

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

Máster en Física Teórica



TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

**Formalismo Espinorial en Gravedad Cuántica de Lazos:
Dinámica Clásica de un Modelo Reducido**

**Spinorial Formalism for Loop Quantum Gravity:
Classical Dynamics of a Reduced Model**

Álvaro García Cendal

Tutores:

Iñaki Garay Elizondo

Luis J. Garay Elizondo

Curso académico 2022-2023

Formalismo Espinorial en Gravedad Cuántica de Lazos: Dinámica Clásica de un Modelo Reducido

Álvaro García Cendal

Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Complutense de Madrid, 28040 Madrid, España*

Tutores:

Iñaki Garay Elizondo

Departamento de Física, Universidad del País Vasco UPV/EHU, 48080 Bilbao, España

Luis J. Garay Elizondo

Departamento de Física Teórica e IPARCOS, Universidad Complutense de Madrid, 28040 Madrid, España

La gravedad cuántica de lazos (LQG) es una teoría cuántica de la gravedad que se caracteriza por la construcción de operadores geométricos con espectro discreto. Los autoestados de estos operadores son las *spin networks*, funciones de onda de $SU(2)$ definidas sobre grafos. El formalismo espinorial nos permite formular el espacio de fases (clásico) de la LQG en términos de espinores con ligaduras, cuya cuantización nos da la LQG. Podemos interpretar los grafos como una discretización del espacio mediante poliedros cuyas caras no encajan, descrita por las llamadas *twisted geometries*. En este trabajo estudiamos la dinámica clásica del modelo de dos vértices y N aristas, que tiene una interesante interpretación cosmológica. En el marco de las *twisted geometries* estudiamos una aproximación del volumen de los poliedros asociados a cada vértice y hallamos su ecuación de evolución clásica. En el sector cuya dinámica es invariante $U(N)$ hallamos las ecuaciones de evolución y estudiamos la interpretación de este sector como sector cosmológico (homogeneo e isótropo). Por último, proponemos una posible vía para comparar el comportamiento del volumen de los poliedros estudiado en este trabajo con el descrito por la relatividad general.

ÍNDICE

I. INTRODUCCIÓN

I. Introducción	1	La relatividad general describe con gran precisión la interacción gravitatoria, pero en regímenes de altas curvaturas predice singularidades [1]. A la escala de Planck se espera que sean dominantes los efectos cuánticos del campo gravitatorio. Estos efectos no se contemplan en la relatividad general, por lo que para estudiarlos construimos teorías cuánticas de la gravedad [2]. Una de las más desarrolladas en las últimas décadas es la gravedad cuántica de lazos (LQG, <i>loop quantum gravity</i>), basada en una cuantización canónica de la relatividad general [3]. Esta teoría se caracteriza por la construcción de operadores geométricos con espectro discreto, dando lugar a una noción de geometría con áreas y volúmenes discretizados y con un valor mínimo en la escala de Planck [4]. Por otro lado, se ha desarrollado la cosmología cuántica de lazos (LQC, <i>loop quantum cosmology</i>), en la que se replican las técnicas de la LQG sobre universos con mucha simetría. Esta teoría predice un <i>big bounce</i> con el que se evita la singularidad inicial del <i>big bang</i> [5]. A pesar de los éxitos de la LQC, su relación con la teoría completa de la LQG es todavía objeto de estudio [4].
II. Gravedad cuántica de lazos (LQG)	2	
A. Introducción a la LQG	2	
B. Formalismo espinorial para LQG	3	
C. <i>Twisted geometries</i>	4	
III. Modelo de dos vértices	5	
A. Descripción del modelo de dos vértices	5	
B. Hamiltoniano para el modelo de dos vértices	5	
C. Cuadrupolo de una superficie y volumen	6	
D. Evolución del volumen	6	
IV. Sector invariante $U(N)$ en el modelo de dos vértices	6	
A. Simetría $U(N)$	7	
B. Evolución del volumen	8	
C. Interpretación geométrica	8	
V. Relación con la ecuación de Raychaudhuri	9	
VI. Conclusiones	10	La LQG parte de la formulación hamiltoniana de la relatividad general expresada en las llamadas variables de Ashtekar: una conexión $SU(2)$ y su variable conjugada. Estas variables permiten expresar la relatividad general en el lenguaje de una teoría de Yang-Mills $SU(2)$ [3, 6, 7]. En la LQG se elige un álgebra compuesta por las holonomías de la conexión $SU(2)$ a lo largo de curvas y los flujos de su variable conjugada sobre superficies para cuantizar
Referencias	10	

* alvaro27@ucm.es

la relatividad general. Una base del espacio de Hilbert de la LQG la forman las llamadas *spin networks*: funciones de onda definidas sobre grafos, con holonomías sobre las aristas y operadores —llamados *intertwiners*— que entrelazan las distintas representaciones de $SU(2)$ en las que tomamos las holonomías y aseguran la invariancia gauge $SU(2)$ [3, 4]. Las *spin networks* son autoestados de los operadores de área y volumen, de tal forma que nos dan una noción de discretización del espacio [3].

El espacio de fases de la LQG admite una parametrización alternativa a la dada por las holonomías y los flujos. En este trabajo utilizaremos el formalismo espinorial [8], en el que parametrizamos el espacio de fases de cada arista mediante dos espinores, uno por cada vértice de la misma. A estos espinores les imponemos las ligaduras de cierre (que garantizan la invariancia gauge $SU(2)$) y de enlace (que aseguran que cada arista lleva una única representación de $SU(2)$) [8]. Esta reformulación del espacio de fases en términos de espinores nos proporciona nuevas herramientas matemáticas para el estudio de la LQG [8, 9]. Además, el formalismo espinorial permite interpretar geoméricamente los grafos de la LQG, dando un análogo clásico a la interpretación de las *spin networks* como discretización de la geometría [10, 11]. En este formalismo, cada vértice del grafo se asocia a un poliedro y las aristas indican caras adyacentes con la misma área pero distintas formas. De esta forma, los grafos nos dan una discretización no convencional del espacio en la que los poliedros no encajan, dando lugar a las denominadas “geometrías retorcidas” o *twisted geometries* [10, 11].

El desarrollo de la LQG presenta varios problemas abiertos, entre los que se encuentran la implementación de la dinámica y el estudio del límite semiclásico [4, 6]. El análisis de estos problemas en la teoría completa es una tarea complicada, por lo que el estudio de modelos truncados en los que nos restringimos a grafos concretos resulta una herramienta útil para avanzar en su comprensión. En concreto, en el modelo de dos vértices se ha conseguido implementar una dinámica [12], permitiendo así estudiar un sector truncado de la dinámica de la LQG. En este trabajo estudiaremos la dinámica clásica de dicho modelo. Esta nos dará una primera contribución a la dinámica de las *spin networks* con soporte en dicho grafo. De esta forma, el estudio de las ecuaciones de movimiento clásicas nos permite estudiar propiedades de la teoría completa.

Mediante las *twisted geometries*, los grafos adquieren una interpretación como discretización del espacio [11]. Los poliedros resultantes describirán el volumen de regiones finitas del espacio. Así, la evolución del grafo implicará una evolución del volumen de las regiones duales a sus vértices. La LQG, como teoría cuántica de la gravedad, busca reproducir en el límite de bajas curvaturas los resultados de la relatividad general. Es, por tanto, interesante estudiar si las ecuaciones de evolución del volumen de los poliedros son compatibles con el comportamiento predicho por la relatividad general y ver en qué límite se recupera la descripción relativista. En concreto, la ex-

pansión de volúmenes infinitesimales en relatividad general se describe mediante la ecuación de Raychaudhuri [1]. Comprender la relación entre esta ecuación y la evolución del volumen en el marco de las *twisted geometries* es un objetivo interesante, ya que nos permitiría obtener una comprensión más profunda de cómo la LQG se relaciona con la descripción dada por la relatividad general.

Nos centraremos en un grafo sencillo pero no trivial, formado por dos vértices conectados por N aristas. Este modelo de dos vértices ya ha sido estudiado en trabajos anteriores, en los que se encontró una interesante analogía matemática entre su dinámica y la de la LQC [12, 13]. Mediante el formalismo de las *twisted geometries*, este grafo puede interpretarse como dos poliedros de N caras. Estudiaremos el comportamiento del volumen de dichos poliedros y su evolución de forma analítica. Estudiaremos también el modelo de dos vértices bajo una simetría $U(N)$ adicional, que impone sobre el grafo homogeneidad e isotropía [12]. Entonces, los grados de libertad del sistema se reducen a dos, que además son variables conjugadas: el área total de los poliedros y un ángulo ϕ . Estudiaremos la evolución de estas dos variables y la interpretación de ϕ en términos geométricos. Para terminar, propondremos una forma de comparar la dinámica del modelo de dos vértices con la descrita por la relatividad general.

La estructura de este trabajo es la siguiente. En la sección II realizaremos una breve introducción a la gravedad cuántica de lazos (sec. II A), el formalismo espinorial (sec. II B) y las *twisted geometries* (sec. II C). Aplicaremos estos elementos en la sección III para estudiar el modelo de dos vértices y su dinámica. Sobre el mismo modelo, en la sección IV aplicaremos una simetría $U(N)$ adicional y estudiaremos la dinámica de este sector reducido. Por último, en la sección V discutiremos el problema de comparar la evolución de los poliedros asociados al modelo de dos vértices con la evolución descrita por la ecuación de Raychaudhuri de relatividad general.

II. GRAVEDAD CUÁNTICA DE LAZOS (LQG)

En esta sección daremos unas nociones básicas de la LQG. Posteriormente, introduciremos el formalismo espinorial y el formalismo de las *twisted geometries* que utilizaremos para describir nuestro modelo e interpretarlo geoméricamente desde un punto de vista clásico como una discretización del espacio.

A. Introducción a la LQG

La gravedad cuántica de lazos propone una cuantización canónica de la relatividad general [3]. Las variables canónicas escogidas, llamadas variables de Ashtekar, son una conexión $SU(2)$ y su variable conjugada (denominada tríada densitizada). Estas variables son funciones de la métrica y la curvatura extrínseca de las secciones espaciales. En términos de las variables de Ashtekar, el espacio

de fases de la relatividad general resulta ser el de una teoría de Yang-Mills asociada al grupo $SU(2)$. La cuantización canónica de las variables de Ashtekar presenta dificultades, ya que su corchete de Poisson es singular, por lo que en LQG se cuantizan la holonomía de la conexión $SU(2)$ a lo largo de curvas y el flujo de la triada densitizada a través de superficies [3, 7].

En las teorías de Yang-Mills, el teorema de Giles [3, 6] nos garantiza que si conocemos las trazas de todos los loops de Wilson posibles —esto es, las trazas de las holonomías de la conexión sobre todas las curvas cerradas posibles—, podemos obtener toda la información invariante gauge de la conexión. Generalizando este concepto, en LQG se construyen estados denominados *spin networks* [3, 6]. Estos estados se definen sobre grafos a lo largo de cuyas aristas tomamos holonomías en diferentes representaciones irreducibles de $SU(2)$. En los nodos se sitúan objetos matemáticos denominados *intertwiners*, relacionados con los coeficientes de Clebsch-Gordan [3]. Estos *intertwiners* “entrelazan” las distintas representaciones de $SU(2)$ de las aristas (de ahí su nombre) y son invariantes bajo transformaciones gauge $SU(2)$, garantizando la invariancia gauge $SU(2)$ de la teoría [3, 6]. El conjunto de todas las *spin networks* posibles forman una base del espacio de Hilbert cinemático —esto es, del espacio de Hilbert antes de imponer la ligadura hamiltoniana— de la LQG [3, 6].

Uno de los resultados principales de la LQG es la construcción de operadores de área y de volumen con espectro discreto [3]. Los autoestados de estos operadores son, precisamente, las *spin networks* que hemos definido anteriormente. El operador de área actúa sobre las aristas del grafo, mientras que el operador de volumen actúa sobre los vértices. De esta forma, podemos entender que las *spin networks* llevan cuantos de área en sus aristas y cuantos de volumen en sus vértices, de tal forma que una superficie adquiere área si es atravesada por una arista del grafo y una región adquiere volumen si en su interior hay algún vértice. De esta forma, la LQG nos da una noción de geometría discreta [6].

B. Formalismo espinorial para LQG

En la parametrización habitual en términos de holonomías y flujos, cada arista i (donde $i = 1, \dots, N$, siendo N el número total de aristas del grafo) lleva un par de variables (g_i, \vec{X}_i) , donde $g_i \in SU(2)$ es la holonomía de la conexión de Ashtekar a lo largo de la arista y $\vec{X}_i \cdot \vec{\sigma} \in \mathfrak{su}(2)$ el flujo de la triada sobre una superficie dual a la arista [9], con $\vec{X}_i \in \mathbb{R}^3$, donde $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ representa las tres matrices de Pauli. De esta forma, el espacio de fases clásico de una arista i es $T^*SU(2)$, el espacio cotangente de $SU(2)$, ya que $SU(2) \times \mathfrak{su}(2) \simeq T^*SU(2)$ [8]. Dado el espacio $T^*SU(2)$, podemos buscar parametrizaciones alternativas a la dada en términos de holonomías y flujos. En la última década, se ha desarrollado una parametrización alternativa en términos de dos espinores

$|z_i^s\rangle, |z_i^t\rangle \in \mathbb{C}^2$, a los que denominaremos espinor fuente (o *source*) y espinor objetivo (o *target*) [8]. Explícitamente, las componentes de estos espinores serán

$$|z_i^s\rangle = \begin{pmatrix} z_i^{s0} \\ z_i^{s1} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

y análogamente para $|z_i^t\rangle$. Por conveniencia, definimos sus espinores conjugados y duales [8]

$$\langle z_i^s| = (\bar{z}_i^{s0}, \bar{z}_i^{s1}), \quad |z_i^s] = -i\sigma^2 |z_i^s\rangle = \begin{pmatrix} -\bar{z}_i^{s1} \\ \bar{z}_i^{s0} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

y de forma análoga para $|z_i^t\rangle$, donde $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ es la segunda matriz de Pauli.

Dotamos a los espinores de relaciones canónicas de conmutación, definidas por

$$\{z_i^{sA}, \bar{z}_j^{sB}\} = \{z_i^{tA}, \bar{z}_j^{tB}\} = -i\delta^{AB}\delta_{ij}, \quad (3)$$

y los demás corchetes de Poisson nulos. Cabe señalar que, aunque utilicemos por conveniencia la notación de Dirac para nuestros espinores, todo el formalismo tratado en este trabajo es puramente clásico. Esta parametrización de $T^*SU(2)$ en términos de dos espinores (esto es, de cuatro números complejos) es el análogo clásico a la representación de Schwinger de $SU(2)$ mediante dos osciladores armónicos desacoplados [14]. Siguiendo esta representación, al cuantizar canónicamente los espinores con las relaciones de conmutación (3) obtendremos dos osciladores armónicos por cada arista para describir la representación irreducible asociada a tal arista [8, 12, 15].

A partir de estos espinores podemos reconstruir las holonomías g_i y los flujos $\vec{X}_i^{s,t} \in \mathbb{R}^3$ [8]:

$$g_i := \frac{|z_i^t\rangle\langle z_i^s| - |z_i^s\rangle\langle z_i^t|}{\sqrt{\langle z_i^t|z_i^t\rangle\langle z_i^s|z_i^s\rangle}}, \quad (4)$$

$$\vec{X}_i^{s,t} := \frac{1}{2} \langle z_i^{s,t} | \vec{\sigma} | z_i^{s,t} \rangle, \quad X_i^{s,t} := |\vec{X}_i^{s,t}| = \frac{1}{2} \langle z_i^{s,t} | z_i^{s,t} \rangle, \quad (5)$$

Notemos [13] que la actuación de g_i asocia los espinores (normalizados) de un vértice a los espinores duales (normalizados) del otro vértice:

$$g_i \frac{|z_i^t\rangle}{\langle z_i^t|z_i^t\rangle} = -\frac{|z_i^s\rangle}{\langle z_i^s|z_i^s\rangle}, \quad g_i^\dagger \frac{|z_i^s\rangle}{\langle z_i^s|z_i^s\rangle} = \frac{|z_i^t\rangle}{\langle z_i^t|z_i^t\rangle}. \quad (6)$$

Cada arista de una *spin network* llevará una representación irreducible de $SU(2)$. Esta representación debe ser la misma vista desde el vértice fuente y el vértice objetivo. En el formalismo espinorial, esta condición se traduce en que la norma de los espinores $|z_i^s\rangle$ y $|z_i^t\rangle$ debe ser la misma [12], para lo que imponemos la ligadura de enlace [8, 9]

$$C_i = \langle z_i^s|z_i^s\rangle - \langle z_i^t|z_i^t\rangle = 2(X_i^s - X_i^t) = 0. \quad (7)$$

Esta ligadura genera (vía corchetes de Poisson) transformaciones $U(1)$ sobre los espinores [9]. Además, tendrá especial importancia en la interpretación geométrica

de nuestros grafos, como veremos en la sección II C. Se puede demostrar [8] que existe un difeomorfismo entre el espacio de fases de cada arista quitando los vectores de norma nula $T^*\text{SU}(2) - \{|X| = 0\}$, por un lado, y el espacio $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ de los espinores en cada extremo de la arista reducido por la ligadura de enlace, por el otro [8, 9].

Las componentes de los vectores $\vec{X}_i^{s,t}$ forman sendas álgebras de Lie $\mathfrak{su}(2)$ vía corchetes de Poisson y su actuación (mediante corchetes de Poisson) sobre los espinores $|z_i^{s,t}\rangle$ genera transformaciones $\text{SU}(2)$. Así, los vectores de cierre, definidos como la suma de todos los vectores, $\vec{\mathcal{X}}^{s,t} = \sum_{k=1}^N \vec{X}_k^{s,t}$, generan transformaciones globales $\text{SU}(2)$ en todos los espinores. Dado que buscamos construir una teoría $\text{SU}(2)$, nuestros observables deberán ser invariantes bajo las transformaciones generadas por los vectores de cierre. Se demuestra que la invariancia $\text{SU}(2)$ de los *intertwiners* en la LQG se recupera tras la cuantización de las variables si previamente se han impuesto las ligaduras de cierre [9, 16]

$$\vec{\mathcal{X}}^{s,t} = \sum_{i=1}^N \vec{X}_i^{s,t} = 0. \quad (8)$$

C. Twisted geometries

Las *spin networks* tienen una interpretación geométrica clara desde el punto de vista, dando una noción de discretización del espacio con volumen en los vértices y áreas en las aristas. Al trabajar con modelos clásicos, podemos buscar una interpretación similar que nos permita entender geoméricamente los grafos. En los últimos años, se ha desarrollado el formalismo de las *twisted geometries* [10, 11], que proporciona una interpretación geométrica desde el punto de vista clásico. Este formalismo se fundamenta en el teorema de Minkowski [17]:

Teorema (Minkowski, 1897). *Sea un conjunto de m vectores $\{\vec{X}_i\}$ no coplanares de norma X_i , $i = 1, \dots, m$, con $m > 4$, que satisfacen $\sum_{i=1}^m \vec{X}_i = 0$. Entonces, existe un único poliedro convexo de m caras, tales que la cara i tiene vector normal $\hat{X}_i := \vec{X}_i / X_i$ y área X_i .*

Al imponer la ligadura de cierre (8), los vectores definidos por la ecuación (5) definen un único poliedro en cada vértice. Aplicando este teorema, podemos interpretar como caras adyacentes aquellas asociadas a una misma arista pero distintos vértices del grafo. La ligadura de enlace (7) impone que las dos caras asignadas a una única arista tengan la misma área. Sin embargo, no hay restricciones sobre la forma de las caras en una misma arista. Cada arista puede tener un “retorcimiento” o *twist* que parametrizaremos mediante el ángulo de *twist* ξ_i . Por lo tanto, nuestro grafo describe una discretización del espacio en la que los poliedros duales al grafo que comparten arista tienen caras con la misma área pero formas diferentes. Por esta razón, este formalismo se conoce como *twisted geometries*, “geometrías retorcidas” [10, 11].

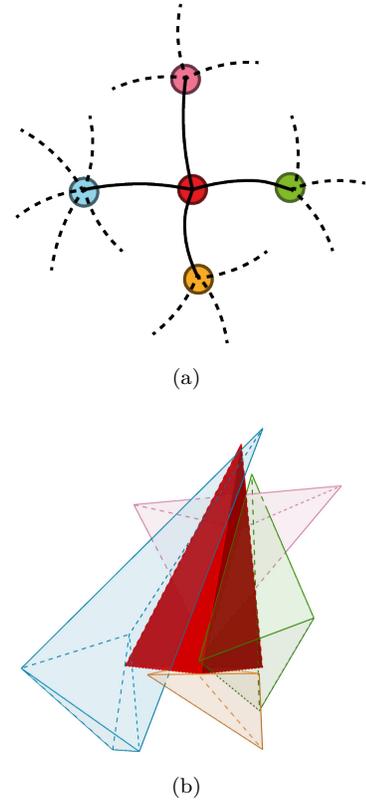


Figura 1. Ejemplo de una parte de un grafo (a) y representación de los poliedros duales a dicho grafo por las *twisted geometries* (b). Indicamos con los mismos colores en ambas figuras las aristas y sus poliedros correspondientes. Hemos tomado un número de aristas bajo por simplicidad.

En las *twisted geometries*, el espacio de fases de cada par de vértices unidos por una arista i está descrito por $(\hat{X}_i^s, \hat{X}_i^t, X_i, \xi_i)$, donde \hat{X}_i^s y \hat{X}_i^t son los vectores normales a la cara i según cada uno de los dos poliedros que la comparten; $X_i := X_i^s = X_i^t$ el área de la cara asociada a la arista y ξ_i es el ángulo de *twist* de dicha cara. En la figura 1 se muestra un ejemplo de esta interpretación. En la figura 1b se muestra la representación gráfica mediante *twisted geometries* de la parte de grafo mostrada en la figura 1a.

Para poder interpretar geoméricamente el ángulo de *twist* es útil estudiar su relación con las variables de Ashtekar, ya que estas tienen una interpretación geométrica conocida [3]. En concreto, la variable que nos interesa es la conexión de Ashtekar [3, 10]

$$A_a = \Gamma_a + \gamma_I K_a, \quad (9)$$

donde Γ_a es la conexión de espín, K_a es la curvatura extrínseca, γ_I es el parámetro de Barbero-Immirzi y $a = 1, 2, 3$. Proyectando la curvatura extrínseca a lo largo de una dirección infinitesimal sobre la arista i definida por ℓ_i^a tal que $K_i := \ell_i^a K_a$, siempre podemos realizar una transformación gauge $u \in \text{SU}(2)$, que diagonaliza la curvatura extrínseca, $K_i = \xi_i u \sigma^3 u^{-1}$ [11]. En este gauge la

curvatura extrínseca es

$$K_i^u = \xi_i \sigma^3, \quad (10)$$

donde el superíndice u indica el gauge que diagonaliza K_i . De esta forma, el ángulo de *twist* es el módulo de K_i en ese gauge. En otros gauges esto no será así, y encontraremos que la curvatura extrínseca depende también de los vectores normales $\hat{X}_i^{s,t}$ [11].

El espacio de fases de las *twisted geometries* (después de imponer las ligaduras de enlace (7) y de cierre (8)) resulta ser isomorfo al espacio de fases clásico invariante gauge de cada arista y su cuantización nos proporciona el espacio de Hilbert de la LQG [10, 11].

Por otro lado, se podría imponer una ligadura adicional a las de cierre y de enlace que fije las formas de las caras, eliminando el “retorcimiento” de las mismas. Si aplicamos esta ligadura sobre grafos duales a triangulaciones, el resultado es que las *twisted geometries* se reducen a las geometrías de Regge [11, 18], que nos permiten realizar una aproximación simplicial (esto es, el equivalente 4-dimensional de la triangulación de una superficie) del espaciotiempo en relatividad general [19, 20]. En el pasado se ha intentado cuantizar las geometrías de Regge sin éxito [21]. En este sentido, el grado de libertad asociado a la posibilidad de tener caras con formas diferentes en una misma arista nos permite cuantizar las *twisted geometries* y obtener la LQG [11].

III. MODELO DE DOS VÉRTICES

En esta sección aplicaremos los formalismos explicados en la sección anterior para describir el modelo de dos vértices. Introduciremos una dinámica para este modelo, propuesta y estudiada en [13, 16]. Posteriormente, estudiaremos la evolución del volumen de los poliedros duales al grafo de dos vértices. Para ello, utilizaremos el cuadrupolo geométrico propuesto en [22], mediante el cual podremos obtener una expresión analítica que aproxima el volumen de los poliedros. A partir de esa expresión analítica, obtendremos las ecuaciones de evolución para una aproximación del volumen.

A. Descripción del modelo de dos vértices

Consideremos ahora el modelo de dos vértices (a los que etiquetaremos como α y β) y N aristas (fig. 2) [12, 13, 16]. Aunque este modelo es sencillo, su dinámica es no trivial y se ha observado [12, 16] que, al restringirnos a un sector invariante $U(N)$ (del que hablaremos en

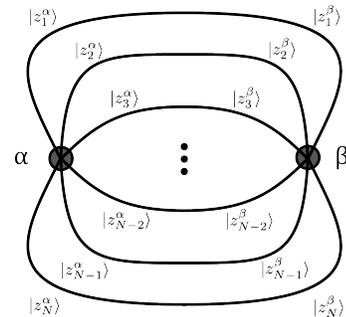


Figura 2. Grafo de dos vértices, etiquetados por α y β , con N aristas y sus respectivos espinores.

la sección IV), las ecuaciones del movimiento presentan analogías matemáticas con las de la LQC. Denotaremos los espinores en el vértice α como $|z_i\rangle := |z_i^\alpha\rangle$, los espinores en el vértice β como $|w_i\rangle := |z_i^\beta\rangle$, y los vectores en cada vértice como $\vec{X}_i := \vec{X}_i^\alpha$ y $\vec{Y}_i := \vec{X}_i^\beta$.

B. Hamiltoniano para el modelo de dos vértices

Para dotar al modelo de dos vértices de una dinámica debemos construir un hamiltoniano. En este trabajo utilizaremos el hamiltoniano propuesto en [12] y estudiado en [13, 16]. Para ello, construimos los siguientes tres observables invariantes $SU(2)$ en el vértice α a partir de los espinores y sus duales:

$$E_{kl}^\alpha = \langle z_k | z_l \rangle, \quad F_{kl}^\alpha = [z_k | z_l], \quad \bar{F}_{kl}^\alpha = \langle z_l | z_k \rangle. \quad (11)$$

Análogamente, podemos construir $E_{kl}^\beta, F_{kl}^\beta$ y \bar{F}_{kl}^β para el vértice β sustituyendo $|z\rangle$ por $|w\rangle$. A partir de estos observables, construimos el hamiltoniano [12, 16]

$$H = \sum_{k,l=1}^N \lambda E_{kl}^\alpha E_{kl}^\beta + \gamma F_{kl}^\alpha F_{kl}^\beta + \bar{\gamma} \bar{F}_{kl}^\alpha \bar{F}_{kl}^\beta, \quad (12)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{C}$ son constantes. Este hamiltoniano se construye al orden más bajo (tratando por igual a ambos vértices). Es invariante $SU(2)$, es decir, $\{H, \vec{\mathcal{X}}\} = \{H, \vec{\mathcal{Y}}\} = 0$, donde $\vec{\mathcal{X}}$ y $\vec{\mathcal{Y}}$ son los vectores de cierre (8) en los vértices α y β , respectivamente. Además, respeta la ligadura de enlace, siendo así invariante $U(1)$ en cada arista ($\{H, \mathcal{C}_i\} = 0, \forall i$). Hemos asumido por simplicidad que las constantes λ y γ son independientes de las aristas, pero podríamos realizar un tratamiento más general tomando constantes λ y γ distintas para cada par de aristas [13, 16]. Cuando trabajemos en la sección IV con el modelo reducido por la simetría $U(N)$, será necesario tomar las constantes independientes de las aristas [16], como ya hemos hecho en (12).

¹ Nótese que el concepto de vértices fuente y objetivo dependen de la arista, mientras que las etiquetas α y β caracterizan vértices concretos. Para el caso de este modelo simplificado, con sólo dos vértices, esta notación resulta más conveniente.

C. Cuadrupolo de una superficie y volumen

En la sección II C vimos cómo la interpretación de las *twisted geometries* asigna un poliedro a cada uno de los dos vértices de nuestro grafo, dotando al grafo de una noción clásica de áreas en las aristas y volúmenes en los vértices como consecuencia de la ligadura de cierre. En este apartado nos centraremos en el poliedro asociado al vértice α , aunque el desarrollo es completamente análogo para β . El teorema de Minkowski establece que el área de la cara dual a la arista i vendrá dada por la norma X_i del vector \vec{X}_i asociado a la arista i , por lo que el área total del poliedro será $\sum_{i=1}^N X_i$.

Por otro lado, el teorema de Minkowski no nos proporciona herramientas para calcular el volumen del poliedro en función de los vectores $\{\vec{X}_i\}$ que lo generan. Por tanto, si queremos estudiar la evolución del volumen de los poliedros deberemos buscar la manera de expresarlo en términos de los vectores normales. Para el caso del tetraedro ($N = 4$), encontramos que el volumen al cuadrado se puede calcular como [22]:

$$V^2 = \frac{2}{9} \left| \vec{X}_1 \cdot (\vec{X}_2 \wedge \vec{X}_3) \right| = \frac{2}{9} \left| \epsilon_{abc} X_1^a X_2^b X_3^c \right|, \quad (13)$$

donde $a, b, c = 1, 2, 3$ indican las componentes de \vec{X} . Para poliedros con $N > 4$ no se conocen fórmulas cerradas que permitan calcular el volumen en función de los vectores normales y debemos recurrir al cálculo numérico o a aproximaciones. Con este propósito, en el artículo [22] se propone un desarrollo multipolar geométrico para superficies cerradas. En este desarrollo, el monopolo y el dipolo son, respectivamente, el área y el centro de masas de la superficie (nulo, si aplicamos la ligadura de cierre (8)). Además, se introduce el cuadrupolo geométrico del poliedro α , definido como [22]

$$T^{ab} = \sum_{k=1}^N \frac{X_k^a X_k^b}{X_k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\langle z_k | z_k \rangle} \langle z_k | \sigma^a | z_k \rangle \langle z_k | \sigma^b | z_k \rangle. \quad (14)$$

Este cuadrupolo nos da información sobre la forma básica de la superficie: sus autovalores están relacionados con los radios principales del elipsoide que mejor aproxima la superficie en cuestión, es decir, del elipsoide con el mismo cuadrupolo [22].

Dado que el cuadrupolo tiene dimensiones de área (al tener \vec{X} dimensiones de área), su determinante tendrá dimensiones de volumen al cuadrado. En trabajos anteriores se ha estudiado el uso de dicho determinante como alternativa al volumen (al cuadrado) [13, 22]. Usando el algoritmo de reconstrucción de poliedros propuesto en [23, 24] se ha comprobado numéricamente que el determinante del cuadrupolo nos da información sobre las tendencias de crecimiento, decrecimiento y extremos de V^2 [13]. Por ello, para estudiar el comportamiento del volumen podemos usar el determinante del cuadrupolo,

para lo que definimos la función

$$\tilde{V}^2 = \frac{4\pi}{3} \det T = \frac{2\pi}{9} \epsilon^{abc} \epsilon^{def} T_{ad} T_{be} T_{cf}. \quad (15)$$

En [13] se muestra que, aunque esta expresión no nos da valores numéricos acertados del volumen, sí que nos permite conocer el comportamiento cualitativo del mismo. Por ello utilizaremos la función (15), a la que denominaremos volumen aproximado al cuadrado, para poder estudiar aproximadamente la evolución de nuestros poliedros.

D. Evolución del volumen

En trabajos anteriores [13] se ha estudiado la evolución del volumen de forma numérica usando un algoritmo de reconstrucción de poliedros [23, 24]. Podemos obtener una expresión analítica si trabajamos con la aproximación del volumen (15), cuya derivada temporal es

$$\dot{\tilde{V}} = \frac{\pi}{3\tilde{V}} \epsilon^{abc} \epsilon^{def} \dot{T}_{ad} T_{be} T_{cf}. \quad (16)$$

Un cálculo directo aunque largo nos da la evolución del volumen del poliedro asociado al vértice α

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}} &= \frac{\pi}{3\tilde{V}} \epsilon^{abc} \epsilon^{def} \dot{T}_{ad} T_{be} T_{cf} \\ &= \frac{\pi}{3\tilde{V}} \text{Im} \sum_{i,j,k,l=1}^N \frac{(\vec{X}_i \wedge \vec{X}_j) \cdot \vec{X}_l}{X_i X_j X_l} \left\{ \frac{(\vec{X}_i \wedge \vec{X}_j) \cdot \vec{X}_l}{X_l} \left(\lambda E_{kl}^\alpha E_{kl}^\beta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\gamma F_{kl}^\alpha F_{kl}^\beta \right) - 2 (\vec{X}_i \wedge \vec{X}_j)_a \left(\lambda G_{kl}^a E_{kl}^\beta + 2\gamma S_{kl}^a F_{kl}^\beta \right) \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

donde hemos introducido las funciones (no invariantes gauge)

$$S_{kl}^a = [z_k | \sigma^a | z_l] = S_{lk}^a, \quad \bar{S}_{kl}^a = \langle z_l | \sigma^a | z_k \rangle, \quad (18)$$

$$G_{kl}^a = \langle z_k | \sigma^a | z_l \rangle = \bar{G}_{lk}^a. \quad (19)$$

Observamos en la evolución del volumen aproximado que un poliedro degenerado (esto es, con todas sus caras paralelas entre sí) tiene volumen nulo durante toda la evolución. Análogamente, podemos obtener la evolución del volumen del poliedro asociado al vértice β sustituyendo en la ecuación (17) las funciones y vectores definidos en α por los análogos definidos en β y viceversa. Se ha comprobado [13] que el comportamiento de la evolución del volumen aproximado y el real —calculado numéricamente— es similar. Nótese que, aunque el área total de los dos poliedros es la misma en todo momento, el volumen de ambos diferirá y tendrá, en general, evolución distinta [13].

IV. SECTOR INVARIANTE $U(N)$ EN EL MODELO DE DOS VÉRTICES

Antes de estudiar el caso general que hemos mostrado hasta ahora, se estudió un sector del mismo cuya dinámi-

ca es invariante bajo una simetría global $U(N)$ acoplada entre ambos vértices [12, 16]. En este sector, las ecuaciones del movimiento del modelo de dos vértices son análogas matemáticamente a las ecuaciones del movimiento de la LQC [12], lo que ha motivado la interpretación del modelo de dos vértices como un modelo cosmológico. En esta sección introduciremos la simetría $U(N)$ y estudiaremos la dinámica del modelo de dos vértices en el sector reducido por esta simetría.

A. Simetría $U(N)$

La simetría $U(1)^N$ generada por la actuación de las ligaduras de enlace C_i en cada arista forma parte de una simetría $U(N)$ mayor. Esta simetría, a la que denominaremos simetría $U(N)$ acoplada o, simplemente, simetría $U(N)$, está generada por [12]

$$\mathcal{E}_{ij} = E_{ij}^\alpha - E_{ji}^\beta. \quad (20)$$

En efecto, vemos que la ligadura de enlace asociada a la arista k no es más que el k -ésimo elemento de la diagonal de \mathcal{E}_{ij} , es decir, $C_k = \mathcal{E}_{kk}$. Tras un largo cálculo, encontramos que $\{\mathcal{E}_{ij}, H\} = 0$. Por tanto, el generador \mathcal{E}_{ij} es constante del movimiento. Equivalentemente, el hamiltoniano del sistema es invariante bajo las transformaciones $U(N)$ generadas por \mathcal{E}_{ij} . Para imponer la simetría $U(N)$ exigimos invariancia de la dinámica bajo estas transformaciones. Esto requiere de que las ligaduras del sistema (en nuestro caso la ligadura de enlace (7) y de cierre (8)) sean invariantes bajo la acción de \mathcal{E}_{ij} . De no ser así, la acción de \mathcal{E}_{ij} sobre configuraciones que satisfacen las ligaduras nos llevaría a configuraciones que no las satisfacen. Un cálculo sencillo nos muestra que la ligadura de cierre es invariante, $\{\mathcal{E}_{ij}, \vec{\mathcal{X}}\} = 0$, pero encontramos que la acción de \mathcal{E}_{ij} sobre la ligadura de enlace (7) es no trivial,

$$\{C_k, \mathcal{E}_{ij}\} = i \left[(E_{ik}^\alpha - E_{ki}^\beta) \delta_{kj} - (E_{kj}^\alpha - E_{jk}^\beta) \delta_{ki} \right]. \quad (21)$$

Si tomamos dos espinores que cumplan la ligadura de enlace y actuamos sobre ellos con \mathcal{E}_{ij} , los espinores resultantes no la cumplirán en general. No obstante, podemos restringirnos al subespacio de espinores que cumplen $\{C_k, \mathcal{E}_{ij}\} = 0$, es decir, tomamos configuraciones tales que

$$(E_{ik}^\alpha - E_{ki}^\beta) \delta_{kj} = (E_{kj}^\alpha - E_{jk}^\beta) \delta_{ki}. \quad (22)$$

El caso diagonal $i = j$ da una igualdad trivial (la ligadura C_k conmuta consigo misma). El caso $i \neq j = k$ nos da la ligadura

$$\mathcal{E}_{ij} = E_{ij}^\alpha - E_{ji}^\beta = 0, \quad (23)$$

lo que implica que

$$\langle z_i | z_j \rangle = \langle \bar{z}_j | \bar{z}_i \rangle = \langle w_j | w_i \rangle. \quad (24)$$

Para cumplir esta ligadura, los espinores deben relacionarse mediante una matriz unitaria $U \in U(2)$ tal que $|\bar{z}_j\rangle = U |w_i\rangle$. Puesto que $|\det U| = 1$, podemos expresar cualquier elemento de $U(2)$ como un elemento de $SU(2)$ por una fase arbitraria, $U = e^{i\phi} h$ con $h \in SU(2)$. Dado que la teoría es invariante gauge $SU(2)$, la parte $SU(2)$ es puro gauge, por lo que solamente sobrevive la fase $e^{i\phi} \in U(1)$. Así, encontramos que la ligadura $\mathcal{E}_{ij} = 0$ impone la siguiente relación entre los espinores:

$$|w_i\rangle = e^{-i\phi} |\bar{z}_i\rangle. \quad (25)$$

Dado que el hamiltoniano es invariante bajo la acción de \mathcal{E}_{ij} , las condiciones iniciales que cumplan la simetría $U(N)$ (esto es, los pares de espinores que cumplan (25)) la cumplirán a lo largo de toda la evolución. Al expresar la acción en la superficie $\mathcal{E}_{ij} = 0$ aplicando la relación (25), encontramos que solo sobreviven dos grados de libertad: el ángulo ϕ y su variable conjugada [16], que resulta ser el doble del área total de los poliedros $E = 2 \sum_{i=1}^N X_i = 2 \sum_{i=1}^N Y_i$. El hamiltoniano (12) sobre esta superficie, expresado en términos de las variables (ϕ, E) , es

$$H_{\text{red}} = \frac{1}{2} E^2 (\lambda + 2\gamma \cos 2\phi), \quad (26)$$

donde el subíndice “red” indica la reducción de simetría $U(N)$. Tras la imposición de la simetría y de la ligadura de enlace, nuestro hamiltoniano queda determinado por dos parámetros: el doble del área total del poliedro E y el ángulo ϕ . Las variables resultantes, por lo tanto, son independientes de la arista y del vértice concreto en el que trabajemos, por lo que esta ligadura ha sido interpretada como imposición de homogeneidad e isotropía sobre el grafo [12, 16].

Mediante el hamiltoniano (26) reducido por simetría $U(N)$ podemos encontrar las ecuaciones de evolución de las variables conjugadas ϕ y E

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H_{\text{red}}}{\partial E} = E(\lambda + 2\gamma \cos 2\phi), \quad (27)$$

$$\dot{E} = -\frac{\partial H_{\text{red}}}{\partial \phi} = 2E^2 \gamma \sin 2\phi. \quad (28)$$

En la figura 3 se muestran las soluciones numéricas de las ecuaciones (27) y (28) para tres valores de λ y γ con condiciones iniciales $E(0) = 1$, $\phi(0) = 0$. Observamos dos casos cualitativamente diferentes. Con $\gamma = 1$, para $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$ el doble del área total E (fig. 3a) presenta en $t = 0$ un *big bounce* análogo al del volumen en la LQC y crece con el tiempo mientras que ϕ (fig. 3b) tiende rápidamente a un valor constante. Por otro lado, para $\lambda = 3$ vemos que E oscila, dando lugar a un número infinito de *big bounces*— y ϕ crece indefinidamente. Estos resultados son compatibles con los obtenidos en [16] de forma analítica para el hamiltoniano $h = 2H_{\text{red}}/E$ y en [13] de forma numérica para el hamiltoniano (12).

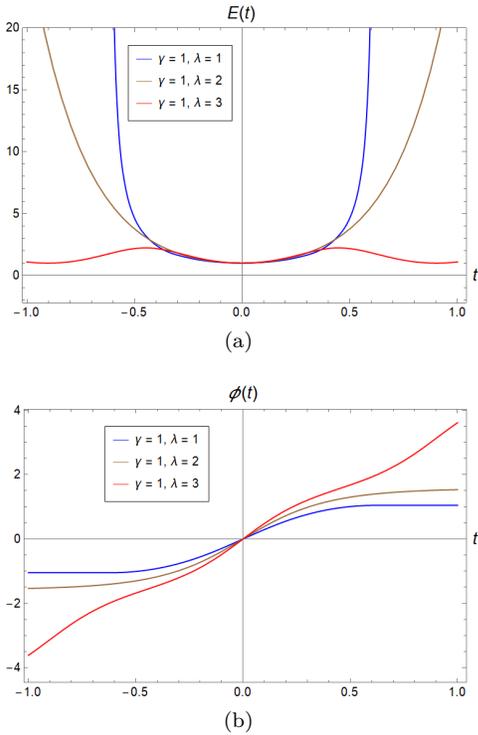


Figura 3. Evolución de las variables E y ϕ en el sector invariante $U(N)$ para distintos valores de las constantes λ y γ con condiciones iniciales $E(0) = 1$, $\phi(0) = 0$.

B. Evolución del volumen

Una vez nos hemos restringido al sector invariante $U(N)$, imponiendo la condición (25) podemos estudiar la evolución en este sector de los observables definidos en el espacio de fases completo. Aquí estudiaremos el volumen, para el que obtuvimos una aproximación \tilde{V} para un poliedro genérico de N caras (15).

En el sector invariante $U(N)$, la evolución del volumen aproximado (15) resulta ser (tras algunos cálculos tediosos)

$$\dot{\tilde{V}} = \pi \epsilon^{abc} \epsilon^{def} \dot{T}_{ad} T_{be} T_{cf} / (3\tilde{V}) = 3E\gamma \sin(2\phi) \tilde{V}. \quad (29)$$

Como ya comentamos anteriormente, aunque en general no existe una ecuación que nos permita expresar el volumen de un poliedro irregular de N caras en función de los vectores normales a las caras, para el caso del tetraedro ($N = 4$) sí podemos expresar el volumen en función de $\{\vec{X}_i\}$ mediante (13). evolución de los vectores \vec{X} viene dada por

$$\dot{X}_i^a = \{X_i^a, H\} = -\text{Im} \left(\sum_{k=1}^N \lambda G_{ki}^a E_{ki}^\beta + 2\gamma S_{ki}^a F_{ki}^\beta \right). \quad (30)$$

Por lo tanto, en el sector invariante $U(N)$ la evolución del volumen del tetraedro ($N = 4$) es

$$\dot{V} = 3E\gamma \sin(2\phi) V. \quad (31)$$

Vemos que el volumen aproximado \tilde{V} (para cualquier número de caras) y el volumen exacto V en el caso del tetraedro ($N = 4$) presentan la misma evolución en el sector invariante $U(N)$. Aunque aún queda pendiente profundizar en la aproximación \tilde{V} para un número de caras N arbitrario, el hecho de que sobre el sector invariante $U(N)$ la aproximación dada por \tilde{V} tenga una evolución idéntica a la de V del tetraedro es un argumento que refuerza el uso de \tilde{V} en el caso general.

Por otra parte, observando (29) y (28) vemos inmediatamente que, en el sector invariante $U(N)$, la aproximación del volumen \tilde{V} y el doble del área total del poliedro E cumplen $2\dot{\tilde{V}}/\tilde{V} = 3\dot{E}/E$, es decir,

$$\dot{\tilde{V}} = a_0 E^{3/2}, \quad (32)$$

donde $a_0 = \tilde{V}_0/E_0^{3/2}$ es una constante que fijamos con las condiciones iniciales (\tilde{V}_0, E_0) . Así, conociendo el área podemos conocer el volumen salvo un factor a_0 . La relación (32) es la que obtenemos si escalamos uniformemente todas las dimensiones de un cuerpo tridimensional: al escalar las tres dimensiones por un factor l , los diferenciales de volumen y de área escalan como l^3 y l^2 , respectivamente. Así, la relación (32) es la de un poliedro que se expande de manera homogénea e isótropa, lo que refuerza la interpretación de este sector invariante $U(N)$ como sector cosmológico (homogéneo e isótropo).

C. Interpretación geométrica

Resulta interesante interpretar los dos parámetros del hamiltoniano simétrico $U(N)$ (26). Como hemos visto, el parámetro E es el doble de la suma de las normas de todos los vectores X_i , por lo que tiene una interpretación directa como el doble del área total del poliedro dual al grafo dentro del formalismo de las *twisted geometries*. La fase $e^{i\phi}$ no tiene una interpretación tan directa. En trabajos anteriores [16] solo se ha señalado que dicha fase define la holonomía $SU(2)$.

Por otro lado, en la sección II C vimos que las *twisted geometries* definen un ángulo de retorcimiento o *twist* ξ_i por cada arista. Es posible dar dos definiciones de ξ_i : una en términos de las componentes (z_i^0, w_i^0) de los espinores, y otra en términos de (z_i^1, w_i^1) [11]:

$$\xi_i^A = i \ln \frac{z_i^A w_i^A}{\bar{z}_i^A \bar{w}_i^A}, \quad (33)$$

con $A = 0, 1$. Ambas definiciones están relacionadas mediante una transformación canónica, por lo que son descripciones equivalentes del ángulo de *twist* [11]. En un principio, este ángulo no está relacionado con el ángulo ϕ del espacio de fases reducido por la simetría $U(N)$, pero haciendo uso de la definición (33) y de (25), encontramos que en el sector reducido $U(N)$

$$\xi^A = i \ln \frac{(e^{-i\phi} \bar{w}^A) w^A}{(e^{i\phi} w^A) \bar{w}^A} = i \ln e^{-2i\phi} = 2\phi. \quad (34)$$

Vemos que $\xi_i^0 = \xi_i^1$, de tal forma que las dos definiciones dadas por (33) coinciden en el sector reducido $U(N)$. Por tanto, podemos concluir que el ángulo ϕ es la mitad del ángulo de *twist*, que es independiente de la arista.

Recapitulando, hemos encontrado que el modelo de dos vértices bajo la simetría $U(N)$ aquí estudiada depende únicamente del área total del poliedro $E/2$, directamente relacionada con el volumen del mismo mediante (32) y, por lo tanto, con una evolución que podemos interpretar como expansión; y del ángulo $\phi = \xi_i/2$, que, como vimos en la sección II C, admite una interpretación en términos de curvatura extrínseca de las secciones espaciales (ec. (10)). Además, estas dos variables son homogéneas e isótropas, ya que son independientes de las aristas y los vértices. De esta forma, vemos que nuestro modelo cuenta con una única curvatura independiente de las aristas y una única expansión independiente de los vértices. Teniendo en cuenta los resultados y conclusiones de trabajos anteriores [12, 16], el hecho de que nuestras variables dinámicas puedan interpretarse como expansión y curvatura extrínseca fortalece la interpretación cosmológica de este modelo. La evolución observada en la figura 3 también favorece esta interpretación: observamos que, para distintas constantes λ y γ , E (fig. 3a), presenta comportamientos divergentes y oscilatorios, propios de un universo con uno o infinitos *big bounces*. Por otro lado, en el régimen divergente, ϕ (fig. 3b) tiende rápidamente a un valor constante, por lo que la curvatura a tiempos largos en ese régimen y en el gauge (10) es constante.

V. RELACIÓN CON LA ECUACIÓN DE RAYCHAUDHURI

A través del estudio de las *twisted geometries* hemos logrado entender los grafos de la LQG como una discretización “retorcida” de la geometría a nivel clásico. Como ya hemos visto, las aristas de estos grafos describen poliedros, cuyas áreas, vectores normales y volúmenes podemos evolucionar con respecto a la dinámica propuesta en [12]. Dado que en la LQG las *spin networks* asociados a dichos grafos deben describir el comportamiento del espacio, surge la pregunta de si la evolución de estos volúmenes es compatible con la descripción dada por la relatividad general. En esta sección plantearemos este problema y propondremos algunas direcciones que pueden ser útiles para su estudio.

En relatividad general, la ecuación de Raychaudhuri rige la expansión de congruencias geodésicas, describiendo cómo se expanden los volúmenes infinitesimales que se transportan a lo largo de las mismas [1]. Esta ecuación es local, ya que describe la evolución de la expansión infinitesimal que sufre la congruencia en cada punto. El volumen que hemos estudiado en este trabajo es el de regiones finitas del espacio, por lo que las ecuaciones con las que proponemos comparar la evolución de estos volúmenes son las ecuaciones resultantes de promediar la ecuación de Raychaudhuri a esas regiones finitas en vacío. En [25]

encontramos estas ecuaciones para un universo dominado por un fluido general. De esta forma, para un universo vacío obtenemos [25]

$$\frac{\ddot{V}_{\mathcal{D}}}{V_{\mathcal{D}}} - \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{V}_{\mathcal{D}}}{V_{\mathcal{D}}} \right)^2 = \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + \langle \mathcal{N} \mathcal{N}^{\parallel a} - K \frac{d\mathcal{N}}{dt} \rangle_{\mathcal{D}}, \quad (35)$$

$$3 \left(\frac{\dot{V}_{\mathcal{D}}}{V_{\mathcal{D}}} \right)^2 = -\langle \mathcal{N}^2 R \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{1}{2} \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}, \quad (36)$$

donde $a, b = 1, 2, 3$; $\parallel a$ representa la derivada covariante con respecto a la 3-métrica h_{ab} de las secciones espaciales; $V_{\mathcal{D}}(t) = \int_{\mathcal{D}} d^3x \sqrt{|h|}$ es el volumen de la región \mathcal{D} ; $\langle Z \rangle_{\mathcal{D}}$ indica el promedio espacial de la magnitud Z en la región \mathcal{D} ; \mathcal{N} es la función de lapso del formalismo ADM; R y K_{ab} son, respectivamente, el escalar de Ricci y la curvatura extrínseca de las hipersuperficies espaciales; $K = h^{ab} K_{ab}$ es la traza de K_{ab} ; y

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} = \langle \mathcal{N}^2 (K^2 - K_{ij} K^{ij}) \rangle_{\mathcal{D}} - 2 \langle -\mathcal{N} K \rangle_{\mathcal{D}}^2 / 3 \quad (37)$$

es la denominada *backreaction* cinemática extrínseca, que da cuenta de los efectos que tienen la inhomogeneidad y anisotropía sobre la expansión del universo [26]. Estas ecuaciones guardan gran parecido con las ecuaciones de Friedmann. Efectivamente, si aplicamos estas ecuaciones a un universo homogéneo e isótropo y escogemos como variable temporal el tiempo cosmológico, las ecuaciones (35) y (36) son precisamente las ecuaciones de Friedmann [25].

Claramente, las ecuaciones de evolución del volumen obtenidas en este trabajo son diferentes a (35) y (36), pero encontramos puntos comunes entre ellas. Más concretamente, en la ecuación (36) vemos que $\dot{V} \propto V$, mientras que la evolución (17) de la aproximación del volumen (15) presenta un factor proporcional a $(\vec{X}_i \wedge \vec{X}_j) \cdot \vec{X}_l$, el volumen del paralelepípedo cuyos lados son esos tres vectores. Esta similitud es mucho más evidente al restringirnos al sector reducido $U(N)$. En este sector, la evolución del volumen (tanto en su forma aproximada (29) como en su forma exacta para el tetraedro (31)), también cumple $\dot{V} \propto V$. Estas relaciones son superficiales y requieren de un análisis más riguroso, pero apuntan hacia una posible relación entre las ecuaciones de evolución de los volúmenes y las ecuaciones (35) y (36).

Otra forma de comparar las ecuaciones (35) y (36) con las del modelo de dos vértices es buscar una descripción de las variables de las ecuaciones (35) y (36) en términos de las variables de nuestro modelo. En este sentido, como ya discutimos en la sección IV C, el ángulo de *twist* ξ_i está relacionado con la curvatura extrínseca. Una vez que se ha fijado la foliación del espaciotiempo, las ecuaciones (35) y (36) tan solo dependerán explícitamente de la curvatura extrínseca K_{ab} y del escalar de curvatura R . En este sentido, en [10] se ha propuesto una discretización de la conexión de Ashtekar que nos permite definir una curvatura extrínseca discretizada $\mathbf{K}_i \propto \xi_i$ sobre cada arista i del grafo. La búsqueda de la relación entre

la curvatura K_{ab} y su versión discretizada \mathbf{K}_i ayudará a comparar la evolución del volumen de los poliedros de las *twisted geometries* con las ecuaciones (35) y (36).

VI. CONCLUSIONES

El formalismo espinorial introducido en [8, 11, 16] nos da una parametrización alternativa del espacio de fases de la LQG. Este formalismo resulta ser especialmente útil en la formulación de las *twisted geometries* [11], donde interpretamos los grafos desde un punto de vista clásico como una discretización del espacio en términos de poliedros. En este trabajo, nuestro objetivo ha sido estudiar la dinámica clásica de estos poliedros.

Nos hemos centrado en la aplicación del formalismo espinorial y las *twisted geometries* en un modelo muy sencillo basado en un grafo con dos vértices y N aristas, propuesto en trabajos anteriores [12, 13, 16]. Hemos considerado una aproximación del volumen dada por el determinante del cuadrupolo geométrico introducido en [22]. Esta aproximación ya fue estudiada numéricamente en [13], y en este trabajo hemos conseguido obtener la ecuación de evolución analítica de la misma.

Posteriormente, hemos estudiado el sector del espacio de fases cuya dinámica es invariante bajo una simetría $U(N)$ adicional [12, 16]. Bajo esta simetría podemos expresar el hamiltoniano en términos de dos variables conjugadas: el doble del área total del poliedro E y un ángulo ϕ . Estas variables no dependen de la arista ni del vértice, por lo que interpretamos esta simetría como la imposi-

ción de homogeneidad e isotropía. En este trabajo hemos obtenido las ecuaciones de evolución del volumen en este sector y hemos encontrado que, en él, la evolución del volumen dada por el determinante del cuadrupolo es idéntica a la evolución del volumen exacto para el caso del tetraedro. Además, hemos encontrado que, en el sector reducido $U(N)$, el volumen aproximado (15) es proporcional a $E^{3/2}$, que es la relación entre el volumen y el área de un poliedro que se expande y se contrae de forma homogénea e isotrópica.

Hemos visto que el ángulo ϕ es la mitad del ángulo de *twist* ξ . Dado que ξ puede interpretarse en términos de la curvatura extrínseca de las secciones espaciales, concluimos que las variables E y ϕ pueden interpretarse en términos de volumen (y su evolución en términos de expansión) y de curvatura extrínseca de las secciones espaciales, respectivamente. En el artículo [12] se demostró que la dinámica del modelo de dos vértices en el sector reducido $U(N)$ es análoga matemáticamente a la de la LQC. La homogeneidad, la isotropía y la noción de expansión y curvatura dada por E y ϕ en este modelo refuerzan su interpretación como un modelo cosmológico dentro de la teoría completa de la LQG.

Por último, hemos propuesto la comparación del comportamiento de los poliedros descritos por las *twisted geometries* con el comportamiento predicho por la ecuación de Raychaudhuri promediada a regiones espaciales finitas. Este estudio comparativo entre la LQG y la relatividad es interesante y deberá ser llevado a cabo con más detalle, ya que puede darnos información sobre el límite semiclásico de la LQG.

-
- [1] R. M. Wald, *General Relativity* (Chicago Univ. Press, Chicago, 1984).
 - [2] C. Isham (1995), [arXiv:9510063 \[gr-qc\]](#).
 - [3] T. Thiemann, *Modern Canonical Quantum General Relativity* (Cambridge Univ. Press, Nueva York, 2008).
 - [4] A. Ashtekar y E. Bianchi, *Rep Prog. Phys.* **84**, 042001 (2021), [arXiv:2104.04394 \[gr-qc\]](#).
 - [5] I. Agullo y P. Singh, (2016), [arXiv:1612.01236 \[gr-qc\]](#).
 - [6] R. Gambini y J. Pullin, *A First Course in Loop Quantum Gravity* (Oxford Univ. Press, Oxford, 2012).
 - [7] G. M. Marugán, *J. Phys.: Conf. Ser.* **314**, 012012 (2011), [arXiv:1101.1738 \[gr-qc\]](#).
 - [8] E. R. Livine y J. Tambornino, *J. Math. Phys.* **53**, 012503 (2011), [arXiv:1105.3385 \[gr-qc\]](#).
 - [9] M. Dupuis, S. Speziale, y J. Tambornino, *Proc. Sci. QGQGS 2011*, 021 (2011), [arXiv:1201.2120 \[gr-qc\]](#).
 - [10] L. Freidel y S. Speziale, *Phys. Rev. D* **82**, 084040 (2010), [arXiv:1001.2748 \[gr-qc\]](#).
 - [11] L. Freidel y S. Speziale, *Phys. Rev. D* **82**, 084041 (2010), [arXiv:1006.0199 \[gr-qc\]](#).
 - [12] E. F. Borja, J. Diaz-Polo, I. Garay, y E. R. Livine, *Class. Quant. Grav.* **27**, 235010 (2010), [arXiv:1006.2451 \[gr-qc\]](#).
 - [13] E. Aranguren, I. Garay, y E. R. Livine, *Phys. Rev. D* **105**, 126024 (2022), [arXiv:2204.00307 \[gr-qc\]](#).
 - [14] J. Schwinger, *On Angular Momentum*, Tech. Rep. NYO-3071 (Harvard Univ., Cambridge, MA (United States); Nuclear Development Associates, Inc. (US), 1952).
 - [15] F. Girelli y E. R. Livine, *Class. Quant. Grav.* **22**, 3295 (2005), [arXiv:0501075 \[gr-qc\]](#).
 - [16] E. F. Borja, L. Freidel, I. Garay, y E. R. Livine, *Class. Quant. Grav.* **28**, 055005 (2010), [arXiv:1010.5451v1 \[gr-qc\]](#).
 - [17] A. D. Aleksandrov, *Convex polyhedra* (Springer, 2005).
 - [18] T. Regge, *Nuovo Cim.* **19**, 558 (1961).
 - [19] B. Dittrich y S. Speziale, *New. J. Phys.* **10**, 083006 (2008), [arXiv:0802.0864](#).
 - [20] C. Rovelli y S. Speziale, *Phys. Rev. D* **82**, 044018 (2010), [arXiv:1005.2927 \[gr-qc\]](#).
 - [21] G. Immirzi, *Class. Quant. Grav.* **13**, 2385 (1996), [arXiv:9512040 \[gr-qc\]](#).
 - [22] C. Goeller y E. R. Livine, *Class. Quant. Grav.* **35**, 215004 (2018), [arXiv:1805.08257v1 \[gr-qc\]](#).
 - [23] G. Sellaroli (2017), [arXiv:1712.00825 \[gr-qc\]](#).
 - [24] E. Bianchi, P. Dona, y S. Speziale, *Phys. Rev. D* **83**, 044035 (2011), [arXiv:1009.3402 \[gr-qc, physics:hep-th\]](#).
 - [25] T. Buchert, P. Mourier, y X. Roy, *Gen. Relativ. Gravit.* **52** (2020), [arXiv:1912.04213v2 \[gr-qc\]](#).
 - [26] T. Buchert, *Gen. Relativ. Gravit.* **33**, 1381 (2001), [arXiv:0102049 \[gr-qc\]](#).