociente  $G/H = \{gH : g \in G\}$ . Intuitivamente, esto se entiende notando que los NGB son excitaciones de vacío por la acción de los generadores rotos de la simetría,  $|\chi\rangle = e^{iT_A^a \theta_a} |0\rangle = \chi(x) |0\rangle$ , y que existe una ambigüedad al definirlos. En efecto, al aplicar  $h \in H$ , se tiene que  $h(x) |0\rangle = |0\rangle$ , luego todos los elementos de  $\{\chi h : h \in H\}$  representan el mismo estado físico. Lo relevante es que al aplicar una transformación quiral  $g = (g_L(x), g_R(x)) \in G$  sobre un representante de los NGB, llamémoslo  $\bar{\chi}(x) = (\chi_L(x), \chi_R(x))$  no siempre se obtiene un representante del coset. Para garantizarlo, necesitamos aplicar un campo compensador por la derecha

$$(\chi_L(x))' = g_L(x) \chi_L(x) h^\dagger(x), \quad (\chi_R(x))' = g_R(x) \chi_R(x) h^\dagger(x). \quad (8)$$

Pero usando que  $hh^\dagger = I$ , podemos reunirlo bajo una ecuación

$$U(x) = \chi_R(x) \chi_L^\dagger(x) \xrightarrow{g} U'(x) = g_R(x) U(x) g_L(x). \quad (9)$$

Ahora, siempre podemos elegir un representante del coset tal que  $\chi_R(x) = \chi_L(x) = u(x)$ , con  $u$  de la Ec. (5)[3]. Entonces  $u$  se transforma como

$$(u(x))' = g_R(x) u(x) h^\dagger(x) \quad (10)$$

Si imponemos que  $B$  se transforma del modo siguiente

$$B(x) \xrightarrow{g} (h(x)^{-1})^\dagger B(x) h(x)^{-1}, \quad (11)$$

de la definición de  $D_\mu B$  y  $\Gamma_\mu$  dada en las Ecs. (3) y (4), y de las propiedades de transformación de  $u, U$  y  $B$  se puede ver que

$$D_\mu B(x) \xrightarrow{g} (h(x)^{-1})^\dagger D_\mu B(x) h(x)^{-1}, \quad (12)$$

$$u_\mu(x) \xrightarrow{g} (h(x)^{-1})^\dagger u_\mu(x) h(x)^{-1}, \quad (13)$$

y por la propiedad cíclica de la traza, uno llega a la invariancia bajo transformaciones quirales del lagrangiano de la Ec. (1).

## B. Cálculo de la amplitud mesón barión a orden más bajo en ChPT

En primer lugar, establezco la notación que emplearé en los cálculos. Denoto por  $M_i$  ( $m_i$ ) la masa de un barión (mesón)  $i$ ,  $p_{i\mu}$  ( $k_{i\mu}$ ) al 4-momento del barión (mesón)  $i$ ,  $k_i$  al módulo del 4-momento del mesón  $i$ , y  $E_i$  la energía del barión  $i$ . Usualmente, las tomaré en el sistema centro de

masas (CM), explicitando la dependencia en la variable de Mandelstan  $s = (p_1 + k_1)^2$

$$k_i(s) = \sqrt{\frac{(s - (M_i + m_i)^2)(s - (M_i - m_i)^2)}{4s}}, \quad (14)$$

$$E_i(s) = \frac{s - (M_i^2 - m^2)}{2\sqrt{s}}. \quad (15)$$

Una vez fijada la cinemática, procedamos al cálculo. Expandiendo en  $\phi$  las Ecs. (3) y (4), y quedándonos con los términos que involucren campos, sus derivadas o, a lo sumo, de la forma  $\phi\partial\phi$ , tenemos

$$u \sim I + i\frac{\phi}{\sqrt{2}f}, \quad u^\dagger \sim I - i\frac{\phi}{\sqrt{2}f}, \quad U \sim I + i\frac{\phi\sqrt{2}}{f}, \quad (16)$$

$$\partial_\mu u \sim \frac{i}{\sqrt{2}f}\partial_\mu\phi - \frac{1}{4f^2}(\partial_\mu\phi\phi + \phi\partial_\mu\phi), \quad (17)$$

$$\partial_\mu u^\dagger \sim -\frac{i}{\sqrt{2}f}\partial_\mu\phi - \frac{1}{4f^2}(\partial_\mu\phi\phi + \phi\partial_\mu\phi), \quad (18)$$

$$\partial_\mu U \sim \frac{i\sqrt{2}}{f}\partial_\mu\phi - \frac{1}{f^2}(\partial_\mu\phi\phi + \phi\partial_\mu\phi), \quad (19)$$

donde es importante recordar que  $[\phi, \partial_\mu\phi] \neq 0$ . En consecuencia, tenemos las siguientes expresiones para la conexión y  $u_\mu$

$$\Gamma_\mu \sim \frac{1}{4f^2}[\phi, \partial_\mu\phi], \quad u_\mu \sim \frac{-\sqrt{2}}{f}\partial_\mu\phi, \quad (20)$$

y surgen dos contribuciones al lagrangiano de interacción al orden más bajo, que represento en la figura 1. La que involucra la conexión de la derivada covariante es un término de contacto conocido como de Weinberg-Tomozawa (WT), y corresponde al diagrama de la figura (1a).

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{MB}^{WT} &= \frac{i}{4f^2}Tr(\bar{B}\gamma^\mu(\phi\partial_\mu\phi - \partial_\mu\phi\phi)B \\ &\quad - \bar{B}\gamma^\mu B(\phi\partial_\mu\phi - \partial_\mu\phi\phi)). \end{aligned} \quad (21)$$

La contribución a la amplitud de la parte mesónica viene dada por la suma de momentos de los mesones. Para verlo, nótese que las derivadas de los campos mesónicos se traducen en términos de momento  $k_\mu$  en las reglas de Feynman ( $-ik_\mu$  si la partícula es entrante,  $+ik_\mu$  si es saliente). Así, tenemos un signo menos al haber un mesón entrante y otro saliente, que se compensa con el que encontramos en la estructura mesónica,  $\phi\partial_\mu\phi - \partial_\mu\phi\phi$ . Además, la parte fermiónica contribuye con el bilineal usual  $\bar{u}\gamma^\mu u$ , y la traza da lugar a coeficientes  $C_{ij}$ , que dependen de los dos estados mesón-barion  $i, j$  en cuestión. Así, la amplitud de dispersión a orden más bajo (LO), que denotamos por  $V$ , viene dada por

$$V_{ij}^{WT} = -\frac{C_{ij}}{4f^2}\bar{u}_{B_j}(p_j)\gamma^\mu u_{B_i}(p_i)(k_{i\mu} + k_{j\mu}), \quad (22)$$

donde  $V_{ij} = \langle i|V|j\rangle$ , con  $i, j$  los estados mesón-barión inicial y final cuya dispersión estudiamos.

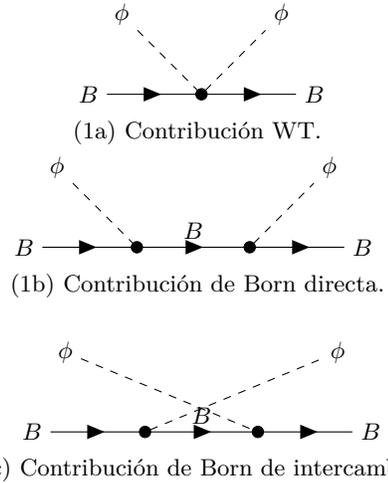


Figura 1. Contribuciones a la amplitud a orden más bajo presentes en  $L_{\phi B}^1$ .

Por otro lado, la contribución proveniente de  $u_\mu$  al lagrangiano de interacción a orden más bajo se denomina contribución de Born, y viene dada por

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{MB}^{Born} &= -\frac{1}{f\sqrt{2}}(DTr(\bar{B}\gamma^\mu\gamma_5\{\partial_\mu\phi, B\}) \\ &\quad + FTr(\bar{B}\gamma^\mu\gamma_5[\partial_\mu\phi, B])). \end{aligned} \quad (23)$$

Aquí, al computar las trazas, tendremos sumandos de la forma  $\bar{B}_a\partial_\mu\phi_b B_c$ , que han de conectar los estados inicial y final, que constan de un barión y un mesón respectivamente. Por ello, hemos de ir a segundo orden en el lagrangiano de interacción, contrayéndose dos campos bariónicos para dar un propagador, como he ilustrado en las Figs. (1b) y (1c). Obsérvese de estas que tendremos una contribución directa y otra de intercambio,

$$V_{ij}^{Born} \sim \sum_{p_k^2=s,t} N_{ch}\bar{u}_{B_j}\gamma_5 k_j \frac{\not{p}_k + M_k}{p_k^2 - M_k^2} \gamma_5 k_i u_{B_i}(p_i) \quad (24)$$

Con  $N_{ch}$  un factor que depende de  $B$  y  $F$  y de los canales involucrados. En la expresión anterior hay dos sumas: la correspondiente al diagrama directo (Fig. (1b)), donde el cuadrado del momento del mediador es precisamente la variable de Mandelstan  $s = (p_i + k_i)^2$ , y el de intercambio (Fig.(1c)), donde estamos en canal  $t = (p_i - k_j)^2$ . Es interesante notar que los coeficientes  $N_{ch}$ , si bien a priori deben incluir a todos los bariones en la propagación, finalmente no dependen de todos ellos (al menos en el diagrama directo), por consideraciones de simetría (en el caso mencionado, los mediadores deben de ser bariones neutros con extrañeza  $S = -1$ , esto es,  $\Lambda$  y  $\Sigma^0$ ). Esta contribución es mucho más relevante en onda  $p$  que en onda  $s$ , por lo que despreciaremos esta última en esta sección, lo que fijará la precisión que alcanzaremos con nuestras aproximaciones. Su

efecto, y el de otros términos superiores, los comentaré en la sección VI al describir otros cálculos en la literatura.

Finalmente, al proyectar en onda  $s$ , obtengo la siguiente expresión para la amplitud WT [4]

$$V_{ij}(s) = -\frac{C_{ij}}{4f^2}(2\sqrt{s} - M_i - M_j) \sqrt{\frac{M_i + E_i(s)}{2M_i}} \sqrt{\frac{M_j + E_j(s)}{2M_j}}. \quad (25)$$

### III. CHPT UNITARIZADA

Un refinamiento del resultado a primer orden lo podemos lograr mediante la ChPT unitarizada. La idea es que podemos resumar, de forma simple, una serie infinita de diagramas que da cuenta de la aparición de canales acoplados en las líneas internas, usando únicamente las amplitudes del apartado anterior (que a continuación llamaremos potenciales) y una función de loop. De esta manera, podemos aumentar la región de aplicabilidad de la teoría allí donde la unitariedad es más relevante, satisfaciéndola exactamente, e incluir la interacción con otros canales sin violar unitariedad.

En el formalismo de unitarización inelástica, consideraré que los estados mesón-barión ligeros que se acoplan a  $K^-p$  son los siguientes 8:

$$K^-p, \bar{K}^0n, \pi^0\Lambda, \pi^0\Sigma^0, \pi^+\Sigma^-, \pi^-\Sigma^+, \eta\Lambda, \eta\Sigma^0,$$

que comparten sus mismos números cuánticos (carga neutra y extrañeza  $S=-1$ ). Otros autores [5] también incluyen canales que involucran el barión  $\Xi$  y que también tienen los números cuánticos anteriores. No obstante, tal y como observamos en la figura 2, donde represento la energía umbral de los estados mesón barión neutros con extrañeza  $S = -1$ , los estados que contienen  $\eta$  y  $\Xi$  se encuentran notablemente por encima del umbral de  $K^-p$  ( $\approx 300 - 400$  MeV más arriba). El motivo por el que yo opto por incluir los estados con  $\eta$  es porque interaccionan fuertemente con  $K^-p$ , mientras que los estados con  $\Xi$  se encuentran muy suprimidos.

#### A. Unitariedad en canales acoplados

La unitariedad de la matriz  $S$  ( $SS^\dagger = I$ ,  $S = I + iT$ ) se traduce en la relación siguiente para las amplitudes

$$T_{if} - T_{fi}^* = i \sum_n T_{in} T_{fn}^* (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_f). \quad (26)$$

Esta expresión puede reescribirse de modo sencillo utilizando ondas parciales. Definimos la amplitud de la onda parcial  $t_{IJ}$ , caracterizada por el momento angular  $J$  y el

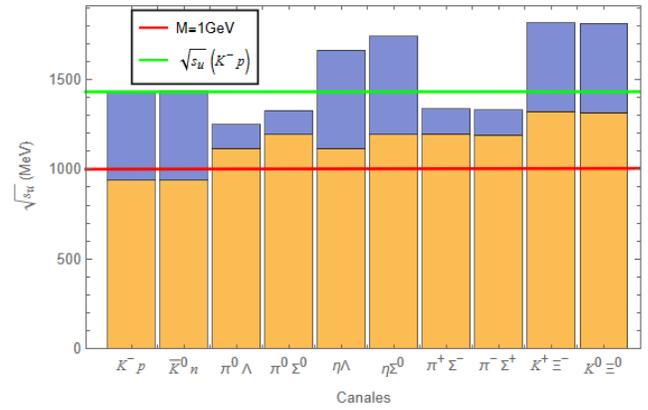


Figura 2. Representación de  $\sqrt{s_u} = M + m$  para cada canal. En naranja (azul) se representan las masas de los bariones (mesones) de cada canal, mientras que las líneas roja y verde indican respectivamente el valor típico de escala de ChPT y el valor umbral  $\sqrt{s_u}(K^-p)$ , lo que permite observar cómo los canales con  $\eta$  y  $\Xi$  son considerablemente más masivos.

isospín  $I$ ,

$$t_{IJ}(s) = \frac{1}{32\pi} \frac{1}{K} \int_{-1}^{+1} d\cos\theta P_j(\cos\theta) T_I(s, t, u), \quad (27)$$

con  $P_j$  el  $j$ -ésimo polinomio de Legendre,  $T_I$  la amplitud para un cierto canal de isospín definido y  $K$  un factor que da cuenta de si estamos ante partículas idénticas[6].

Empleando la reversibilidad de  $T$  (esto es,  $T_{if} = T_{fi}$ ) y haciendo uso de las relaciones de ortogonalidad y completitud de los polinomios de Legendre, obtenemos a partir de la Ec. (26) la condición de unitariedad para la dispersión elástica de un único canal, que consta de una única partícula  $|1\rangle = a$

$$\text{Im } t_{IJ} = \sigma_a(s) |t_{IJ}|^2, \quad (28)$$

donde  $\sigma_a(s)$  es el espacio de fase de la partícula  $a$ .

Esta puede generalizarse al caso de varios canales  $|1\rangle, \dots, |n\rangle$  acoplados (y accesibles a una energía dada), los cuales consten de dos partículas distintas  $a, b$  en cada estado usando una notación matricial

$$T(s) = \begin{pmatrix} t_{11}(s) & \dots & t_{1n}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1}(s) & \dots & t_{nn}(s) \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$\Sigma(s) = \text{diag}(\sigma_1(s) \dots \sigma_n(s)), \quad (30)$$

donde en este caso  $\sigma_i(s)$  es el espacio de fases de dos partículas  $|i\rangle = |a_i b_i\rangle$

$$\sigma_{a_i b_i}(s) = \sqrt{\left(1 - \frac{(M_{a_i} + M_{b_i})^2}{s}\right) \left(1 - \frac{(M_{a_i} - M_{b_i})^2}{s}\right)}. \quad (31)$$

De este modo, para el caso de varios canales la Ec. (28) queda modificada

$$\text{Im } T(s) = T(s)\Sigma(s)T^*(s). \quad (32)$$

Las ondas parciales en el caso mesón-barión se obtienen como una expansión en momentos  $T(s) = T_1(s) + T_2(s) + \dots$ ,  $T_k(s) \sim O(p^k)$ , con lo que obtenemos perturbativamente:

$$\text{Im } T_1(s) = 0, \text{ Im } T_2(s) = T_1(s)\Sigma(s)T_1^*(s) \dots, \quad (33)$$

de manera que la unitariedad no se cumple exactamente, pero sí orden a orden.

### B. Amplitud unitarizada y ecuación de Bethe-Salpeter

El método de unitarización busca extender la contribución de contacto WT para incluir estados intermedios físicos adicionales. Esta posibilidad es la que genera la parte imaginaria que aparece en la condición de unitariedad Ec. (32). Perturbativamente, esto se corresponde con diagramas burbuja, como en la Fig. (3). Cuando la interacción es fuerte y la unitariedad se satura, estos diagramas son los que dominan.

Considerando solo esos diagramas burbuja, si denotamos por  $G_{kl}$  a la función de loop que conecta los estados  $k$  y  $l$ , y suponemos que cada sumando de esta contribución fuese factorizable, obtendríamos (llamando a  $i, j$  los subíndices de los canales inicial y final)

$$T_{ij} = V_{ij} + V_{ik}G_{km}V_{mj} + V_{ik}G_{km}V_{mn}G_{nl}V_{lj} + \dots, \quad (34)$$

donde estamos empleando el convenio de suma de índices de Einstein. La ecuación anterior está representada en la Fig. (3). Todos los sumandos salvo el primero comparten el factor  $V_{ik}G_{km}$ , y sacando factor común, podemos resumir la serie para obtener la ecuación algebraica de Bethe-Salpeter,

$$T_{ij} = V_{ij} + V_{ik}G_{km}T_{mj}. \quad (35)$$

Sin embargo, esta factorización no es inmediata. Como se discute en [7], la clave reside en que el vértice de interacción puede separarse en una parte on-shell y otra off-shell. Se prueba allí que esta última puede reabsorberse mediante renormalización de los acoplos y las masas. Así, para la dependencia en  $s$  solo es relevante la contribución on-shell, que puede sacarse fuera de la integral que define el loop. Finalmente, la función de loop corresponde a una matriz diagonal cuyos elementos son integrales de la forma

$$G_{kk} = i \int \frac{d^4 q_k}{(2\pi)^4} \frac{2M_k}{(P-q)^2 - M_k^2 + i\epsilon} \frac{1}{q_k^2 - m_k^2}, \quad (36)$$

$$\Sigma = \text{Im } G, \quad (37)$$

donde  $P$  denota el momento entrante,  $q$  el momento del loop (que tomaremos en el centro de masas), y  $M_k$  y  $m_k$  las masas del barión y el mesón del estado  $k$  respectivamente. Esta integral es divergente, por lo que necesita ser regularizada. En [7] se ve también que esto conduce a una dependencia de una escala  $\mu$  y la presencia de constantes de sustracción  $c_k(\mu)$  que deben determinarse mediante un ajuste a los datos experimentales.

$$G_{kk} = \frac{2M_l}{16\pi^2} \left\{ c_k(\mu) + \log \frac{M_k^2}{\mu^2} + \frac{m_k^2 - M_k^2 + s}{2s} \log \frac{m_k^2}{M_k^2} \right. \\ \left. + \frac{q}{\sqrt{s}} [\log(s - (M_k^2 - m_k^2) + 2q\sqrt{s}) + \log(s + (M_k^2 - m_k^2) + 2q\sqrt{s}) + \log(-s + (M_k^2 - m_k^2) + 2q\sqrt{s}) - \log(-s - (M_k^2 - m_k^2) + 2q\sqrt{s})] \right\}. \quad (38)$$

Nótese que son los logaritmos dependientes de  $s$  los que introducen una posible parte compleja en la amplitud procedentes del loop. En la práctica, la integral regularizada se aproxima introduciendo un trimomento de corte.

Despejando la matriz  $T$  de la Ec. (35), uno obtiene

$$T_U = (I - VG)^{-1}V. \quad (39)$$

En primer lugar, la amplitud hallada satisface unitariedad exactamente, esto es, cumple la Ec. (32). Para verlo, nótese que

$$\text{Im } T_U = \text{Im}((I - VG)^{-1})V, \quad (40)$$

pues  $V$ , que es la amplitud a orden más bajo, es real. Por otro lado, para una matriz compleja invertible  $A$  se cumple que

$$\text{Im}(A^{-1}) = A^{-1}\text{Im}(A)(A^{-1})^*. \quad (41)$$

La demostración consiste en tomar la igualdad  $AA^{-1} = I$ , y quedarnos con la parte imaginaria de la misma,

$$\text{Re}(A)\text{Im}(A^{-1}) + \text{Im}(A)\text{Re}(A^{-1}) = 0 \quad (42)$$

Sumando y restando el término  $i\text{Im}(A)\text{Im}(A^{-1})$ , y usando que  $A = \text{Re}(A) + i\text{Im}(A)$ ,  $A^* = \text{Re}(A) - i\text{Im}(A)$ , llegamos a la Ec. (41). Tomando ahora  $A = I - VG$ , empleando que

$$\text{Im}(I - VG) = -V\text{Im}(G) = V\Sigma, \quad (43)$$

y teniendo en cuenta que  $V = V^*$ , por ser  $V$  real, basta sustituir las Ecs. (41) y (43) en la Ec. (40) para comprobar la unitariedad.

En segundo lugar, nótese que al reexpandir la Ec. (39) en potencias de  $V$ ,

$$T_U \sim (I + VG + VGV + \dots)V = V + VGV + \dots, \quad (44)$$

se observa que, bajo la hipótesis de factorización y de que los diagramas dominantes en cada orden son los que saturan unitariedad (esto es,  $T_1 = V, T_2 = VGV, \dots$ ) no solo se recupera el orden más bajo ( $V$ ), si no que respetamos la expansión quiral orden a orden.

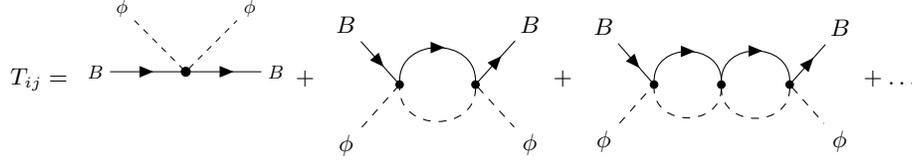


Figura 3. Representación diagramática de la amplitud unitarizada.

### C. Cómputo de la amplitud unitarizada en base de isospín

En primer lugar, realizaremos el cálculo en la base de isospín  $I = 0, 1$ , que es la involucrada en la expresión en las ondas parciales, y que nos aporta la ventaja computacional de reducir el tamaño de las matrices a invertir (en vez de tratar con una matrix  $8 \times 8$ , nos bastará con matrices  $3 \times 3$  y  $4 \times 4$ ). En el límite de isospín, trabajaremos con masas promedio para los estados  $\bar{K}(K^-, \bar{K}^0)$ ,  $N(p, n)$ ,  $\pi(\pi^+, \pi^0, \pi^-)$ ,  $\Sigma(\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-)$ . Concretamente,  $m_\pi \approx 138, 039$  MeV,  $m_\eta \approx 547, 86$  MeV,  $m_{\bar{K}} = 495, 64$  MeV,  $M_N \approx 938, 92$  MeV,  $M_\Lambda \approx 1115, 68$  MeV,  $M_\Sigma \approx 1193, 15$  MeV. Además, la Ec. (22) se desdobra en las siguientes dos,

$$V_{ij}(I = 0) = -\frac{D_{ij}}{4f^2} \bar{u}_{B_j}(p_j) \gamma^\mu u_{B_i}(p_i) (k_{i\mu} + k_{j\mu}), \quad (45)$$

$$V_{ij}(I = 1) = -\frac{F_{ij}}{4f^2} \bar{u}_{B_j}(p_j) \gamma^\mu u_{B_i}(p_i) (k_{i\mu} + k_{j\mu}). \quad (46)$$

También la Ec. (25) se divide en dos,

$$V_{ij}(I = 0) = -\frac{D_{ij}}{4f^2} (2\sqrt{s} - M_i - M_j) \sqrt{\frac{M_i + E_i}{2M_i}} \sqrt{\frac{M_j + E_j}{2M_j}} \quad (47)$$

$$V_{ij}(I = 1) = -\frac{F_{ij}}{4f^2} (2\sqrt{s} - M_i - M_j) \sqrt{\frac{M_i + E_i}{2M_i}} \sqrt{\frac{M_j + E_j}{2M_j}} \quad (48)$$

donde los nuevos coeficientes  $D_{ij}$  y  $F_{ij}$  se obtienen a partir de los  $C_{ij}$  usando los coeficientes de Clebsch-Gordan. En concreto,

$$\begin{cases} |\bar{K}^0 n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\bar{K}N, I = 1\rangle + |\bar{K}N, I = 0\rangle), \\ |K^- p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\bar{K}N, I = 1\rangle - |\bar{K}N, I = 0\rangle), \end{cases} \quad (49)$$

$$\begin{cases} |\pi^+ \Sigma^- \rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}} |\pi\Sigma, I = 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |\pi\Sigma, I = 1\rangle \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} |\pi\Sigma, I = 2\rangle, \\ |\pi^0 \Sigma^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |\pi\Sigma, I = 0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi\Sigma, I = 1\rangle, \\ |\pi^- \Sigma^+ \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |\pi\Sigma, I = 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\pi\Sigma, I = 1\rangle \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} |\pi\Sigma, I = 2\rangle, \end{cases} \quad (50)$$

$$|\eta\Lambda\rangle = |\eta\Lambda, I = 0\rangle, \quad (51)$$

$$|\pi^0\Lambda\rangle = |\pi\Lambda, I = 1\rangle, \quad |\eta\Sigma^0\rangle = |\eta\Sigma, I = 1\rangle. \quad (52)$$

En el límite de isospín, los estados con isospín distinto se desacoplan. Denotando por  $T_{i,j}^I$  al elemento  $\langle i|T|j\rangle$ , donde el índice  $I$  únicamente aparece en la base de isospín, ilustramos las relaciones para  $I = 0, 1$ .

$$\begin{cases} T_{\bar{K}N, \bar{K}N}^0 = \frac{1}{2} (T_{K^- p, K^- p} + T_{\bar{K}^0 n, \bar{K}^0 n} + 2T_{K^- p, \bar{K}^0 n}), \\ T_{\bar{K}N, \pi\Sigma}^0 = -\frac{1}{\sqrt{6}} (T_{K^- p, \pi^+ \Sigma^-} + T_{K^- p, \pi^0 \Sigma^0} + \\ T_{K^- p, \pi^- \Sigma^+} + T_{\bar{K}^0 n, \pi^+ \Sigma^-} + T_{\bar{K}^0 n, \pi^0 \Sigma^0} + T_{\bar{K}^0 n, \pi^- \Sigma^+}), \\ T_{\bar{K}N, \eta\Lambda}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (T_{\bar{K}^0 n, \eta\Lambda} + T_{K^- p, \eta\Lambda}), \\ T_{\pi\Sigma, \pi\Sigma}^0 = \frac{1}{3} (T_{\pi^+ \Sigma^-, \pi^+ \Sigma^-} + T_{\pi^0 \Sigma^0, \pi^0 \Sigma^0} + T_{\pi^- \Sigma^+, \pi^- \Sigma^+} \\ + 2T_{\pi^+ \Sigma^-, \pi^0 \Sigma^0} + T_{\pi^+ \Sigma^-, \pi^- \Sigma^+} + T_{\pi^0 \Sigma^0, \pi^- \Sigma^+}), \\ T_{\pi\Sigma, \eta\Lambda}^0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} (T_{\pi^+ \Sigma^-, \eta\Lambda} + T_{\pi^0 \Sigma^0, \eta\Lambda} + T_{\pi^- \Sigma^+, \eta\Lambda}), \\ T_{\eta\Lambda, \eta\Lambda}^0 = T_{\eta\Lambda, \eta\Lambda}, \end{cases} \quad (53)$$

$$\begin{cases} T_{\bar{K}N, \bar{K}N}^1 = \frac{1}{2} (T_{K^- p, K^- p} + T_{\bar{K}^0 n, \bar{K}^0 n} - 2T_{K^- p, \bar{K}^0 n}), \\ T_{\bar{K}N, \pi\Sigma}^1 = \frac{1}{2} (T_{\bar{K}^0 n, \pi^- \Sigma^+} + T_{K^- p, \pi^+ \Sigma^-} \\ - T_{K^- p, \pi^- \Sigma^+} - T_{\bar{K}^0 n, \pi^+ \Sigma^-}), \\ T_{\bar{K}N, \pi\Lambda}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (T_{\bar{K}^0 n, \pi^0 \Lambda} - T_{K^- p, \pi^0 \Lambda}), \\ T_{\bar{K}N, \eta\Sigma}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (T_{\bar{K}^0 n, \eta\Sigma^0} - T_{K^- p, \eta\Sigma^0}), \\ T_{\pi\Sigma, \pi\Lambda}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (T_{\pi^- \Sigma^+, \pi^0 \Lambda} - T_{\pi^+ \Sigma^-, \pi^0 \Lambda}), \\ T_{\pi\Sigma, \pi\Sigma}^1 = \frac{1}{2} (T_{\pi^+ \Sigma^-, \pi^+ \Sigma^-} + T_{\pi^- \Sigma^+, \pi^- \Sigma^+} \\ - 2T_{\pi^- \Sigma^+, \pi^+ \Sigma^-}), \\ T_{\pi\Sigma, \eta\Sigma}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (T_{\pi^- \Sigma^+, \eta\Sigma^0} - T_{\pi^+ \Sigma^-, \eta\Sigma^0}), \\ T_{\pi\Lambda, \pi\Lambda}^1 = T_{\pi^0 \Lambda, \pi^0 \Lambda}, \\ T_{\pi\Lambda, \eta\Sigma}^1 = T_{\pi^0 \Lambda, \eta\Sigma^0}, \\ T_{\eta\Sigma, \eta\Sigma}^1 = T_{\pi\Sigma^0, \pi\Sigma^0}. \end{cases} \quad (54)$$

Finalmente, los coeficientes han sido recogidos en las tablas I y II.

Tabla I. Coeficientes  $D_{ij}$  de la Ec. (45) para  $I = 0$ ,  $D_{ij} = D_{ji}$ .

	$\bar{K}N$	$\pi\Sigma$	$\eta\Lambda$
$\bar{K}N$	3	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$
$\pi\Sigma$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	4	0
$\eta\Lambda$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	0	0

Tabla II. Coeficientes  $F_{ij}$  de la Ec. (46) para  $I = 1$ ,  $F_{ij} = F_{ji}$ .

	$\overline{KN}$	$\pi\Sigma$	$\pi\Lambda$	$\eta\Sigma$
$\overline{KN}$	1	-1	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$
$\pi\Sigma$	-1	2	0	0
$\eta\Lambda$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	0	0	0
$\eta\Sigma$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	0	0	0

Hallados  $D_{ij}$  y  $F_{ij}$ , dispongo de todos los elementos necesarios para calcular la amplitud unitarizada. Concretamente, en este trabajo he calculado de forma explícita, para cada valor de isospín, las matrices  $V$ , deduciendo las expresiones en onda  $s$  a partir de la contribución de Weinberg Tomozawa (Ecs. (47) y (48)). Con ello, y usando la expresión explícita de  $G$  vista en la Ec. (38), extraída de [7], hallo la expresión analítica para  $T_U$ . Parte de los cálculos, especialmente los relativos a la inversión de matrices  $(I - VG)$  (de tamaño  $3 \times 3$  para  $I = 0$  y  $4 \times 4$  para  $I = 1$ ), los he hecho usando el software científico Mathematica.

Una vez obtenida una expresión analítica, necesito resolverla numéricamente; esto es, para una cierta escala  $\mu$ , determinar las constantes de sustracción y la constante de desintegración mesónica  $f$ . Obtenerlos ajustando el modelo a los datos experimentales escapa del alcance del trabajo. Alternativamente, he optado por tomar los valores de estos parámetros obtenidos en [5], pues realizan un ajuste similar. La principal diferencia es que, en esta referencia, las amplitudes se calculan en la base física (matrices  $8 \times 8$ ). Así, los parámetros serán ligeramente distintos, pues su trabajo es capaz de reflejar pequeños efectos de violación de isospín que no alcanzo a describir con mi modelo. Sin embargo, cualitativamente reproduce el comportamiento correcto, como haré notar en la sección V.

Específicamente, tomo de [5]  $f = 1,202f_\pi$ ,  $f_\pi = 93$  MeV. Por último, las constantes de sustracción de la referencia [5], que denoto por  $c_k(\mu)^F$ , se relacionan con las nuestras de la Ec. (38)

$$c_k(\mu) = 16\pi^2 c_k^F(\mu) - 1, \quad (55)$$

con lo que obtengo, para un valor de  $\mu = 1$  GeV,

$$\begin{aligned} c_{\overline{KN}}(1 \text{ GeV}) &= -1,27, & c_{\pi\Sigma}(1 \text{ GeV}) &= -0,99, \\ c_{\eta\Lambda}(1 \text{ GeV}) &= -0,74, & c_{\eta\Lambda}(1 \text{ GeV}) &= 4,31, \\ c_{\eta\Sigma}(1 \text{ GeV}) &= -8,24. \end{aligned}$$

#### IV. EXPERIMENTOS

Los primeros intentos de caracterizar la interacción kaón nucleón en el laboratorio fueron experimentos de

dispersión con haces de kaones  $K^-$  interactuando con hidrógeno en cámaras de burbujas [8–10]. Estos arrojaron resultados acerca de las ondas parciales y la sección eficaz de canales acoplados (partiendo siempre con  $K^-p$  como estado inicial). Esta última magnitud, cuya información experimental he incluido en la Fig. (4), representada frente al momento en el sistema de laboratorio, está bien caracterizada para momentos entre 50 y 150 MeV. Sin embargo, por debajo de 50 MeV, esto es, en el régimen de bajas energías, faltan datos sobre su comportamiento.

Es por ello que, en los últimos años, los resultados ofrecidos por los experimentos SIDDHARTA [11] en el Laboratorio Nacional de Frascati (LNF) en Italia, y ALICE en el CERN, han dotado a la interacción kaón nucleón de un renovado interés. En el primer caso, se mide la distorsión, debido a la interacción fuerte, del primer nivel (1s) de energía del átomo kaón-protón. La interacción  $K^-p$  viene dada por la longitud de dispersión  $a_{K^-p}$ ,

$$a_{K^-p} = \frac{-1}{4\pi} \frac{M_p}{\sqrt{s_u}} T_{ii}(s_u), \quad (56)$$

que da cuenta del alcance y carácter repulsivo o atractivo de la misma, y se mide en el umbral. La relación entre la longitud de dispersión  $a_{K^-p}$  y el desplazamiento del nivel, ambos complejos, está dada por la fórmula de Deser [12]

$$\epsilon_{1s} + \frac{i}{2} \Gamma_{1s} = 2\alpha^3 \mu^2 a_{K^-p} = 412 \text{ eV fm}^{-1} a_{K^-p}, \quad (57)$$

con  $\alpha$  la cte. de estructura fina y  $\mu$  la masa reducida del átomo kaónico.

El desplazamiento del nivel 1s se determina estudiando los rayos X producidos al decaer  $K^-$  al nivel fundamental del átomo kaón protón. Dichos átomos se generan al incidir con una fuente de kaones negativos sobre una cámara de hidrógeno gaseoso criogenizado. Los kaones se producen en pares en el colisionador electrón positrón DAΦNE, pues son un resultado de la desintegración de mesones  $\Phi$  allí producidos. Si bien el caso  $K^-p$  queda bien establecido, queda mucho por conocer de la interacción kaón nucleón a bajas energías en otras combinaciones de isospín. A este respecto, en la actualidad el experimento SIDDHARTA-2 está obteniendo los primeros resultados preliminares y simulaciones para caracterizar la interacción  $\overline{K}^0 n$  a partir del deuterio kaónico [13].

Por otro lado, en el experimento ALICE, la revisión de otra técnica tradicional parece ser un camino esperanzador en el estudio de la interacción kaón-nucleón: la femtoscopía. Esta técnica tiene mucho interés para el análisis de correlaciones de hadrones en colisiones de iones pesados ultrarrelativistas, puesto que la función de correlación se ve modificada por el potencial de interacción. Hay resultados prometedores en esta dirección [14].

## V. RESULTADOS

### A. Sección eficaz

En esta subsección, pongo a prueba mi modelo, comparando mis resultados con los datos experimentales de las secciones eficaces  $\sigma_{K^-p \rightarrow K^-p}$ ,  $\sigma_{K^-p \rightarrow \pi^+\Sigma^-}$ ,  $\sigma_{K^-p \rightarrow \pi^-\Sigma^+}$  y  $\sigma_{K^-p \rightarrow \pi^0\Sigma^0}$ . Para mi predicción, parto de la expresión para la sección eficaz dependiente de  $s$  extraída de [7],

$$\sigma_{ij}(s) = \frac{1}{4\pi} \frac{M_i M_j}{s} \frac{k_j(s)}{k_i(s)} |T_{ij}(s)|^2. \quad (58)$$

Por un lado, la reescribo en función del momento en el sistema del laboratorio (esto es, el momento del kaón en el sistema de referencia en el que el protón está en reposo), pues está es la magnitud con respecto a la cual se mide  $\sigma$  en los experimentos que analizo. Para ello, uso la ecuación

$$s = M_i^2 + m_i^2 + 2M_i \sqrt{m_i^2 + p_{lab}^2}. \quad (59)$$

Por otra parte, para comparar con los datos experimentales, necesito trabajar con las amplitudes físicas, para lo cual las expreso como combinación lineal de las amplitudes en la base de isospín que he calculado en mi modelo. Para los canales que estudio, se cumple

$$T_{K^-p, K^-p} = \frac{1}{2} (T_{\bar{K}N \rightarrow \bar{K}N}^0 + T_{\bar{K}N, \bar{K}N}^1), \quad (60)$$

$$T_{K^-p, \pi^-\Sigma^+} = -\frac{1}{\sqrt{6}} T_{\bar{K}N, \pi\Sigma}^0 + \frac{1}{2} T_{\bar{K}N, \pi\Sigma}^1, \quad (61)$$

$$T_{K^-p, \pi^-\Sigma^+} = -\frac{1}{\sqrt{6}} T_{\bar{K}N, \pi\Sigma}^0 - \frac{1}{2} T_{\bar{K}N, \pi\Sigma}^1, \quad (62)$$

$$T_{K^-p, \pi^0\Sigma^0} = -\frac{1}{\sqrt{6}} T_{\bar{K}N, \pi\Sigma}^0, \quad (63)$$

con ello, puedo dibujar las curvas que aparecen junto a los datos experimentales en la Fig. (4). En la misma, se observa que la descripción es muy buena a partir de 150 MeV. Por debajo de este valor, la sección eficaz más relevante para el trabajo (la elástica) sigue siendo descrita de modo razonable en todo régimen de energías. En cambio, se observan inconsistencias en los otros canales a momentos bajos, si bien cualitativamente la descripción continúa siendo aceptable. Una posible razón por la que la descripción con piones se comporte peor a bajos momentos es que el ajuste se haya construido para reproducir datos con menor error, es decir, a mayor energía. Sin embargo, también pueden apuntar a limitaciones del modelo, que no observamos en el caso elástico al tener los datos a momentos bajos una incertidumbre muy elevada. Esto motiva el estudio de una magnitud que se mide en el umbral, bien caracterizada por el experimento SIDDHARTA, ya descrito en la sección IV: la longitud de dispersión elástica.

Tabla III. Valores de la longitud de dispersión  $a_i$  (fm) en base de isospín.

	$I = 0$	$I = 1$
$\bar{K}N$	$-1,52 + 0,94i$	$0,48 + 0,80i$
$\pi\Sigma$	0,62	$0,22 + 0,0010i$
$\eta\Lambda$	$-0,29 + 0,12i$	
$\pi\Lambda$		0,016
$\eta\Sigma$		$-0,073 + 0,10i$

### B. Longitud de dispersión

Para un canal genérico  $i$ , la longitud de dispersión viene dada por

$$a_i = -\frac{1}{4\pi} \frac{M_i}{\sqrt{s_u}} T_{ii}(s_u) \quad (64)$$

Los valores obtenidos para la longitud de dispersión en base de isospín se muestran en la Tabla III. Nótese cómo son los canales más ligeros para cada valor de isospín los únicos que no poseen parte imaginaria, lo que se deduce inmediatamente de la fórmula de unitariedad para ondas parciales. Para obtener la longitud de dispersión para  $K^-p$ , uso la Ec. (60) para escribir la amplitud física, y encuentro finalmente

$$a_{K^-p}^U = (-0,52 + 0,87i) \text{ fm}, \quad (65)$$

donde el superíndice  $U$  indica que ha sido calculada en la teoría unitarizada. Al comparar con el valor de  $a_{K^-p}$  en SIDDHARTA [11],  $\text{Re } a_{K^-p} = -0,65 \pm 0,10 \text{ fm}$ ,  $\text{Im } a_{K^-p} = 0,81 \pm 0,15 \text{ fm}$ , obsérvese que los resultados que obtengo son consistentes en cuanto a los signos. Además, se encuentran dentro de la desviación estándar en la parte imaginaria, y a menos de  $1,5 \sigma$  en la parte real, lo que es razonable dadas las simplificaciones efectuadas. De hecho, supone una mejora respecto al orden más bajo (LO,  $T = V$ ) sin unitarizar

$$a_{K^-p}^{LO} = \frac{m_{K^-} M_p}{4\pi f^2 (m_{K^-} + M_p)} \approx 0,41 \text{ fm}, \quad (66)$$

donde hemos usado las masas físicas  $M_p \approx 938,27 \text{ MeV}$ ,  $m_{K^-} \approx 493,68 \text{ MeV}$ , la constante de desintegración anteriormente introducida y  $C_{K^-p, K^-p} = 2$ . Obsérvese que en este resultado no disponemos de la parte compleja al no involucrar a los canales acoplados, con lo que perdemos una información esencial también desde el punto de vista del análisis experimental. Además, el LO predice erróneamente que la interacción fuerte  $K^-p$  es repulsiva (positividad de la parte real de  $a$ ), lo que contrasta con el carácter atractivo (negatividad de  $a$ ) bien establecido experimentalmente. Este sí es reproducido correctamente por el cálculo unitarizado que he realizado.

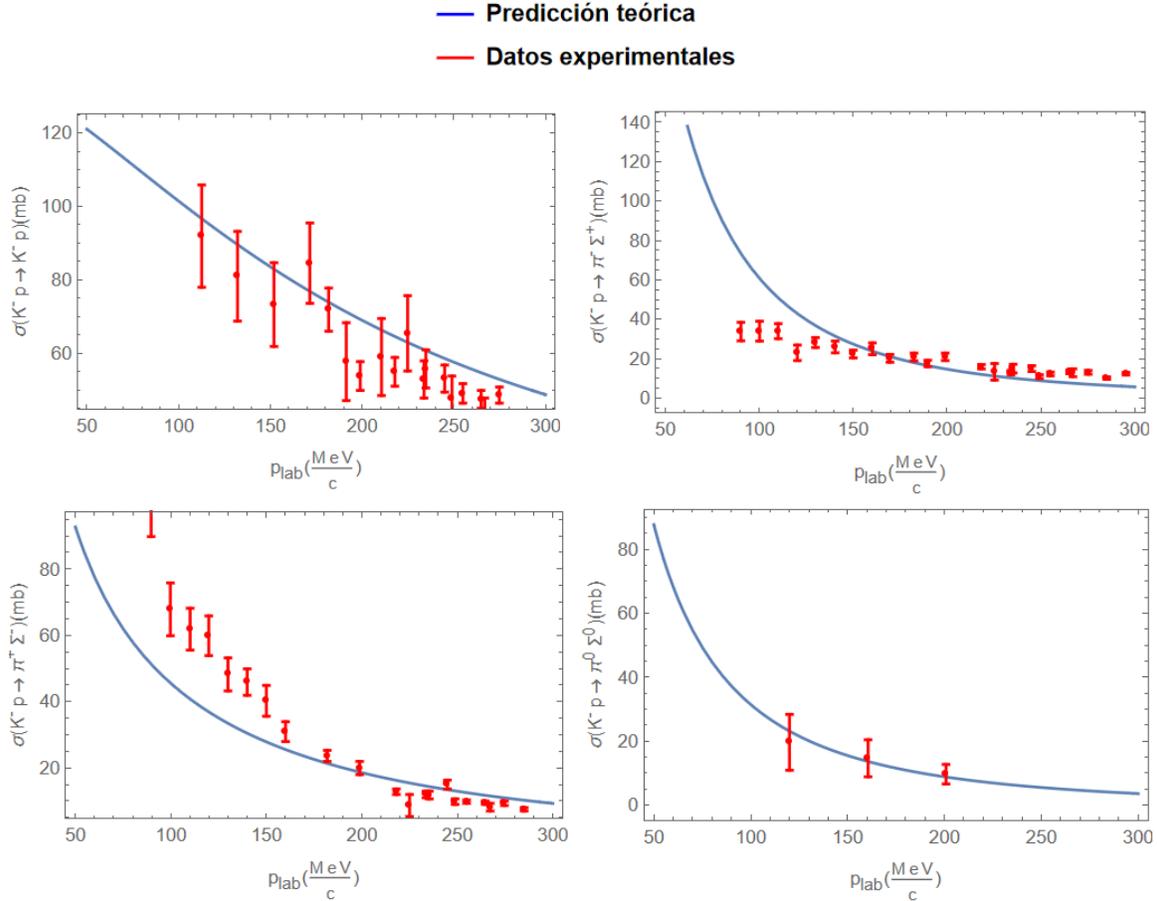


Figura 4. Sección eficaz total respecto al sistema de laboratorio con  $p$  en reposo, con estado inicial  $K^-p$  y estados finales  $K^-p, \pi^- \Sigma^+, \pi^+ \Sigma^-, \pi^0 \Sigma^0$ . La predicción teórica corresponde a la teoría unitarizada en canales de isospín descrita a lo largo del trabajo, y los datos experimentales se obtienen de [8–10].

## VI. OTROS CÁLCULOS EN LA LITERATURA

La mejora con respecto a la teoría aquí desarrollada se consigue incluyendo las contribuciones de Born y términos correspondientes al lagrangiano de interacción a orden superior. Respecto a la contribución de Born, esta depende del  $\sqrt{s}$  en el que nos encontremos: mientras que a un valor de  $\sqrt{s} = 1,3$  GeV (umbral para los estados mesón barión con piones, como se observa en la Fig.(2)) no implica una modificación relevante, para  $\sqrt{s} = 1,5$  GeV (próximo al umbral kaón nucleón) puede constituir hasta un 30% [7]. Aún así, en [5] se vio que las mayores modificaciones proceden del lagrangiano a orden superior (NLO),  $\mathcal{L}_{\phi B}^{(2)}$ . Este último ha de constar de términos que presentan dos derivadas contraídas Lorentz, o una matriz de masas al cuadrado, multiplicados por constantes de baja energía no fijadas por la simetría.

Estas correcciones se incorporan a la amplitud unitarizada de la Ec. (39) modificando el potencial,

$$V = V^{WT} \rightarrow V' = V^{WT} + V^{Born} + V^{NLO}. \quad (67)$$

Finalmente, calculan en [5] el siguiente valor para la longitud de dispersión

$$a_{K^-p}^{U, WT+Born+NLO} = (-0,67 + 0,84i) \text{ fm}. \quad (68)$$

Este valor supone una corrección sobre mi modelo de un 5% en la parte imaginaria y de un 30% en la parte real, que es la más alejada con respecto al valor hallado en SIDDHARTA. En relación al experimento, esta predicción da resultados bastante compatibles, cercanos a los valores centrales hallados en este.

Respecto a las secciones eficaces, se observa también una mejora en las regiones donde mi predicción funciona peor. Además, la competición de los distintos términos da lugar a estructuras menos suaves, con picos a bajas energías, que no he podido ver con mi modelo y que pueden explicar mejor los datos experimentales.

## VII. CONCLUSIONES

Como se ha visto en este trabajo, se han alcanzado los tres objetivos planteados en la introducción. Respecto al primero, he aprendido la Teoría Quiral y cómo integrar en ella los bariones, tras lo cual he realizado cálculos analíticos a nivel árbol que he desarrollado en la sección II.

En segundo lugar, he entendido los fundamentos de la Teoría Quiral unitarizada, sus particularidades y las ventajas que ofrece respecto al orden más bajo. Para ello, he combinado la revisión bibliográfica con cálculos, tanto analíticos como numéricos por medio de Mathematica, de la amplitud unitarizada en la base de isospín para comparar con el experimento, lo que he realizado en las secciones III y V. En esta última sección, he llevado a cabo un análisis crítico de las discrepancias entre los cálculos realizados y los

resultados experimentales, si bien se ha reproducido con mi modelo aproximado el comportamiento esperable de forma cualitativa, tanto al comparar con los experimentos de cámara de burbujas como con SIDDHARTA.

El tercer objetivo, esbozar el estado del arte experimental y teórico de la interacción kaón-nucleón en la actualidad, lo he desarrollado en las secciones IV y VI. En particular, he analizado los experimentos más recientes (sección IV), así como he estudiado en la literatura dónde se ha llegado más allá de las aproximaciones que he efectuado en mi modelo (sección VI).

## AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecer a IPARCOS por la concesión de una ayuda para la realización del TFM.

- 
- [1] S. Scherer, Introduction to chiral perturbation theory, *Advances in Nuclear Physics*, Volume 27 , 277 (2003).
  - [2] J. Gasser and H. Leutwyler, Chiral perturbation theory to one loop, *Annals of Physics* **158**, 142 (1984).
  - [3] A. Pich, Chiral perturbation theory, *Reports on Progress in Physics* **58**, 563 (1995).
  - [4] D. Jido, J. A. Oller, E. Oset, A. Ramos, and U. G. Meissner, Chiral dynamics of the two Lambda(1405) states, *Nucl. Phys. A* **725**, 181 (2003), arXiv:nucl-th/0303062.
  - [5] A. Feijoo Aliaú, *Meson-Baryon interactions from effective Chiral Lagrangians*, Ph.D. thesis, Barcelona, Autònoma U. (2017).
  - [6] A. Dobado, A. Gómez-Nicola, A. L. Maroto, and J. R. Peláez, *Effective lagrangians for the standard model* (Springer Science & Business Media, 2012).
  - [7] E. Oset and A. Ramos, Nonperturbative chiral approach to s wave anti-K N interactions, *Nucl. Phys. A* **635**, 99 (1998), arXiv:nucl-th/9711022.
  - [8] J. K. Kim, Low-energy  $K^-p$  interaction and interpretation of the 1405-MeV  $\Sigma^*$  resonance as a  $\bar{K}N$  bound state, *Physical Review Letters* **14**, 29 (1965).
  - [9] T. S. Mast, M. Alston-Garnjost, R. O. Bangerter, A. S. Barbaro-Galtieri, F. T. Solmitz, and R. D. Tripp, Elastic, charge-exchange, and total  $K^-p$  cross sections in the momentum range 220 to 470 MeV/c, *Physical Review D* **14**, 13 (1976).
  - [10] R. Bangerter, M. Alston-Garnjost, A. Barbaro-Galtieri, T. Mast, F. Solmitz, and R. Tripp, Reactions  $K^-p \rightarrow \Sigma^-\pi^+$  and  $K^-p \rightarrow \Sigma^+\pi^-$  in the momentum range from 220 to 470 MeV/c, *Physical Review D* **23**, 1484 (1981).
  - [11] M. Bazzi, G. Beer, L. Bombelli, A. Bragadireanu, M. Cargnelli, G. Corradi, C. Curceanu, C. Fiorini, T. Frizzi, F. Ghio, *et al.*, Kaonic hydrogen x-ray measurement in SIDDHARTA, *Nuclear Physics A* **881**, 88 (2012).
  - [12] S. Deser, M. Goldberger, K. Baumann, and W. Thirring, Energy level displacements in pi-mesonic atoms, *Physical Review* **96**, 774 (1954).
  - [13] F. Sgaramella, M. Bazzi, D. Bosnar, M. Bragadireanu, M. Cargnelli, M. Carminati, A. Clozza, G. Deda, R. Grande, L. Paolis, K. Dulski, L. Fabbietti, C. Fiorini, I. Frišćić, C. Guaraldo, M. Iliescu, M. Iwasaki, A. Khreptak, S. Manti, and C. Curceanu, Kaonic atoms measurements with SIDDHARTA-2, *Journal of Physics: Conference Series* **2446**, 012023 (2023).
  - [14] Unveiling the strong interaction among hadrons at the LHC, *Nature* **588**, 232 (2020).