

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

Máster en Física Teórica



TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

**La propagación del gravitón en gravedad unimodular
y la ley de la gravitación universal**

**Propagation of the graviton in unimodular gravity
and the universal law of gravitation**

David García López

Director

Carmelo Pérez Martín

Curso académico 2022-23

La propagación del gravitón en Gravedad Unimodular y la ley de la gravitación universal

David García López

Tutor: Carmelo Pérez Martín
(Fecha: 7 de junio de 2023)

Se ha probado en [1] que la formulación de Gravedad Unimodular (UG) hecha en [2] mediante la utilización de un multiplicador de Lagrange para imponer la condición de unimodularidad de la métrica es inconsistente a nivel cuántico. En efecto, el multiplicador de Lagrange clásico deja de serlo a nivel cuántico debido a la aparición de correcciones UV divergentes cuadráticas en el multiplicador de Lagrange. El propósito de este TFM es formular Gravedad Unimodular sin utilizar un multiplicador de Lagrange para formular dicha teoría, pero manteniendo (parcialmente) la estructura de campos fantasma de la referencia [2]. Para ello haremos compatibles el formalismo introducido en [3] y la estructura de campos BRST en [2]. De este modo estableceremos una nueva formulación BRST de Gravedad Unimodular. Como una aplicación de este nuevo formalismo, deduciremos la Ley de Newton de la gravitación universal. También se deducirá la identidad de Slavnov-Taylor que gobierna las simetrías BRST a nivel cuántico.

I. INTRODUCCIÓN

La Gravedad Unimodular es una teoría casi tan antigua como la Relatividad General. Fue planteada por primera vez por Albert Einstein en 1919 [4]. La teoría de Gravedad Unimodular parte de la teoría de la Relatividad General, pero impone fijar el determinante de la métrica a un cierto valor constante (fijando de este modo el factor de volumen del espacio-tiempo). En nuestro caso, fijaremos dicho factor a la unidad (esa elección fue inicialmente planteada por el propio Einstein para fijar de manera conveniente el sistema de coordenadas en Relatividad General [5]). Habitualmente, se establece esta ligadura por medio de un multiplicador de Lagrange; sin embargo, en este trabajo plantearemos un formalismo alternativo que eludiría la aparición de las divergencias UV que genera el multiplicador de Lagrange a nivel cuántico.

Durante años ha sido objeto de estudio la equivalencia entre la teoría de la Relatividad General y la Gravedad Unimodular, tanto a nivel clásico [6–8] como cuántico [9, 10]. La posibilidad de que cuánticamente dichas teorías no fueran equivalentes, y que por tanto conduzcan a distintas predicciones, es el responsable del gran interés que suscita la cuantización de Gravedad Unimodular. Asimismo, es bien sabido, que la teoría de Gravedad Unimodular ofrece una solución al conocido como *problema de la constante cosmológica* [11, 12].

De este modo, propondremos una formulación cuántica de la teoría de Gravedad Unimodular (para lo cual haremos uso del formalismo de cuantización BRST [13]). Una vez establecida dicha formulación, obtendremos la identidad de Slavnov-Taylor, y finalmente calcularemos el potencial clásico para verificar que conduce a la ley de la gravitación universal.

A lo largo de este trabajo usaremos unidades naturales ($\hbar = c = 1$). Asimismo, consideraremos métricas de signatura lorentziana con el convenio $(- + + +)$.

La acción de Hilbert-Einstein vendrá dada por [14]

$$\mathcal{S}_{\text{H-E}} = \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R[g], \quad (1)$$

donde $\kappa^2 = 32\pi G$, con G la constante gravitacional de Newton. Por conveniencia de cálculo, tomaremos unidades en las que $\kappa^2 = 32\pi G = 1$, es decir, $G = 1/32\pi$.

Por último, la acción de nuestra teoría la definiremos como

$$\mathcal{S} = 2 \int d^4x \mathcal{L}, \quad (2)$$

donde \mathcal{L} es el lagrangiano que construiremos en la próxima sección.

II. CUANTIZACIÓN UG MEDIANTE BRST

La teoría de Gravedad Unimodular exige que el determinante de la métrica sea igual a uno. Para imponer dicha restricción, sin la necesidad de un multiplicador de Lagrange, usaremos la siguiente métrica

$$\hat{g}_{\mu\nu} \equiv \frac{g_{\mu\nu}}{(-g)^{1/4}}, \quad (3)$$

donde $g_{\mu\nu}$ y g son, respectivamente, la métrica del espacio-tiempo que estamos estudiando y su correspondiente determinante. Es sencillo comprobar como, efectivamente, con esta definición $|\hat{g}| = 1$.

Por otro lado, la matriz inversa ha de cumplir $\hat{g}^{\mu\rho} \hat{g}_{\rho\nu} = g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}$, con lo que

$$\hat{g}^{\mu\nu} = (-g)^{1/4} g^{\mu\nu}. \quad (4)$$

La acción clásica para esta nueva métrica viene dada por [15]

$$\mathcal{S}_{\text{clas}} = 2 \int d^4x R[\hat{g}], \quad (5)$$

con $R[\hat{g}]$ el escalar de Ricci para la métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$.

La acción clásica Eq. (1) es invariante bajo difeomorfismos; sin embargo, la acción clásica para UG Eq. (5) es invariante solo bajo aquellos difeomorfismos que mantengan invariante el determinante $|\hat{g}| = 1$, son los que se conocen como difeomorfismos transversos. Estas últimas transformaciones consisten en $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi_\mu^\mu$, con ξ_μ^μ un cierto campo vectorial tal que $\partial_\mu \xi_\mu^\mu = 0$. Infinitesimalmente, los difeomorfismos transversos dan lugar a la siguiente transformación $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ con

$$\delta g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu^T + \nabla_\nu \xi_\mu^T, \quad (6)$$

donde $\xi_\mu^T \equiv g_{\mu\nu} \xi_\nu^\nu$ y ∇ es la conexión de *Levi-Civita* para la métrica $g_{\mu\nu}$. A partir de esta transformación, podemos deducir también cómo se transforma el determinante de la métrica

$$\begin{aligned} \delta g &= g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ &= g g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \xi_\nu^T + \nabla_\nu \xi_\mu^T) \\ &= 2g \nabla_\mu \xi_\mu^T. \end{aligned} \quad (7)$$

Una vez conocida la manera en la que actúan los difeomorfismos transversos sobre $g_{\mu\nu}$ y g , haciendo uso de Eq. (3) podemos deducir cómo actúan sobre la nueva métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{g_{\mu\nu}}{(-g)^{1/4}} \right) &= \frac{1}{(-g)^{1/4}} \left(\delta g_{\mu\nu} - \frac{1}{4g} g_{\mu\nu} \delta g \right) \\ &= \frac{1}{(-g)^{1/4}} \left(\nabla_\mu \xi_\nu^T + \nabla_\nu \xi_\mu^T - \frac{1}{2} \nabla_\mu \xi_\mu^T \right) \\ &= \hat{\nabla}_\mu \hat{\xi}_\nu^T + \hat{\nabla}_\nu \hat{\xi}_\mu^T, \end{aligned} \quad (8)$$

donde $\hat{\xi}_\mu^T = \hat{g}_{\mu\nu} \xi_\nu^\nu$ y $\hat{\nabla}$ es la conexión de *Levi-Civita* para la métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$. Para llegar a la última igualdad, es necesario desarrollar la expresión de abajo en términos de la métrica $g_{\mu\nu}$ y compararla con la expresión de arriba (al hacerlo se comprueba que ambas expresiones son iguales).

Si a continuación desarrollamos $\delta \hat{g}$, observamos como se cumple la condición de transversalidad

$$\begin{aligned} \delta \hat{g} &= \hat{g}^{\mu\nu} \delta \hat{g}_{\mu\nu} \\ &= -\hat{g}^{\mu\nu} \left(\hat{\nabla}_\mu \hat{\xi}_\nu^T + \hat{\nabla}_\nu \hat{\xi}_\mu^T \right) \\ &= -2 \hat{\nabla}_\mu \hat{\xi}_\mu^T \\ &= -2 \partial_\mu \xi_\mu^\mu = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Es decir, los campos ξ_T que verifican la condición $\hat{\nabla}_\mu \xi_\mu^\mu = 0$ son los que generan los difeomorfismos transversos. De este modo, aplicando dicha transformación, ahora sobre la inversa de la métrica $\hat{g}^{\mu\nu}$ obtenemos

$$\delta \hat{g}^{\mu\nu} = -\hat{\nabla}^\mu \xi_\nu^\mu - \hat{\nabla}^\nu \xi_\mu^\mu. \quad (10)$$

Para cuantizar la teoría haremos uso del operador BRST \mathfrak{B}_D , y los fantasmas c_T^μ ($N_{\text{ghost}}(c) = 1$) y \bar{c}_T^ν

($N_{\text{ghost}}(\bar{c}) = -1$). El operador actuará sobre los campos del siguiente modo

$$\mathfrak{B}_D \hat{g}^{\mu\nu} = -\hat{\nabla}^\mu c_T^\nu - \hat{\nabla}^\nu c_T^\mu, \quad (11a)$$

$$\mathfrak{B}_D c_T^\mu = \hat{\nabla}_\nu (c_T^\nu c_T^\mu), \quad (11b)$$

$$\mathfrak{B}_D \bar{c}_T^\mu = i b_T^\mu, \quad (11c)$$

$$\mathfrak{B}_D b_T^\mu = 0, \quad (11d)$$

con b_T^μ ($N_{\text{ghost}}(b) = 0$) el campo de *Nakanishi-Lautrup*.

La primera expresión se deduce de Eq. (10), pero cambiando el campo vectorial ξ_μ^μ por el campo fantasma c_T^μ ; mientras que el resto, Eqs. (11b)-(11d), garantizan la nilpotencia del operador BRST ($\mathfrak{B}_D^2 = 0$).

Una vez que hemos definido cómo actúa el operador BRST sobre los campos, podemos plantear el lagrangiano de los fantasmas

$$\mathcal{L}_{\text{ghost}}^{(D)} = -i \mathfrak{B}_D [\hat{g}_{\mu\nu} \bar{c}_T^\nu \partial_\lambda \hat{g}^{\lambda\mu}]. \quad (12)$$

Para obtener este lagrangiano hemos hecho uso de una condición habitual para fijar el gauge, conocida como *gauge de Donder* (o *gauge armónico*) $\partial_\nu \hat{g}^{\mu\nu} = 0$.

A. Nueva Invariancia gauge generada y nuevos fantasmas

Los campos fantasmas que hemos definido son transversos, puesto que heredan la condición de transversalidad del campo ξ_T ($\hat{\nabla}_\mu \xi_\mu^\mu = 0$). Las soluciones a esta ligadura no son en general locales, lo que supone un serio inconveniente a la hora de cuantizar la teoría. Sin embargo, podemos expresar los campos transversos a partir de tensores de rango dos, antisimétricos y sin ligaduras (los cuales llamaremos fantasmas de primera generación)

$$\zeta_T^\mu = \hat{\nabla}_\nu \zeta^{\nu\mu}, \quad (13)$$

donde ζ es un campo fantasma genérico (c, \bar{c} , etc.), antisimétrico en todos sus índices.

El uso de $\zeta^{\nu\mu}$ garantiza la localidad de la teoría, manteniendo la condición de transversalidad. Sin embargo, el precio a pagar es la aparición de una nueva invariancia gauge; ya que ζ_T^μ tiene 3 grados de libertad, mientras que $\zeta^{\nu\mu}$ tiene 6 grados de libertad. Podemos fijar de nuevo el gauge mediante la adición de nuevos campos de fantasmas, esta vez de rango tres (fantasmas de segunda generación), que generarán de nuevo invariancia gauge en el lagrangiano. Este proceso es lo que se conoce como *ghost for ghost*. Dado que la dimensión del espacio-tiempo es $D = 4$, el proceso se detiene al llegar a tensores de rango cuatro (fantasmas de tercera generación); tal y como veremos a continuación.

1. Primera generación

En primer lugar, tenemos que saber cómo actúa el operador BRST sobre los fantasmas de primera generación.

Se puede demostrar que si $a^{\mu\nu_1\dots\nu_n}$ es un tensor totalmente antisimétrico de rango $n + 1$, entonces cumple

$$\nabla_\mu a^{\mu\nu_1\dots\nu_n} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} a^{\mu\nu_1\dots\nu_n}). \quad (14)$$

Con lo cual, se cumple también

$$\mathfrak{B}_D (\hat{\nabla}_\mu a^{\mu\nu_1\dots\nu_n}) = \hat{\nabla}_\mu (\mathfrak{B}_D a^{\mu\nu_1\dots\nu_n}). \quad (15)$$

Usando esta última relación y Eq. (13) sobre Eq. (11b), deducimos

$$\hat{\nabla}_\nu (\mathfrak{B}_D c^{\nu\mu} - c_T^\nu c_T^\mu) = 0. \quad (16)$$

La solución general de esta ecuación viene dada por

$$\mathfrak{B}_D c^{\nu\mu} = c_T^\nu c_T^\mu + i \hat{\nabla}_\rho d^{\rho\nu\mu}, \quad (17)$$

donde $d^{\rho\nu\mu}$ es un fantasma, totalmente antisimétrico de rango tres (fantasma de segunda generación). De modo que, el operador BRST actuando sobre los fantasmas de primera generación viene dado por

$$\mathfrak{B}_D c^{\nu\mu} = c_T^\nu c_T^\mu + i \hat{\nabla}_\rho d^{\rho\nu\mu}, \quad (18a)$$

$$\mathfrak{B}_D \bar{c}^{\nu\mu} = i b^{\nu\mu}, \quad (18b)$$

$$\mathfrak{B}_D b^{\nu\mu} = 0. \quad (18c)$$

Sustituyendo en el lagrangiano Eq. (12) los fantasmas de primera generación y usando las relaciones anteriores, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ghost},1}^{(D)} &= -i \mathfrak{B}_D \left[\hat{g}_{\mu\nu} \hat{\nabla}_\rho \bar{c}^{\rho\nu} \cdot \partial_\lambda \hat{g}^{\lambda\mu} \right] \\ &= \hat{g}_{\mu\nu} \hat{\nabla}_\rho b^{\rho\nu} \cdot \partial_\lambda \hat{g}^{\lambda\mu} \\ &\quad + 2i \hat{\nabla}_{(\mu} \hat{\nabla}^\rho c_{\nu)\rho} \cdot \hat{\nabla}_\rho \bar{c}^{\rho\nu} \cdot \partial_\lambda \hat{g}^{\lambda\mu} \\ &\quad + 2i \hat{g}_{\mu\nu} \hat{\nabla}_\rho \bar{c}^{\rho\mu} \cdot \partial_\lambda \hat{\nabla}^{(\lambda} \hat{\nabla}^{\mu)\rho}, \end{aligned} \quad (19)$$

donde el símbolo $(\mu_1, \mu_2\dots)$ indica simetrización respecto a los índices involucrados, $A^{(\mu\nu)} = (A^{\mu\nu} + A^{\nu\mu})/2$.

2. Segunda generación

A partir de Eq. (13), es fácil deducir que la física es invariante bajo la siguiente transformación

$$\zeta^{\nu\mu} \rightarrow \zeta^{\nu\mu} + \hat{\nabla}_\rho \zeta^{\rho\nu\mu}. \quad (20)$$

Los campos fantasmas $\zeta^{\rho\nu\mu}$ son los que llamaremos fantasmas de segunda generación. En la sección previa, ya

obtuvimos $d^{\rho\nu\mu}$ ($N_{\text{ghost}}(d) = 2$) como el fantasma de segunda generación asociado a $c^{\nu\mu}$.

Asimismo, debemos fijar el gauge que proviene de Eq. (20) y para ello usaremos las siguientes condiciones con los correspondientes fantasmas asociados,

$$\begin{array}{ll} \text{Condición:} & \text{Fantasma:} \\ \nabla^{[\rho} c^{\nu\mu]} = 0 & \longrightarrow \bar{d}^{\rho\nu\mu}, \\ \nabla^{[\rho} \bar{c}^{\nu\mu]} = 0 & \longrightarrow b^{\rho\nu\mu}, \end{array} \quad (21)$$

donde el símbolo $[\mu_1, \mu_2\dots]$ indica antisimetrización respecto a los índices involucrados, $A^{[\mu\nu]} = (A^{\mu\nu} - A^{\nu\mu})/2$. Nótese que la condición para fijar el gauge de $b^{\nu\mu}$ no se incluye, puesto que se puede derivar de la de $\bar{c}^{\nu\mu}$ actuando con el operador BRST.

Por otro lado, usando la nilpotencia del operador BRST sobre Eq. (18a) deducimos

$$\hat{\nabla}_\rho (i \mathfrak{B}_D d^{\rho\nu\mu} + c_T^\rho c_T^\nu c_T^\mu) = 0. \quad (22)$$

La solución general de esta ecuación viene dada por

$$\mathfrak{B}_D d^{\rho\nu\mu} = i c_T^\rho c_T^\nu c_T^\mu - \hat{\nabla}_\sigma t^{\sigma\rho\nu\mu}, \quad (23)$$

donde $t^{\sigma\rho\nu\mu}$ es un fantasma, totalmente antisimétrico de rango cuatro (fantasma de tercera generación). De modo que, el operador BRST actuando sobre los fantasmas de segunda generación viene dado por

$$\mathfrak{B}_D d^{\rho\nu\mu} = i c_T^\rho c_T^\nu c_T^\mu - \hat{\nabla}_\sigma t^{\sigma\rho\nu\mu}, \quad (24a)$$

$$\mathfrak{B}_D \bar{d}^{\rho\nu\mu} = \bar{c}^{\rho\nu\mu}, \quad (24b)$$

$$\mathfrak{B}_D b^{\rho\nu\mu} = c^{\rho\nu\mu}, \quad (24c)$$

$$\mathfrak{B}_D c^{\rho\nu\mu} = \mathfrak{B}_D \bar{c}^{\rho\nu\mu} = 0, \quad (24d)$$

Con estas relaciones y las condiciones para fijar el gauge podemos construir el siguiente lagrangiano de fantasmas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ghost},2}^{(D)} &= \frac{i}{2} \mathfrak{B}_D \left[\bar{d}^{\rho\nu\mu} \hat{\nabla}_\rho c_{\nu\mu} + b^{\rho\nu\mu} \hat{\nabla}_\rho \bar{c}_{\nu\mu} \right] \\ &= \frac{i}{2} \left[\bar{c}^{\rho\nu\mu} \hat{\nabla}_\rho c_{\nu\mu} - \hat{\nabla}_\rho \bar{d}^{\rho\nu\mu} \cdot \mathfrak{B}_D (\hat{g}_{\nu\sigma} \hat{g}_{\mu\kappa}) c^{\sigma\kappa} \right. \\ &\quad \left. - \hat{\nabla}^\rho \bar{d}_{\rho\nu\mu} \cdot \left(c_T^\nu c_T^\mu + i \hat{\nabla}_\sigma d^{\sigma\nu\mu} \right) \right. \\ &\quad \left. + c^{\rho\nu\mu} \hat{\nabla}_\rho \bar{c}_{\nu\mu} - \hat{\nabla}_\rho b^{\rho\nu\mu} \cdot \mathfrak{B}_D (\hat{g}_{\nu\sigma} \hat{g}_{\mu\kappa}) \bar{c}^{\sigma\kappa} \right. \\ &\quad \left. - i \hat{\nabla}^\rho b_{\rho\nu\mu} \cdot b^{\nu\mu} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

3. Tercera generación

De nuevo, a partir de Eq. (20), es fácil deducir que la física es invariante bajo la siguiente transformación

$$\zeta^{\rho\nu\mu} \rightarrow \zeta^{\rho\nu\mu} + \hat{\nabla}_\sigma \zeta^{\sigma\rho\nu\mu}. \quad (26)$$

Los campos fantasmas $\zeta^{\sigma\rho\nu\mu}$ son los que llamaremos fantasmas de tercera generación. Es importante notar que ya no existen más invariancias gauge asociadas a Eq. (13), puesto que en dimensión $D = 4$ el rango máximo de un tensor antisimétrico en todos sus índices es cuatro. En la sección previa, ya obtuvimos $t^{\sigma\rho\nu\mu}$ ($N_{\text{ghost}}(t) = 3$) como el fantasma de tercera generación asociado a $d^{\rho\nu\mu}$.

Asimismo, debemos fijar el gauge que proviene de Eq. (26) y para ello usaremos las siguientes condiciones con los correspondientes fantasmas asociados,

$$\begin{array}{ll} \text{Condición:} & \text{Fantasma:} \\ \nabla^{[\sigma} d^{\rho\nu\mu]} = 0 & \longrightarrow \quad \bar{t}^{\sigma\rho\nu\mu}, \\ \nabla^{[\sigma} \bar{d}^{\rho\nu\mu]} = 0 & \longrightarrow \quad c^{\sigma\rho\nu\mu}, \\ \nabla^{[\sigma} b^{\rho\nu\mu]} = 0 & \longrightarrow \quad \bar{c}^{\sigma\rho\nu\mu}. \end{array} \quad (27)$$

Nótese que las condiciones para fijar el gauge de $c^{\rho\nu\mu}$ y $\bar{c}^{\rho\nu\mu}$ no se incluyen, puesto que se pueden derivar, respectivamente, de las de $b^{\rho\nu\mu}$ y $\bar{d}^{\rho\nu\mu}$ actuando con el operador BRST.

Por otro lado, usando la nilpotencia del operador BRST sobre Eq. (24a) deducimos

$$\hat{\nabla}_\sigma (\mathfrak{B}_D t^{\sigma\rho\nu\mu} - i c_T^\sigma c_T^\rho c_T^\nu c_T^\mu) = 0. \quad (28)$$

La solución general de esta ecuación viene dada por

$$\mathfrak{B}_D t^{\sigma\rho\nu\mu} = i c_T^\sigma c_T^\rho c_T^\nu c_T^\mu. \quad (29)$$

En esta ocasión no aparecen nuevos fantasmas, dado que, como ya mencionamos antes, en dimensión $D = 4$ no podemos construir tensores completamente antisimétricos de rango mayor que cuatro. De modo que, el operador BRST actuando sobre los fantasmas de tercera generación viene dado por

$$\mathfrak{B}_D t^{\sigma\rho\nu\mu} = i c_T^\sigma c_T^\rho c_T^\nu c_T^\mu, \quad (30a)$$

$$\mathfrak{B}_D \bar{t}^{\sigma\rho\nu\mu} = i \bar{d}^{\sigma\rho\nu\mu}, \quad (30b)$$

$$\mathfrak{B}_D c^{\sigma\rho\nu\mu} = i d^{\sigma\rho\nu\mu}, \quad (30c)$$

$$\mathfrak{B}_D \bar{c}^{\sigma\rho\nu\mu} = i b^{\sigma\rho\nu\mu}, \quad (30d)$$

$$\mathfrak{B}_D \bar{d}^{\sigma\rho\nu\mu} = \mathfrak{B}_D d^{\sigma\rho\nu\mu} = \mathfrak{B}_D b^{\sigma\rho\nu\mu} = 0. \quad (30e)$$

En la Tab. (II) presentamos un resumen de los fantasmas definidos y cómo actúa el operador BRST sobre ellos.

Con estas relaciones y las condiciones para fijar el gauge podemos construir el siguiente lagrangiano de fantasmas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ghost},3}^{(D)} &= \frac{-i}{6} \mathfrak{B}_D \left[-\bar{t}^{\sigma\rho\nu\mu} \left(\hat{\nabla}_\sigma d_{\rho\nu\mu} + \frac{\alpha}{4} d_{\sigma\rho\nu\mu} \right) + c^{\sigma\rho\nu\mu} \hat{\nabla}_\sigma \bar{d}_{\rho\nu\mu} + \bar{c}^{\sigma\rho\nu\mu} \hat{\nabla}_\sigma b_{\rho\nu\mu} \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[-\bar{d}^{\sigma\rho\nu\mu} \hat{\nabla}_\sigma d_{\rho\nu\mu} - \frac{\alpha}{4} \bar{d}^{\sigma\rho\nu\mu} d_{\sigma\rho\nu\mu} + i \hat{\nabla}_\sigma \bar{t}_{\sigma\rho\nu\mu} \cdot \left(i c_T^\rho c_T^\nu c_T^\mu - \hat{\nabla}_\lambda t^{\lambda\rho\nu\mu} \right) + d^{\sigma\rho\nu\mu} \hat{\nabla}_\sigma \bar{d}_{\rho\nu\mu} + i c^{\sigma\rho\nu\mu} \hat{\nabla}_\sigma \bar{c}_{\rho\nu\mu} \right. \\ &\quad \left. + b^{\sigma\rho\nu\mu} \hat{\nabla}_\sigma b_{\rho\nu\mu} + i \bar{c}^{\sigma\rho\nu\mu} \hat{\nabla}_\sigma c_{\rho\nu\mu} + i \hat{\nabla}_\sigma \bar{t}^{\sigma\rho\nu\mu} \cdot \mathfrak{B}_D (\hat{g}_{\rho\kappa} \hat{g}_{\nu\tau} \hat{g}_{\mu\lambda}) d^{\kappa\tau\lambda} - i \hat{\nabla}_\sigma c^{\sigma\rho\nu\mu} \cdot \mathfrak{B}_D (\hat{g}_{\rho\kappa} \hat{g}_{\nu\tau} \hat{g}_{\mu\lambda}) \bar{d}^{\kappa\tau\lambda} \right. \\ &\quad \left. - i \hat{\nabla}_\sigma \bar{c}^{\sigma\rho\nu\mu} \cdot \mathfrak{B}_D (\hat{g}_{\rho\kappa} \hat{g}_{\nu\tau} \hat{g}_{\mu\lambda}) b^{\kappa\tau\lambda} \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

4. Simplificación mediante duales

Para simplificar la notación, en vez de trabajar con los campos fantasmas, trabajaremos con sus duales. Dado un cierto campo $a^{\mu_1 \dots \mu_p}$ completamente antisimétrico, su dual de *Hodge* (que también es un tensor totalmente antisimétrico) viene dado por $A^{\nu_1 \dots \nu_q}$, donde se cumple $p + q = D$. Estos campos cumplen

$$\begin{aligned} a^{\mu_1 \dots \mu_p} &= \pm (q!)^{-1} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_q} A_{\nu_1 \dots \nu_q}, \\ A_{\nu_1 \dots \nu_q} &= \mp (p!)^{-1} a^{\mu_1 \dots \mu_p} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_q}. \end{aligned} \quad (32)$$

De este modo definimos los siguientes duales

$$\begin{aligned} c^{\mu\nu} &= (1/2) \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} C_{\rho\sigma}, \\ d^{\mu\nu\rho} &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} D_\sigma, \\ t^{\mu\nu\rho\sigma} &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} T. \end{aligned} \quad (33)$$

Asimismo, expresamos las relaciones del resto de duales en dobles

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \bar{c}^{\mu\nu} \\ b^{\mu\nu} \end{pmatrix} &= -(1/2)\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \begin{pmatrix} \bar{C}_{\rho\sigma} \\ B_{\rho\sigma} \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \bar{d}^{\mu\nu\rho\sigma} \\ d^{\mu\nu\rho\sigma} \end{pmatrix} &= -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \begin{pmatrix} \bar{T} \\ D \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \bar{d}^{\mu\nu\rho} \\ \bar{c}^{\mu\nu\rho} \end{pmatrix} &= -(1/2)\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \begin{pmatrix} \bar{D}_\sigma \\ \bar{C}_\sigma \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} c^{\mu\nu\rho\sigma} \\ d^{\mu\nu\rho\sigma} \end{pmatrix} &= -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} b^{\mu\nu\rho} \\ c^{\mu\nu\rho} \end{pmatrix} &= -(1/2)\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \begin{pmatrix} B_\sigma \\ C_\sigma \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \bar{c}^{\mu\nu\rho\sigma} \\ b^{\mu\nu\rho\sigma} \end{pmatrix} &= -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \begin{pmatrix} \bar{C} \\ B \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{34}$$

En términos de los campos duales, los lagrangianos de

fantasmas obtenidos hasta ahora los podemos expresar del siguiente modo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{ghost},1}^{(D)} &= -\frac{1}{2}\hat{g}_{\mu\nu}\varepsilon^{\rho\nu\sigma\tau}\hat{\nabla}_\rho B^{\sigma\tau} \cdot \partial_\lambda \hat{g}^{\lambda\mu} - \frac{i}{2}\varepsilon^{\chi\tau\rho\sigma}\varepsilon^{\nu\kappa\alpha\beta}\hat{g}_{\chi(\mu}\hat{\nabla}_{\nu)}\hat{\nabla}_\tau C_{\rho\sigma} \cdot \hat{\nabla}_\kappa \bar{C}_{\alpha\beta} \cdot \partial_\lambda \hat{g}^{\lambda\mu} \\
&\quad + \frac{i}{2}\hat{g}_{\mu\nu}\varepsilon^{\nu\rho\sigma\tau}\hat{\nabla}_\rho \bar{C}^{\sigma\tau} \cdot \varepsilon^{\kappa\alpha\beta(\mu}\partial_\lambda \hat{\nabla}^{\lambda)}\hat{\nabla}_\kappa C_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{ghost},2}^{(D)} &= \left[i\bar{C}^\sigma \hat{\nabla}^\rho C_{\rho\sigma} + \frac{3i}{4}\varepsilon^{\kappa\mu\nu\lambda}\hat{\nabla}^\rho \bar{D}^\sigma \cdot \hat{\nabla}_{[\rho} C_{\kappa\sigma]} \cdot \hat{\nabla}_\mu C_{\nu\lambda} + 2\hat{\nabla}^{[\lambda} \bar{D}^{\sigma]} \cdot \hat{\nabla}_\lambda D_\sigma - iC^\sigma \hat{\nabla}^\rho \bar{C}_{\rho\sigma} + B^\sigma \hat{\nabla}^\rho B_{\rho\sigma} \right. \\
&\quad \left. - 2i\hat{g}^{\mu\lambda}\hat{\nabla}^{[\rho} \bar{D}^{\sigma]} \cdot C_{\mu\sigma} \mathfrak{B}_D \hat{g}_{\lambda\rho} + 2i\hat{g}^{\mu\lambda}\hat{\nabla}^{[\rho} B^{\sigma]} \cdot \bar{C}_{\mu\sigma} \mathfrak{B}_D \hat{g}_{\lambda\rho} \right].
\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{ghost},3}^{(D)} &= \left[\bar{D}\hat{\nabla}_\mu D^\mu + \alpha\bar{D}D + D\hat{\nabla}_\mu \bar{D}^\mu + iC\hat{\nabla}_\mu \bar{C}^\mu + i\bar{C}\hat{\nabla}_\mu C^\mu + B\hat{\nabla}_\mu B^\mu \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4}\hat{\nabla}^\sigma \bar{T} \cdot \hat{\nabla}_{[\sigma} C_{\nu\mu]} \left(\hat{\nabla}^\mu C^{\lambda\rho} \cdot \hat{\nabla}^\nu C_{\lambda\rho} - 4\hat{\nabla}^\lambda C^{\mu\rho} \cdot \hat{\nabla}^\nu C_{\lambda\rho} + 2\hat{\nabla}^\lambda C^{\mu\rho} \cdot \hat{\nabla}_\lambda C^\nu{}_\rho - 2\hat{\nabla}_\lambda C^{\mu\rho} \cdot \hat{\nabla}_\rho C^{\nu\lambda} \right) \right. \\
&\quad \left. - i\hat{\nabla}^\mu \bar{T} \cdot \hat{\nabla}_\mu T + \left(i\hat{\nabla}^\mu \bar{T} \cdot D^\nu + i\hat{\nabla}^\mu C \cdot \bar{D}^\nu + i\hat{\nabla}^\mu \bar{C} \cdot B^\nu \right) \mathfrak{B}_D \hat{g}_{\mu\nu} \right].
\end{aligned} \tag{37}$$

B. Perturbación respecto a la métrica plana

A partir de ahora, expresaremos (como es usual [14]) la métrica $g_{\mu\nu}$ de la siguiente forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{38}$$

de modo que $h_{\mu\nu}$ caracterizará a las fluctuaciones cuánticas de la métrica de Minkowski. El campo $h_{\mu\nu}$ será denominado campo del gravitón y describirá la propagación de gravitones en Minkowski. Téngase en cuenta que la acción de la teoría será la serie formal de potencias en $h_{\mu\nu}$ que resulta de la utilización de Eq. (38).

Esta expansión induce, a primer orden, sobre la métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$ la siguiente relación

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}h + \mathcal{O}(h^2), \tag{39}$$

donde $h = h^\mu{}_\mu = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$.

No es necesario expandir a segundo orden, puesto que en el lagrangiano, dichos términos aparecerán como derivadas totales (con lo que no contribuyen al propagador).

Aplicando el operador BRST sobre Eq. (38) obtenemos

$$\mathfrak{B}_D h_{\mu\nu} = \mathfrak{B}_D g_{\mu\nu} = \nabla_\mu c_\nu^T + \nabla_\nu c_\mu^T, \tag{40}$$

con $c_\mu^T \equiv g_{\mu\nu}c_\nu^T$. Desarrollando la derivada covariante en términos del campo del gravitón, llegamos a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_D h_{\mu\nu} &= \partial_\mu c_\nu^T + \partial_\nu c_\mu^T - 2\Gamma_{\mu\nu}^\sigma c_\sigma^T \\
&= \partial_\mu c_\nu^T + \partial_\nu c_\mu^T + c_\rho^T \partial_\rho h_{\mu\nu} \\
&\quad - c_\rho^T \partial_\mu h_{\rho\nu} - c_\rho^T \partial_\nu h_{\rho\mu}.
\end{aligned} \tag{41}$$

C. Invariancia bajo transformaciones de Weyl

Las transformaciones de Weyl, también conocidas como transformaciones conformes, vienen dadas por $g_{\mu\nu} \rightarrow e^{2\theta(x)}g_{\mu\nu}$, donde $\theta(x)$ es una función arbitraria. Esta transformación repercute únicamente en el determinante de la métrica, luego la métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$ y por consiguiente el lagrangiano Eq. (5) es invariante bajo transformaciones de Weyl. De nuevo, fijaremos la invariancia gauge mediante el uso del operador BRST \mathfrak{B}_W , y los fantasmas R ($N_{\text{ghost}}(R) = 1$) y \bar{R} ($N_{\text{ghost}}(\bar{R}) = -1$). El operador actuará sobre los campos del siguiente modo

$$\mathfrak{B}_W h_{\mu\nu} = 2R(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}), \tag{42a}$$

$$\mathfrak{B}_W R = 0, \tag{42b}$$

$$\mathfrak{B}_W \bar{R} = L, \quad (42c)$$

$$\mathfrak{B}_W L = 0, \quad (42d)$$

donde L ($N_{ghost}(L) = 0$) el campo de *Nakanishi-Lautrup*.

Con ello, planteamos el siguiente lagrangiano para fijar el gauge derivado de la transformación de Weyl

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ghost,W}^{(W)} &= \mathfrak{B}_W [\partial_\mu \bar{R} \cdot \partial^\mu (L - \alpha' h)] \\ &= \partial_\mu L \cdot \partial^\mu (L - \alpha' h) + 2\alpha' (4 + h) \partial_\mu \bar{R} \cdot \partial^\mu R \\ &\quad + 2\alpha' \partial_\mu \bar{R} \cdot R \partial^\mu h, \end{aligned} \quad (43)$$

donde α' es un nuevo parámetro que al igual que α lo mantendremos libre.

D. Transformación BRST general

Con todo ello, tenemos que los operadores BRST actúan sobre los campos tal y como se refleja en las tablas

Tabls. I y II, y en las tres siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_D h_{\mu\nu} &= \partial_\mu c_\nu^T + \partial_\nu c_\mu^T + c_T^\rho \partial_\rho h_{\mu\nu} \\ &\quad - c_T^\rho \partial_\mu h_{\rho\nu} - c_T^\rho \partial_\nu h_{\rho\mu}. \\ \mathfrak{B}_W h_{\mu\nu} &= 2R (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (44)$$

$$\mathfrak{B}_D c_T^\mu = c_T^\nu \partial_\nu c_T^\mu \quad (45)$$

	\mathfrak{B}_D	\mathfrak{B}_W
$N_{ghost} = 0$	$\mathfrak{B}_D L = c_T^\rho \partial_\rho L$	$\mathfrak{B}_W L = 0$
$N_{ghost} = 1$	$\mathfrak{B}_D R = c_T^\rho \partial_\rho R$	$\mathfrak{B}_W R = 0$
$N_{ghost} = -1$	$\mathfrak{B}_D \bar{R} = c_T^\rho \partial_\rho \bar{R}$	$\mathfrak{B}_W \bar{R} = L$

Table I: Actuación de los operadores BRST sobre los campos fantasmas asociados a las transformaciones de Weyl.

Asimismo, el operador \mathfrak{B}_W actuando sobre los fantasmas asociados a los difeomorfismos transversos son todos nulos $\mathfrak{B}_W(\{c_T, B, C, D, T\}) = 0$.

Es importante notar que hemos incluido las transformaciones de c_T puesto que simplifican la notación a la hora de realizar los cálculos, pero siempre queriendo decir implícitamente $c_T^\mu = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \hat{\nabla}_\nu C_{\rho\sigma}$.

	1º generación	2º generación	3º generación
$N_{ghost} = 0$	$\mathfrak{B}_D B_{\mu\nu} = 0$	$\mathfrak{B}_D B_\mu = C_\mu$	$\mathfrak{B}_D B = 0$
$N_{ghost} = 1$	$\mathfrak{B}_D C_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} c_T^\rho c_T^\sigma + i(\partial_\mu D_\nu - \partial_\nu D_\mu)$	$\mathfrak{B}_D C_\mu = 0$	$\mathfrak{B}_D C = iD$
$N_{ghost} = -1$	$\mathfrak{B}_D \bar{C}_{\mu\nu} = iB_{\mu\nu}$	$\mathfrak{B}_D \bar{C}_\mu = 0$	$\mathfrak{B}_D \bar{C} = iB$
$N_{ghost} = 2$	----	$\mathfrak{B}_D D_\mu = \frac{i}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} c_T^\nu c_T^\rho c_T^\sigma + \partial_\mu T$	$\mathfrak{B}_D D = 0$
$N_{ghost} = -2$	----	$\mathfrak{B}_D \bar{D}_\mu = \bar{C}_\mu$	$\mathfrak{B}_D \bar{D} = 0$
$N_{ghost} = 3$	----	----	$\mathfrak{B}_D T = -\frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} c_T^\mu c_T^\nu c_T^\rho c_T^\sigma$
$N_{ghost} = -3$	----	----	$\mathfrak{B}_D \bar{T} = i\bar{D}$

Table II: En cada celda se muestra el resultado de actuar con el operador BRST sobre los campos fantasmas de un determinado N_{ghost} (filas) y una determinada generación (columnas).

A continuación, definiremos un nuevo operador BRST, combinación de los dos usados hasta ahora, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_D + \mathfrak{B}_W$; el cual es también nilpotente $\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{B}_D \mathfrak{B}_W + \mathfrak{B}_W \mathfrak{B}_D = 0$. Para comprobar esta última afirmación, haremos actuar \mathfrak{B}^2 sobre $h_{\mu\nu}$ y \bar{R} (es trivial comprobar que efectivamente \mathfrak{B}^2 actuando sobre todos los demás

campos es nulo)

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_D \mathfrak{B}_W h_{\mu\nu} &= -2R (g_{\rho\nu} \partial_\mu c_T^\rho + g_{\rho\mu} \partial_\nu c_T^\rho) \\ &\quad + 2c_T^\rho \partial_\rho (R g_{\mu\nu}), \\ \mathfrak{B}_W \mathfrak{B}_D h_{\mu\nu} &= 2R (g_{\rho\nu} \partial_\mu c_T^\rho + g_{\rho\mu} \partial_\nu c_T^\rho) \\ &\quad - 2c_T^\rho \partial_\rho (R g_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_D \mathfrak{B}_W \bar{R} &= \mathfrak{B}_D L = c_T^\rho \partial_\rho L, \\ \mathfrak{B}_W \mathfrak{B}_D \bar{R} &= \mathfrak{B}_W (c_T^\rho \partial_\rho \bar{R}) = -c_T^\rho \partial_\rho L.\end{aligned}\quad (47)$$

Comprobamos, por tanto, que la actuación de \mathfrak{B}^2 sobre cualquier campo es siempre nula.

Por último, el uso de este nuevo operador BRST, nos obliga a fijar el gauge por medio de hacer actuar el operador \mathfrak{B} sobre las correspondientes condiciones para fijar el gauge. En el caso de los lagrangianos $\mathcal{L}_{\text{ghost},i}$ con $i = 1, 2, 3$, las respectivas condiciones de gauge solo involucran a $\hat{g}_{\mu\nu}$ y los fantasmas asociados a los difeomorfismos transversos (todos ellos invariantes bajo \mathfrak{B}_W); luego $\mathcal{L}_{\text{ghost},i} = \mathcal{L}_{\text{ghost},i}^{(D)}$. Sin embargo, en el caso de las transformaciones de Weyl tenemos $\mathcal{L}_{\text{ghost},W} = \mathcal{L}_{\text{ghost},W}^{(D)} + \mathcal{L}_{\text{ghost},W}^{(W)}$, con lo que falta incluir en la teoría el siguiente lagrangiano

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{ghost},W}^{(D)} &= \mathfrak{B}_D [\partial_\mu \bar{R} \cdot \partial^\mu (L - \alpha' h)] \\ &= \partial_\mu [c_T^\rho \partial_\rho \bar{R}] \cdot \partial^\mu (L - \alpha' h) \\ &\quad - \partial_\mu \bar{R} \cdot \partial^\mu [c_T^\rho \partial_\rho L] + \alpha' \partial_\mu \bar{R} \cdot \\ &\quad \partial^\mu [2\partial^\rho c_\rho^T + c_T^\rho \partial_\rho h - 2c_T^\rho \partial^\sigma h_{\rho\sigma}].\end{aligned}\quad (48)$$

$$[\mathcal{D}\text{ghost}] = \mathcal{D}B_{\mu\nu} \mathcal{D}B_\mu \mathcal{D}B \mathcal{D}C_{\mu\nu} \mathcal{D}C_\mu \mathcal{D}C \mathcal{D}\bar{C}_{\mu\nu} \mathcal{D}\bar{C}_\mu \mathcal{D}\bar{C} \mathcal{D}D_\mu \mathcal{D}D \mathcal{D}\bar{D}_\mu \mathcal{D}\bar{D} \mathcal{D}T \mathcal{D}\bar{T} \mathcal{D}R \mathcal{D}\bar{R} \mathcal{D}L. \quad (51)$$

De este modo, el funcional generador de la teoría viene dado por

$$Z[J^{\mu\nu}, j^{\mu\nu}, \dots] = \int \mathcal{D}h_{\mu\nu} [\mathcal{D}\text{ghost}] e^{i2 \int d^4x (\mathcal{L} + \mathcal{C})}, \quad (52)$$

con

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= J^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + j^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + j^\mu B_\mu + jB + fL \\ &\quad + \bar{\omega}^{\mu\nu} C_{\mu\nu} + \bar{\omega}^\mu C_\mu + \bar{\omega}C + \bar{C}_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} \\ &\quad + \bar{C}_\mu \omega^\mu + \bar{C}\omega + \bar{q}R + \bar{R}q + \bar{k}^\mu D_\mu + \bar{k}D \\ &\quad + \bar{D}_\mu k^\mu + \bar{D}k + \bar{\chi}T + \bar{T}\chi + \xi^{\mu\nu} \mathfrak{B}h_{\mu\nu} \\ &\quad + \phi \mathfrak{B}L + \rho^{\mu\nu} \mathfrak{B}C_{\mu\nu} + \tau \mathfrak{B}R + \sigma \mathfrak{B}\bar{R} \\ &\quad + \rho^\mu \mathfrak{B}D_\mu + \rho \mathfrak{B}T.\end{aligned}\quad (53)$$

Los campos externos, $J^{\mu\nu}$, $j^{\mu\nu}$, etc. son invariantes BRST; luego aplicando el nuevo operador BRST a ambos lados de Eq. (52) obtenemos la siguiente relación

$$\begin{aligned}\langle \int d^4x (J^{\mu\nu} \mathfrak{B}h_{\mu\nu} + j^\mu C_\mu + f \mathfrak{B}L - \bar{\omega}^{\mu\nu} \mathfrak{B}C_{\mu\nu} \\ - i\bar{\omega}D + iB_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + iB\omega - \bar{q} \mathfrak{B}R + q \mathfrak{B}\bar{R} \\ + \bar{k}^\mu \mathfrak{B}D_\mu + \bar{C}_\mu k^\mu - \bar{\chi} \mathfrak{B}T + i\bar{D}\chi) \rangle = 0,\end{aligned}$$

donde $\langle A \rangle \equiv \int \mathcal{D}h_{\mu\nu} [\mathcal{D}\text{ghost}] A \cdot \exp [i2 \int d^4x (\mathcal{L} + \mathcal{C})]$.

III. IDENTIDAD DE SLAVNOV-TAYLOR

En esta sección deduciremos la identidad de Slavnov-Taylor que es la que gobierna la simetría BRST de la teoría cuántica. Esta ecuación constituye el punto de partida para llevar a cabo el análisis de la posible existencia de anomalías BRST mediante técnicas de cohomología BRST (este análisis queda muy fuera del propósito del presente trabajo). Nótese que no está claro que Regularización Dimensional respete la simetría BRST de la teoría ya que la estructura de fantasmas depende de la dimensión del espacio-tiempo.

A partir de lo visto hasta ahora, podemos deducir que la integral de camino de la teoría viene dada por

$$\int \mathcal{D}h_{\mu\nu} [\mathcal{D}\text{ghost}] e^{i2 \int d^4x \mathcal{L}}, \quad (49)$$

donde el lagrangiano \mathcal{L} es

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{clas}} + \mathcal{L}_{\text{ghost},1} + \mathcal{L}_{\text{ghost},2} + \mathcal{L}_{\text{ghost},3} + \mathcal{L}_{\text{ghost},W}, \quad (50)$$

y la medida $[\mathcal{D}\text{ghost}]$ la definimos como

A continuación podemos expresar esta relación a partir del funcional generador, de tal forma que llegamos a

$$\begin{aligned}\left[\int d^4x \left(J^{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta \xi^{\mu\nu}} + j^\mu \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}^\mu} + f \frac{\delta}{\delta \phi} - \bar{\omega}^{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta \rho^{\mu\nu}} \right. \right. \\ \left. \left. - i\bar{\omega} \frac{\delta}{\delta k} + i\omega^{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta j^{\mu\nu}} + i\omega \frac{\delta}{\delta j} - \bar{q} \frac{\delta}{\delta \tau} + q \frac{\delta}{\delta \sigma} \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{k}^\mu \frac{\delta}{\delta \rho^\mu} - k^\mu \frac{\delta}{\delta \omega^\mu} - \bar{\chi} \frac{\delta}{\delta \rho} + i\chi \frac{\delta}{\delta k} \right) \right] Z = 0.\end{aligned}\quad (54)$$

El funcional generador de las funciones de Green conexas, W cumple $Z[J^{\mu\nu}, j^{\mu\nu}, \dots] / Z[0] = \exp(iW[J^{\mu\nu}, j^{\mu\nu}, \dots])$; con lo que, en términos de este funcional, la relación anterior pasa a ser

$$\begin{aligned}\left[\int d^4x \left(J^{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta \xi^{\mu\nu}} + j^\mu \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}^\mu} + f \frac{\delta}{\delta \phi} - \bar{\omega}^{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta \rho^{\mu\nu}} \right. \right. \\ \left. \left. - i\bar{\omega} \frac{\delta}{\delta k} + i\omega^{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta j^{\mu\nu}} + i\omega \frac{\delta}{\delta j} - \bar{q} \frac{\delta}{\delta \tau} + q \frac{\delta}{\delta \sigma} \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{k}^\mu \frac{\delta}{\delta \rho^\mu} - k^\mu \frac{\delta}{\delta \omega^\mu} - \bar{\chi} \frac{\delta}{\delta \rho} + i\chi \frac{\delta}{\delta k} \right) \right] W = 0.\end{aligned}\quad (55)$$

Finalmente, el funcional generador de las funciones *una partícula irreducible* (OPI) se relaciona con el funcional anterior del siguiente modo

$$\Gamma[h_{\mu\nu}, \dots] = W[J^{\mu\nu}, \dots] - \int d^4x \mathcal{C}. \quad (56)$$

Expresando la relación Eq. (55) en términos de Γ , obtenemos lo que se conoce como la identidad de Slavnov-Taylor

$$\int d^4x \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta h_{\mu\nu}} \frac{\delta\Gamma}{\delta \xi^{\mu\nu}} + \frac{\delta\Gamma}{\delta B_\mu} C_\mu + \frac{\delta\Gamma}{\delta s} \frac{\delta\Gamma}{\delta \phi} + \frac{\delta\Gamma}{\delta C_{\mu\nu}} \frac{\delta\Gamma}{\delta \rho^{\mu\nu}} \right. \\ \left. + i \frac{\delta\Gamma}{\delta C} D + i \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{C}_{\mu\nu}} B_{\mu\nu} + i \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{C}} B + \frac{\delta\Gamma}{\delta R} \frac{\delta\Gamma}{\delta \tau} + \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{R}} \frac{\delta\Gamma}{\delta \sigma} \right. \\ \left. + \frac{\delta\Gamma}{\delta D_\mu} \frac{\delta\Gamma}{\delta \rho^\mu} + \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{D}_\mu} \bar{C}_\mu + \frac{\delta\Gamma}{\delta T} \frac{\delta\Gamma}{\delta \rho} + i \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{T}} \bar{D} \right) = 0. \quad (57)$$

IV. PROPAGADORES

A continuación, extraeremos los términos cinéticos de nuestro lagrangiano \mathcal{L} . Para ello, nos limitaremos únicamente a los términos cuadráticos $\mathcal{L}_{\text{cuad}}$, los cuales agruparemos en cuatro sumandos $\mathcal{L}_{\text{cuad}} = \mathcal{L}_{N=0} + \mathcal{L}_{|N|=1} + \mathcal{L}_{|N|=2} + \mathcal{L}_{|N|=3}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{N=0} &= \frac{1}{4} h^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\mu h^{\mu\nu})^2 + \frac{1}{4} h_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu h - \frac{1}{32} h \square h + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu B^{\rho\sigma} \cdot \partial_\lambda h^{\lambda\mu} \\ &\quad + B_\mu \partial_\nu B^{\nu\mu} + B \partial^\mu B_\mu + \alpha' L \square h - L \square L, \\ \mathcal{L}_{|N|=1} &= \frac{i}{2} \bar{C}^{\mu\nu} \square (\square C_{\mu\nu} + 2\partial^\rho \partial_\mu C_{\nu\rho}) + i \bar{C}^\mu \partial^\nu C_{\nu\mu} + i \partial_\nu \bar{C}^{\nu\mu} \cdot C_\mu + i \bar{C} \partial^\mu C_\mu - i \partial_\mu \bar{C}^\mu \cdot C \\ &\quad + 2\alpha' \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{R} \square \partial_\mu \partial_\nu C_{\rho\sigma} - 8\alpha' \bar{R} \square R, \\ \mathcal{L}_{|N|=2} &= -\bar{D}^\mu (\square D_\mu - \partial_\mu \partial^\nu D_\nu) + \bar{D} \partial^\mu D_\mu + \partial_\mu \bar{D}^\mu \cdot D + \alpha \bar{D} D, \\ \mathcal{L}_{|N|=3} &= i \bar{T} \square T. \end{aligned} \quad (58)$$

De aquí podemos extraer los coeficientes del vértice de

dos puntos $\mathcal{V}^{(2)}$ para el sector con $N_{ghost} = 0$

$$\mathcal{V}_{N=0}^{(2)} = \begin{matrix} h_{\rho\sigma} & B_{\rho\sigma} & B_\rho & B & L \\ \begin{matrix} h_{\mu\nu} \\ B_{\mu\nu} \\ B_\mu \\ B \\ L \end{matrix} & \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{h,h} & 2\varepsilon^{\kappa\lambda\rho\sigma} p_\lambda \delta_\kappa^{(\nu} p^{\mu)} \\ -2\varepsilon^{\mu\nu\kappa(\rho} p^\sigma) p_\kappa & 0 \\ 0 & -i4\eta^{\mu[\rho} p^{\sigma]} \\ 0 & 0 \\ -4\alpha' p^2 \eta^{\rho\sigma} & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ i4\eta^{\rho[\mu} p^{\nu]} \\ 0 \\ i4p^\rho \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -i4p^\mu \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -4\alpha' p^2 \eta^{\mu\nu} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4p^2 \end{matrix} \end{matrix}, \quad (59)$$

donde $\mathcal{V}_{h,h} \equiv -p^2 \eta^{\mu(\rho} \eta^{\sigma)\nu} + 2p^{(\mu} \eta^{\nu)(\sigma} p^{\rho)} - \frac{1}{2} (p^\mu p^\nu \eta^{\rho\sigma} + p^\rho p^\sigma \eta^{\mu\nu}) - \frac{1}{8} p^2 \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma}$.

El propagador del gravitón $\langle h_{\mu_1\nu_1}(p) h_{\mu_2\nu_2}(-p) \rangle =$

$iG_{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2}(p)$ se obtiene invirtiendo la matriz $\mathcal{V}^{(2)}$ en Eq. (59). Utilizando FORM [16] se obtiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned} G_{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2}(p) &= \frac{1}{p^2} \left(A_1 (\eta_{\mu_1\mu_2} \eta_{\nu_1\nu_2} + \eta_{\mu_1\nu_2} \eta_{\nu_1\mu_2}) + A_2 \eta_{\mu_1\nu_1} \eta_{\mu_2\nu_2} + A_3 \frac{1}{p^2} (\eta_{\mu_1\nu_1} p_{\mu_2} p_{\nu_2} + \eta_{\mu_2\nu_2} p_{\mu_1} p_{\nu_1}) \right. \\ &\quad \left. + A_4 \frac{1}{p^2} (\eta_{\mu_1\mu_2} p_{\nu_1} p_{\nu_2} + \eta_{\mu_1\nu_2} p_{\nu_1} p_{\mu_2} + \eta_{\nu_1\mu_2} p_{\mu_1} p_{\nu_2} + \eta_{\nu_1\nu_2} p_{\mu_1} p_{\mu_2}) + A_5 \frac{1}{p^4} p_{\mu_1} p_{\nu_1} p_{\mu_2} p_{\nu_2} \right), \end{aligned} \quad (60)$$

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{3 + 32\alpha'^2}{8(1 + 8\alpha'^2)}, \quad A_3 = -1, \\ A_4 &= \frac{1}{2}, \quad A_5 = 2. \end{aligned}$$

En Gravedad Unimodular, el campo del gravitón $h_{\mu\nu}$ se acopla a la parte sin traza del tensor energía-momento de Rosenfeld $\hat{T}^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu} T^\rho_\rho/4$; lo cual es equivalente a que la parte sin traza del campo del gravitón $\hat{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h/4$ se acople al tensor energía momento $T^{\mu\nu}$

de Rosenfeld [17]. Con esta definición de $\hat{h}_{\mu\nu}$ se obtiene que

$$\begin{aligned} \langle \hat{h}_{\mu_1\nu_1}(p)\hat{h}_{\mu_2\nu_2}(-p) \rangle &= \frac{i}{p^2} \left(-\frac{1}{2} (\eta_{\mu_1\mu_2}\eta_{\nu_1\nu_2} + \eta_{\mu_1\nu_2}\eta_{\nu_1\mu_2} - \eta_{\mu_1\nu_1}\eta_{\mu_2\nu_2}) - \frac{1}{p^2} (\eta_{\mu_1\nu_1}p_{\mu_2}p_{\nu_2} + \eta_{\mu_2\nu_2}p_{\mu_1}p_{\nu_1}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{p^2} (\eta_{\mu_1\mu_2}p_{\nu_1}p_{\nu_2} + \eta_{\mu_1\nu_2}p_{\nu_1}p_{\mu_2} + \eta_{\nu_1\mu_2}p_{\mu_1}p_{\nu_2} + \eta_{\nu_1\nu_2}p_{\mu_1}p_{\mu_2}) + 2 \frac{1}{p^4} p_{\mu_1}p_{\nu_1}p_{\mu_2}p_{\nu_2} \Big). \end{aligned} \quad (61)$$

Podemos obtener el potencial Newtoniano a partir del intercambio de un gravitón entre dos partículas con masas M_1 y M_2 y momento transferido k_μ Fig. (1), y tomando el límite estático $k_\mu = (0, \vec{k})_\mu$ [14]. La amplitud de este proceso, \mathcal{M} , viene dada por [17]

$$\mathcal{M} = -\frac{i}{4} T_{\mu\nu}^{(1)}(p_1, p'_1) \langle \hat{h}^{\mu\nu}(k)\hat{h}^{\rho\sigma}(-k) \rangle T_{\rho\sigma}^{(2)}(p_2, p'_2), \quad (62)$$

donde p_i y p'_i con $i = 1, 2$, es el momento inicial y final, respectivamente, de la i -ésima partícula. Con lo que $k = p_1 - p'_1 = p'_2 - p_2$ y $M_i^2 = -p_i^2 = -p'^2_i$. Asimismo, $T_{\mu\nu}^{(i)}(p_i, p'_i)$ representa la contribución al orden más bajo del elemento de matriz (*on-shell*) del tensor energía-momento entre los estados con momento p_i y p'_i ; y viene dado por [14]

$$T_{\mu\nu}^{(i)}(p_i, p'_i) \equiv \langle p'_i | T_{\mu\nu} | p_i \rangle = p_{i\mu}p'_{i\nu} + p_{i\nu}p'_{i\mu} + \frac{1}{2}p_i^2\eta_{\mu\nu}. \quad (63)$$

En el límite no relativista, esta relación pasa a ser

$$T_{\mu\nu}^{(i)}(p_i, p'_i) = -2M_i^2\eta_{\mu 0}\eta_{\nu 0}. \quad (64)$$

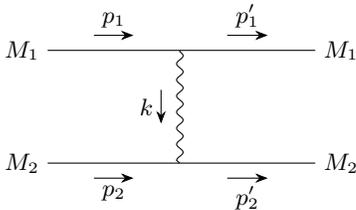


Figura 1: Diagrama de Feynman en el que se representa el intercambio de un gravitón entre dos partículas con masas M_1 y M_2 . Dichas partículas tienen momentos iniciales p_1 y p_2 , y finales p'_1 y p'_2 , respectivamente.

Por otro lado, el potencial no relativista se relaciona con la matriz S por medio de [18]

$$\langle p'_1 p'_2 | S | p_1 p_2 \rangle = -i2\pi\tilde{V}(k)\delta(E_i - E_f), \quad (65)$$

donde $\tilde{V}(k)$ es el potencial clásico en el espacio de momentos. Asimismo, la matriz S se relaciona con la amplitud del siguiente modo

$$\langle p'_1 p'_2 | S | p_1 p_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \mathcal{M}. \quad (66)$$

Por lo tanto, evaluando Eq. (64) en Eq. (62) y usando estas últimas relaciones, llegamos a

$$\tilde{V}(k) = \frac{\mathcal{M}}{2M_1 2M_2} = -\frac{i}{4} M_1 M_2 \langle \hat{h}_{00}(k)\hat{h}_{00}(-k) \rangle, \quad (67)$$

A partir de Eq. (61) obtenemos que $\langle \hat{h}_{00}(k)\hat{h}_{00}(-k) \rangle = -i/2k^2$, con lo que el potencial que obtenemos es

$$\tilde{V}(\vec{k}) = -\frac{1}{8} \frac{M_1 M_2}{\vec{k}^2}. \quad (68)$$

Aplicando la transformada de Fourier al potencial en espacio de momentos, tenemos

$$V(\vec{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tilde{V}(\vec{k}) = -\frac{1}{32\pi} \frac{M_1 M_2}{r}, \quad (69)$$

con $r \equiv |\vec{r}|$.

Finalmente, recordando que estamos usando unidades tales que $G = 1/32\pi$, el potencial clásico para la interacción gravitatoria que deducimos por medio de nuestro formalismo es

$$V(r) = -G \frac{M_1 M_2}{r}, \quad (70)$$

el cual coincide con el potencial de Newton.

V. CONCLUSIÓN

En este trabajo hemos propuesto una formulación para Gravedad Unimodular alternativa a la presentada en [2]. Para ello comenzamos planteando una acción clásica de Gravedad Unimodular que fijaba el determinante de la métrica a la unidad, por medio del uso de una nueva métrica $\hat{g}_{\mu\nu}$ en lugar de un multiplicador de Lagrange. Una vez conocida la acción clásica, dedujimos que esta tenía que ser invariante bajo los difeomorfismos transversos y usamos el operador BRST, \mathcal{B}_D , para fijar el gauge asociado a dicha transformación. La condición de transversalidad nos llevó a definir nuevos campos fantasmas, cada vez con un rango tensorial mayor (generaciones), hasta conseguir fijar por completo el gauge. Asimismo, la acción clásica aún contenía una simetría bajo transformaciones de Weyl; con lo que fue necesario el uso del operador BRST, \mathcal{B}_W , para fijar el gauge asociado a dicha

transformación. De este modo, fue necesario definir un nuevo operador BRST, \mathcal{B} , suma de los dos anteriores, y fijar el gauge por medio del operador BRST general y no simplemente para el asociado a cada transformación. A lo largo de este proceso, simplificamos la notación mediante el uso de campos duales para los fantasmas y expandimos la métrica como perturbación (campo del gravitón) en torno a la métrica plana.

Una vez construido este formalismo, obtuvimos a partir del funcional generador la identidad de Slavnov-Taylor, la cual gobierna las simetrías BRST a nivel cuántico. Por último, usamos técnicas computacionales y los resultados obtenidos para deducir el propagador del campo del gravitón. Con él pudimos calcular el potencial de interacción clásico entre dos partículas masivas y verificar que concuerda con el potencial Newtoniano.

-
- [1] Enrique Álvarez, Jesús Anero, Carmelo P. Martín, and Eduardo Velasco-Aja, “The quantum dynamics of Lagrange multipliers,” (2023), arXiv:2304.05188 [hep-th].
- [2] Taichiro Kugo, Ryuichi Nakayama, and Nobuyoshi Ohta, “Covariant BRST quantization of unimodular gravity: Formulation with antisymmetric tensor ghosts,” *Phys. Rev. D* **105**, 086006 (2022), arXiv:2202.03626 [hep-th].
- [3] Enrique Álvarez, Sergio González-Martín, Mario Herrero-Valea, and Carmelo P. Martín, “Quantum Corrections to Unimodular Gravity,” *JHEP* **08**, 078 (2015), arXiv:1505.01995 [hep-th].
- [4] A. Einstein, “Do gravitational fields play an essential part in the structure of the elementary particles of matter?” *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* **1919**, 433 (1919).
- [5] Albert Einstein, “The foundation of the general theory of relativity.” *Annalen Phys.* **49**, 769–822 (1916).
- [6] Y. Jack Ng and H. van Dam, “Unimodular Theory of Gravity and the Cosmological Constant,” *J. Math. Phys.* **32**, 1337–1340 (1991).
- [7] Pankaj Jain, Purnendu Karmakar, Subhadip Mitra, Sukanta Panda, and Naveen K. Singh, “Testing Unimodular Gravity,” *JCAP* **05**, 020 (2012), arXiv:1108.1856 [gr-qc].
- [8] Pankaj Jain, Atul Jaiswal, Purnendu Karmakar, Gopal Kashyap, and Naveen K. Singh, “Cosmological implications of unimodular gravity,” *JCAP* **11**, 003 (2012), arXiv:1109.0169 [astro-ph.CO].
- [9] Gustavo P. de Brito, Oleg Melichev, Roberto Percacci, and Antonio D. Pereira, “Can quantum fluctuations differentiate between standard and unimodular gravity?” *JHEP* **12**, 090 (2021), arXiv:2105.13886 [gr-qc].
- [10] R. Bufalo, M. Oksanen, and A. Tureanu, “How unimodular gravity theories differ from general relativity at quantum level,” *Eur. Phys. J. C* **75**, 477 (2015), arXiv:1505.04978 [hep-th].
- [11] Steven Weinberg, “The Cosmological Constant Problem,” *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1–23 (1989).
- [12] Jerome Martin, “Everything You Always Wanted To Know About The Cosmological Constant Problem (But Were Afraid To Ask),” *Comptes Rendus Physique* **13**, 566–665 (2012), arXiv:1205.3365 [astro-ph.CO].
- [13] Jean-Bernard Zuber Claude Itzykson, *Quantum Field Theory*, 1st ed., International Series In Pure And Applied Physics (McGraw-Hill, 1980).
- [14] John F. Donoghue, “General relativity as an effective field theory: The leading quantum corrections,” *Phys. Rev. D* **50**, 3874–3888 (1994), arXiv:gr-qc/9405057.
- [15] Enrique Álvarez, Sergio González-Martín, Mario Herrero-Valea, and Carmelo P. Martín, “Quantum Corrections to Unimodular Gravity,” *JHEP* **08**, 078 (2015), arXiv:1505.01995 [hep-th].
- [16] J. Kuipers, T. Ueda, J. A. M. Vermaseren, and J. Vollinga, “FORM version 4.0,” *Comput. Phys. Commun.* **184**, 1453–1467 (2013), arXiv:1203.6543 [cs.SC].
- [17] Enrique Alvarez, Sergio Gonzalez-Martin, and Carmelo P. Martin, “Unimodular Trees versus Einstein Trees,” *Eur. Phys. J. C* **76**, 554 (2016), arXiv:1605.02667 [hep-th].
- [18] Arif Akhundov and Anwar Shiekh, “A Review of Leading Quantum Gravitational Corrections to Newtonian Gravity,” *Electron. J. Theor. Phys.* **5**, 1–16 (2008), arXiv:gr-qc/0611091.