

# Máster en Ingeniería de Sistemas y Control

Proyecto fin de máster

## Modelado y simulación de un AGV híbrido triciclo-diferencial

Autor:

Roberto Sánchez Martínez

Directores:

Matilde Santos Peñas

J. Enrique Sierra-García





# Máster en Ingeniería de Sistemas y Control

Proyecto fin de máster

## Modelado y simulación de un AGV híbrido triciclo-diferencial

Autor:

Roberto Sánchez Martínez

Directores:

Matilde Santos Peñas

J. Enrique Sierra-García



## Autorización

Autorizamos a la Universidad Complutense y a la UNED a difundir y utilizar con fines académicos, no comerciales y mencionando expresamente a sus autores, tanto la memoria de este Trabajo Fin de Máster, como el código, la documentación y/o el prototipo desarrollado.

Firmado: Roberto Sánchez Martínez

A handwritten signature in blue ink, consisting of several fluid, overlapping loops and strokes, positioned diagonally across the page.



## Resumen

La industria está constantemente buscando nuevas soluciones para agilizar y sacar el máximo rendimiento a sus procesos de producción. Para ello utilizan con frecuencia vehículos que se desplazan sin conductor, llamados AGV. La palabra AGV es un acrónimo de “Automatic Guided Vehicle” (Vehículo de Guiado Automático). Se trata de vehículos autónomos utilizados principalmente dentro de las fábricas e industrias para el transporte de mercancía puntual, normalmente sustituyendo a los medios de transporte manuales o a las cintas transportadoras. Permiten reducir enormemente los costes operativos y los errores humanos.

Este trabajo desarrolla un modelo cinemático y dinámico del AGV que pueda ser usado para diseño de controladores. El principal objetivo del trabajo es conseguir una representación matemática de la compleja dinámica de los AGVs, ya que es altamente dependiente de la distribución de la carga y puede llevar a situaciones de derrape y vuelco.

Para ello se han desarrollado tres modelos dinámicos distintos del AGV. El primero de ellos ha supuesto condiciones de rodadura perfecta y ninguna posibilidad de remolcar carga. Posteriormente se ha añadido un remolque al modelo anterior, con el fin de comprobar los efectos de la carga remolcada en las prestaciones y capacidad de control del AGV. Por último, se ha incluido un modelo simple de la interacción entre las ruedas del AGV y la superficie de rodadura para simular el deslizamiento de las ruedas.

Se ha podido comprobar que el modelo dinámico ofrece unos resultados más ajustados a la realidad que el modelo puramente cinemático y permite testear algoritmos de control con representaciones más fidedignas de la realidad, permitiendo un mayor refinamiento y ajuste.

**Palabras clave:** Modelado y simulación, AGV, triciclo, diferencial, modelo dinámico, cinemática, remolque interacción rueda-suelo.



## Abstract

The industry is constantly looking for new solutions to streamline and get the most out of its production processes. To do so, they frequently use vehicles that move without a driver, called AGVs. The word AGV is an acronym for “Automatic Guided Vehicle”. These are autonomous vehicles used mainly within factories and industries for the transport of punctual goods, usually replacing manual means of transport or conveyor belts. They greatly reduce operating costs and human error.

This work develops a kinematic and dynamic model of the AGV that can be used for controller design. The main objective of the work is modelling the dynamics of the AGVs, since it is highly dependent on the distribution of the load and can lead to skidding and overturning situations.

For this purpose, three different dynamic models of the AGV have been developed. The first one has meant perfect rolling conditions and no possibility of towing cargo. Subsequently, a trailer was added to the previous model in order to test the effects of the towed load on the performance and controllability of the AGV. Finally, a simple model of the interaction between the AGV's wheels and the tread surface has been included to simulate wheel slip.

It has been found that the dynamic model offers results more adjusted to reality than the purely kinematic model and allows testing control algorithms against more reliable representations of reality, allowing greater refinement and adjustment without the need for time spent on the robot.

**Keywords:** *AGV, tricycle, differential, dynamic model, kinematic model, trailer, wheel-ground interaction model.*



## Índice

Autorización .....	3
Resumen.....	5
Abstract .....	7
Índice de figuras .....	13
Índice de tablas .....	17
1. CAPÍTULO 1: .....	19
Introducción .....	19
1.1 Introducción y motivación .....	19
1.2 Objetivos .....	20
1.3 Estructura .....	20
2. CAPÍTULO 2.....	23
Fundamentos teóricos y estado del arte .....	23
2.1 Vehículos AGVs.....	23
2.2 Modelos cinemáticos de robots móviles.....	24
2.2.1 Modelo diferencial .....	24
2.2.2 Modelo triciclo .....	25
2.3 Modelos dinámicos de robots móviles .....	26
2.4 Modelos de interacción rueda-suelo .....	28
3. CAPÍTULO 3: .....	31
Modelado del Easybot Std .....	31
3.1 Modelado del sensor de posición .....	34
3.2 Modelo cinemático del Easybot.....	36
3.3 Modelo dinámico del Easybot.....	38
3.3.1 Modelo de una rueda.....	39
3.3.2 Dinámica de la unidad de tracción.....	40
3.3.3 Dinámica del cuerpo del AGV.....	42
3.3.4 Modelado de las cargas verticales en las ruedas .....	45
3.3.5 Modelado de las cargas laterales en las ruedas.....	50
3.3.6 Modelos de derrape y vuelco.....	52
3.3.7 Modelos de aceleración y frenado.....	56
3.4 Modelo con carga remolcada.....	57
3.5 Modelo con interacción rueda-suelo. Ruedas deformables .....	60
3.6 Implementación del modelo dinámico .....	62
4. CAPÍTULO 4.....	65
Control de seguimiento de trayectoria de un AGV .....	65

4.1	Control PID .....	65
4.1.1	Control de velocidad .....	65
4.1.2	Control de posición .....	65
5.	CAPÍTULO 5.....	67
	Simulación y resultados.....	67
5.1	Trayectorias de validación de los modelos del AGV .....	67
5.2	Criterios para la validación del modelo.....	68
5.3	Validación del sensor de posición .....	68
5.4	Control del modelo cinemático.....	70
5.4.1	Test 1: Circunferencia.....	71
5.4.2	Test 2: Clotoide.....	72
5.5	Validación del modelo dinámico .....	74
5.5.1	Aceleración y frenado en línea recta con perfil de velocidad sinusoidal .....	74
5.5.2	Aceleración y frenado en línea recta con perfil de velocidad cuadrado.....	75
5.5.3	Aceleración y frenado en curva con perfil de velocidad sinusoidal .....	76
5.5.4	Aceleración y frenado en curva con perfil de velocidad cuadrado .....	79
5.6	Control del modelo con remolque .....	80
5.6.1	Aceleración y frenado en curva con perfil de velocidad sinusoidal .....	81
5.6.2	Aceleración y frenado en curva con perfil de velocidad cuadrado .....	84
5.7	Control del modelo con interacción rueda-suelo .....	87
5.7.1	Perfil de velocidad sinusoidal .....	87
5.7.2	Perfil de velocidad cuadrado.....	89
5.8	Comparativa entre los 3 casos anteriores.....	92
5.8.1	Perfil de velocidad sinusoidal .....	92
5.8.2	Perfil de velocidad cuadrado.....	95
6.	CAPÍTULO 6.....	99
	Conclusiones y trabajos futuros.....	99
6.1	Conclusiones.....	99
6.2	Líneas futuras .....	99
6.2.1	Correlación del modelo con un AGV real .....	99
6.2.2	Modelado de la parte eléctrica .....	100
6.2.3	Modelo con desplazamiento de la carga .....	100
6.2.4	Modelo con resistencias dinámicas .....	100
	Bibliografía .....	101
	Lista de siglas y acrónimos .....	103
	Anexo 1: Método de la bisectriz para el cálculo del punto de corte de dos curvas. ....	105

Anexo 2: Cálculo del momento de inercia. Teorema de Steiner. ....	109
Anexo 3: Código para modelar el sensor de posición .....	111
Anexo 4: Modelo de bicicleta aplicado a un AGV .....	113



## Índice de figuras

Figura 1: Easybot Std 410 (ASTI, 2020).....	20
Figura 2: AGVs en entorno industrial real.....	24
Figura 3: Esquema de robot diferencial.....	24
Figura 4: Esquema de robot triciclo.....	25
Figura 5: Deslizamiento frente a tracción y carga soportada (elaboración propia).....	28
Figura 6: Modelo esquemático del AGV.....	31
Figura 7: Diagrama de los módulos del AGV.....	32
Figura 8: Sistemas de referencia en el AGV.....	34
Figura 9: Relación entre sistemas de referencia en el AGV.....	34
Figura 10: Funcionamiento normal (izquierda) y parada por pérdida de referencia (derecha). 35	
Figura 11: Flujograma de operación del sensor de posición.....	35
Figura 12: Esquema cinemático del Easybot.....	36
Figura 13: Implementación del modelo cinemático.....	37
Figura 14: Cinemática de la unidad de tracción diferencial.....	38
Figura 15: Cinemática del cuerpo del AGV triciclo.....	38
Figura 16: Esquema iterativo para calcular modelos dinámicos.....	39
Figura 17: Modelo esquemático de una rueda.....	40
Figura 18: Modelo esquemático de la unidad de tracción.....	40
Figura 19: Modelo esquemático del cuerpo del AGV.....	43
Figura 20: Cálculo del momento de inercia.....	45
Figura 21: Esquema del AGV para el cálculo de la posición del centro de masas.....	46
Figura 22: Esquema para el cálculo de la carga estática en las ruedas.....	47
Figura 23: Centro de masas y centro de tracción.....	48
Figura 24: Carga sobre las ruedas con AGV en movimiento.....	49
Figura 25: Cálculo de las cargas sobre las ruedas en movimiento. Plano XZ.....	49
Figura 26: Cálculo de las cargas sobre las ruedas en movimiento. Plano YZ.....	50
Figura 27: Modelo para el cálculo de la carga lateral sobre las ruedas.....	51
Figura 28: Dirección de aplicación de la fuerza centrífuga.....	52
Figura 29: Modelo para el cálculo de derrape y vuelco.....	53
Figura 30: Velocidad límite de derrape.....	54
Figura 31: Velocidad límite de vuelco.....	55
Figura 32: Valores críticos de la altura y posición de c.m. para provocar vuelco.....	55
Figura 33: Esquema para el estudio de aceleración y frenado.....	56
Figura 34: Límites de tracción para distintas posiciones del CM.....	57
Figura 35: Esquema de AGV + Remolque.....	58

Figura 36: Sistema de referencia con remolque .....	58
Figura 37: Diagrama de fuerzas del remolque .....	59
Figura 38: Trayectorias para distintas posiciones del CM .....	62
Figura 39: Trayectorias para distintas posiciones del CM (detalle) .....	62
Figura 40: Algoritmo general para calcular el modelo dinámico .....	63
Figura 41: Lemniscata (izquierda), circunferencia (medio) y clotoide (derecha) .....	67
Figura 42: Test del sensor en recta .....	68
Figura 43: Test del sensor en arco de circunferencia.....	69
Figura 44: Test del sensor en arco de circunferencia con bajo ruido .....	70
Figura 45: Test del sensor en arco de circunferencia con alto ruido .....	70
Figura 46: Control en circunferencia.....	71
Figura 47: Error en circunferencia.....	71
Figura 48: Tiempo de parada en circunferencia .....	72
Figura 49: Control en clotoide.....	73
Figura 50: Error en clotoide.....	73
Figura 51: Tiempo de parada en clotoide .....	74
Figura 52: Velocidad en aceleración y frenado en línea recta con perfil sinusoidal.....	74
Figura 53: Aceleración en aceleración y frenado en línea recta con perfil sinusoidal.....	75
Figura 54: Velocidad en aceleración y frenado en línea recta con perfil cuadrado.....	75
Figura 55: Par aplicado en aceleración y frenado en línea recta con perfil recto.....	76
Figura 56: Trayectoria para el modelo dinámico .....	76
Figura 57: Par aplicado en curva con perfil sinusoidal.....	77
Figura 58: Aceleración en curva con perfil sinusoidal ( $R \gg x_{eje}$ ).....	77
Figura 59: Aceleración en curva con perfil sinusoidal ( $R \sim x_{eje}$ ).....	78
Figura 60: Velocidad en curva con perfil sinusoidal ( $R \gg x_{eje}$ ).....	78
Figura 61: Trayectoria para el modelo dinámico con perfil cuadrado .....	79
Figura 62: Par aplicado en curva con perfil cuadrado.....	79
Figura 63: Aceleración en curva con perfil cuadrado.....	80
Figura 64: Velocidad en curva con perfil cuadrado.....	80
Figura 65: Ángulo entre remolque y AGV con perfil de velocidad sinusoidal.....	81
Figura 66: Ángulo entre UT y AGV con perfil de velocidad sinusoidal .....	82
Figura 67: Trayectorias de AGV y remolque con perfil de velocidad sinusoidal .....	82
Figura 68: Aceleración del conjunto AGV + remolque con perfil de velocidad sinusoidal .....	83
Figura 69: Velocidad del conjunto AGV + remolque con perfil de velocidad sinusoidal .....	83
Figura 70: Ángulo entre remolque y AGV con perfil de velocidad cuadrado.....	84
Figura 71: Trayectorias de AGV y remolque con perfil de velocidad cuadrado.....	85

Figura 72: Ángulo entre UT y AGV con perfil de velocidad cuadrado .....	85
Figura 73: Aceleración del conjunto AGV + remolque con perfil de velocidad cuadrado .....	86
Figura 74: Velocidad del conjunto AGV + remolque con perfil de velocidad cuadrado .....	86
Figura 75: Deslizamientos con perfil de velocidad sinusoidal.....	87
Figura 76: Trayectorias con perfil de velocidad sinusoidal y deslizamiento .....	88
Figura 77: Ángulo entre UT y AGV con perfil de velocidad sinusoidal y deslizamiento.....	88
Figura 78: Ángulo entre AGV y remolque con perfil de velocidad sinusoidal y deslizamiento...	89
Figura 79: Deslizamientos con perfil de velocidad cuadrado.....	90
Figura 80: Trayectorias con perfil de velocidad cuadrado y deslizamiento .....	90
Figura 81: Ángulo entre UT y AGV con perfil de velocidad cuadrado y deslizamiento.....	91
Figura 82: Ángulo entre remolque y AGV con perfil de velocidad cuadrado y deslizamiento ...	91
Figura 83: Comparación de trayectorias en el modelo dinámico .....	92
Figura 84: Comparación de trayectorias en el modelo dinámico (zoom) .....	93
Figura 85: Comparación de velocidades en x en el modelo dinámico .....	93
Figura 86: Comparación de velocidades en y en el modelo dinámico .....	94
Figura 87: Comparación de velocidades en y en el modelo dinámico (zoom).....	94
Figura 88: Comparación de trayectorias en el modelo dinámico con perfil de velocidad cuadrado .....	95
Figura 89: Comparación de trayectorias en el modelo dinámico con perfil de velocidad cuadrado (zoom) .....	95
Figura 90: Comparación de velocidades en x en el modelo dinámico con perfil de velocidad cuadrado .....	96
Figura 91: Comparación de velocidades en y en el modelo dinámico con perfil de velocidad cuadrado .....	97
Figura 92: Comparación de velocidades en y en el modelo dinámico con perfil de velocidad cuadrado (zoom) .....	97
Figura 93: Modelo de bicicleta.....	113
Figura 94: Comportamiento en curva frente a posición del centro de masas.....	115
Figura 95: Trayectorias.....	115
Figura 96: Error de posición .....	116



## Índice de tablas

Tabla 1: Variables del modelo cinemático diferencial .....	25
Tabla 2: Variables del modelo cinemático triciclo .....	26
Tabla 3: Características técnicas del Easybot Standard 410 (ASTI Mobile Robotics).....	31
Tabla 4: Variables de los módulos del AGV.....	33
Tabla 5: Resumen de los modelos diferencial y triciclo para AGV .....	36
Tabla 6: Parámetros del modelo cinemático del Easybot Std 410.....	37
Tabla 7: Parámetros del modelo dinámico de la unidad de tracción .....	41
Tabla 8: Parámetros del modelo dinámico del cuerpo del AGV .....	43
Tabla 9: Parámetros para el cálculo del momento de inercia .....	44
Tabla 10: Variables para el cálculo de la posición del centro de masas .....	46
Tabla 11: Parámetros para el cálculo de la carga estática en las ruedas.....	47
Tabla 12: Variables para calcular la carga sobre las ruedas con AGV en movimiento.....	48
Tabla 13: Variables para calcular la carga lateral sobre las ruedas.....	50
Tabla 14: Parámetros para el cálculo de derrape y vuelco .....	53
Tabla 15: Parámetros para el estudio de aceleración y frenado .....	56
Tabla 16: Coeficientes de deslizamiento para la interacción rueda suelo.....	61
Tabla 17: Tiempo de parada en circunferencia.....	72
Tabla 18: Tiempo de parada en clotoide.....	73



# 1. CAPÍTULO 1:

## Introducción

### 1.1 Introducción y motivación

Uno de los problemas que plantean la mayoría de las empresas con procesos logísticos es el propio movimiento de las mercancías dentro del proceso productivo. Si se observa el movimiento de esas mercancías, muchas de ellas siguen rutas comunes, y se necesita personal para trasladarlas de un lugar a otro. Este personal realiza tareas repetitivas y monótonas, están desmotivados por falta de objetivos en el trabajo, no tienen metas que cumplir, a menudo tienen exceso de confianza en los vehículos que manejan, y un error en estos procesos genera pérdidas económicas, y en algunos casos, desgracias personales. De la misma forma que se tiende a automatizar procesos complejos, se puede plantear automatizaciones de transporte (ASTI, 2020).

Hasta hace poco, el desarrollo de la automatización y la robótica no permitía cubrir la necesidad de automatizar estas tareas. Con los últimos avances en esos y otros campos relacionados, se puede abordar el problema la automatización de este tipo transporte mediante vehículos autónomos, que son más flexibles que los sistemas de transporte tradicionales, como cintas, cadenas y demás ingenios de instalación fija, y sobre todo, permitiendo de esta forma disponer de una máquina que en modo manual se comporta como una máquina convencional, y en modo automático es capaz de realizar tareas de transporte sin necesidad de conductor.

La industria está constantemente buscando nuevas soluciones para agilizar y sacar el máximo rendimiento a sus procesos de producción. Para ello utilizan con frecuencia vehículos que se desplazan sin conductor, llamados AGVs. La palabra AGV es un acrónimo de “Automatic Guided Vehicle” (Vehículo de Guiado Automático). Se trata de vehículos autónomos, utilizados principalmente dentro de las fábricas e industrias, para el transporte de mercancía puntual, normalmente sustituyendo a los medios de transporte manuales o a las cintas transportadoras. Permiten reducir enormemente los costes operativos y los errores humanos.

Para cumplir con su principal característica de navegar o circular como un vehículo autónomo, sin necesidad de la intervención del ser humano como piloto del mismo, estos vehículos disponen de distintos sistemas de guiado y de un complejo sistema de control y gestión, que permite diferenciar dos grandes grupos. Aquellos cuyo sistema de gestión y control no comunica con el entorno donde se mueven, es decir, son autónomos y el sistema sólo gestiona la flota de vehículos haciéndolos trabajar de forma automática y sin interactuar con el entorno; o sistemas de AGV complejos, en los que las comunicaciones fluidas con el entorno son habituales y fundamentales, ya que a través de estas comunicaciones se gestionan las órdenes de los vehículos y los movimientos a realizar en todo momento, comunicando con los sistemas de mantenimiento de planta, puertas automáticas, almacenes automáticos, así como el software de gestión de la compañía ya sea un ERP, un SGA, etc. (ASTI, 2020).

Existen AGVs con múltiples configuraciones, aunque la literatura científica parece centrarse especialmente en los diferenciales y de tipo vehículo, siendo muy escasos los dedicados al estudio de los robots triciclo. En este trabajo se realiza el modelado, simulación y control de un AGV híbrido triciclo-diferencial, en concreto el AGV es un Easybot Standard 410 de la empresa ASTI Mobile Robotics, que se puede ver en la Figura 1.



*Figura 1: Easybot Std 410 (ASTI, 2020)*

La finalidad del presente trabajo es desarrollar un modelo cinemático y dinámico del AGV que pueda ser usado para diseño de controladores. El principal objetivo es modelar la dinámica de los AGVs, ya que es altamente dependiente de la distribución de la carga y puede llevar a situaciones de derrape y vuelco.

En concreto, este trabajo se centra principalmente en los robots de tipo combinado triciclo con unidad de tracción diferencial. En la literatura científica del ámbito de los AGVs apenas se encuentran artículos que versen sobre este tipo de robots, a pesar de que en la industria encuentran múltiples aplicaciones.

## 1.2 Objetivos

El objetivo general de este Trabajo Fin de Máster es modelar la dinámica del Easybot Std 410 e integrarla con su cinemática, para poder diseñar mejores sistemas de control de los que se utilizan actualmente, que utilizan mayoritariamente modelos cinemáticos. Además, el AGV seleccionado para este TFM es una combinación de robot diferencial y triciclo, lo que hace su estudio complejo y novedoso.

Este objetivo se desglosa en los siguientes objetivos específicos:

- Crear un modelo cinemático del Easybot Std 410 y validarlo en simulación para distintos tipos de trayectorias típicas de los recorridos de un AGV.
- Desarrollar e implementar en simulación un modelo del Easybot Std 410 que incluya efectos dinámicos debidos a la carga soportada por el AGV y su distribución.
- Desarrollar un modelo que incluya carga remolcada y sus efectos sobre la controlabilidad del AGV.
- Desarrollar un sistema de control para el Easybot Std 410 para validar esos modelos y cerrar el lazo.

No se contempla simular sensores y actuadores con los que está equipado el robot (excepto el sensor de posición). Esto es debido a que el objetivo del trabajo es ayudar a mejorar el control de alto nivel de los AGVs, por lo que se asume que las características técnicas de los sensores y actuadores que se utilizan, así como características eléctricas de los motores y los niveles de sensibilidad y ruido del sensor de posición, son conocidos y compensados cuando llegan al algoritmo de control.

## 1.3 Estructura

Tras este capítulo 1 introductorio, el capítulo 2 revisa los principales modelos cinemáticos y dinámicos que existen para robots móviles, haciendo hincapié en el modelo triciclo y sus diferencias con los diferenciales, más habituales. También se introducen las principales técnicas de control utilizadas en robots de tipo triciclo para seguimiento de trayectorias y estabilización.

Por último, se resumen brevemente las contribuciones científicas encontradas en la literatura con respecto al tema.

El capítulo 3 desarrolla el modelado de Easybot Standard 410. Los modelos se han ido desarrollando secuencialmente, empezando por el modelo cinemático sencillo para a continuación incluir la dinámica. Posteriormente se añaden los efectos de la carga, tanto portada como en remolque, en el comportamiento del AGV. Los últimos apartados analizan el efecto de la distribución de la carga y del rozamiento del suelo en la controlabilidad del robot.

El capítulo 4 estudia algunos sistemas de control tradicionalmente utilizados en AGV para poner de manifiesto sus limitaciones a medida que el modelo adquiere complejidad y es más realista, al incorporar la dinámica. Este apartado no pretende dar una solución a un problema de control, sino validar los modelos desarrollados en el apartado 3 para que puedan ser utilizados para diseñar e implementar estrategias eficientes de control del AGV.

El capítulo 5 incluye distintos experimentos realizados con el fin de validar los modelos y detectar los límites de cada técnica de control, así como posibles mejoras de éstas. Se definen los criterios a seguir con el fin de poder comparar los diferentes algoritmos.

Por último, el capítulo 6 recoge las principales conclusiones y líneas futuras del trabajo.



## 2. CAPÍTULO 2

### Fundamentos teóricos y estado del arte

#### 2.1 Vehículos AGVs

Los AGVs se adaptan a cualquier tipo de tarea y entorno, conservando la opción de poder ser utilizados de forma manual. Su uso proporciona no sólo una reducción de costes y un aumento en la eficiencia de los procesos, sino también mejoras en seguridad y en calidad. Los distintos tipos de vehículos de guiado automático se diferencian en dos aspectos principales. Su fisonomía, es decir la mecánica que se emplea para el transporte de mercancía, y su sistema de gestión y control, que será el encargado de articular al vehículo, enviando las órdenes necesarias para que el vehículo navegue por un entorno a una cierta velocidad, se detenga, etc.

Existe una extensa gama de vehículos de guiado automático, en función del sistema de guiado, las cargas a transportar, el sistema de gestión y los productos de implementación de AGV, que contribuyen a la mejora de un AGV base. Por ejemplo, se pueden encontrar AGV apiladores, para colocar palés uno encima de otro; AGV trilaterales, cuando las cargas se disponen en estanterías de pasillos estrechos o pequeños; y AGV tractores, capaces de unir procesos productivos.

Una diferencia importante entre los distintos tipos de vehículos de guiado automático es el sistema de guiado que utilizan. Estos pueden ser (Smieszet, 2019):

- Filoguiado. El AGV se desplaza guiándose por un hilo conductor instalado bajo el suelo. Este método de guiado es muy sencillo pero es el de menor flexibilidad, ya que las rutas de movimiento del AGV se limitan a las rutas con el hilo instalado.
- Optoguiado. El AGV se desplaza guiándose por una tira de espejo que se extiende por los recorridos del AGV. Mediante catadióptrico se detecta la guía. La instalación de estas guías de espejo no requiere de una obra como en el caso del filoguiado, y la modificación o creación de nuevas rutas es menos compleja, ya que basta dibujar con tiras de espejo por el suelo las nuevas trayectorias y definir los movimientos en el AGV.
- Visión Artificial. El AGV reconoce mediante visión artificial una tira de espejo catadióptrico, calculando y corrigiendo en cada instante la desviación existente entre el AGV y la ruta. En función de la ruta que tiene cargada y la distancia obtenida mediante la visión artificial el AGV realiza los movimientos de timón adecuados para continuar con la ruta prefijada.
- Guiado Láser. El AGV equipado con una unidad láser giratoria realiza barridos identificando en su entorno el mayor número de reflectores posibles para determinar su posición en el mapa que tiene en memoria. Para realizar el mapa de la instalación se sitúan espejos catadióptricos en posición vertical en puntos estratégicos de toda la instalación. Estos espejos serán puntos de referencia con los que calcular la posición del AGV, de la misma manera que los faros son puntos de referencia para un barco que se acerca a la costa. La principal ventaja de este método de guiado es la increíble sencillez con la que se puede crear una estación de carga/descarga de palés o se puede modificar una ruta. En apenas 10 minutos, una persona formada puede crear una nueva ruta sin que sea preciso realizar ninguna modificación en la instalación de los reflectores.

Debido a que este tipo de vehículos circulan normalmente por los mismos pasillos que las personas, deben llevar implementados sistemas de seguridad para evitar posibles colisiones con objetos o personas que se interpongan en su trayectoria. Las medidas de seguridad no se centran sólo en la propia máquina, sino que abarcan también el área en la que ésta opera.

Debido a su tamaño y peso, y con el fin de evitar cualquier riesgo para las personas, las velocidades de traslación se adaptan según cada caso para garantizar la parada total del AGV

antes de que exista contacto con el obstáculo, bien sea una persona o un objeto. En los AGV que se desenvuelven en zonas donde el tráfico de personas es muy alto se suele instalar un sistema de detección y parada láser de última generación, que disminuye al 0% el riesgo de accidente.



Figura 2: AGVs en entorno industrial real

## 2.2 Modelos cinemáticos de robots móviles

Existen diversos tipos de AGV comerciales, cada uno con diferentes características cinemáticas y dinámicas. La cinemática del AGV viene determinada, entre otras cosas, por el número y posición de las ruedas. Para este trabajo nos centraremos en los modelos listados a continuación:

### 2.2.1 Modelo diferencial

Este modelo consiste en un robot con 2 ruedas paralelas con capacidad de tracción. Los cambios de dirección se consiguen gracias a la diferencia en la velocidad de rotación de cada rueda. El ángulo  $\beta$  es el ángulo que forma el AGV diferencial con respecto a un sistema de referencia fijo (en azul en la figura) suponiendo que no existe deslizamiento de las ruedas. Esquemáticamente se representa en la Figura 3.

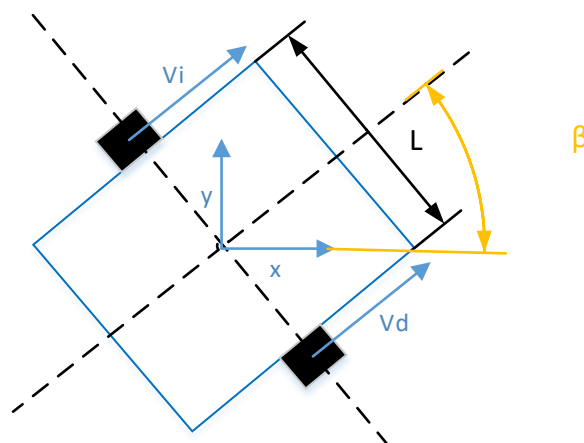


Figura 3: Esquema de robot diferencial

Las variables que aparecen en la figura se explican en la Tabla 1. En la Figura 3 los bloques negros representan las ruedas del AGV y el cuadrado azul el cuerpo.

El modelo obedece a las siguientes ecuaciones (Sierra, 2020):

$$v = \frac{1}{2}(v_D + v_I) \quad (1)$$

$$\omega = \frac{1}{B}(v_D - v_I) \quad (2)$$

$$R = L * \frac{(v_D + v_I)}{(v_D - v_I)} \quad (3)$$

$$v = \omega * R \quad (4)$$

$$\omega = \dot{\beta} \quad (5)$$

$\omega$	Velocidad de rotación [rad]
$v_D, v_I$	Velocidad lineal de las ruedas derecha e izquierda, respectivamente [m/s]
$R$	Radio de la curva [m]
$L$	Distancia entre ruedas [m]
$v$	Velocidad equivalente del conjunto [m/s]

Tabla 1: Variables del modelo cinemático diferencial

### 2.2.2 Modelo triciclo

En este caso el robot se compone de una rueda directora y motriz, generalmente la delantera, y dos ruedas traseras. La Figura 4 representa este tipo de AGV donde  $V_s$  es la velocidad lineal de la rueda directora,  $\beta$  es el ángulo de la rueda motriz con respecto al sistema de referencia embarcado en el AGV suponiendo que no existe deslizamiento de las ruedas, y  $\theta$  el ángulo que forma la dirección de movimiento del AGV con respecto al sistema de referencia fijo (representado en azul).

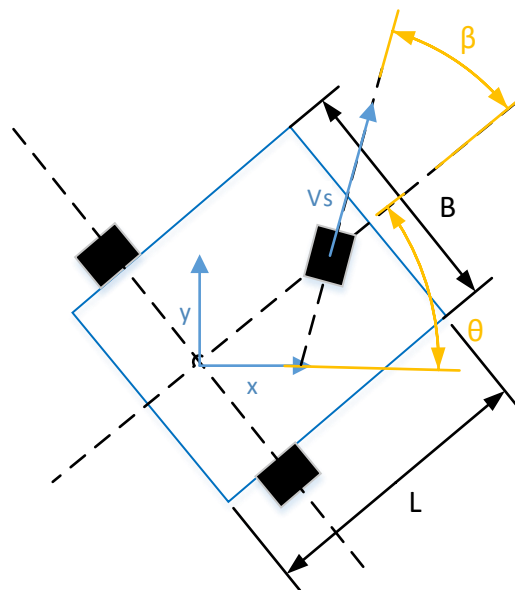


Figura 4: Esquema de robot triciclo

Las ecuaciones que rigen el modelo cinemático para el AGV triciclo son (Sierra, 2020):

$$\dot{x} = v * \cos(\theta) \quad (6)$$

$$\dot{y} = v * \sin(\theta) \quad (7)$$

$$\dot{\theta} = \omega \quad (8)$$

$$v = v_s * \cos(\beta) \quad (9)$$

$$\omega = \frac{v_s}{L} * \sin(\beta) \quad (10)$$

Donde:

x	Posición x del centro del eje trasero del AGV [m]
y	Posición y del centro del eje trasero del AGV [m]
$\omega$	Velocidad de rotación [rad/s]
$\theta$	Ángulo de rotación del cuerpo del AGV respecto de un sistema de referencia inercial [rad]
$v_s$	Velocidad de la rueda directora [m/s]
L	Distancia entre la rueda directora y las traseras [m]
$\alpha$	Ángulo de giro de la rueda directora [rad]

Tabla 2: Variables del modelo cinemático triciclo

El Easybot Std 410 es una combinación de ambos modelos, ya que la cabeza tractora se comporta de forma diferencial pero el AGV en su conjunto se modela como un triciclo.

### 2.3 Modelos dinámicos de robots móviles

La literatura existente sobre modelado dinámico de robots móviles esta principalmente centrada en los robots diferenciales y vehículos con ruedas omnidireccionales.

En (Bonilla, 2005) se propone una aproximación al modelado de un robot de tipo triciclo con el objetivo de diseñar una ley de control de posición no lineal. Para ello se utiliza el método de Euler-Lagrange, que en su versión matricial para un robot con restricciones no holonómicas es:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} = A(\mathbf{q})\lambda + B(\mathbf{q})\tau \quad (11)$$

Donde:

K	Energía cinética [J]
$\mathbf{q}$	Vector de coordenadas generalizadas
B	Matriz cinemática
A	Matriz asociada a las restricciones no holonómicas
$\tau$	Vector de fuerzas y pares aplicados
$\lambda$	Vector de multiplicadores de Lagrange

Desarrollando la ecuación general y añadiendo las restricciones, se llega a un modelo generalizado para un AGV de tipo triciclo. Al no aplicar ninguna de las simplificaciones utilizadas en este trabajo el modelo que resulta es muy complejo y requiere gran cantidad de datos para su desarrollo. Si bien las simplificaciones se podrían aplicar sobre el modelo complejo para

obtener resultados de forma más simple, en este trabajo se ha optado por utilizar esas simplificaciones antes del desarrollo con el objeto de facilitar éste.

En (Villagrà, 2011) se analizan distintos sistemas de control para permitir el guiado de AGVs sobre una ruta predefinida. Dentro de éstas distinguen entre técnicas de control basadas en modelos y no basadas en modelos. Las primeras requieren el desarrollo de modelos de mayor o menor complejidad. En el caso dinámico, el artículo describe los fenómenos de deriva en la dirección y los modela mediante una función de transferencia. También desarrolla los modelos de la dirección y la tracción. Para ello utiliza sendas funciones de transferencia que requieren identificar los parámetros del sistema real. Al no tener acceso a datos reales, se ha descartado este tipo de modelado para el presente trabajo.

En (Bi, 2008) se plantea el modelado y control de un robot que puede ser controlado directamente por el operario. En este caso se utiliza el método de Euler-Lagrange. La aportación más interesante de este artículo se refiere al modelado de los distintos sensores con los que está equipado el AGV, ya que el modelo busca hacerlos prescindibles.

Uno de los trabajos más interesantes sobre modelado de AGV es (Smieszek, 2019). En este artículo se analizan los distintos errores que se producen en un AGV cuya única forma de saber su posición es mediante odometría. El foco está puesto sobre el efecto que tiene la distribución de la carga en el radio efectivo de las ruedas y, por ende, en la trayectoria seguida por el AGV. Además, la variación del radio efectivo de la rueda influye también en el conocimiento de la distancia real entre puntos de contacto de las ruedas.

En (Saha, 1991) se analiza el problema utilizando un método llamado *Natural Orthogonal Complement*. Este se compone de una serie de pasos, y llega a un modelo similar al de Euler-Lagrange:

- 1) Ecuaciones del movimiento de uno de los sólidos rígidos que componen el sistema mediante el método de Euler-Newton.
- 2) Extensión de las ecuaciones del modelo general compuesto por varios sólidos rígidos.
- 3) Derivación de las ecuaciones para las restricciones holonómicas y no holonómicas en forma diferencial.
- 4) Definición del vector de velocidades generalizadas.
- 5) Se diferencian ambas partes de la ecuación general, quedando:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} = A(\mathbf{q})\lambda + B(\mathbf{q})\tau \quad (12)$$

Y se llega a la misma ecuación que utilizando el modelo de Euler-Lagrange.

Siguiendo un planteamiento más alejado del modelado teórico y cercano a la identificación de sistemas (Suarez, 2004) se puede obtener un modelo del AGV o de algunos de sus subsistemas utilizando datos experimentales. El principal inconveniente de este método es la necesidad de llevar a cabo ensayos para extraer los datos, aunque a cambio los modelos obtenidos son funciones de transferencia directamente, lo que simplifica bastante la simulación. Sin embargo, los resultados de validación parecen mostrar que los modelos desarrollados a partir de ecuaciones son más robustos al alejarse de las condiciones en las que se realizó la prueba de captura de datos. En este trabajo este tipo de modelos no son aplicables al no poder realizar ensayos sobre el AGV físico.

En (Santos, 2018) se analiza una técnica híbrida de modelado basada en la combinación de técnicas analíticas y de inteligencia artificial (redes neuronales, sistemas de inferencia neuroborrosos...). Estas técnicas se aplican al caso de un UAV cuatrirotor, aunque son perfectamente aplicables al caso de un AGV.

## 2.4 Modelos de interacción rueda-suelo

Cuando una rueda está sometida a una fuerza vertical y un par de tracción, sufre una deformación y se produce deslizamiento contra la superficie de rodadura. El coeficiente de deslizamiento se define como la relación entre la velocidad del AGV y la velocidad que correspondería a la rueda sin deformar ni deslizar (Smieszek, 2019):

$$s = \frac{\omega r - v_x}{v_x} \quad (13)$$

Donde:

r	Radio de la rueda [m]
v <sub>x</sub>	Velocidad lineal de la rueda [m/s]
ω	Velocidad de rotación de la rueda [rad/s]

Se puede definir también un radio efectivo  $r_e$  como el radio de la rueda que cumple:

$$v_x = \omega r_e \quad (14)$$

$$s = \frac{r}{r_e} - 1 \quad (15)$$

Existen diversos estudios en la literatura que analizan el problema de la interacción rueda-superficie y tratan de modelar el radio efectivo y el deslizamiento. La forma más conocida es la llamada “fórmula mágica” (Ružinskas, 2017), que expresa el deslizamiento en función de la carga vertical y la fuerza de tracción. Esta fórmula requiere calibración para utilizarse, por lo que no es una solución directa del problema. La Figura 5 ilustra la relación dada por la fórmula para distintos valores de la carga vertical:

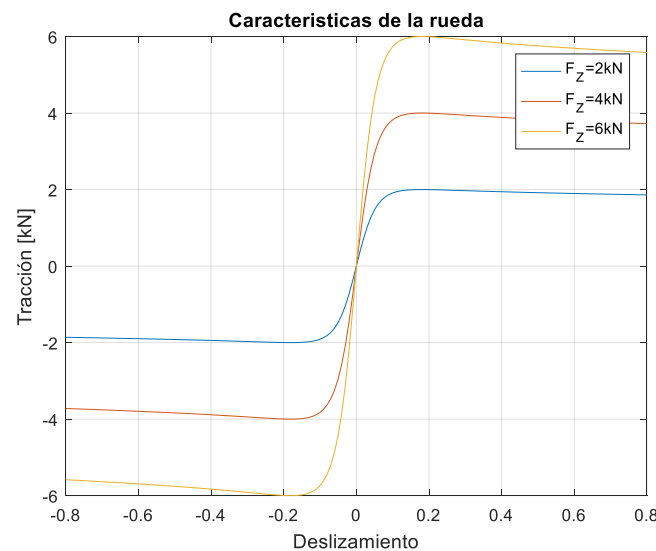


Figura 5: Deslizamiento frente a tracción y carga soportada (elaboración propia)

Se observa que para pequeños deslizamientos la relación es lineal. Esta zona de trabajo corresponde a las condiciones de operación más frecuentes, por lo que se modelará el deslizamiento como una constante de proporcionalidad dependiente de la carga vertical soportada. Esta constante se denomina rigidez longitudinal  $K_i$  (Aparicio, 1995). La mejor manera de calcular las características de la rueda es mediante experimentos.

En (Baffet, 2009) se propone un método para el cálculo de la deriva de virada y de las rigideces de deriva para un vehículo, que puede ser aplicado a un AGV ya que los principios físicos son similares. En este artículo se separa el problema de identificación de las características de las ruedas en dos partes. La primera corresponde a un observador en modo deslizante que estima las fuerzas laterales y longitudinales aplicadas a la rueda. Está basado en el modelo de bicicleta que puede verse en el Anexo 4.

En este Anexo se presenta además un observador implementado como un filtro de Kalman extendido que estima el ángulo de deriva en función de las fuerzas aplicadas sobre la rueda. Está basado en la relación lineal que existe entre fuerza lateral y el deslizamiento para bajos niveles de deslizamiento. Esta simplificación será adoptada en este trabajo ya que es cierta en todo el rango de operación del AGV



### 3. CAPÍTULO 3:

#### Modelado del Easybot Std

Como se ha mencionado anteriormente, el robot sobre el que se va a trabajar es el Easybot Standard 410 de la empresa ASTI Mobile Robotics (Figura 1). Este robot se utiliza para transportar cargas en entornos industriales. Es capaz de mover carga montada sobre el propio AGV así como remolcada. Su sistema de guiado es mediante una banda magnética fija en el suelo. Esto corresponde con un guiado magnético y óptico.

Las características técnicas de este AGV están disponibles en la página web del fabricante (ASTI, 2020). La tabla 3 muestra a modo de resumen las más relevantes para este trabajo. Al no estar reflejados todos los datos necesarios en la hoja de datos del fabricante, se ha debido estimar parte de las dimensiones del AGV. Esta estimación se ha hecho manualmente basándose en los diagramas que aporta el fabricante en su página web (ASTI, 2020).

Masa [kg]	200	Fabricante
Longitud [mm]	1700	Fabricante
Anchura [mm]	520	Fabricante
Distancia al eje delantero [mm]	500	Estimado
Distancia al eje trasero [mm]	1600	Estimado
Distancia al sensor de posición [mm]	50	Estimado
Distancia al gancho del remolque [mm]	400	Estimado
Altura [mm]	385	Fabricante
Batalla [mm]	1100	Estimado

Tabla 3: Características técnicas del Easybot Standard 410 (ASTI Mobile Robotics)

Está construido con un par de ruedas diferenciales que sirven como unidad de tracción y dos ruedas traseras sin capacidad motora. Dispone además de un sensor de posición en la parte delantera de la unidad tractora y un gancho de remolque localizado en la parte frontal del robot. Esquemáticamente se muestra en la Figura 6:

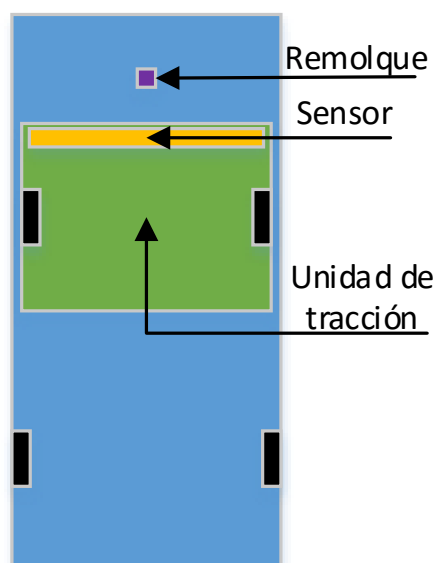


Figura 6: Modelo esquemático del AGV

Los modelos a desarrollar son los siguientes:

1. Sensor de posición: es necesario para poder simular el bucle de control. Recibe la posición del centro de la banda magnética y la trayectoria deseada y calcula la distancia entre ambos puntos.
2. Modelo cinemático del Easybot: relaciona las velocidades de las ruedas con la del AGV. En primera aproximación se considera como el único modelo ya que permite obtener unos resultados lo suficientemente precisos para las condiciones normales de operación. Esto explica que la mayoría de la literatura existente sobre modelado de AGV se refiera a modelos cinemáticos, encontrando bastantes menos publicaciones referidas a modelado dinámico.
3. Modelo dinámico del Easybot: se obtiene desarrollando un modelo de Euler-Newton. Permite calcular las aceleraciones que sirven de entrada al modelo cinemático. En condiciones normales de operación es innecesariamente complejo respecto del modelo cinemático y no añade gran valor. Sin embargo, en condiciones límite de operación (velocidad alta, curvas muy cerradas, aceleración y frenado constante, etc.) da unos resultados más fiables del comportamiento del AGV que no se consiguen con el modelo cinemático.
4. Modelo del remolque: para cálculos de efecto del remolque sobre las cargas soportadas por el AGV. Se refiere solo a modelado dinámico.
5. Modelo de la interacción rueda-suelo: para poder estudiar la influencia de la adherencia del AGV al suelo y las trayectorias reales descritas se necesita considerar un modelo donde las ruedas deslicen y no se den las condiciones de rodadura perfecta.

El modelo se validará con tres tipos de trayectorias. Estas se han elegido para cumplir con las características más representativas: rectas, arcos de circunferencias y clotoides.

El diagrama de bloques del modelo básico del AGV se muestra en la Figura 7. Este diagrama no incluye el efecto de la carga remolcada o de la interacción rueda-suelo.

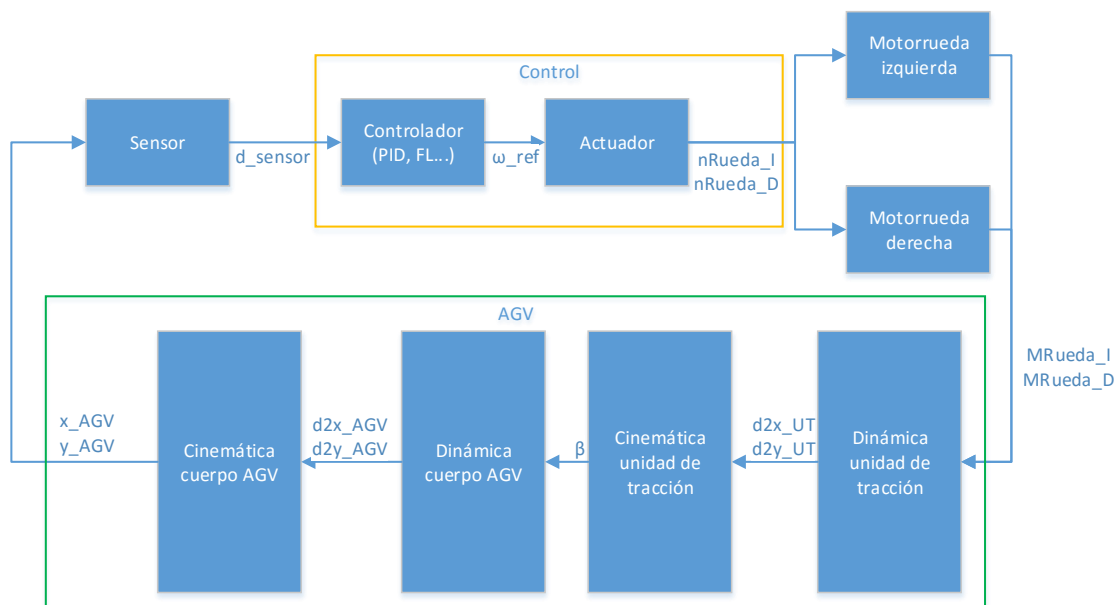


Figura 7: Diagrama de los módulos del AGV

La Tabla 4 resume las principales variables utilizadas en el diagrama:

$x\_AGV, y\_AGV$	Posición $[x,y]$ del cuerpo del AGV [m]
$d2x\_AGV, d2y\_AGV$	Aceleración del cuerpo del AGV $[m/s^2]$
$\beta$	Ángulo de la unidad de tracción respecto del cuerpo [rad]
$d2x\_UT, d2y\_UT$	Aceleración de la unidad de tracción $[m/s^2]$
$MRueda\_I, MRueda\_D$	Par aplicado a cada motorrueda [Nm]
$nRueda\_I, nRueda\_D$	Velocidad de rotación de cada motorrueda [rpm]
$\omega\_ref$	Velocidad angular de referencia del AGV [rad/s]
$d\_sensor$	Medida del sensor de posición [m]

Tabla 4: Variables de los módulos del AGV

### Sistemas de referencia

Durante el proceso de modelado se utilizarán distintos sistemas de referencia para cada parte. En particular, se usan tres sistemas de ejes cartesianos:

1. Sistema fijo:  $S_0$
2. Sistema embarcado en el AGV:  $S_{AGV}$
3. Sistema embarcado en la unidad de tracción:  $S_{UT}$

Las Figura 8 muestra gráficamente los tres sistemas de coordenadas utilizados sobre el AGV. El AGV está compuesto por una unidad de tracción que gira respecto del cuerpo del AGV sobre un eje en su centro geométrico (en verde, el punto de corte de los ejes  $y\_UT$  y  $x\_UT$ ) y por el eje del cuerpo del AGV (en rojo). El centro de rotación del conjunto se encuentra en la intersección de las rectas que unen las ruedas de la unidad de tracción y del cuerpo del AGV (en negro discontinuo en la Figura 8).

La Figura 9 muestra las relaciones entre los distintos sistemas de referencia utilizados en el modelado del AGV. El sistema azul corresponde a  $S_0$ , el rojo a  $S_{AGV}$  y el verde a  $S_{UT}$ . Por tanto el ángulo  $\theta$  corresponde al ángulo girado por el AGV en conjunto ( $S_{AGV}$  respecto a  $S_0$ ) y el ángulo  $\beta$  el relativo entre la unidad de tracción y el cuerpo del AGV ( $S_{UT}$  respecto a  $S_{AGV}$ ).

Para cambiar de un sistema de referencia a otro se pueden usar las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x_{AGV} \\ y_{AGV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{UT} \\ y_{UT} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{eje} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{AGV} \\ y_{AGV} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{0AGV} \\ y_{0AGV} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Donde  $x_{eje}$ ,  $x_{0AGV}$  e  $y_{0AGV}$  son la distancia entre el centro del AGV y el centro de tracción, y la posición del centro del AGV en x e y para el sistema  $S_0$ , respectivamente.

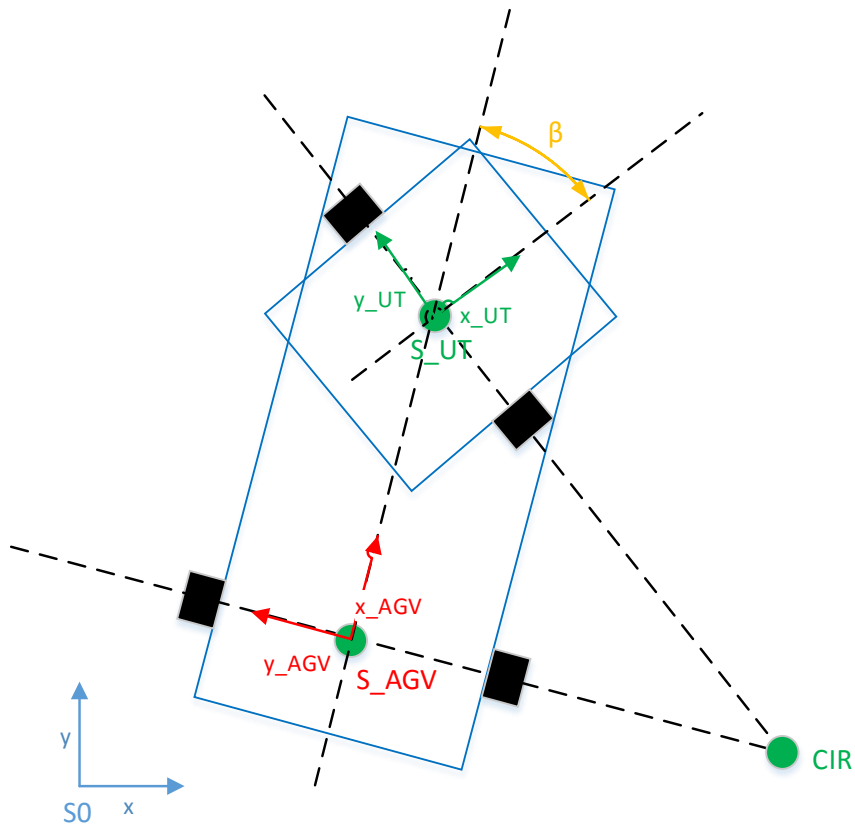


Figura 8: Sistemas de referencia en el AGV

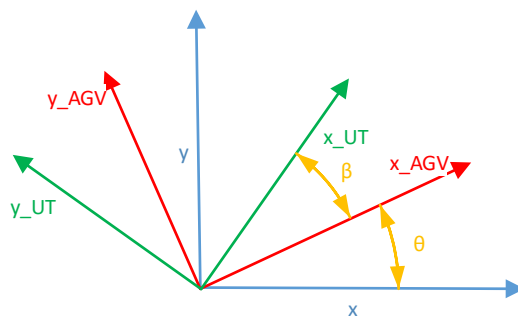


Figura 9: Relación entre sistemas de referencia en el AGV

### 3.1 Modelado del sensor de posición

El sensor de posición consiste en un segmento que determina la distancia a una banda magnética fija en el suelo. Esta banda describe la trayectoria que debe seguir el AGV. Aunque las propiedades físicas de este sensor no se van a modelar, si es necesario establecer la condición de pérdida de la señal debida a que el sensor se ha salido de la banda magnética.

La Figura 10 muestra la situación de funcionamiento normal y de parada de este sensor.

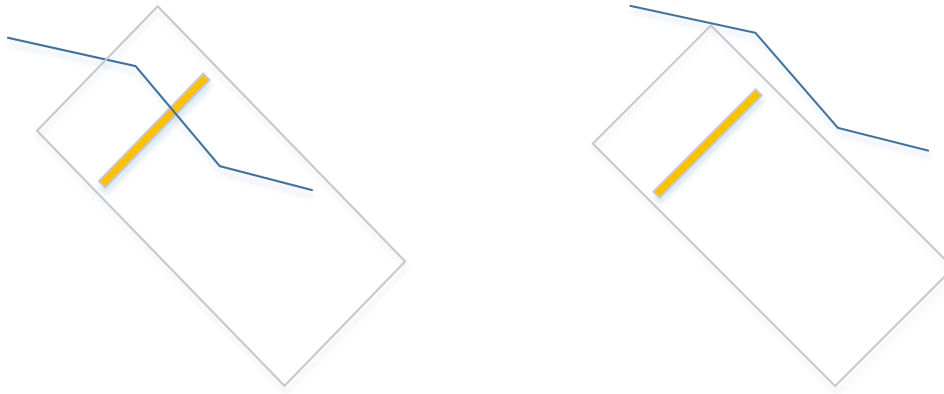


Figura 10: Funcionamiento normal (izquierda) y parada por pérdida de referencia (derecha)

El sensor se representa mediante una línea naranja dentro del AGV. La línea azul representa la banda magnética que debe seguir. En la figura de la izquierda, el AGV es capaz de seguir la trayectoria ya que el sensor se encuentra encima de la banda. En la derecha, el AGV se pararía al haber perdido la referencia.

Para simular el sensor se ha implementado un algoritmo que busca la intersección de la “recta” que proyecta el sensor sobre el suelo con la trayectoria deseada para el AGV. La trayectoria está definida por una recta a tramos. Se ha decidido por convenio que el valor que el sensor devuelve si no es capaz de encontrar la recta es -999. El flujograma de la Figura 11 resume el modo de operación del sensor.

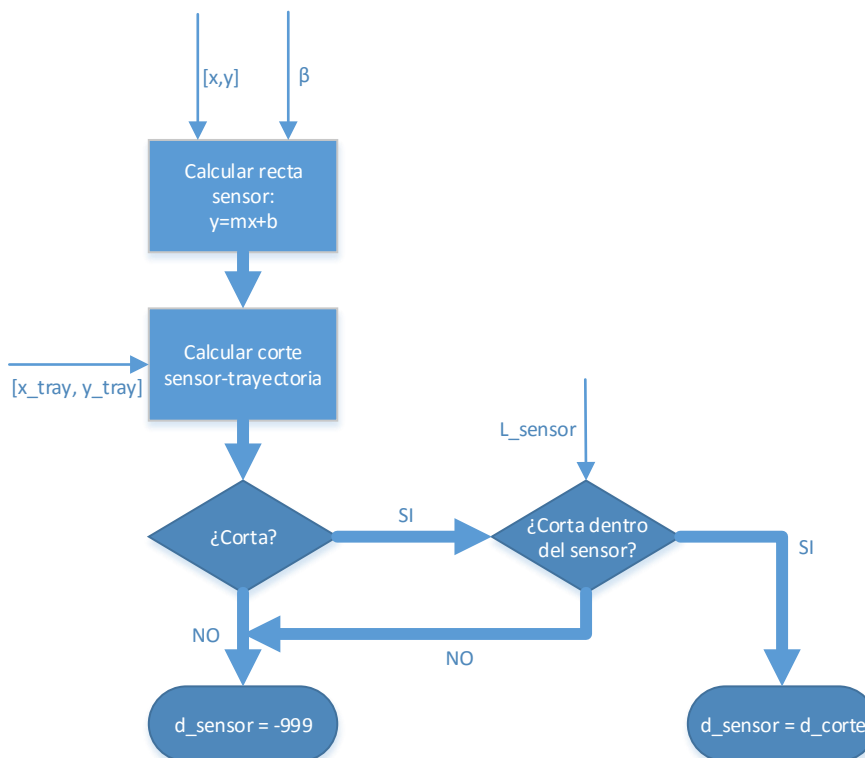


Figura 11: Flujograma de operación del sensor de posición

El sensor de posición proyecta una recta definida cuya ecuación depende de la posición del AGV en ese instante y el ángulo que forma la unidad de tracción respecto del sistema de referencia fijo ( $\beta+\theta$ . Ver Figura 9). Con esos datos se genera la ecuación de una recta y se calcula el punto de corte con la trayectoria deseada para el AGV, que es una curva definida a tramos donde cada tramo es un segmento. El detalle de cómo se calcula el corte se puede ver en el Anexo 3.

En ese Anexo 3, una vez se ha calculado el punto de corte se calcula la distancia de éste al centro del sensor de posición y se devuelve ese valor ( $d_{\text{corte}}$  [m]). En el caso de que la distancia del punto de corte al centro del sensor sea mayor que la longitud de éste o que la recta no llegue a cortar a la curva que define la trayectoria deseada, el sensor devuelve -999, es decir, parada

### 3.2 Modelo cinemático del Easybot

El modelo cinemático se ha descompuesto en una parte diferencial, correspondiente a la unidad de tracción, y una parte triciclo correspondiente al cuerpo del AGV. Las ecuaciones para este caso (Tabla 5) surgen de la combinación de los dos modelos anteriores (Figura 12):

Diferencial	Triciclo
$v = \frac{1}{2}(v_R + v_L)$	$\dot{x} = v * \cos(\theta)$
$\omega = \frac{1}{B}(v_R - v_L)$	$\dot{y} = v * \sin(\theta)$
$R_{\text{curva}} = B * \frac{(v_R + v_L)}{(v_R - v_L)}$	$\dot{\theta} = \omega$
$v = \omega * R_{\text{curva}}$	$v = v_s * \cos(\beta)$
	$\omega = \frac{v_s}{L} * \sin(\beta)$

Tabla 5: Resumen de los modelos diferencial y triciclo para AGV

La Figura 12 representa esquemáticamente el AGV y la unidad de tracción. El ángulo  $\theta$  corresponde al ángulo girado por el AGV en conjunto y el ángulo  $\beta$  el relativo entre la unidad de tracción y el cuerpo del AGV. La distancia entre el centro de la unidad de tracción y el centro de rotación del AGV se denomina  $L$  y la distancia entre las ruedas traseras  $B$ . La velocidad lineal de la unidad de tracción a lo largo de su eje  $x$  está representada por  $v_s$ .

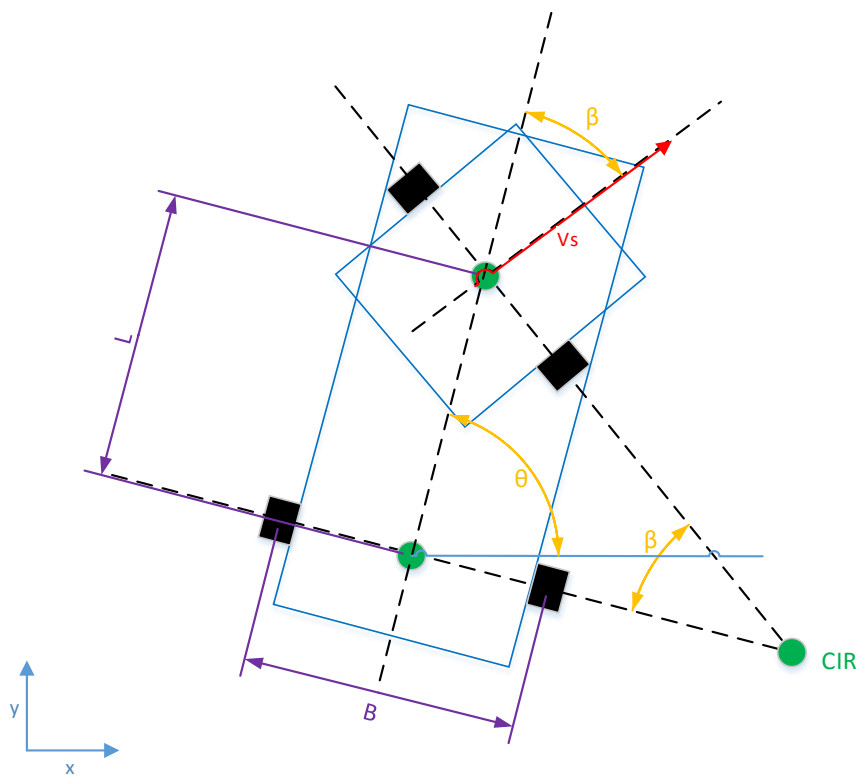


Figura 12: Esquema cinemático del Easybot

Donde el punto verde de la Figura, CIR, es el centro instantáneo de rotación.

Si se calcula  $v_s$  a partir de las velocidades de rotación de cada una de las motorruedas, la ecuación resultante de la trayectoria descrita por el centro del AGV se puede ver a continuación:

$$v_s = \frac{1}{2}(v_R + v_L) \quad (18)$$

$$\beta = \int \omega_c = \int \frac{1}{B}(v_R - v_L) \quad (19)$$

$$\theta = \int \omega = \int \frac{v_s}{L} * \cos(\beta - \theta) \quad (20)$$

$$\dot{x} = v_s * \cos(\beta - \theta) * \cos(\theta) \quad (21)$$

$$\dot{y} = v_s * \cos(\beta - \theta) * \sin(\theta) \quad (22)$$

La velocidad lineal del AGV  $v_s$ , se obtiene como la media de las velocidades lineales de cada motorrueda. La velocidad de rotación de la unidad de tracción con respecto al cuerpo del AGV  $\omega_c$  viene dada por la diferencia entre las velocidades de cada rueda y es inversamente proporcional a la distancia entre éstas,  $B$ . La velocidad de rotación del AGV es función de la velocidad lineal de éste y la distancia entre ruedas y el ángulo de la unidad de tracción.

La Tabla 6 resume las variables utilizadas en las ecuaciones anteriores.

$\theta$	Angulo de giro del AGV [rad]
$\beta$	Angulo de giro de la cabeza tractora [rad]
$B$	Distancia entre ruedas de la unidad de tracción [m]
$L$	Distancia entre ejes [m]
$\omega$	Velocidad de rotación del AGV respecto del CIR [rad/s]
$\omega_c$	Velocidad de rotación de la unidad de tracción [rad/s]
$\omega_R, \omega_L$	Velocidad de rotación de las ruedas tractoras [rad/s]
$R_R, R_L$	Radio de las ruedas tractoras [m]
$x, y$	Posición del AGV [m]

Tabla 6: Parámetros del modelo cinemático del Easybot Std 410

La implementación en Simulink se ha realizado en dos bloques (Figura 12). Uno correspondiente a la unidad de tracción, que contiene un modelo diferencial (a la izquierda), y otro correspondiente al cuerpo del AGV (a la derecha), que contiene un modelo triciclo.

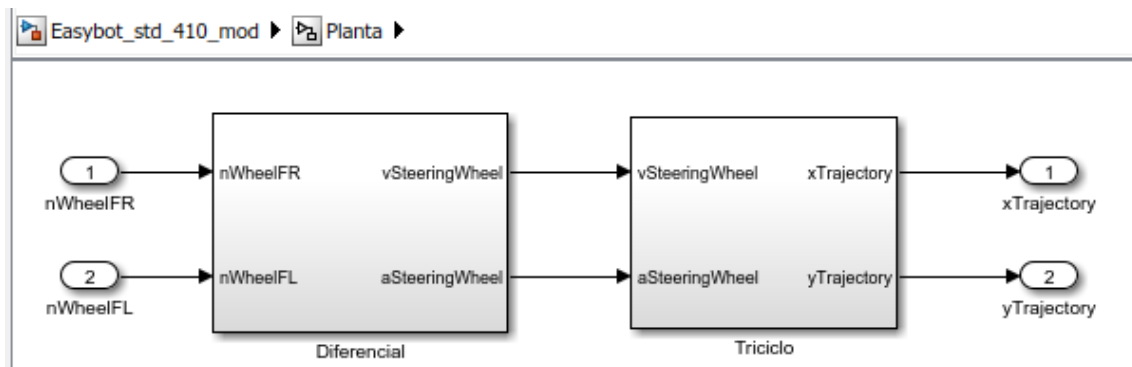


Figura 13: Implementación del modelo cinemático

Los detalles de implementación de cada uno de los bloques se pueden ver a continuación. Los bloques verdes indican los nombres de las variables.

Modelo diferencial (Figura 14): se implementan las ecuaciones vistas anteriormente. Los bloques verdes representan salidas de Simulink al workspace de Matlab para su tratamiento. Se ha decidido implementar estos bloques como librería por simplicidad.

Los bloques blancos representan parámetros del sistema que se pueden variar.

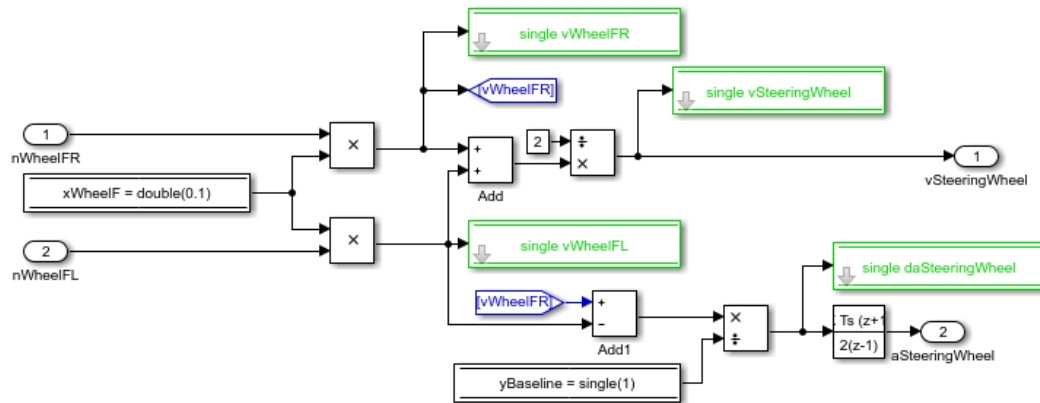


Figura 14: Cinemática de la unidad de tracción diferencial

Modelo triciclo (Figura 15): Se han implementado las ecuaciones anteriores correspondientes al modelo triciclo. Se han utilizado el mismo tipo de bloques que para el caso anterior.

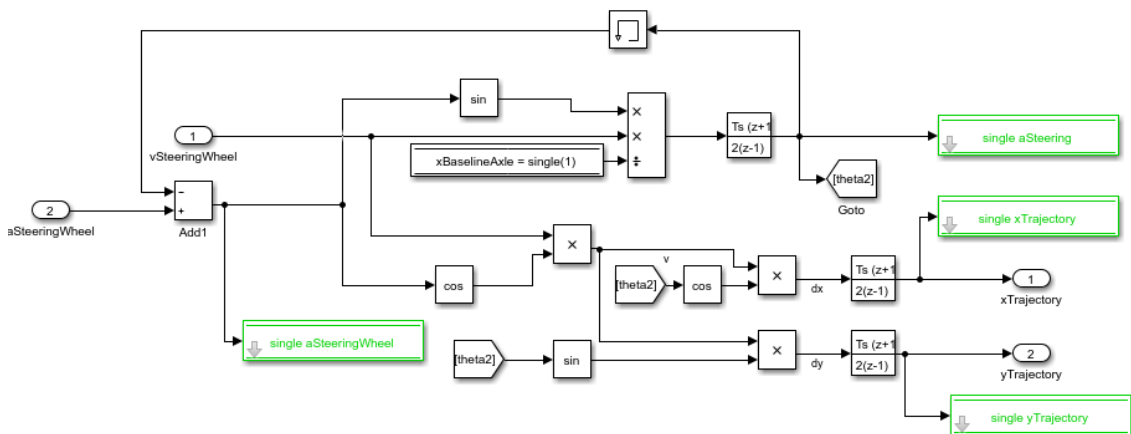


Figura 15: Cinemática del cuerpo del AGV triciclo

Para probar el modelo en primer lugar se han definido unas velocidades fijas para ambas ruedas y se ha verificado la trayectoria descrita por el AGV. Estableciendo una diferencia constante entre las velocidades de las ruedas izquierda y derecha el AGV debería describir un círculo.

### 3.3 Modelo dinámico del Easybot

La influencia de las cargas transportadas y su distribución no aparece en el anterior modelo cinemático del AGV. La carga puede influir en el comportamiento del AGV llevándolo a no trazar la ruta que seguiría según el modelo cinemático.

Para modelar el AGV se ha utilizado el modelo de Euler-Newton. Para ello, se identifican todas las fuerzas que actúan sobre él y se aplica la segunda ley de Newton en cada eje para fuerzas y momentos. Se aceptan varias hipótesis con el fin de simplificar el modelo:

- Masa de las ruedas nula,  $m_i = 0$ .
- Inercia de las ruedas nula,  $I_i = 0$ .
- No hay balanceo o cabeceo del AGV o de la unidad de tracción. Las aceleraciones y velocidades angulares en torno al eje X e Y son nulas:  $\omega_x = \omega_y = 0$ ;  $\omega_z = \omega$ .
- Las ruedas no deslizan y existen condiciones de rodadura perfecta.
- La resistencia a la rodadura se desprecia. Esta condición se relajará en apartados posteriores para incluirla.

La fuerza de tracción que entregan los motores a las ruedas ha de propulsar el conjunto completo de AGV y unidad de tracción UT.

El esquema iterativo que se ha utilizado para el cálculo de los modelos dinámicos se puede ver a continuación:

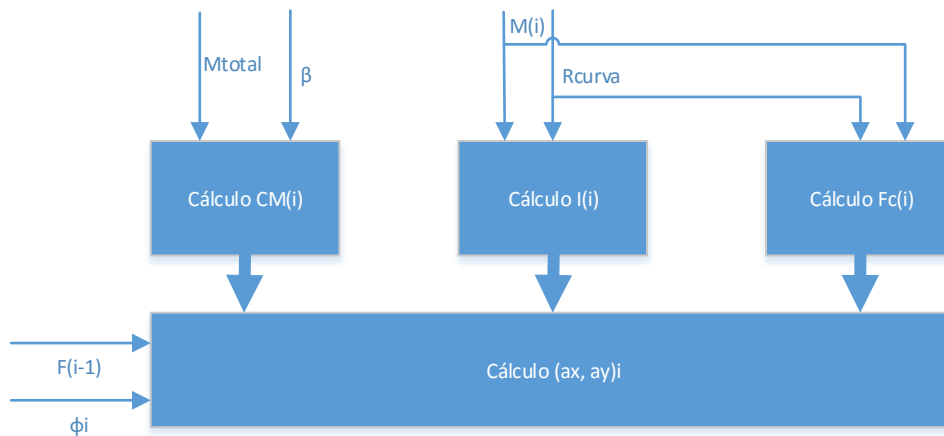


Figura 16: Esquema iterativo para calcular modelos dinámicos

La Figura 16 muestra el proceso que se ha seguido para sistematizar el cálculo de los modelos dinámicos. La posición del CM se calcula al inicio del proceso ya que dentro de este trabajo se asume que la carga no se desplaza. La fuerza centrífuga y el momento de inercia deben ser calculados en cada paso de simulación. Con todos esos datos y la fuerza de tracción aplicada, que es igual en magnitud para todos los componentes del AGV, aunque diferente en la dirección de aplicación, se pueden calcular las componentes de la aceleración de ese módulo del AGV, así como su aceleración angular.

### 3.3.1 Modelo de una rueda

Cuando una rueda apoyada en una superficie recibe un par aplicado en su centro de rotación, se induce una fuerza de tracción ( $F_T$ ) en el punto de contacto entre la rueda y el suelo. A esta fuerza de tracción se le opone una fuerza de rozamiento ( $F_R$ ) y como resultado la rueda gira sobre la superficie. Esquemáticamente se puede ver en la Figura 17:

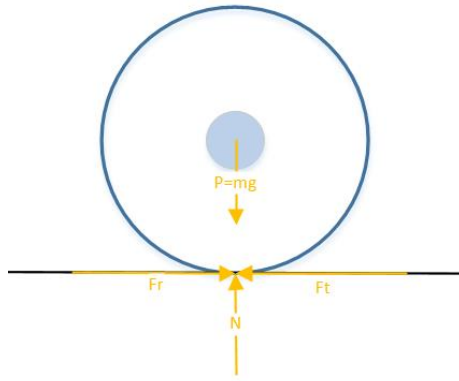


Figura 17: Modelo esquemático de una rueda

$$F_T = \frac{M_T}{R_{rueda}} \quad (23)$$

Para un par  $M_T$ .

La condición de derrape se produce si la fuerza de tracción ( $F_T$ ) en el punto de contacto de la rueda con el suelo supera a la fuerza de rozamiento ( $F_R$ ) en ese mismo punto. Matemáticamente:

$$F_T > F_r = mg\mu \quad (24)$$

Como el AGV controla independientemente cada rueda, el par  $M_t$  puede ser diferente para ambas. La masa  $m$  es la masa del AGV soportada en esa rueda. A efectos del modelo se considera que la masa de la rueda y, por tanto, su momento de inercia, son nulos.

### 3.3.2 Dinámica de la unidad de tracción

A efectos del modelo, la unidad de tracción se ve afectada por la distribución de carga en el AGV en cuanto a las fuerzas normales, que afectan a cada una de las ruedas. La unidad de tracción genera una fuerza de tracción aplicada en un punto fijo al cuerpo del AGV, por lo tanto todo el modelado se reduce a encontrar las fuerzas y momentos aplicados en el centro de tracción (CT), que coincide con el centro de masas de la unidad de tracción (CM). La Figura 18 muestra las diferentes fuerzas aplicadas sobre la unidad de tracción. Como se puede observar, los pares aplicados en las ruedas provocan un desplazamiento en la dirección del eje x del  $S_{UT}$  y una rotación en torno al CT.

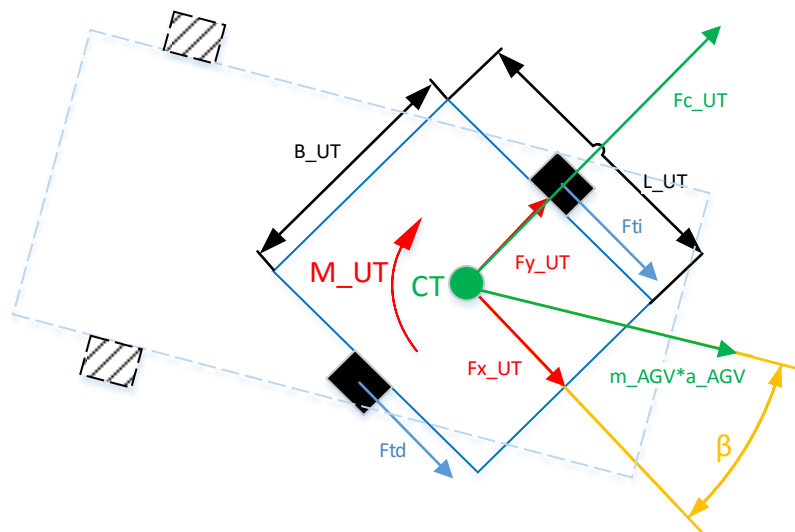


Figura 18: Modelo esquemático de la unidad de tracción

$\beta$	Angulo de giro de la cabeza tractora respecto al cuerpo del AGV [rad]
$B_{UT}$	Distancia entre ruedas de la unidad de tracción [m]
$L_{UT}$	Longitud de la unidad de tracción [m]
$\omega_{UT}$	Velocidad de rotación de la unidad de tracción [rad/s]
$F_{TD}, F_{TI}$	Fuerza de tracción de cada rueda [N]
$F_{xUT}, F_{yUT}$	Fuerzas resultantes en el centro de tracción [N]
$M_{UT}$	Momento resultante en el centro de tracción. Permite rotar la unidad de tracción y por tanto el AGV [Nm]
CT	Centro de tracción
$F_{cUT}$	Fuerza centrífuga que actúa sobre la unidad de tracción [N]
$m_{AGV} * a_{AGV}$	Fuerza ejercida por el cuerpo del AGV sobre la unidad de tracción [N]

Tabla 7: Parámetros del modelo dinámico de la unidad de tracción

Las ecuaciones que rigen la unidad de tracción son (Sierra, 2020):

$$M_{UT} = (M_i - M_d) \frac{R_{rueda}}{B_{UT}} \quad (25)$$

$$\dot{\beta} = \omega_{UT} = \frac{(\omega_i - \omega_d) R_{rueda}}{B_{UT}} \quad (26)$$

Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum M = I_{UT} \dot{\omega}_{UT} \quad (27)$$

$$\sum F = m_{AGV} \dot{v} \quad (28)$$

Queda:

$$(M_i - M_d) \frac{R_{rueda}}{B_{UT}} = I_{UT} \ddot{\beta} \quad (29)$$

$$(M_d + M_i) R_{rueda} + F_{xUT} + m_{AGV} * a_{AGV} * \cos(\beta) = m_{AGV} \ddot{x}_{UT} \quad (30)$$

$$F_{cUT} + F_{yUT} + m_{AGV} * a_{AGV} * \sin(\beta) = m_{AGV} \ddot{y}_{UT} \quad (31)$$

Generalizando y en forma matricial:

$$M \ddot{q} = F \quad (32)$$

Donde:

$$M = \begin{bmatrix} m_{AGV} & 0 & 0 \\ 0 & m_{AGV} & 0 \\ 0 & 0 & I_{UT} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$q = \begin{bmatrix} x_{UT} \\ y_{UT} \\ \beta \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$F = \begin{bmatrix} (M_d + M_i) R_{rueda} + m_{AGV} * a_{AGV} * \cos(\beta) \\ F_{cUT} + m_{AGV} * a_{AGV} * \sin(\beta) \\ \frac{(M_i - M_d) R_{rueda}}{B_{UT}} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Siendo x e y los ejes de referencia en el sistema  $S_{UT}$

Recuperando la hipótesis de no deslizamiento, se fuerza a que la unidad de tracción no se desplace en la dirección del eje Y embarcado en ella, por tanto:

$$\dot{y} = 0 \rightarrow F_{cUT} = -F_{yUT} \quad (36)$$

Además, la unidad de tracción no se puede separar del cuerpo del AGV, por lo que la velocidad relativa entre ambas es nula. De esto se deduce:

$$\dot{x} = 0 \rightarrow F_{xUT} = -(M_d + M_i)R_{rueda} - m_{AGV} * a_{AGV} * \cos(\beta) \quad (37)$$

La fuerza centrífuga viene expresada por la siguiente ecuación:

$$F_C = \frac{m_{AGV}V^2}{R_{curva}} \quad (38)$$

$m_{AGV}$	Masa del AGV [kg]
$V$	Velocidad del AGV [m/s]
$R_{curva}$	Radio de la curva trazada [m]

Y el radio de la curva se puede calcular como:

$$R_{curva} = L_E * \tan(\beta) \quad (39)$$

Donde  $L_E$  es la distancia entre el centro del eje trasero y el centro de la unidad de tracción.

### 3.3.3 Dinámica del cuerpo del AGV

Para modelar el AGV como triciclo, consideramos que la unidad de tracción actúa sobre el AGV con una fuerza  $F_t$ . Se distinguen tres puntos significativos (Figura 19):

- 1) Centro de la unidad de tracción, CT
- 2) Centro del AGV, denominado CAGV. Situado en la mitad del eje que une las ruedas traseras.
- 3) Centro de masas, CM. Influye en el momento de inercia del AGV.
- 4) Centro instantáneo de rotación, CIR. Punto respecto del cual el AGV rota en conjunto.

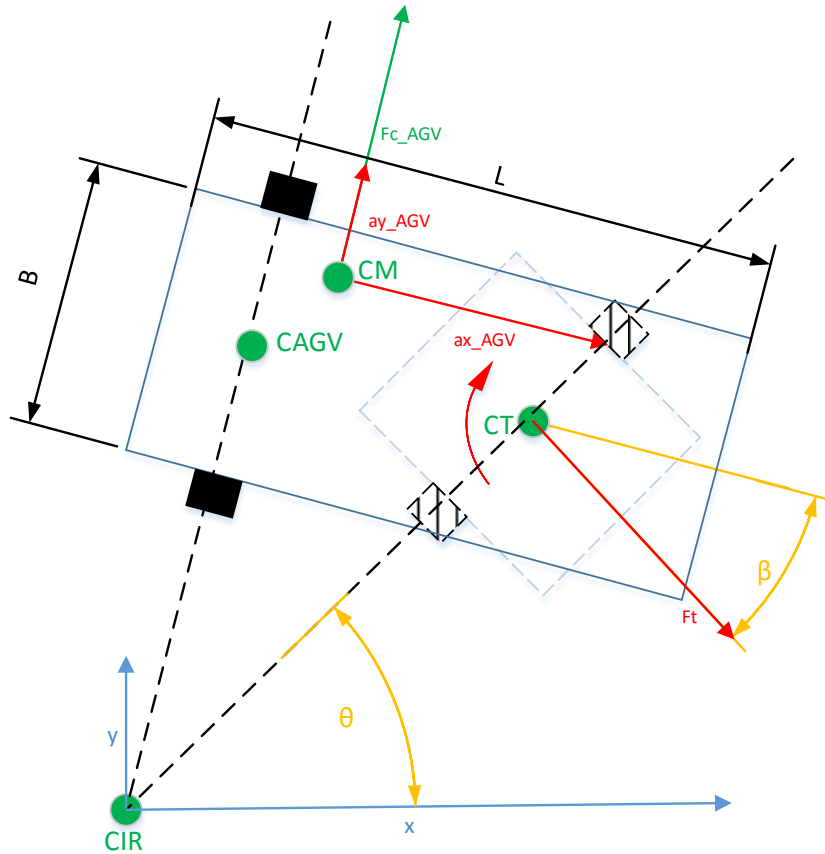


Figura 19: Modelo esquemático del cuerpo del AGV

La Figura 19 muestra los cuatro puntos previamente mencionados. Como se puede observar, tanto CAGV como CT se encuentran en el eje x del sistema de referencia  $S_{AGV}$ . CM se considera fijo durante todo el movimiento ya que las cargas no pueden desplazarse sobre el AGV. CIR se encuentra fuera del AGV y tiene influencia en la fuerza centrífuga y el cálculo del momento de inercia. El centro instantáneo de rotación de la unidad de tracción coincide con el CT del AGV y no es relevante para estos cálculos.

$\beta$	Ángulo de giro de la cabeza tractora respecto al cuerpo del AGV [rad]
B	Distancia entre ruedas del cuerpo del AGV [m]
L	Longitud del AGV[m]
$\omega$	Velocidad de rotación del AGV [rad/s]
$F_t$	Fuerza de tracción [N]
$\theta$	Ángulo de giro del AGV [rad]
CM, $x_{CM}$	Centro de masas. Coordenada x del CM
CT, $x_{CT}$	Centro de tracción. Coordenada X del CT
$F_{cAGV}$	Fuerza centrífuga que actúa sobre el cuerpo del AGV [N]
CAGV	Centro del AGV
$a_{xAGV}, a_{yAGV}$	Aceleraciones del centro de masas [ $m/s^2$ ]

Tabla 8: Parámetros del modelo dinámico del cuerpo del AGV

Aplicando la misma metodología que para la unidad de tracción (Landau, 1970):

$$F_t \cos(\beta) y_{CM} + F_t \sin(\beta) * (x_{CM} - x_{ct}) = I_{AGV} \ddot{\theta} \quad (40)$$

$$F_t \cos(\beta) = m \ddot{x}_{AGV,CM} \quad (41)$$

$$F_{cAGV} - F_t \sin(\beta) = m\dot{y}_{AGV,CM} \quad (42)$$

En forma matricial y generalizando:

$$M\ddot{q} = F \quad (43)$$

Donde:

$$M = \begin{bmatrix} m_{AGV} & 0 & 0 \\ 0 & m_{AGV} & 0 \\ 0 & 0 & I_{AGV} \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$q = \begin{bmatrix} x_{AGV,CM} \\ y_{AGV,CM} \\ \theta \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$F = \begin{bmatrix} F_t * \cos(\beta) \\ F_{cAGV} - F_t * \sin(\beta) + F_y \\ F_t \cos(\beta) y_{CM} + F_t \sin(\beta) * (x_{CM} - x_{ct}) \end{bmatrix} \quad (46)$$

Donde x e y hacen referencia al sistema  $S_{AGV}$ .

Debido a la hipótesis de no deslizamiento, se fuerza a que el cuerpo del AGV no se desplace en la dirección del eje Y embarcado en él, por tanto:

$$\dot{y} = 0 \rightarrow F_{cAGV} + F_y = F_t * \sin(\beta) \quad (47)$$

Del modelo de la unidad de tracción se sabe que la fuerza total de tracción ( $F_T$ ) se debe a la suma de momentos aplicados en cada una de las ruedas ( $M_e$ ,  $M_i$ ):

$$F_t = (M_e + M_i)R_{rueda} \quad (48)$$

Para el cálculo del momento de inercia del AGV, se ha valorado simplificar el sistema considerando el AGV como una partícula que rota alrededor de un eje en lugar de una placa rectangular. Para validar esta simplificación, se ha representado el error para varios radios de curva. Se han considerado los parámetros geométricos de la Tabla 9.

a	1.7	Longitud del AGV en el eje x [m]
b	0.52	Longitud del AGV en el eje y [m]
m	200	Masa del conjunto [kg]. Irrelevante para la comparativa

Tabla 9: Parámetros para el cálculo del momento de inercia

La Figura 20 muestra una comparación entre el cálculo del momento de inercia asumiendo que se trata de una partícula y una placa rectangular. Se observa que para radios de curva en el límite del AGV (1m) el error es aproximadamente un 25%. A medida que aumenta el radio de la curva este error disminuye. Como el objeto de este trabajo son situaciones límite, se va a optar por no utilizar la simplificación. Para obtener más detalle sobre cómo se han hecho los cálculos véase Anexo 2: Cálculo del momento de inercia. Teorema de Steiner.

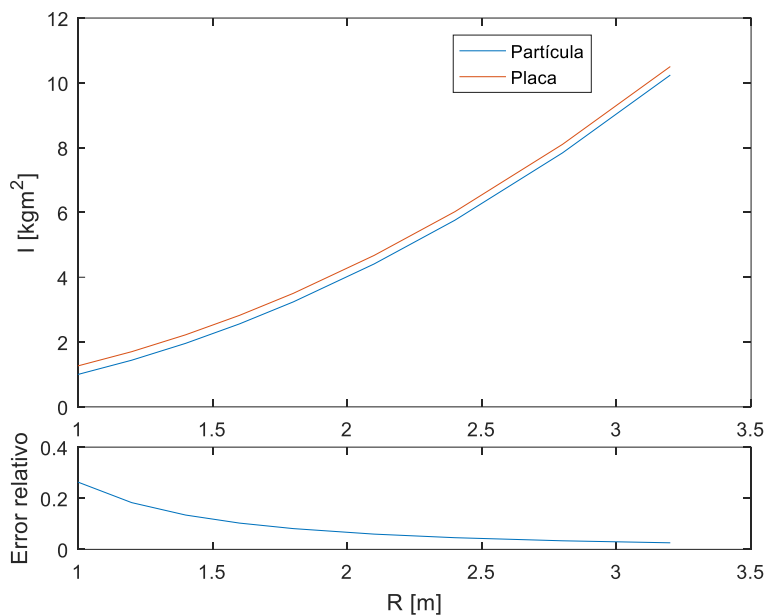


Figura 20: Cálculo del momento de inercia

### 3.3.4 Modelado de las cargas verticales en las ruedas

Aunque no es necesario en los casos anteriores debido a que imponemos condiciones de no deslizamiento y rodadura perfecta, se incluye un apartado sobre el cálculo de la carga de las ruedas en el plano YZ. La relevancia de conocer las cargas soportadas por las ruedas aparece cuando se quiere incluir en el modelo dinámico la interacción entre la rueda y el suelo, ya que la mayoría de los modelos existentes en la literatura (fórmula mágica, etc.) utilizan ambas cargas para calcular el deslizamiento de la rueda en el plano de rodadura.

Para el cálculo de las cargas en cada una de las ruedas del AGV es necesario aplicar equilibrio de fuerzas y momentos en cada uno de los 3 planos, a pesar de que el AGV solo se desplaza en el plano XY. Por comodidad se van a distinguir dos casos:

1. AGV estático: no hay fuerzas ni momentos de tracción. El AGV y su carga están en reposo apoyados sobre la superficie de rodadura. La relevancia de este apartado es calcular la posición del centro de masas.
2. AGV en movimiento: hay momentos y fuerzas de tracción puesto que el AGV se está desplazando. Además también puede aparecer la fuerza centrífuga al tomar una curva.

Como estamos tratando con un sistema lineal, se puede aplicar el principio de superposición y desacoplar las fuerzas estáticas de las dinámicas. Esto permite simplificar los cálculos en simulación y ahorrar tiempo de procesador y memoria.

#### AGV estático

En este caso consideraremos un AGV transportando varios bultos cuyas masa y centros de masa son conocidos. También se conocen la masa y la posición del centro de masa del AGV. La Figura 21 representa el esquema que se va a utilizar para este cálculo.

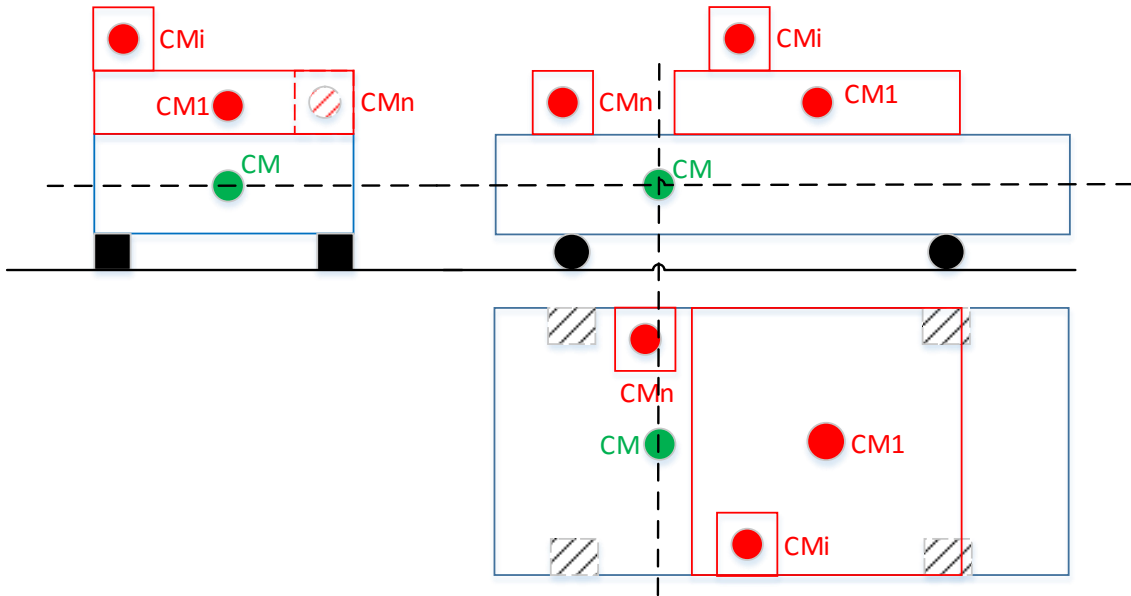


Figura 21: Esquema del AGV para el cálculo de la posición del centro de masas

En la Figura 21 se puede observar el esquema básico que se utilizará para este cálculo. Las cargas se han representado en rojo y el AGV en azul. Como la posición del centro de masa del AGV es conocida, se toma este punto como origen del sistema de referencia. Por tanto se están calculando los desplazamientos del centro de masas del conjunto respecto del CM del AGV. Se definen entonces las variables de acuerdo con la Tabla 10.

$x_i, y_i, z_i$	Posición del CM de la carga $i$ en los ejes $x, y, z$ del sistema $S_{AGV}$ respectivamente (m)
$m_i$	Masa de la carga $i$ (kg)
$m_{AGV}$	Masa del AGV sin carga (kg)
$d_x, d_y, d_z$	Desplazamiento del CM en los ejes $x, y, z$ respectivamente (m)

Tabla 10: Variables para el cálculo de la posición del centro de masas

Aplicando equilibrio de fuerzas y momentos en torno al CM del AGV, se llega a que la fórmula para el cálculo de los desplazamientos es:

$$d_x = \frac{1}{m_{AGV} + \sum_{i=1}^n m_i} \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad (49)$$

$$d_y = \frac{1}{m_{AGV} + \sum_{i=1}^n m_i} \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad (50)$$

$$d_z = \frac{1}{m_{AGV} + \sum_{i=1}^n m_i} \sum_{i=1}^n m_i z_i \quad (51)$$

Con este resultado se puede simplificar el cálculo de la carga en cada una de las ruedas del AGV. Para ello se aplica equilibrio de fuerzas y momentos otra vez.

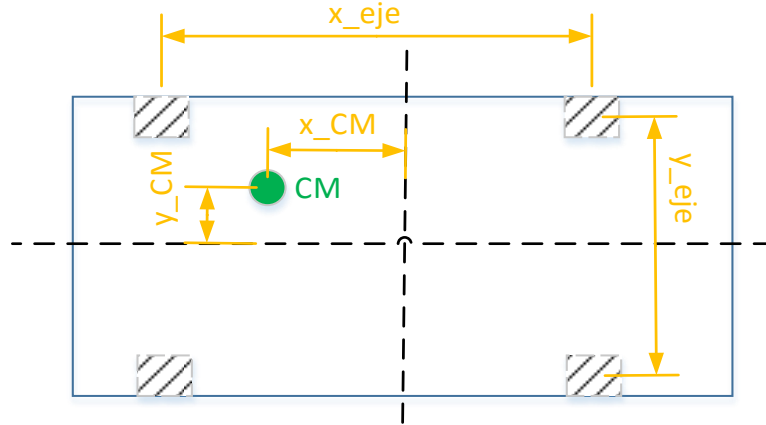


Figura 22: Esquema para el cálculo de la carga estática en las ruedas

En la Figura 22 se representa la vista en planta del AGV. Al no existir fuerzas en los ejes x e y, no es necesario representar vistas que incluyan la altura del CM. En este caso se ha referenciado todo al centro geométrico del AGV arbitrariamente. Los parámetros de la Figura 22 se detallan en la Tabla 11:

$x_{eje}, y_{eje}$	Distancia entre ejes del AGV en la dirección x e y [m]
$x_{CM}, y_{CM}$	Distancia del CM al centro geométrico del AGV en la dirección x e y [m]
$m_t$	Masa total del conjunto [kg]
$F_z$	Fuerzas normales de reacción en cada rueda [N] d/i: derecha/ izquierda f/t: frontal/ trasero

Tabla 11: Parámetros para el cálculo de la carga estática en las ruedas

Aplicando equilibrio de fuerzas y momentos respecto al centro geométrico, las ecuaciones resultantes quedan:

$$\sum F_z = m_t * g \quad (52)$$

$$(F_{zt} - F_{zf}) \frac{x_{eje}}{2} = m_t * g * x_{CM} \quad (53)$$

$$(F_{zi} - F_{zd}) \frac{y_{eje}}{2} = m_t * g * y_{CM} \quad (54)$$

$$F_{zi} = F_{zfi} + F_{zti} \quad (55)$$

$$F_{zf} = F_{zfi} + F_{zfd} \quad (56)$$

$$F_{zd} = F_{zfd} + F_{ztd} \quad (57)$$

$$F_{zt} = F_{zti} + F_{ztd} \quad (58)$$

Las ecuaciones (55), (56), (57) y (58) se derivan de la geometría existente en la distribución de las ruedas en el AGV. Esto permite integrar la acción de las fuerzas normales en cada rueda en una única fuerza que se aplica sobre el eje (caso de  $F_{zt}$  y  $F_{zf}$ ) o sobre el lateral (caso de  $F_{zi}$  y  $F_{zd}$ ). El problema entonces admite una resolución como la presentada anteriormente. Se puede entender esta solución como la descomposición de dos problemas. El primero es un equilibrio de fuerzas y momentos en la dirección del eje x. De este problema se obtienen  $F_{zt}$  y  $F_{zf}$ , que se pueden utilizar para calcular sendos equilibrios de fuerzas y momentos en cada eje, obteniendo así las 4 fuerzas buscadas.

Las cargas sobre las ruedas se mantienen constantes durante el movimiento del AGV siempre que la posición del CM no cambie. Esta condición se cumple a efectos de este trabajo. Por el teorema de superposición se pueden calcular estas cargas al inicio de la simulación e ir sumándoles los efectos dinámicos.

#### AGV en movimiento

Cuando el AGV se desplaza entran en juego fuerzas de aceleración y frenado, así como centrífugas, que modifican la distribución de cargas calculada en el apartado anterior. Siguiendo el principio de superposición, se pueden calcular estas fuerzas aparte y luego sumar su efecto a las del caso estático.

La fuerza centrífuga siempre se aplica sobre el centro de masas. Las fuerzas de aceleración y frenado, llamadas fuerzas de tracción a efectos de este trabajo, se aplican sobre un punto denominado centro de tracción (CT). Este punto coincide también con el punto sobre el que pivota la unidad de tracción. Se considera que estas fuerzas son las únicas fuerzas externas aplicadas. La Figura 23 representa ambos puntos de aplicación de las fuerzas.

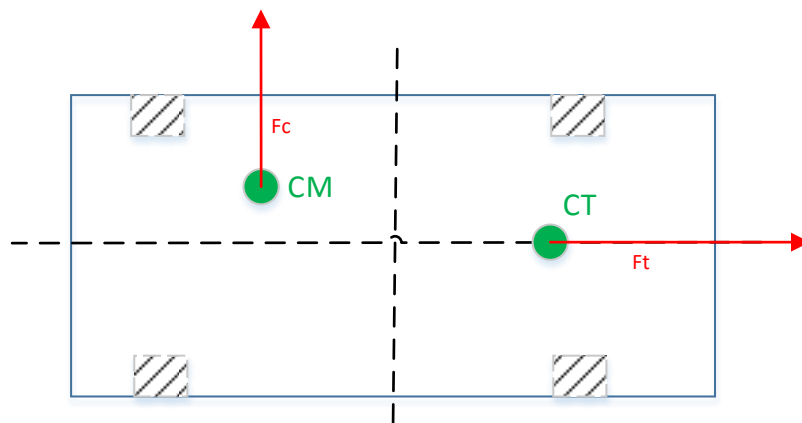


Figura 23: Centro de masas y centro de tracción

El CT debería estar situado en el eje x de simetría del AGV, ya que de otro modo se generarían momentos de rotación no deseados al aplicar la fuerza de tracción. Esta consideración permite simplificar los cálculos, como se verá a continuación. Además, la  $F_t$  no siempre actúa en la dirección del eje  $x_{AGV}$ . La Figura 24 y la Tabla 12 muestran estas características.

$X_{CM}, Y_{CM}, Z_{CM}$	Distancia entre ejes del AGV en la dirección x e y [m]
$X_{CT}, Y_{CT}, Z_{CT}$	Distancia del CM al centro geométrico del AGV en la dirección x e y [m]
$m_t$	Masa total del conjunto [kg]
$F_z$	Fuerzas normales de reacción en cada rueda [N] d/i: derecha/ izquierda f/t: frontal/ trasero
$\beta$	Ángulo de aplicación de la fuerza de tracción respecto del eje X del AGV [rad]

Tabla 12: Variables para calcular la carga sobre las ruedas con AGV en movimiento

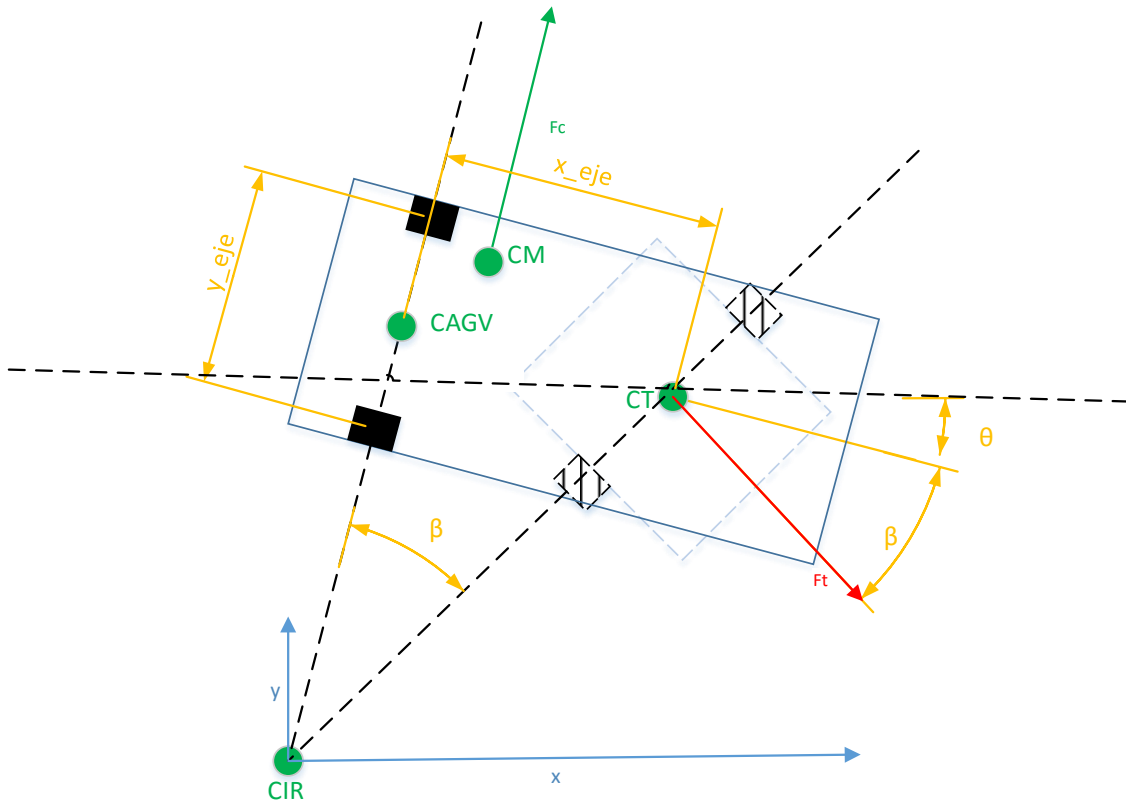


Figura 24: Carga sobre las ruedas con AGV en movimiento

Como se puede observar en la Figura 24, las ruedas de la unidad de tracción ya no están perfectamente alineadas como en el caso anterior. Este resultado es especialmente relevante en el caso de que la distribución de la carga se realice entre las 4 ruedas. Sin embargo, en el caso del Easybot, la unidad de tracción es independiente y el cuerpo del AGV se puede modelar como un triciclo. De esto se deriva que la carga soportada por el eje delantero se distribuye equitativamente entre las ruedas de la unidad de tracción. Esto permite simplificar enormemente los cálculos.

Las Figura 25 y Figura 26 representan la actuación de las fuerzas de tracción y centrífuga en los planos XZ e YZ respectivamente.

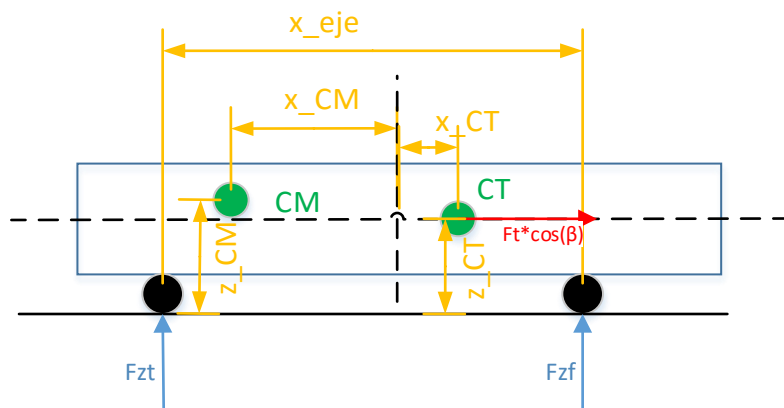


Figura 25: Cálculo de las cargas sobre las ruedas en movimiento. Plano XZ

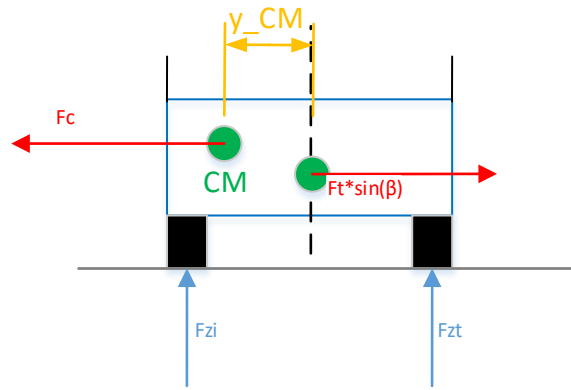


Figura 26: Cálculo de las cargas sobre las ruedas en movimiento. Plano YZ

Aplicando equilibrio de fuerzas y momentos respecto del centro geométrico del AGV en los planos XZ, YZ, se llega a los siguientes resultados:

$$F_{zt} = -F_{zf} \quad (59)$$

$$F_t \cos(\beta) = F_{zf} x_{eje} \quad (60)$$

$$F_{zi} = -F_{zd} \quad (61)$$

$$F_{zi} y_{eje} = F_c y_{CM} \quad (62)$$

Donde  $F_{zi}$ ,  $F_{zd}$ ,  $F_{zt}$ ,  $F_z$  se definen de la misma forma que para el cálculo estático.

### 3.3.5 Modelado de las cargas laterales en las ruedas

Cuando el AGV toma una curva, se generan fuerzas en la dirección del sistema  $S_0$  que deben ser compensadas por el rozamiento entre las ruedas y el suelo para que el AGV gire de forma controlada y siguiendo la trayectoria deseada.

Las principales fuerzas a tener en cuenta en estos casos son la fuerza de tracción y la fuerza centrífuga. La primera las consideramos aplicada en el centro de tracción (CT), mientras que la fuerza centrífuga se aplica sobre el centro de masa (CM) del AGV.

En la Tabla 13 se presentan las variables para calcular la carga lateral sobre las ruedas.

$x_{CM}, y_{CM}$	Distancia del CM del AGV en la dirección x e y [m]
$x_{CT}, y_{CT}$	Distancia del CT al centro geométrico del AGV en la dirección x e y [m]
$m_t$	Masa total del conjunto [kg]
$F_y$	Fuerzas laterales de reacción en cada rueda [N] d/i: derecha/ izquierda f/t: frontal/ trasero
$\beta$	Ángulo de aplicación de la fuerza de tracción respecto del eje X del AGV [rad]
$R_{curva}$	Radio instantáneo de la curva descrita [m]

Tabla 13: Variables para calcular la carga lateral sobre las ruedas

La Figura 27 muestra ambas fuerzas antes mencionadas y sus puntos de aplicación sobre el AGV. En este apartado no se entrará en detalle sobre el cálculo de la fuerza centrífuga. Se asume además que la unidad de tracción actúa como una única rueda, por lo que no se distingue entre derecha e izquierda a la hora de calcular las fuerzas aplicadas a las ruedas delanteras. Además,

se supone que la fuerza de tracción neta en ese momento es nula, es decir, el AGV está dando la curva a una velocidad constante sin sufrir aceleraciones. El motivo de esto es aislar las reacciones en el eje  $y_{AGV}$ , que no contribuyen al movimiento del AGV, de la fuerza de tracción, que se supone que contribuye en su totalidad a mover el AGV. Por lo tanto, la fuerza de tracción no tiene que ser compensada por las ruedas ya que genera un momento de rotación neto.

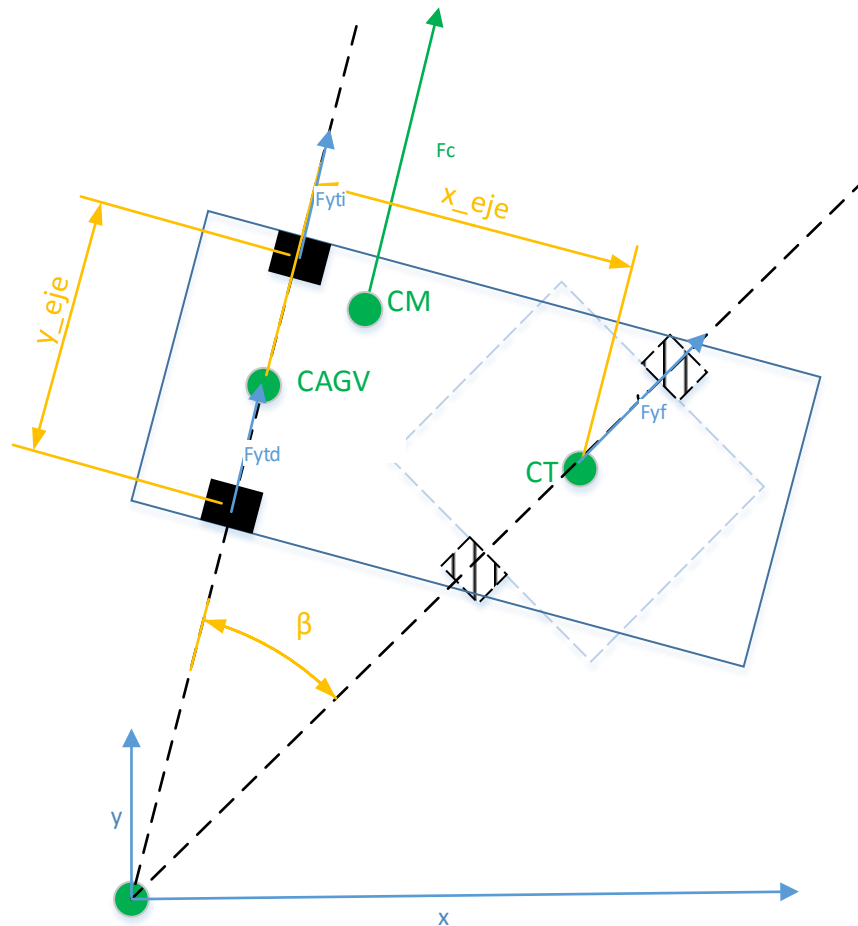


Figura 27: Modelo para el cálculo de la carga lateral sobre las ruedas

Otra consideración es que la fuerza centrífuga se aplica en la dirección de la recta que une el CM con el CIR. Esto implica que sufre una desviación respecto del eje  $y_{AGV}$  que varía en función de la coordenada  $x_{CM}$ . Esta variación se representa en la Figura 28 mediante el ángulo  $\alpha$ .

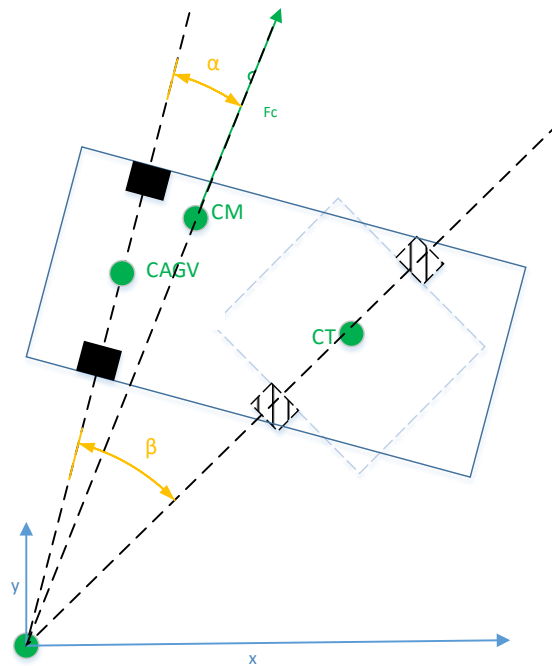


Figura 28: Dirección de aplicación de la fuerza centrífuga

Aplicando equilibrio de fuerzas en la dirección  $y_{AGV}$ ,  $x_{AGV}$  y momentos en torno al centro geométrico del AGV, se llega a las siguientes ecuaciones:

$$F_{yt} + F_{yf} \cos(\beta) + F_c \cos(\alpha) = 0 \quad (63)$$

$$F_{yf} \sin(\beta) + F_c \sin(\alpha) = 0 \quad (64)$$

$$F_c \sin(\alpha) * y_{CM} + F_c \cos(\alpha) * x_{CM} + F_{yt} * x_{CAGV} + F_{yf} \cos(\beta) * x_{CT} = 0 \quad (65)$$

$$F_{yt} = F_{yti} + F_{ytd} \quad (66)$$

### 3.3.6 Modelos de derrape y vuelco

Cuando el AGV da una curva, la fuerza centrífuga actuando sobre el centro de gravedad genera un esfuerzo lateral, que debe ser compensado mediante la adherencia de las ruedas al suelo, y un momento de vuelco. Esto permite explorar las condiciones críticas de derrape y vuelco para el AGV, que influirán en la distribución de carga.

Se aceptan dos hipótesis para el AGV:

- No dispone de suspensión y los efectos de la deformación de las ruedas son despreciables, por lo que no hay un desplazamiento del centro de masas en la curva.
- La superficie sobre la que se desplaza es plana, es decir, no tiene peralte.

La Figura 29 muestra un esquemático del AGV en vista frontal.

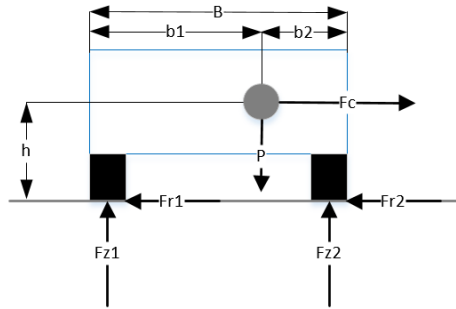


Figura 29: Modelo para el cálculo de derrape y vuelco

El círculo gris representa el centro de masas CM del AGV. Sobre él actúan el peso  $P$  y la fuerza centrífuga  $F_c$ . El CM está situado a una altura  $h$  y a una distancia  $b_1$  y  $b_2$  de los laterales izquierdo y derecho, respectivamente. Sobre cada una de las ruedas del AGV actúan una fuerza normal  $F_{z1}$ ,  $F_{z2}$ , y una fuerza de rozamiento  $F_{r1}$ ,  $F_{r2}$  en sentido contrario a la fuerza centrífuga.

B	Anchura del AGV [m]
$b_1, b_2$	Distancia del centro de masas a la rueda interior y exterior de la curva respectivamente [m]
h	Altura del centro de masas [m]
P	Peso del AGV [Nm]
$F_c$	Fuerza centrífuga [Nm]
Fr	Fuerza de rozamiento [Nm]
Fz	Fuerza normal [Nm]
$\mu$	Coefficiente de rozamiento de la rueda con el suelo [-]
g	Aceleración de la gravedad [ $m/s^2$ ]

Tabla 14: Parámetros para el cálculo de derrape y vuelco

El desarrollo para calcular las velocidades límite es el siguiente (Aparicio, 1995)

1) Velocidad límite de derrape

El derrape del AGV se producirá cuando la fuerza de rozamiento sea insuficiente para compensar la fuerza centrífuga.

$$V_d = \sqrt{gR\mu} \quad (67)$$

Donde R es el radio de la curva trazada. En la Figura 30 se simulan las velocidades límite para distintos radios de curva. Se supone un coeficiente de rozamiento constante ( $\mu=0.5$ ).

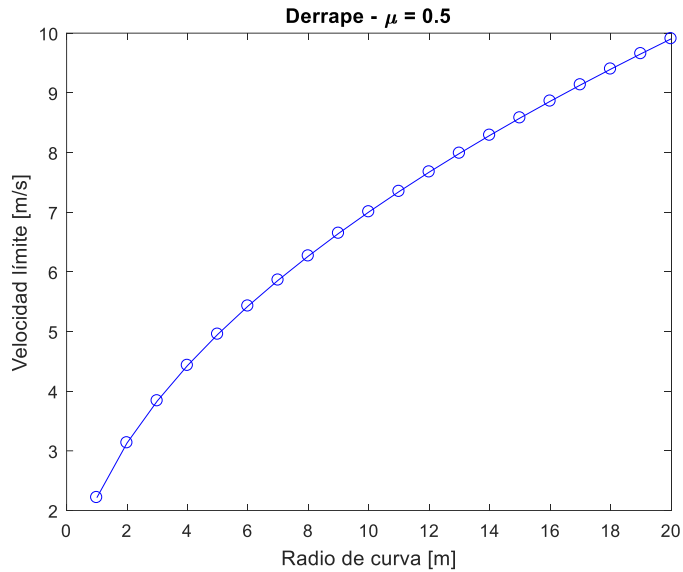


Figura 30: Velocidad límite de derrape

Se observa que para los valores dados el Easybot nunca derraparía ya que su velocidad máxima es de 1m/s y su radio de giro mínimo de 1m. Se puede calcular el valor mínimo del coeficiente de adherencia para que el Easybot nunca derrape en las condiciones límite (R=1m, V=1m/s):

$$\mu_{crit} = \frac{1}{g} \approx 0.1 \quad (68)$$

Es importante recalcar que estas ecuaciones asumen que la carga se distribuye equitativamente entre todos los ejes del AGV. Los casos con distintas distribuciones de carga se analizarán en los apartados correspondientes.

Además, a pesar de ser muy improbable el derrape del AGV completo, no lo es el de la carga portada si se dan unas condiciones muy similares. En caso de que haya carga muy alta y no correctamente sujeta en el AGV, ésta puede desplazarse o incluso desprenderse al tomar una curva. La misma condición del coeficiente de rozamiento crítico se puede utilizar aplicado al contacto de superficies carga-carga.

## 2) Velocidad límite de vuelco

Las condiciones de vuelco se dan cuando la resultante del peso y la fuerza centrífuga (ambas aplicadas sobre el centro de masas) corta a la superficie de rodadura fuera de la huella exterior de la rueda.

$$V_v = \sqrt{\frac{gRb_2}{h}} \quad (69)$$

En la Figura 31 se ha representado la evolución de la velocidad límite con respecto al radio de la curva. Se ha asumido que el centro de gravedad es equidistante de ambas ruedas y está a h=50 cm de altura, lo que corresponde a un posible valor real.

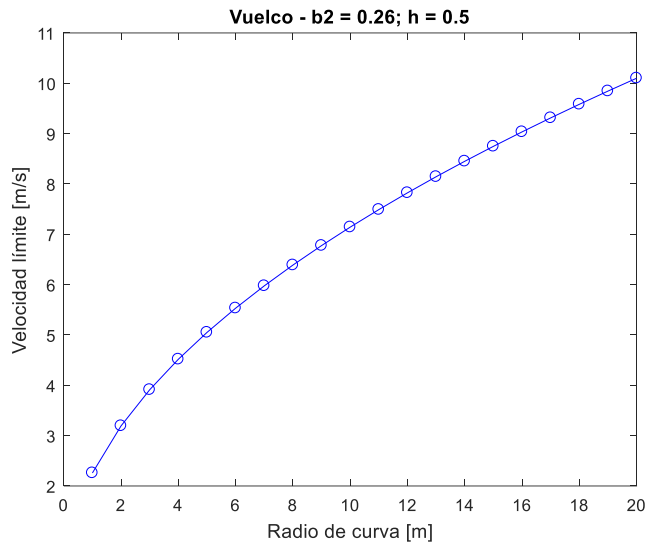


Figura 31: Velocidad límite de vuelco

Se observa que el AGV tampoco llegaría a volcar por las mismas razones que en el apartado anterior. En este caso se puede definir  $C=b_2/h$  como un parámetro que representa la posición relativa del centro de masas. Del análisis de esta definición se observa que el AGV tenderá a volcar cuanto más alto o más desplazado hacia el lado de giro esté el centro de masa. Por tanto, el valor crítico de  $C$  en este caso es:

$$C_{crit} = \frac{1}{g} \approx 0.1 \quad (70)$$

La Figura 32 muestra los valores críticos de  $h$  y  $b_2$  para los que el AGV volcaría en las condiciones extremas ( $R=1m$ ,  $V=1m/s$ ).

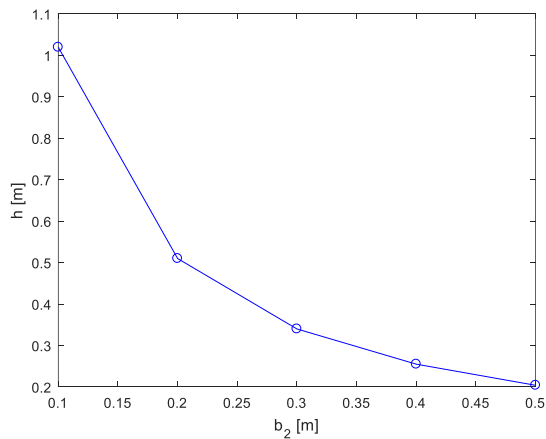


Figura 32: Valores críticos de la altura y posición de CM para provocar vuelco

La relevancia de estos resultados es que permiten indicar en qué condiciones de distribución de carga se puede provocar el vuelco del AGV o de la carga. Para el Easybot se puede comprobar que estas circunstancias se dan en casos en los que la carga provoca una posición del centro de gravedad muy escorado a un lateral y muy alto. De aquí se deduce que para maximizar la estabilidad se debe intentar llevar el centro de masas a una posición baja y centrada.

### 3.3.7 Modelos de aceleración y frenado

Cuando el AGV acelera o frena las únicas ruedas capaces de proporcionar tracción son las de la unidad de tracción. Para que estas ruedas puedan transmitir par de tracción y mover el AGV, es necesario que la fuerza de tracción sea inferior a la fuerza de rozamiento. Esta condición depende de la posición del centro de masas del AGV (Figura 33).

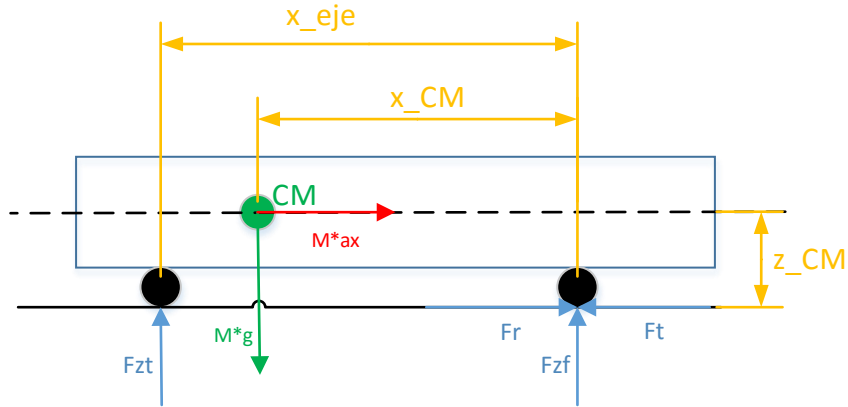


Figura 33: Esquema para el estudio de aceleración y frenado

$x_{eje}$	Distancia entre eje delantero y trasero [m]
$x_{CM}$	Distancia entre el eje delantero y el centro de masas [m]
$M$	Masa del AGV [kg]
$F_r$	Fuerza de rozamiento [N]
$F_t$	Fuerza de tracción [N]
$F_{zf}, F_{zt}$	Fuerzas normales a cada eje [N]
$a_x$	Aceleración en la dirección del eje x [ $m/s^2$ ]
$\mu$	Coefficiente de rozamiento de la rueda con el suelo [-]
$g$	Aceleración de la gravedad [ $m/s^2$ ]
$R_{rueda}$	Radio de las ruedas delantera [m]

Tabla 15: Parámetros para el estudio de aceleración y frenado

Aplicando equilibrio de fuerzas y momentos, se puede llegar al valor máximo del par que se puede aplicar antes de que el AGV patine.

$$Fr_{max}x_{eje} = Mg(x_{CM} - x_{eje}) - Ma_x z_{CM} \quad (71)$$

En esas condiciones la fuerza de tracción iguala a la fuerza de rozamiento máxima, dada por:

$$Fr_{max} = Mg\mu \frac{x_{CM} - x_{eje}}{\mu z_{CM} - x_{eje}} \quad (72)$$

Por lo tanto, la aceleración máxima y el par máximo son:

$$a_{max} = g\mu \frac{x_{CM} - x_{eje}}{\mu z_{CM} - x_{eje}} \quad (73)$$

$$M_{max} = Fr_{max} * R_{rueda} \quad (74)$$

En condiciones normales, este par será superior al máximo que pueden dar los motores del AGV. Sin embargo, en los casos en los que el centro de masas este muy desplazado hacia atrás, el AGV podría llegar a perder tracción. Las gráficas de la Figura 34 muestran posiciones extremas de la carga que llevan a esta situación ( $\mu=0.8$ ). Se han adimensionalizado  $z_{CM}$  y  $x_{CM}$  dividiendo por  $x_{eje}$

con el fin de mantener la generalidad. Los valores de cada parámetro son:  $M = 1000 \text{ kg}$ ,  $\mu = 0.8$  y  $R_{\text{rueda}} = 0.05 \text{ m}$

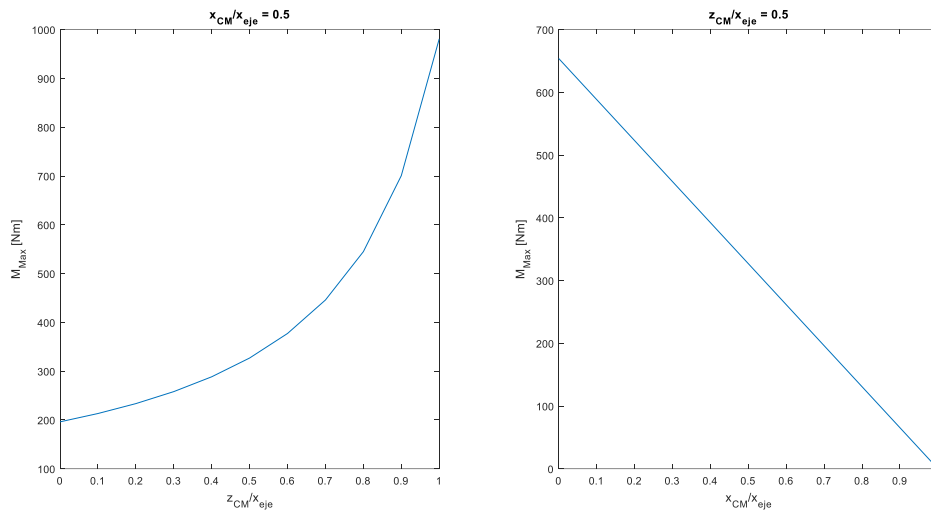


Figura 34: Límites de tracción para distintas posiciones del CM

De estos resultados se deduce que para mejorar la tracción se debe intentar cargar el eje delantero, que corresponde a la unidad de tracción. Esto puede tener algunos efectos no deseados que aparecerán cuando se estudien los modelos de interacción rueda-suelo. El principal de estos sería el mal comportamiento en giros.

El caso de frenado se estudia de manera similar pero considerando una aceleración en sentido contrario. En este caso se puede comprobar que las ruedas delanteras incrementan su carga respecto del caso estático, por lo tanto son capaces de soportar más par antes de llegar a bloquear y patinar.

### 3.4 Modelo con carga remolcada

Para simular el remolque se sigue una metodología similar al cuerpo del AGV, ya que se puede entender como un AGV de tipo triciclo cuya "unidad de tracción" aplicaría una fuerza de tracción en el centro de remolque (CR). Se ha desarrollado un modelo de Euler-Newton e identificado todas las fuerzas que actúan sobre el remolque. Se ha utilizado un remolque de dos ruedas por ser éste el más representativo de los utilizados en robótica industrial.

Otro tipo de remolques utilizados en la industria son los de 4 ruedas con las 2 ruedas delanteras locas. La misión de estas ruedas es sujetar al remolque cuando éste no se encuentra apoyado en el AGV, evitando su caída. A efectos de este trabajo se supone que estas ruedas locas no afectan al AGV si está apoyado y tampoco se requiere ningún par adicional para alinear estas ruedas en los cambios de dirección.

La Figura 35 muestra, de manera esquemática, el conjunto AGV + remolque. En este caso hay que añadir un cuarto sistema de referencia embarcado en el remolque  $[x_r, y_r]$  (Figura 36).

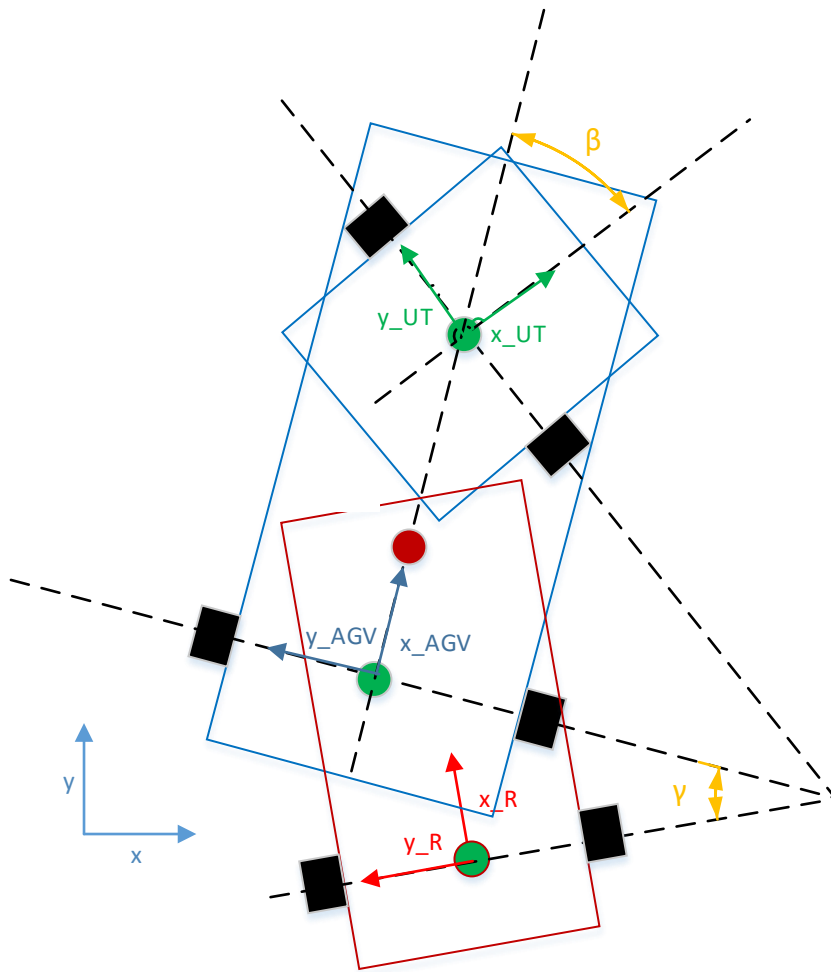


Figura 35: Esquema de AGV + Remolque

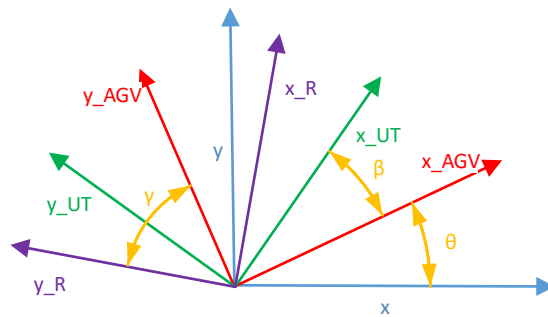


Figura 36: Sistema de referencia con remolque

Las fuerzas aplicadas sobre el remolque se representan en la Figura 37.

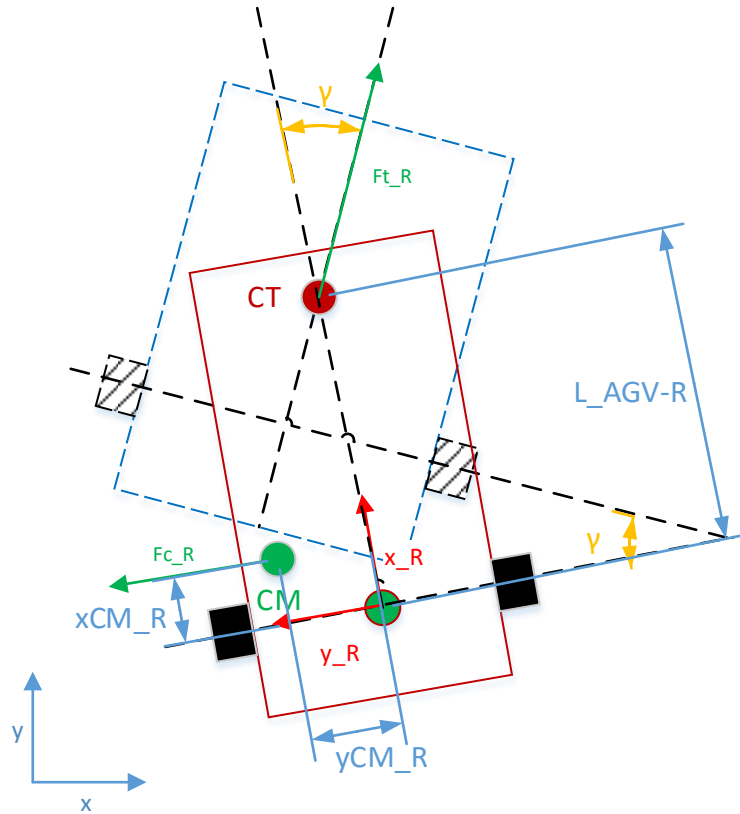


Figura 37: Diagrama de fuerzas del remolque

Aplicado equilibrio de fuerzas y momentos:

$$F_{cR} * (L_{AGV-R} - x_{CM}) = I_R \ddot{\gamma} \quad (75)$$

$$F_t \cos(\gamma) = m_R \ddot{x} \quad (76)$$

$$F_{tR} \sin(\gamma) + F_{cR} = m_R \ddot{y} \quad (77)$$

En forma matricial y generalizando:

$$M \ddot{q} = F \quad (78)$$

Donde:

$$M = \begin{bmatrix} m_R & 0 & 0 \\ 0 & m_R & 0 \\ 0 & 0 & I_R \end{bmatrix} \quad (79)$$

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (80)$$

$$F = \begin{bmatrix} F_t \cos(\gamma) \\ F_{tR} \sin(\gamma) + F_y + F_{cR} \\ F_{cR} * (L_{AGV-R} - x_{CM}) \end{bmatrix} \quad (81)$$

La adición del remolque afecta a la distribución de cargas verticales en el AGV ya que el peso del remolque se distribuye entre el cuerpo del AGV (centro de remolque) y las ruedas del remolque. Por tanto el centro de masas del AGV cambia de posición al añadir el remolque.

Aplicando la hipótesis de no deslizamiento, se obliga a que no se desplace en la dirección del eje Y embarcado en él, es decir:

$$\dot{y} = 0 \rightarrow F_{CR} + F_y = -F_{tR} * \sin(\gamma) \quad (82)$$

Además, se supone que la fuerza centrífuga del AGV es compensada enteramente por las ruedas del AGV sin llegar a afectar al remolque.

### 3.5 Modelo con interacción rueda-suelo. Ruedas deformables

Cuando el AGV está girando, además de la fuerza de tracción se producen esfuerzos laterales. Hasta el momento se ha asumido que las ruedas son capaces de compensar estos esfuerzos laterales -siempre que no se llegue a las condiciones críticas de derrape- sin sufrir ninguna deformación. Esta hipótesis es una aproximación y no se cumple en las condiciones límite de operación.

Como se vio anteriormente en el estado del arte, las ruedas sufren deformaciones que llevan a deslizamientos longitudinales y laterales. Estos desplazamientos dependen de la carga vertical soportada y el esfuerzo lateral aplicado sobre la rueda.

A efectos de este trabajo, se simplifica la fórmula mágica (Han, 2018) teniendo en cuenta sólo la parte lineal y saturando el deslizamiento máximo. Esto implica que la relación entre deslizamiento y carga lateral soportada queda:

$$s_x = K \left( \frac{1}{F_z} \right) * F_x = k_1 * \frac{F_x}{F_z} \quad (83)$$

Donde:

$F_z$	Fuerza vertical soportada por la rueda [N]
$F_x$	Fuerza de tracción soportada por la rueda [N]
$k_2$	Relación entre cargas soportadas y deslizamiento longitudinal [-]

Por lo tanto, no todo el par transmitido por las motorruedas se utiliza para desplazar el AGV sino que hay parte que se pierde en deslizamiento de la rueda respecto al suelo.

Un resultado similar se puede extraer para la fuerza lateral:

$$s_y = K \left( \frac{1}{F_z} \right) * F_y = k_2 * \frac{F_y}{F_z} \quad (84)$$

Donde:

$F_z$	Fuerza vertical soportada por la rueda [N]
$F_y$	Fuerza lateral soportada por la rueda [N]
$k_1$	Relación entre cargas soportadas y deslizamiento lateral [-]

Se puede ver que el deslizamiento aumenta a medida que se incrementa la carga lateral y se reduce la carga vertical sobre la rueda. Este deslizamiento se define como el desplazamiento en el eje transversal de la rueda respecto del longitudinal, sin contar desplazamiento longitudinal. Es decir:

$$s_x = \frac{\Delta x}{\Delta x_0} \quad (85)$$

$$s_y = \frac{\Delta y}{\Delta x_0} \quad (86)$$

$\Delta x$	Desplazamiento longitudinal de la rueda [m]
$\Delta y$	Desplazamiento lateral de la rueda [m]
$\Delta x_0$	Desplazamiento longitudinal de la rueda en caso de rodadura perfecta [m]

Las ruedas sufren un deslizamiento total que es la suma vectorial de los deslizamientos en el eje x (longitudinal) y el y (lateral). El deslizamiento de todas las ruedas del AGV debe ser de la misma magnitud, ya que de otra forma el AGV se deformaría.

Para la estimación de las constantes  $k_1$  y  $k_2$  se han utilizado datos de automoción (Aparicio, 1995). Los valores obtenidos son  $k_1 = 0.006$  y  $k_2 = 0.075$ .

Un parámetro también muy utilizado es el ángulo de deriva. Se define como el ángulo entre la trayectoria definida por el AGV y la trayectoria que definiría en caso de que los deslizamientos laterales fuesen nulos.

$$\delta = \text{atan}\left(\frac{\Delta y}{1 - \Delta x}\right) \approx \frac{\Delta y}{1 - \Delta x} \quad (87)$$

Se admite la simplificación puesto que el ángulo de deriva siempre toma valores pequeños en la práctica.

Por último, hay que mencionar que todos los cálculos de desplazamientos presentados en este apartado tienen valor siempre y cuando no se produzcan condiciones de derrape y vuelco.

Para validar e ilustrar estos resultados se ha realizado una simulación en la que se ha variado la posición del centro de masa sobre el eje  $x_{AGV}$ ; y se han comprobado los valores de los desplazamientos en los ejes delantero y trasero. Se ha tomado como referencia la curva más corta que puede describir el AGV ( $R=2m$ ) a la máxima velocidad posible ( $v=1.2m/s$ ).

$x_{CM}$	$S_{yf}$	$S_{yt}$
0.1	0.005	0.0054
0.5	0.0069	0.0050
1	0.0475	0.0045

Tabla 16: Coeficientes de deslizamiento para la interacción rueda suelo

La Figura 38 muestra distintas trayectorias descritas por el AGV para distintas posiciones del centro de masa en el eje  $x_{AGV}$ . Se observa que la trayectoria con el centro de masas muy desplazado hacia delante ( $x_{CM}=1m$ ) tiende a trazar la curva "hacia fuera". Esto se produce debido al mayor deslizamiento de las ruedas traseras respecto de las delanteras.

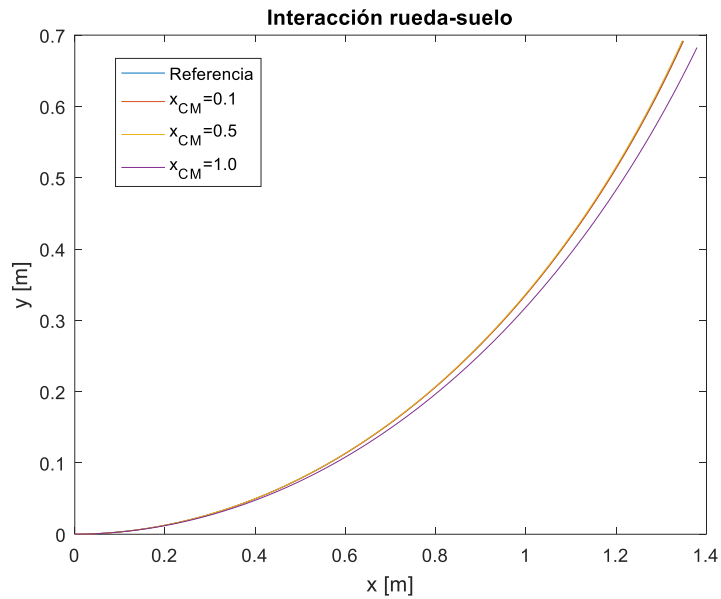


Figura 38: Trayectorias para distintas posiciones del CM

La Figura 39 muestra en detalle las mismas trayectorias. Se comprueba que los resultados corresponden con los deslizamientos calculados. Se observa que las desviaciones del AGV respecto de la trayectoria no son muy notables salvo en el caso de que la carga este muy desplazada hacia delante.

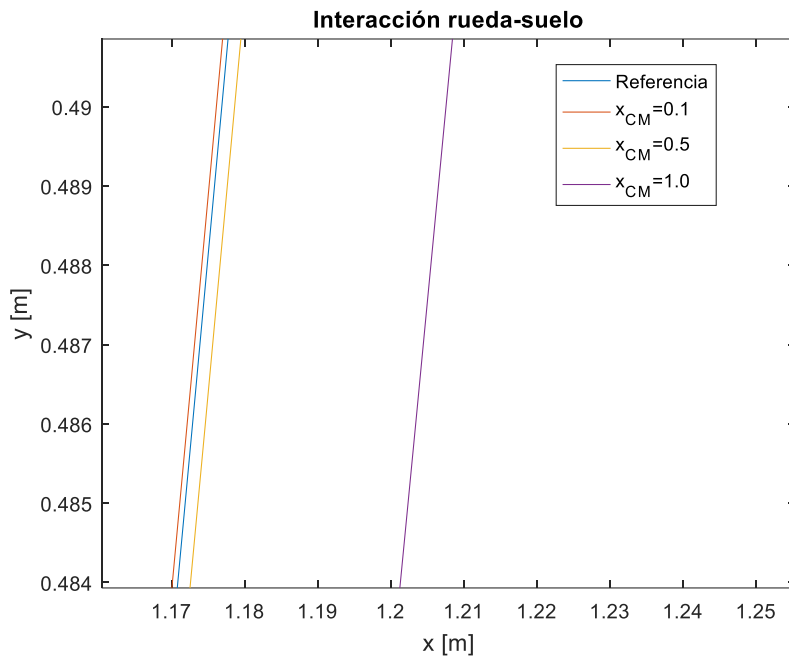


Figura 39: Trayectorias para distintas posiciones del CM (detalle)

### 3.6 Implementación del modelo dinámico

La Figura 40 representa el flujograma del algoritmo general para el cálculo del modelo dinámico del AGV con N remolques. Este diagrama de flujo se ejecuta en cada paso de simulación. Una vez obtenida la aceleración, se puede calcular la velocidad y posición de cada parte del AGV.

Al buscar que el algoritmo sea lo más general posible se incluye la repetición del cálculo de centros de masa y momentos de inercia en cada iteración. Con esto se conseguiría simular desplazamiento de cargas transportadas durante el movimiento del AGV. Para nuestro caso asumiremos que la carga está siempre fija sobre el AGV o el remolque, por lo que la posición del centro de masas es constante.

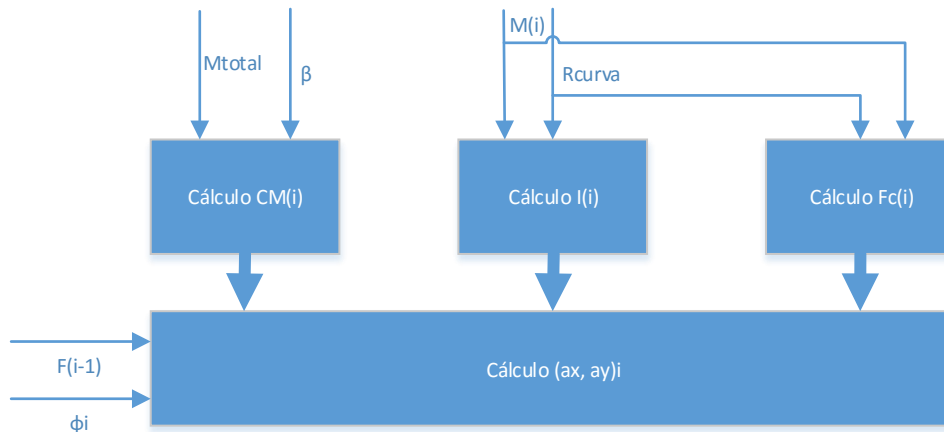


Figura 40: Algoritmo general para calcular el modelo dinámico

Los primeros pasos del algoritmo, según la Figura 40, son:

- Cálculo de la posición del centro de masa CM.
- Cálculo del momento de inercia en ese instante. Depende del radio de la curva que se esté tomando en ese momento.
- Cálculo de la fuerza centrífuga. También depende del radio de la curva que se esté dando y la posición del centro de masas.

Se puede demostrar que la fuerza de tracción se transmite a lo largo de cada uno de los componentes del conjunto ya que el módulo de la aceleración es el mismo para todos ellos, variando sólo la dirección de esta aceleración y, por tanto, de aplicación de la fuerza. Se puede entender que cada módulo del AGV “tira” del siguiente con una fuerza de módulo  $F_t$  y dirección  $\phi$ , donde  $\phi$  es el ángulo que representa la dirección de desplazamiento de ese módulo. Esto es cierto siempre que no haya una fuerza de tracción adicional a la que proporcionan los motores de la unidad de tracción, como es el caso de este trabajo.

Además, la unidad de tracción se puede entender como un módulo más del AGV, por lo que esta metodología se puede aplicar.

A modo de resumen, el algoritmo se compone de los siguientes cálculos en cada ciclo de simulación:

- 1) Cálculo del centro de masas de cada uno de los componentes del sistema.
- 2) Cálculo de la fuerza centrífuga de cada uno de los componentes.
- 3) Verificación de que ninguno de los componentes se encuentra en situación de vuelco o derrape.
- 4) Cálculo de las reacciones verticales de las ruedas, considerando las interacciones entre distintos componentes. Por ejemplo, el cuerpo del AGV descarga gran parte de su peso sobre la unidad de tracción y, a su vez, los remolques pueden descargar parte de su peso en el componente anterior.

- 5) Verificación de que las ruedas motrices de la unidad de tracción no se encuentran en situación de patinaje.
- 6) Cálculo de los esfuerzos laterales de las ruedas considerando interacciones entre componentes.
- 7) Cálculo del deslizamiento a partir de las cargas verticales y laterales en cada rueda.
- 8) Cálculo de la fuerza de tracción y aceleración del conjunto a partir de la masa total y los pares aplicados a las ruedas.
- 9) Para cada componente del sistema:
  - a. Cálculo de la dirección de aplicación de la fuerza tractora. Esta dirección es la del desplazamiento del componente anterior.
  - b. Corrección de la dirección de aplicación de la fuerza tractora en base a los deslizamientos calculados para las ruedas del componente específico.
  - c. Cálculo de la aceleración del CM en función de la fuerza tractora y la masa de todo el conjunto.
  - d. Integración de la aceleración para obtener la velocidad.
  - e. Integración de la velocidad para obtener la posición del CM.

En el caso de que se trabaje con carga inmóvil, los cálculos de posición del CM se pueden hacer fuera de la simulación ya que ésta permanecerá constante.

## 4. CAPÍTULO 4

### Control de seguimiento de trayectoria de un AGV

#### 4.1 Control PID

A día de hoy la técnica de control más utilizada para la operación de AGVs es el control PID con ganancia proporcional variable. Existen dos señales a controlar para este problema:

1. Velocidad del AGV.
2. Posición del AGV, entendida como desviación respecto a la trayectoria marcada en el suelo, que se mide con el sensor de posición previamente descrito. De forma indirecta se busca controlar la aceleración angular del AGV

##### 4.1.1 Control de velocidad

Para el control de velocidad se utiliza un controlador PID que toma como señal de error la diferencia entre la velocidad lineal de la unidad de tracción ( $v_x$  en el sistema  $S_{UT}$ ) y la referencia de velocidad del AGV,  $v_{tgt}$ .

$$e_v = v_{tgt} - v_x \quad (88)$$

La señal controlada es el par aplicado a las ruedas de la unidad de tracción, que en este caso cumple que será igual para ambas. Por tanto:

$$M = K_p * e_v + K_i * \int e_v + K_d \frac{de_v}{dt} \quad (89)$$

Como los motores están limitados en el par que pueden entregar a las ruedas, se suelen añadir otras leyes de control a la simple ecuación del PID con idea de evitar efectos perjudiciales:

- Desactivación de la acción integral con valores muy altos del error. Esto permite evitar el wind-up cuando el AGV está muy lejos de la velocidad objetivo y los motores saturan en el par máximo aplicable a las ruedas.
- Sostenimiento de la acción integral con valores demasiado bajos del error. Evita correcciones contantes cuando se está muy cerca del objetivo de velocidad.

##### 4.1.2 Control de posición

Para el control de posición, en el caso de Easybot se tiene la señal proveniente del sensor de posición embarcado en la UT. Esta señal varía entre -0.27 y 0.27 m ya que el sensor de posición tiene una longitud de 0.54 m, la misma que la anchura del AGV (ASTI, 2020).

La señal de error utilizada expresada matemáticamente es:

$$e_\theta = \sqrt{(x_{tray} - x)^2 + (y_{tray} - y)^2} \quad (90)$$

Donde  $x$ ,  $y$  son las coordenadas del centro del sensor en el sistema de referencia fijo  $S_0$ ;  $x_{tray}$ ,  $y_{tray}$  son las coordenadas del punto más cercano de la trayectoria al centro del sensor.

La variable de actuación en este caso es la diferencia de par entre las ruedas izquierda y derecha de la UT. Por tanto, la ecuación del PID quedaría:

$$\Delta M = K_p * e_\theta + K_i * \int e_\theta + K_d \frac{de_\theta}{dt} \quad (91)$$

Al igual que en el control de velocidad, el PID por sí solo no es capaz de proporcionar un control lo suficientemente preciso en condiciones de operación. Por tanto, se utilizan técnicas adicionales:

- Ganancia proporcional variable en función de la velocidad del AGV, siendo más pequeña a medida que aumenta la velocidad. A mayor velocidad del AGV se reducen las capacidades de actuación de las ruedas (aumenta la inercia a rotación, etc.), por lo que las acciones muy bruscas podrían desestabilizar el AGV.
- Saturación del error integral para evitar efectos de wind-up que podrían sacar al AGV de la trayectoria.
- Tiempo de retardo a la activación de la parada del AGV. Cuando el AGV pierde la referencia, se permite seguir funcionando un tiempo determinado manteniendo el valor de las últimas señales de control generadas. De esta forma se permite que el AGV “intente” volver a encontrar la trayectoria. Si pasado ese tiempo la referencia sigue perdida el AGV se detiene.

Existen técnicas de control de AGVs más avanzadas, como las presentadas en (Yuxing, 2019), que utilizan técnicas de control en modo deslizante para mejorar la respuesta del AGV tanto en velocidad como en seguimiento de trayectorias.

No es el objetivo de este trabajo diseñar una nueva técnica de control para AGVs. El objetivo del sistema de control es posibilitar el testeo de los modelos que se han definido en un entorno más real que el mero hecho de medir las respuestas en lazo abierto. Por tanto la técnica utilizada será el PID convencional para ambos controles.

## 5. CAPÍTULO 5

### Simulación y resultados

En este capítulo se van a presentar experimentos de simulación para validar los distintos modelos del AGV propuestos. En primer lugar se exponen las trayectorias que se van a utilizar, luego los criterios que van a permitir evaluar los modelos, y por último los resultados de la simulación de los distintos módulos del AGV.

#### 5.1 Trayectorias de validación de los modelos del AGV

Para validar cada modelo generado del AGV se utilizan una serie de curvas características que este tipo de vehículos deben recorrer en condiciones de operación, con una serie de restricciones para estos circuitos:

- Deben ser curvas cerradas para facilitar las pruebas Y poder probar diferentes calibraciones en cada vuelta sin tener que reiniciar la simulación.
- Deben representar una trayectoria real o estar compuestas de tramos de trayectorias reales.

Se utilizarán tres “circuitos” para probar el AGV: una lemniscata, un circuito cuyas curvas son clotoides, y un circuito cuyas curvas son arcos de circunferencia.

##### 1) Lemniscata

En matemáticas se conoce como lemniscata a cualquier curva que tenga la forma del símbolo de infinito. En el caso de este trabajo se utiliza la lemniscata de Bernoulli. Es una curva plana unicursal definida a partir de dos puntos dados, F1 y F2, conocidos como focos, situados a una distancia de  $2d$  entre sí, como el lugar geométrico de los puntos P tales que el producto de su distancia a los dos focos es constante y vale  $d^2$  (Abramowitz, 1972).

La ecuación en coordenadas polares es:

$$r^2 = 2d^2 \cos(2\theta) \quad (92)$$

La trayectoria está representada, entre  $0$  y  $2\pi$ , en la Figura 41, izquierda.

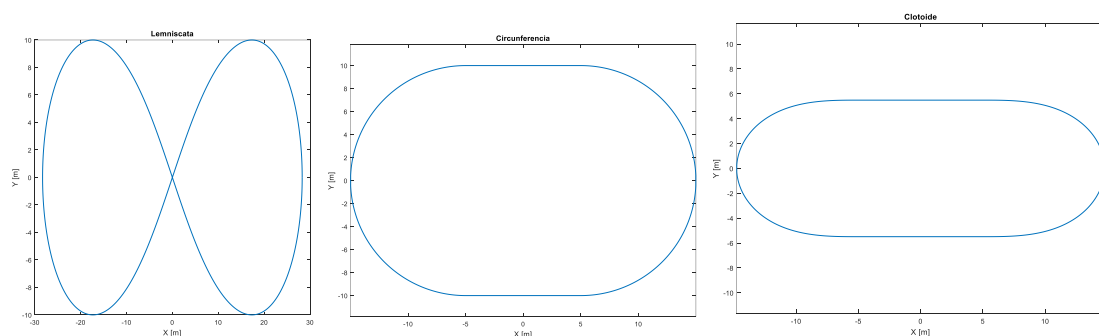


Figura 41: Lemniscata (izquierda), circunferencia (medio) y clotoide (derecha)

##### 2) Circunferencia

En una primera aproximación se creará un circuito cerrado compuesto por 2 rectas y 2 curvas, donde las curvas son arcos de circunferencia puros. En capítulos posteriores veremos las consecuencias de esto. El circuito se puede ver en la Figura 41 (medio).

### 3) Clotoide

La clotoide es una curva cuyo radio de curvatura disminuye de manera inversamente proporcional a la distancia recorrida sobre ella. Sus ecuaciones paramétricas vienen dadas por las integrales de Fresnel (Abramowitz, 1972).

$$x(t) = \int_0^x \cos(t^2) \quad (93)$$

$$y(t) = \int_0^y \sin(t^2) \quad (94)$$

El interés de esta curva viene de su utilización en topografía para el trazado de carreteras y líneas de ferrocarril, ya que un vehículo que siga esta trayectoria mantendrá una aceleración angular constante, lo que no ocurre con los arcos de circunferencia.

El mismo circuito creado para las circunferencias se ha generado utilizando clotoides para las curvas. El resultado se puede ver en Figura 41 (derecha).

## 5.2 Criterios para la validación del modelo

Los criterios para evaluar el comportamiento del AGV y analizar el algoritmo de control sobre el modelo, son los siguientes:

1. Error cuadrático medio (ECM) de posición. Se utiliza la medida del sensor excluyendo los casos en los que el AGV pierde la banda magnética de guiado.

$$ECM = \frac{1}{T} \int_0^T x_{sensor}^2(t) dt \quad (95)$$

2. Tiempo en perder la trayectoria: tiempo hasta que el AGV pierde la trayectoria a seguir de forma indefinida. Se utiliza un parámetro que se puede ajustar para determinar el tiempo máximo que el AGV puede estar sin referencia antes de pararse por pérdida de trayectoria.

## 5.3 Validación del sensor de posición

Para testear el sensor de posición se ha añadido una componente sinusoidal a una de las trayectorias del AGV, y se ha analizado la señal del sensor. Se tolera determinado nivel de ruido siempre que éste sea distinguible de la señal real.

Para las primeras pruebas se ha elegido una trayectoria en forma de recta con una senoide superpuesta. Los resultados se pueden ver en la Figura 42:

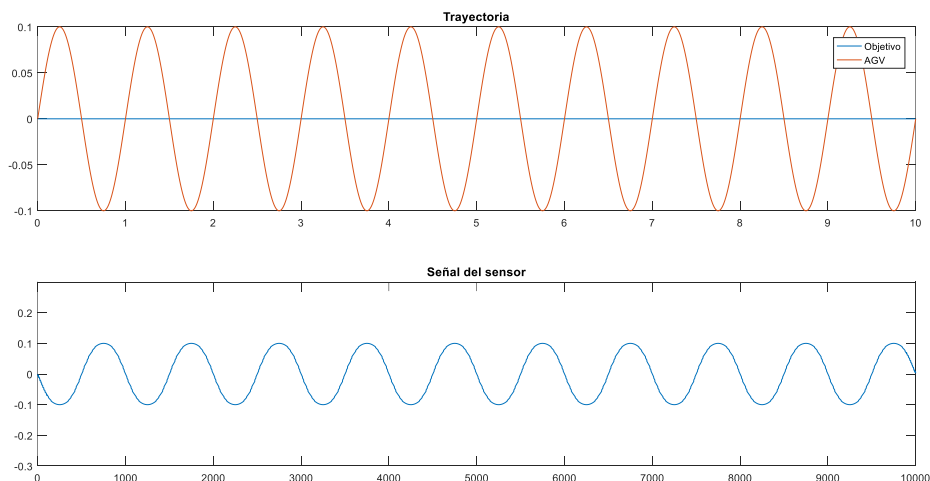


Figura 42: Test del sensor en recta

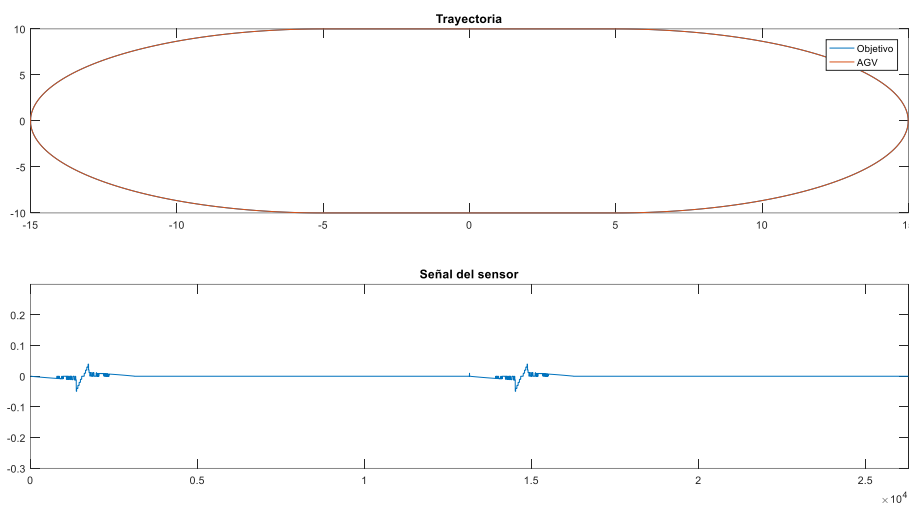
El sensor es capaz de medir la distancia al centro de la banda magnética. Por la convención de signos utilizada la señal aparece con un desfase de 180°.

Se han analizado tres casos para la trayectoria tipo circunferencia:

- 1) El sensor siempre está centrado en la trayectoria deseada. Con esto se pretende medir el nivel de error esperable por efectos de cálculo o por no haber depurado totalmente el algoritmo.
- 2) Señal sinusoidal que no saque el AGV de la referencia.
- 3) Señal sinusoidal que saque el AGV de la referencia.

#### *Test 1: El sensor está centrado en la trayectoria deseada*

El sensor sigue fielmente la trayectoria marcada por el AGV, detectándose un pequeño ruido en los momentos de cambio de dirección de la recta al arco de circunferencia (Figura 43).



*Figura 43: Test del sensor en arco de circunferencia*

El ruido de transición no genera errores de relevancia en la posición del AGV.

#### *Test 2: Señal sinusoidal que no saque el AGV de la referencia*

En este caso se aplica una señal sinusoidal de amplitud 10 cm a la trayectoria del AGV. Con esto se busca comprobar que el sensor transmite correctamente en su rango de operación.

El sensor muestra una sinusoide desfasada similar al caso de la recta. Se puede observar la influencia del ruido de transición antes mencionado (Figura 44).

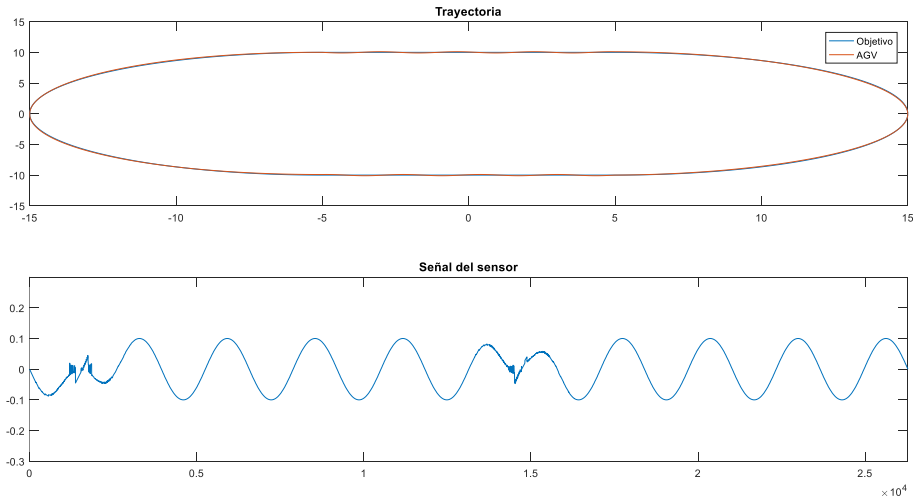


Figura 44: Test del sensor en arco de circunferencia con bajo ruido

### Test 3: Señal sinusoidal que saque el AGV de la referencia

Se aplica un ruido de amplitud 50 cm a la trayectoria del AGV. La medida máxima del sensor es  $\pm 27$  cm, por lo que se espera ver el sensor fuera de rango.

En este caso la señal del sensor presenta picos debido a que se sale de la trayectoria y por tanto devuelve -999 por convenio. En el caso real, el AGV se pararía la primera vez que pierde la trayectoria (Figura 45).

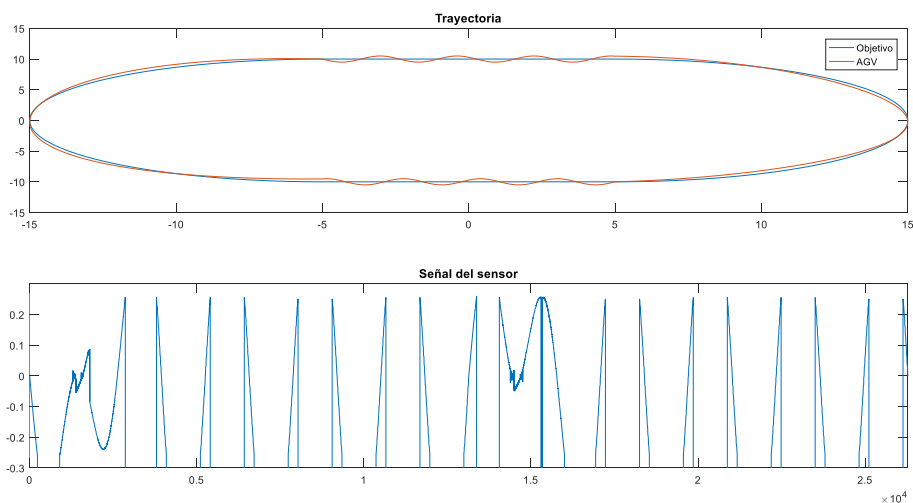


Figura 45: Test del sensor en arco de circunferencia con alto ruido

Esto permite validar el modelo del sensor ya que se comporta como era de esperar.

## 5.4 Control del modelo cinemático

Para seguir la trayectoria utilizando el modelo cinemático (Ecuaciones (18) a (22)) se ha utilizado un controlador PID que genera una señal de control para la velocidad de giro en función del error de posición medido por el sensor. La calibración de este PID se ha realizado mediante un ajuste manual. Los parámetros del regulador son  $K_p = 5$ ,  $K_d = 2$  y  $K_i = 0$ . No necesita acción integral pues en este sistema la variable de referencia se relaciona con la variable de control mediante un integrador.

Además se ha incluido una condición de control mediante la cual, si se pierde la referencia durante un periodo corto de tiempo, el AGV mantiene las mismas señales de control de la última medida válida. Se observa que con esta estrategia el AGV responde de manera más robusta.

La velocidad del AGV se ha establecido como constante e igual a 0.5 m/s. Se van a aplicar los criterios definidos en 5.2.

#### 5.4.1 Test 1: Circunferencia

Se observa que el AGV es capaz de seguir la trayectoria perfectamente en las rectas y con un mínimo error en las curvas (Figura 46).

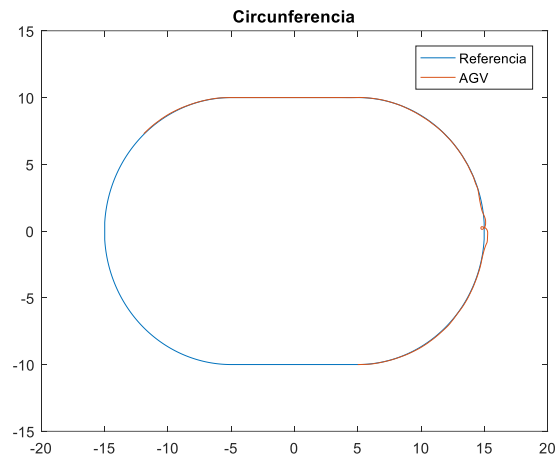


Figura 46: Control en circunferencia

Para este caso se tiene que el error ECM = 0.0029 m y el  $t_{p\acute{e}rdida} = 296,5$  s.

La trayectoria seguida por el AGV se muestra en la Figura 46. Se ha probado en arcos de circunferencia.

El valor del error de posición medido por el sensor se puede ver en la Figura 47. Se observa que el AGV presenta una zona con bastante oscilación en la medición.

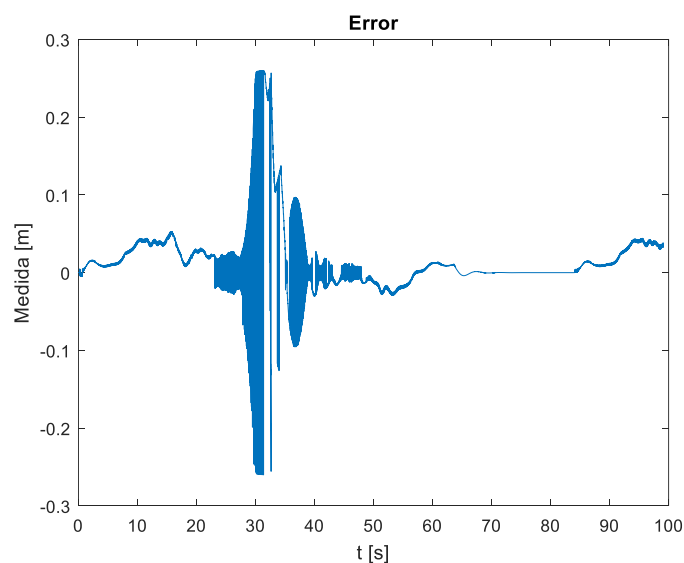


Figura 47: Error en circunferencia

Se repite el test para distintas velocidades y se calcula el tiempo de parada (Figura 48).

V [m/s]	T <sub>parada</sub> [s]
0.1	286
0.3	235
0.5	206
0.7	89
1.0	79

Tabla 17: Tiempo de parada en circunferencia

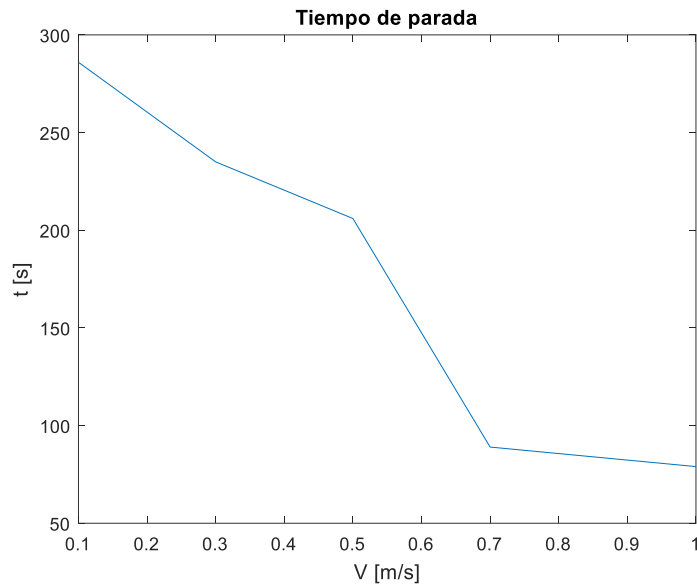


Figura 48: Tiempo de parada en circunferencia

En la Tabla 17, representada en la Figura 48, se muestra el tiempo de parada para distintas velocidades del AGV. Se puede ver que de 0.5 a 0.7 m/s se produce una caída muy brusca. Esto puede ser debido a que la circunferencia tiene un perfil de transición de recta a curva mucho más agresivo que la clotoide, que veremos a continuación. Esto puede provocar que el AGV no sea capaz de trazar la curva si la velocidad aumenta demasiado.

#### 5.4.2 Test 2: Clotoide

El caso del circuito con clotoides, manteniendo constante la calibración, se muestra en la Figura 49. Las métricas son ECM = 0.0161 m y el  $t_{pérdida} = 103$  s.

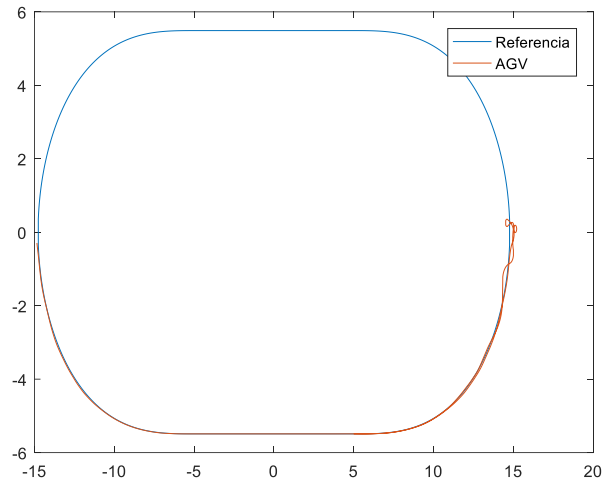


Figura 49: Control en clotoide

La referencia se pierde mucho antes que para el caso anterior. Esto puede tener sentido ya que el PID se ha calibrado para el circuito con circunferencias. Se puede ver como el error es mucho más oscilatorio para este caso. Estas oscilaciones coinciden principalmente con los puntos medios de las curvas (Figura 50 y Figura 51).

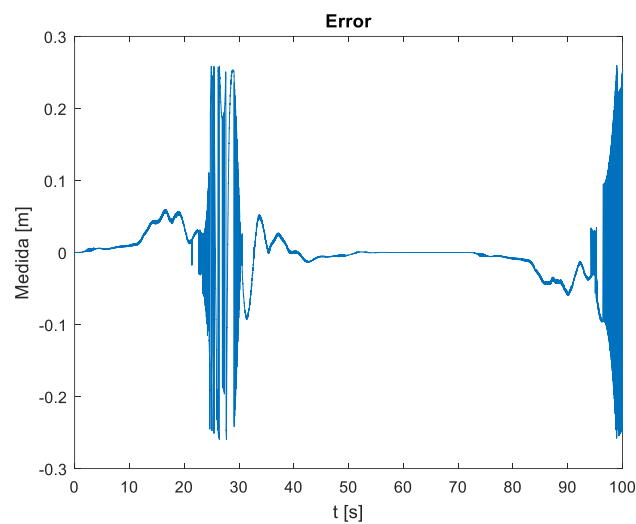


Figura 50: Error en clotoide

V [m/s]	T <sub>parada</sub> [s]
0.1	220
0.3	103
0.5	75
0.7	55
1.0	50

Tabla 18: Tiempo de parada en clotoide

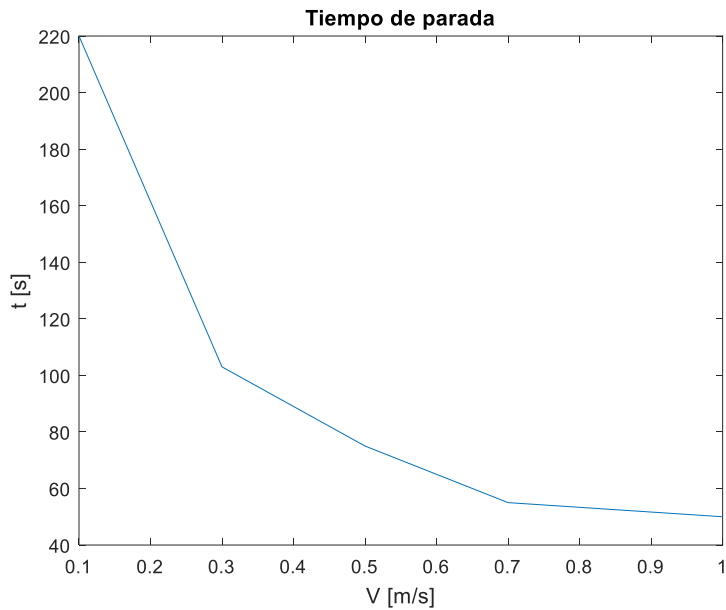


Figura 51: Tiempo de parada en clotoide

La Figura 51 representa los datos de la Tabla 18. Se puede ver que a medida que aumenta la velocidad se reduce el tiempo de parada, como cabe esperar, ya que la capacidad de control del AGV se reduce.

## 5.5 Validación del modelo dinámico

Para validar el modelo dinámico de la manera más sencilla posible se han utilizado rectas y arcos de circunferencia. Cualquier trayectoria que describa un vehículo con radio limitado se puede describir mediante esos dos tipos (Dubins, 1957).

Los distintos experimentos desarrollados en cada trayectoria se describen a lo largo de este apartado.

### 5.5.1 Aceleración y frenado en línea recta con perfil de velocidad sinusoidal

Para esta prueba se ha definido un perfil de velocidad sinusoidal que el AGV debe seguir describiendo una línea recta.

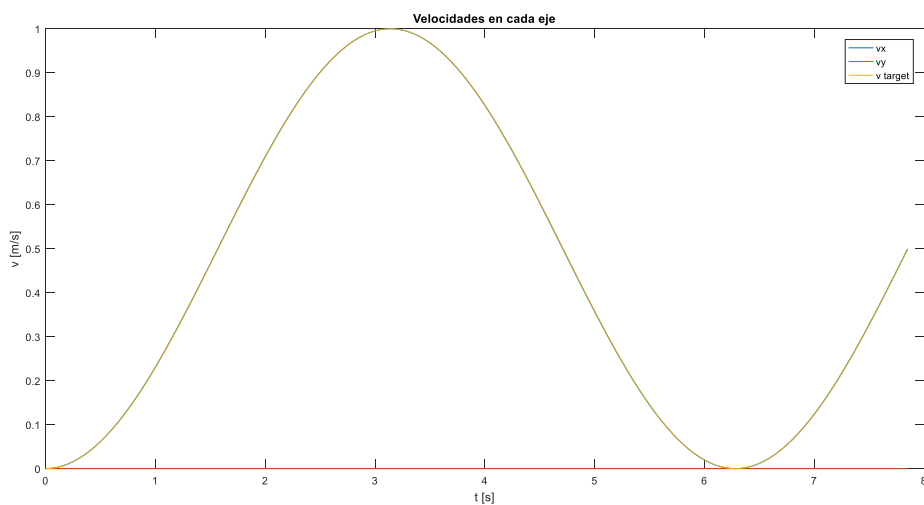


Figura 52: Velocidad en aceleración y frenado en línea recta con perfil sinusoidal

La Figura 52 muestra el perfil de velocidad utilizado para esta prueba, en la que se hace oscilar la velocidad entre el valor máximo y la parada. El AGV es capaz de seguir perfectamente el perfil requerido. La  $v_y$  es nula en todo momento ya que el desplazamiento es a lo largo del eje x.

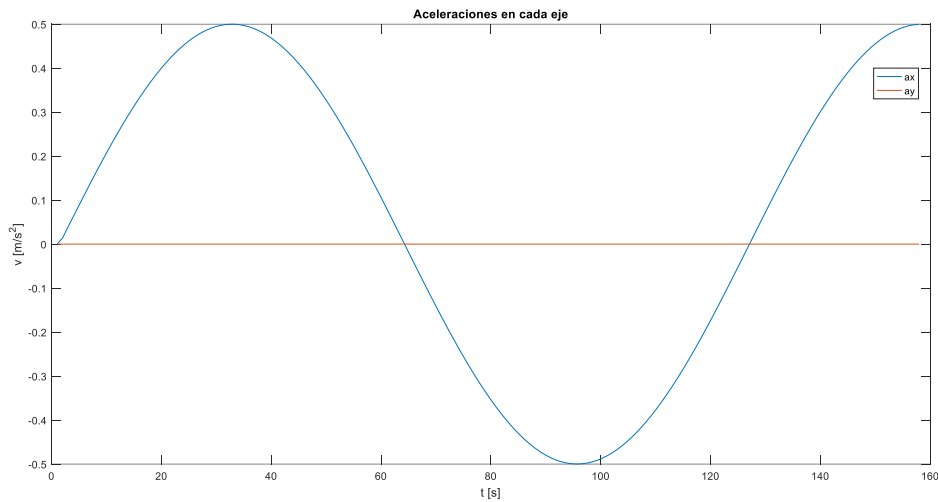


Figura 53: Aceleración en aceleración y frenado en línea recta con perfil sinusoidal

La Figura 53 muestra el perfil de aceleraciones en el centro de masas del AGV para el caso anterior. Se observa que tiene la forma esperada.

### 5.5.2 Aceleración y frenado en línea recta con perfil de velocidad cuadrado

En este caso se sustituye el perfil de velocidad sinusoidal por un perfil cuadrado entre máxima velocidad y parada.

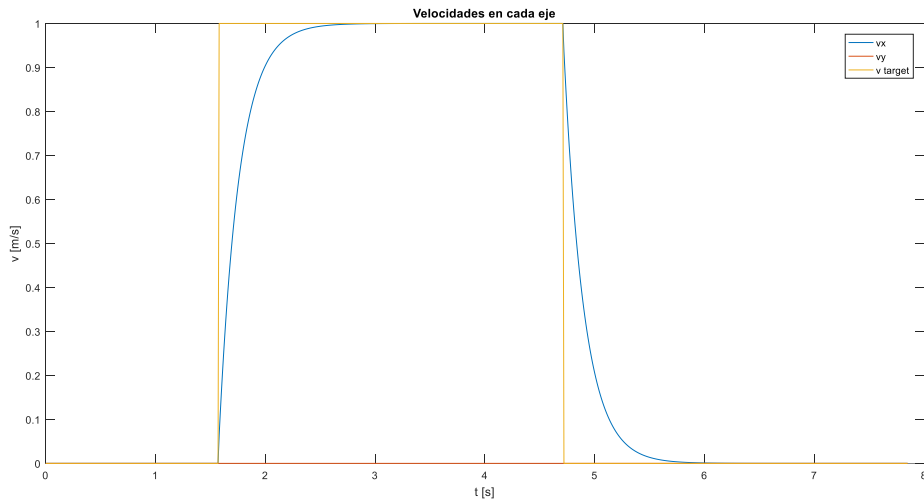


Figura 54: Velocidad en aceleración y frenado en línea recta con perfil cuadrado

La Figura 54 muestra el perfil de velocidad en este caso, así como la velocidad objetivo. Ahora se observa que el AGV tarda unos 2 segundos en acelerar hasta la velocidad máxima. Se ha limitado el par máximo que puede dar el motor para intentar asemejarlo a la realidad. La Figura 55 muestra el par aplicado a las ruedas en cada caso. Se observa que nunca llega a saturar el motor.

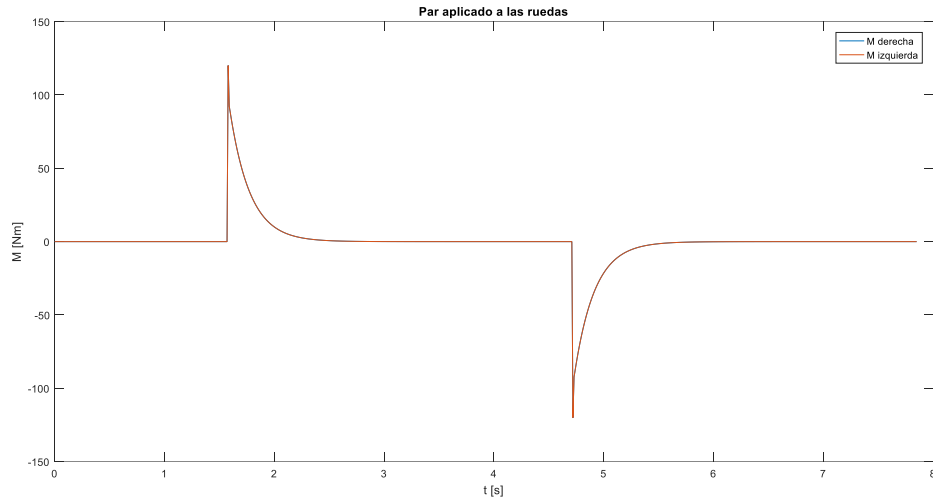


Figura 55: Par aplicado en aceleración y frenado en línea recta con perfil recto.

### 5.5.3 Aceleración y frenado en curva con perfil de velocidad sinusoidal

En este caso se pide al AGV describir una trayectoria circular de radio constante. La Figura 56 muestra la trayectoria descrita por el AGV y el objetivo. Se observa que el AGV describe una trayectoria ligeramente más cerrada que el objetivo, lo que puede deberse a la calibración de controlador en la simulación.

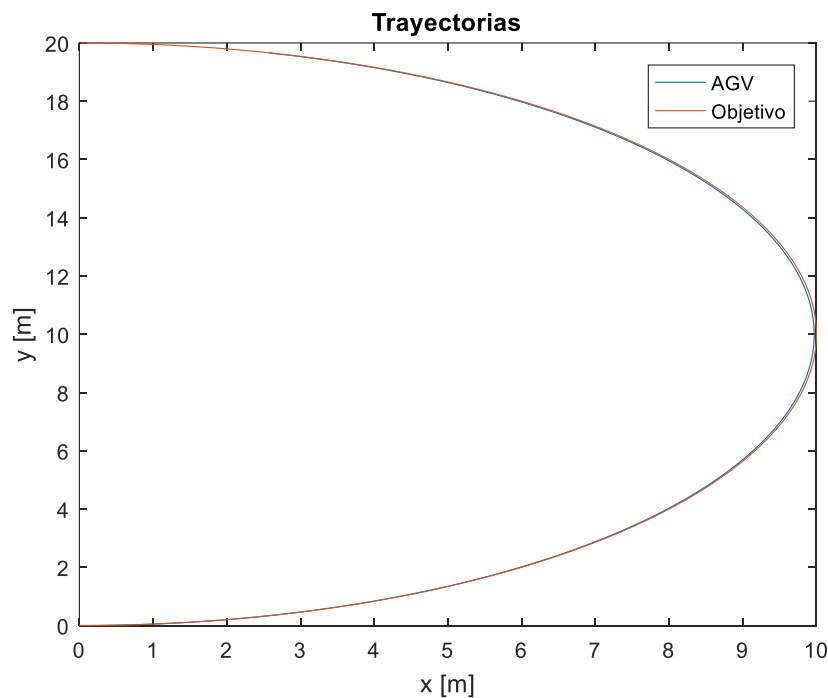


Figura 56: Trayectoria para el modelo dinámico

La Figura 57 muestra el par aplicado en las ruedas para esta trayectoria. Se observa que la rueda derecha recibe ligeramente más par que la izquierda debido a que el sistema de control intenta seguir la curva descrita y necesita producir un par de rotación en la unidad de tracción para mantener el ángulo  $\beta$ . El motor está limitado al máximo par que puede entregar durante gran parte del recorrido.

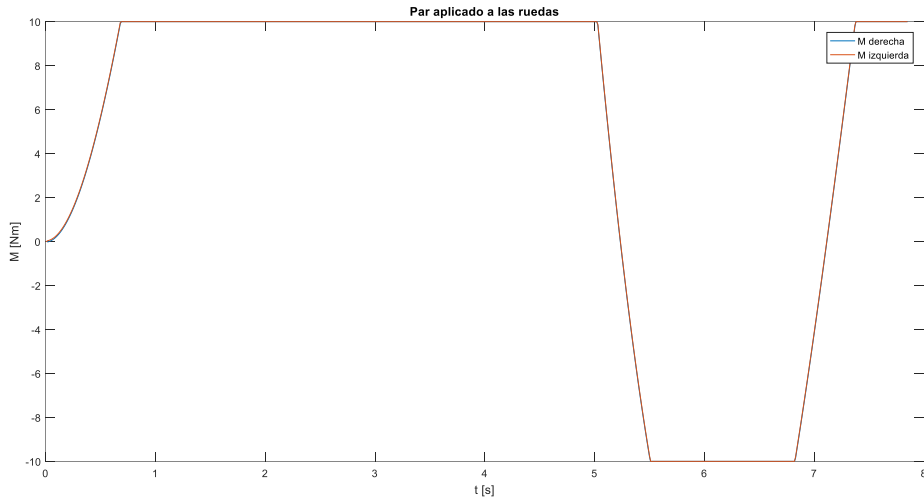


Figura 57: Par aplicado en curva con perfil sinusoidal

En la Figura 58 se puede observar que la aceleración en el eje  $x_{AGV}$  es mayor que en el eje  $y_{AGV}$ . Esto es similar al caso de movimiento en línea recta y se explica porque la trayectoria descrita es una curva con un radio mucho mayor que la distancia entre ejes del AGV. Además, se considera que no existe deslizamiento lateral de las ruedas por lo que la fuerza centrífuga está enteramente compensada por las reacciones laterales de las ruedas.

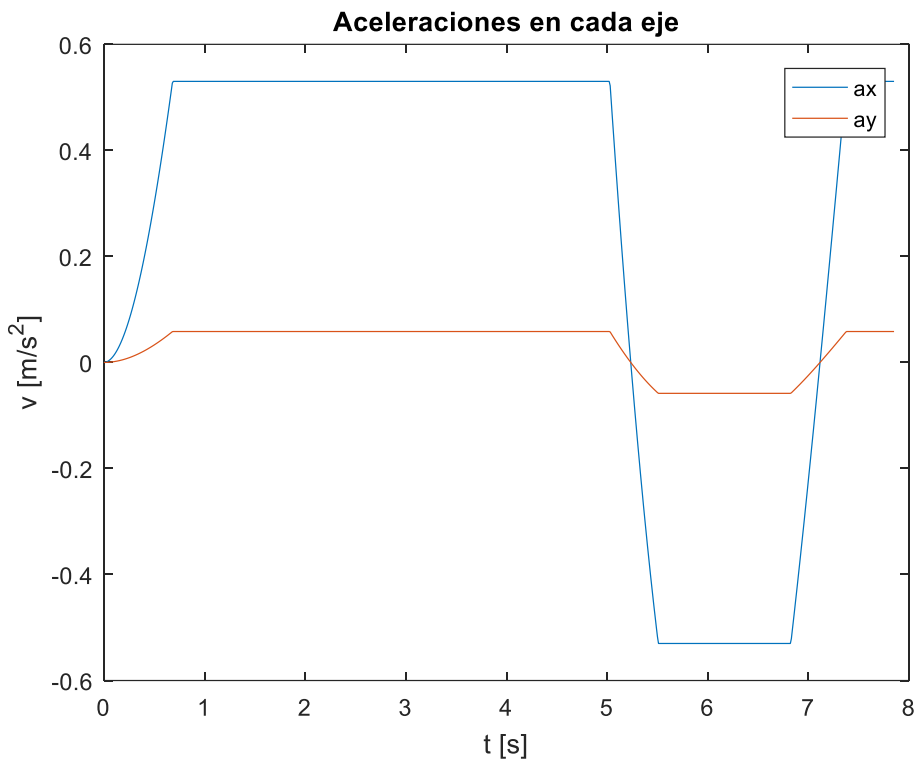


Figura 58: Aceleración en curva con perfil sinusoidal ( $R \gg x_{eje}$ )

La Figura 59 muestra cómo aumenta la aceleración lateral  $a_y$  en el sistema  $S_{AGV}$  para el caso de una curva con un radio más cercano a la distancia entre ejes del AGV. En este caso el ángulo  $\beta$  requerido es muy cercano a  $45^\circ$ . Cualquier valor por debajo de ese radio de giro está fuera de las especificaciones del AGV, por lo que no tiene sentido probarlo.

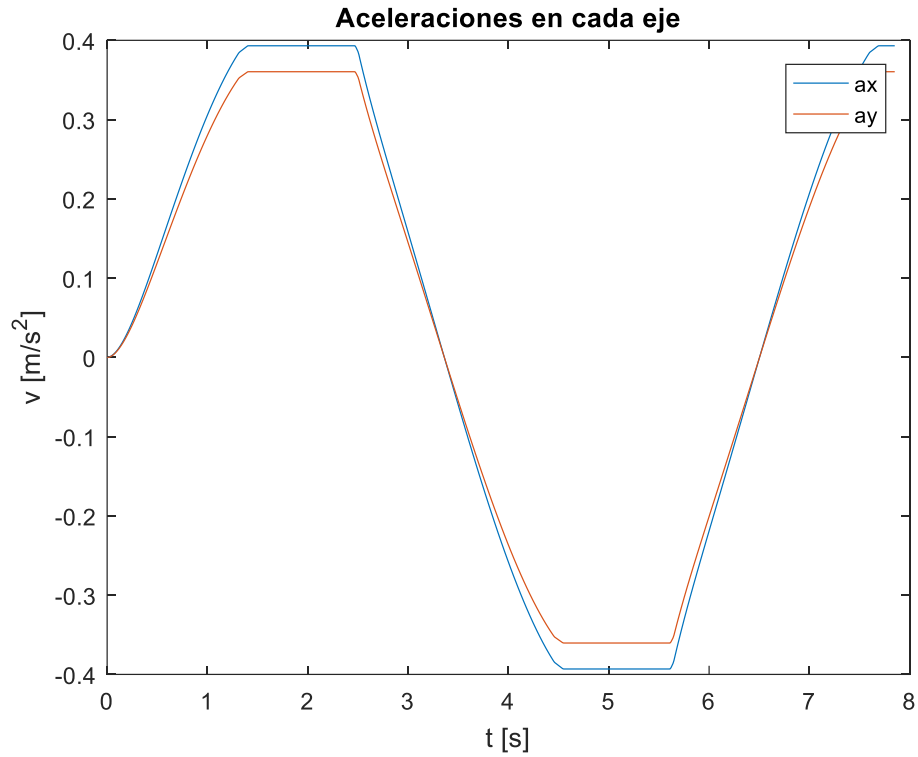


Figura 59: Aceleración en curva con perfil sinusoidal ( $R \sim x_{\text{eje}}$ )

La Figura 60 muestra el perfil de velocidad en este caso. Se puede ver que el AGV no es capaz de seguir la referencia de velocidad debido a la mala calibración del PID.

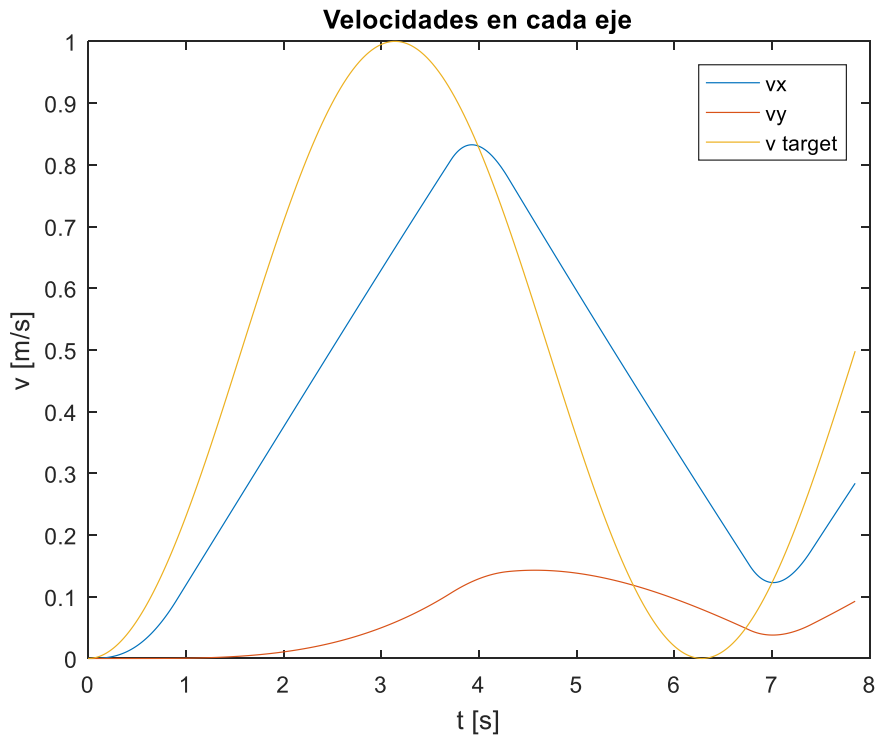


Figura 60: Velocidad en curva con perfil sinusoidal ( $R \gg x_{\text{eje}}$ )

#### 5.5.4 Aceleración y frenado en curva con perfil de velocidad cuadrado

Es el mismo caso que el apartado anterior pero utilizando un perfil de velocidades cuadrado. En la Figura 61 se puede ver que la trayectoria descrita no difiere del caso anterior y el AGV sigue describiendo una trayectoria ligeramente más cerrada que la referencia.

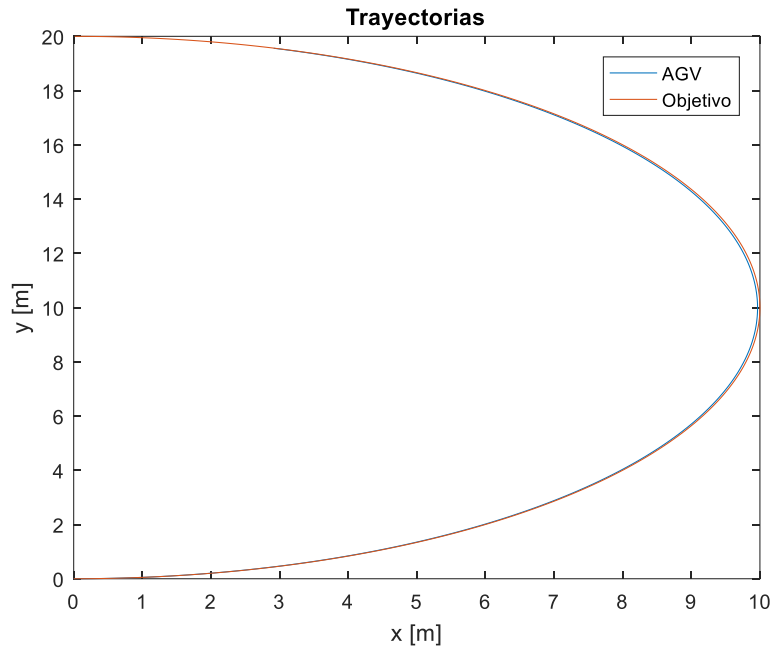


Figura 61: Trayectoria para el modelo dinámico con perfil cuadrado

La Figura 62 muestra la demanda de par para esta prueba. Se puede ver que satura en el mismo momento en que se produce el escalón de velocidad.

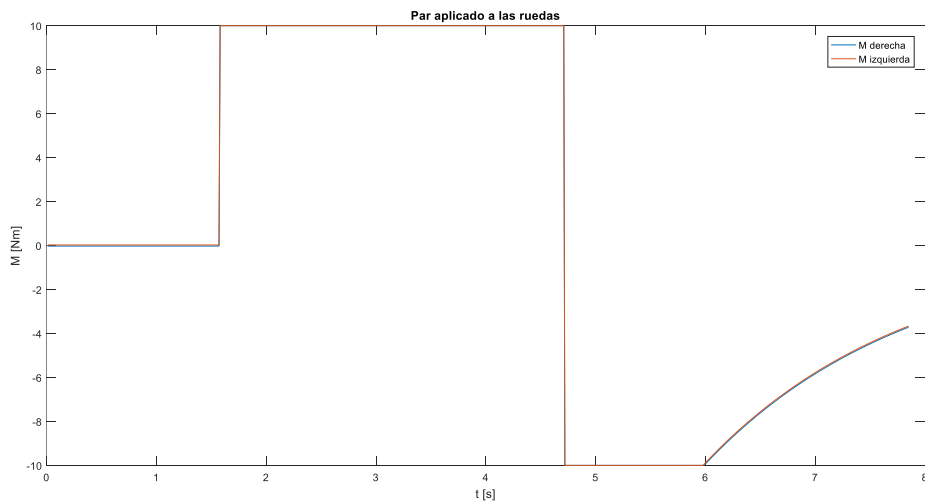


Figura 62: Par aplicado en curva con perfil cuadrado

La Figura 63 muestra las aceleraciones para cada eje. Se puede observar el mismo fenómeno que en el caso anterior con la aceleración  $a_y$ , siendo mucho menor que  $a_x$ . En este caso no se va a ejemplificar la curva con un radio menor porque no aporta información relevante.

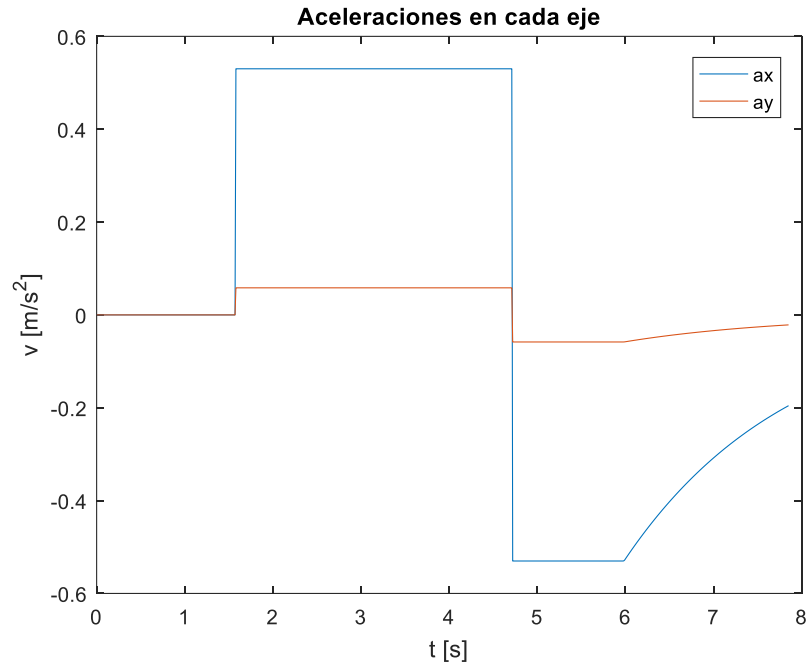


Figura 63: Aceleración en curva con perfil cuadrado

La Figura 64 muestra el perfil de velocidad para esta prueba. Se puede ver que la capacidad para seguir la velocidad tampoco es buena en este caso debido a una mala calibración del PID.

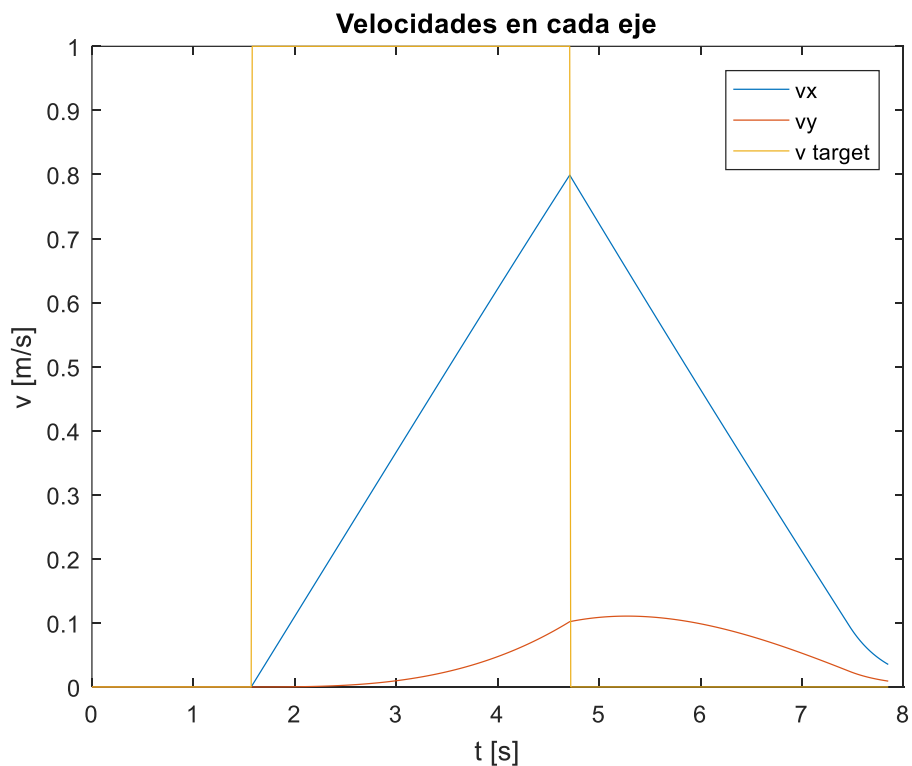


Figura 64: Velocidad en curva con perfil cuadrado

## 5.6 Control del modelo con remolque

Para validar el modelo con remolque se han realizado las mismas pruebas que para el modelo dinámico pero incluyendo un módulo más en el AGV. Los ensayos en línea recta se obvian ya que no varía nada respecto del apartado anterior.

El remolque considerado para esta prueba ha sido una plataforma de 4 ruedas con las 2 ruedas delanteras locas y las traseras fijas. No se ha tenido en cuenta la fuerza necesaria para orientar las ruedas delanteras en la dirección de desplazamiento.

Se ha utilizado una masa remolcada de 800kg.

#### 5.6.1 Aceleración y frenado en curva con perfil de velocidad sinusoidal

La Figura 65 muestra el ángulo  $\gamma$  entre el AGV y el remolque. Se observa que tarda alrededor de 6s en llegar al valor de régimen permanente debido a la baja velocidad del conjunto AGV + remolque, que se puede ver en la Figura 69, causada por la alta masa remolcada. Una observación interesante es que  $\gamma$  se comporta como un sistema lineal de segundo orden con retardo frente a la entrada de par en las ruedas de la unidad de tracción. Esto se observa en los primeros momentos de la simulación, donde el AGV está moviéndose y girando mientras que el remolque permanece alineado, es decir,  $\beta$  va evolucionando mientras  $\gamma$  permanece constante unos momentos.

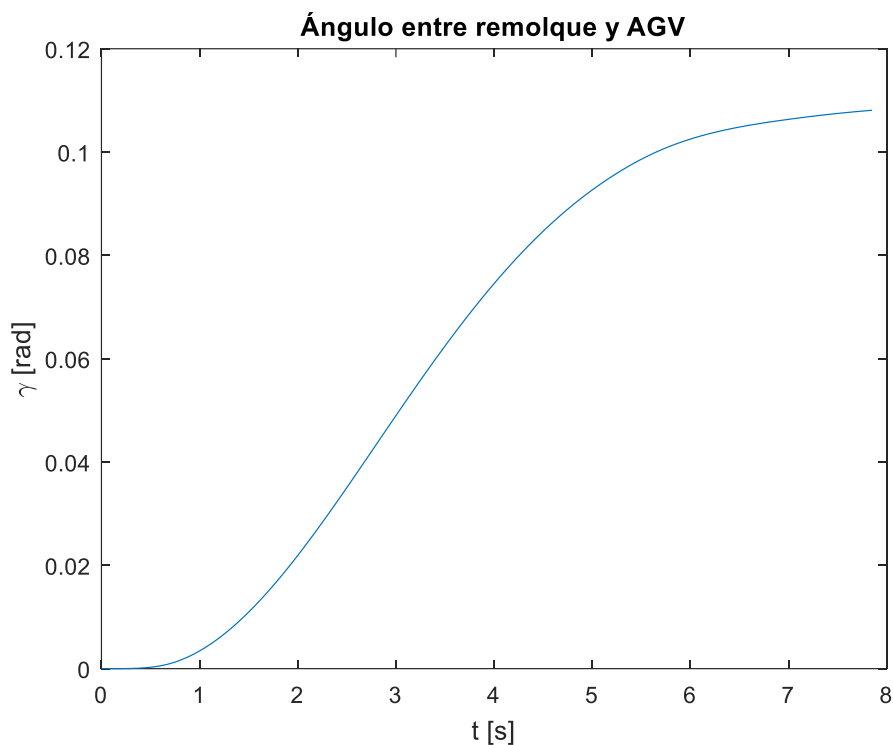


Figura 65: Ángulo entre remolque y AGV con perfil de velocidad sinusoidal

En la Figura 66 se puede ver el ángulo  $\beta$  que forman la unidad de tracción y el cuerpo del AGV. En este caso el ángulo llega de forma muy rápida al valor en régimen permanente ya que es independiente de la aceleración y velocidad del conjunto AGV + remolque. Se observa también que se comporta como un sistema de primer orden frente al par transmitido a las ruedas.

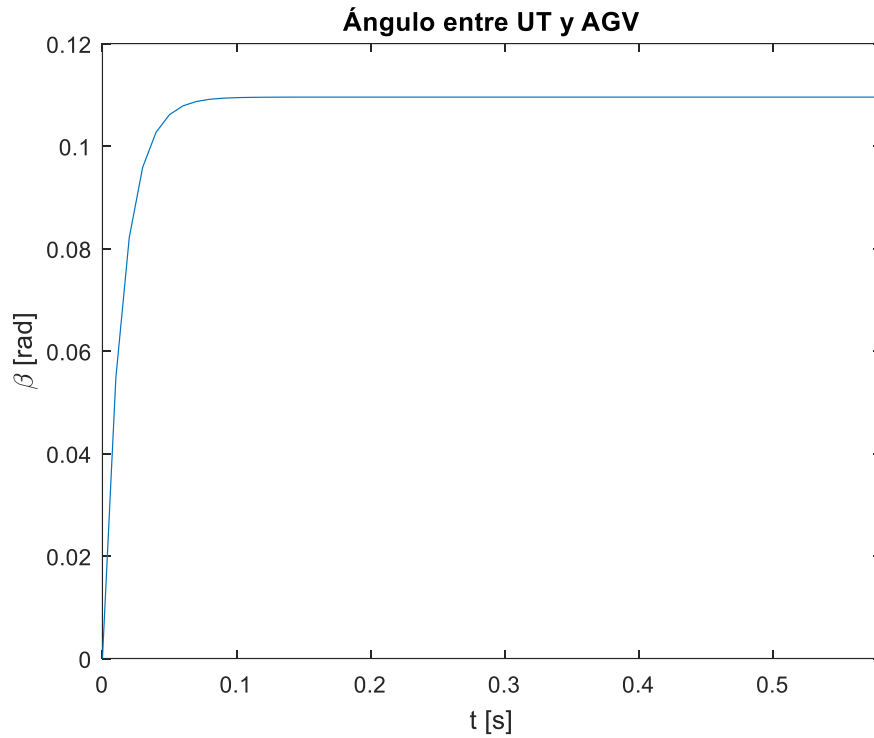


Figura 66: Ángulo entre UT y AGV con perfil de velocidad sinusoidal

La Figura 67 muestra las trayectorias descritas por el AGV y el remolque. Se ha asumido una distancia del centro de rotación CR al centro del remolque de 1.2m, que coincide con el centro geométrico del AGV. Se puede ver que el remolque tarda un tiempo en empezar a girar una vez que el AGV ha empezado a trazar la curva.

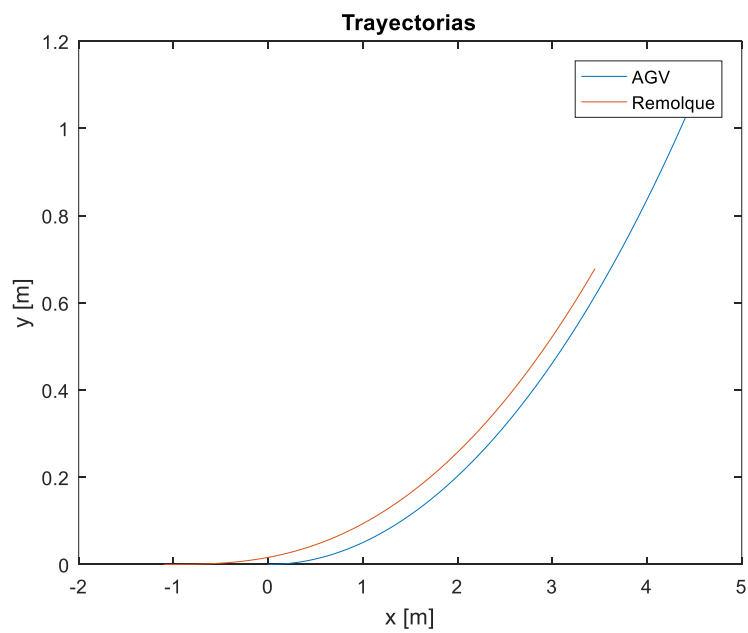


Figura 67: Trayectorias de AGV y remolque con perfil de velocidad sinusoidal

Las Figura 68 y Figura 69 muestran la aceleración y velocidad del conjunto, respectivamente. Se puede ver que la aceleración satura a un valor máximo al poco de arrancar el AGV debido a la limitación en el par que los motores pueden entregar a las ruedas. Esta saturación hace que el objetivo de velocidad no pueda ser conseguido en ningún momento.

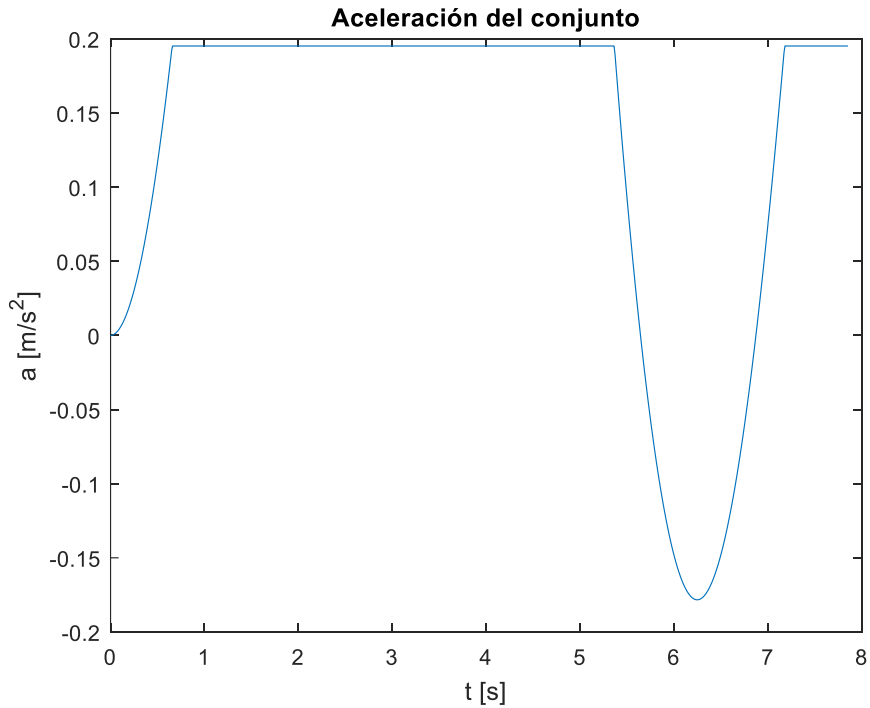


Figura 68: Aceleración del conjunto AGV + remolque con perfil de velocidad sinusoidal

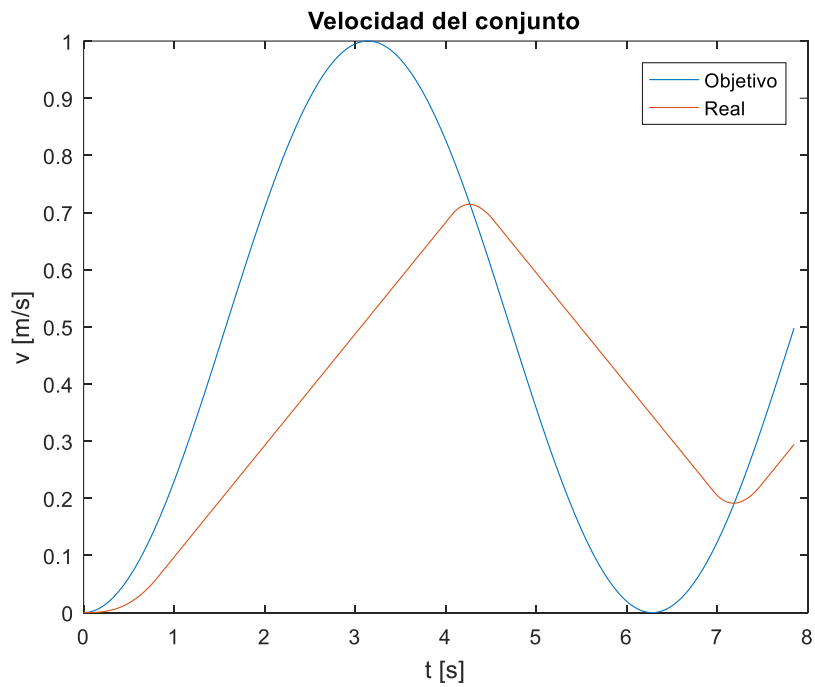


Figura 69: Velocidad del conjunto AGV + remolque con perfil de velocidad sinusoidal

### 5.6.2 Aceleración y frenado en curva con perfil de velocidad cuadrado

Como para el caso del cuerpo del AGV, se ha repetido la prueba utilizando el mismo arco de circunferencia pero con un perfil de velocidad cuadrado.

La Figura 70 muestra el ángulo  $\gamma$  en este caso. Se puede ver que la evolución en el tiempo es similar al caso anterior aunque en este caso no llega al régimen permanente. Esto se debe a que el periodo de la señal cuadrada de velocidad es inferior al necesario para que el remolque llegue a rotar hasta la posición de equilibrio.

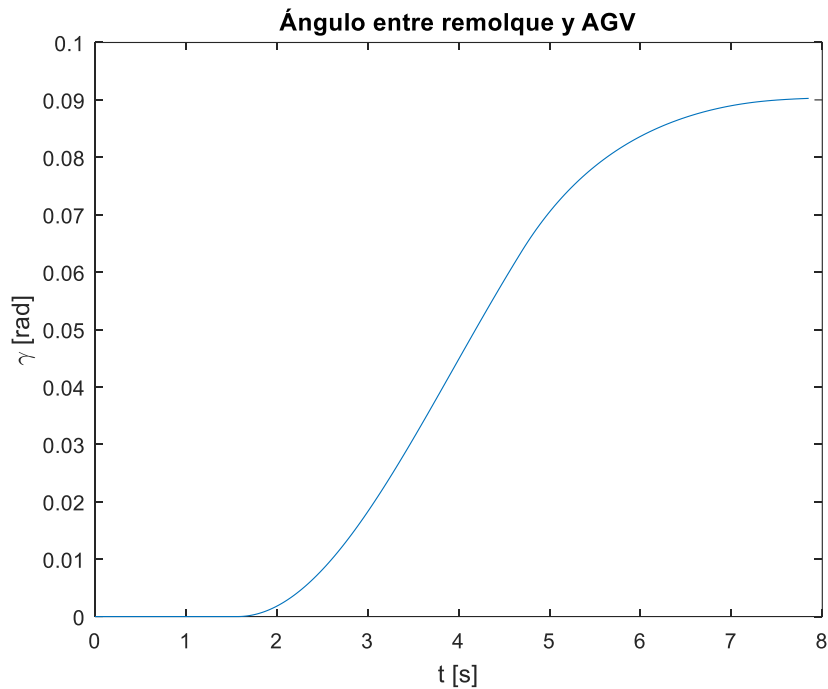


Figura 70: Ángulo entre remolque y AGV con perfil de velocidad cuadrado

Es interesante ver que la condición de no deslizamiento en este caso evita sobreoscilaciones de  $\gamma$  en las etapas de frenado, que sí se producen cuando se considera el deslizamiento. Esto se debe a que en caso de estar el remolque muy cargado respecto del AGV, la inercia al movimiento debe ser compensada casi enteramente por las ruedas traseras del AGV, lo que produce deslizamiento en los casos reales. En casos extremos es puede dar la situación de que el remolque se “cruce”, es decir, que  $\gamma$  llegue a valores mayores de  $90^\circ$ .

En la Figura 71 se ven las trayectorias seguidas por AGV y remolque. En este caso el conjunto ha podido recorrer menos distancia que en la prueba anterior.

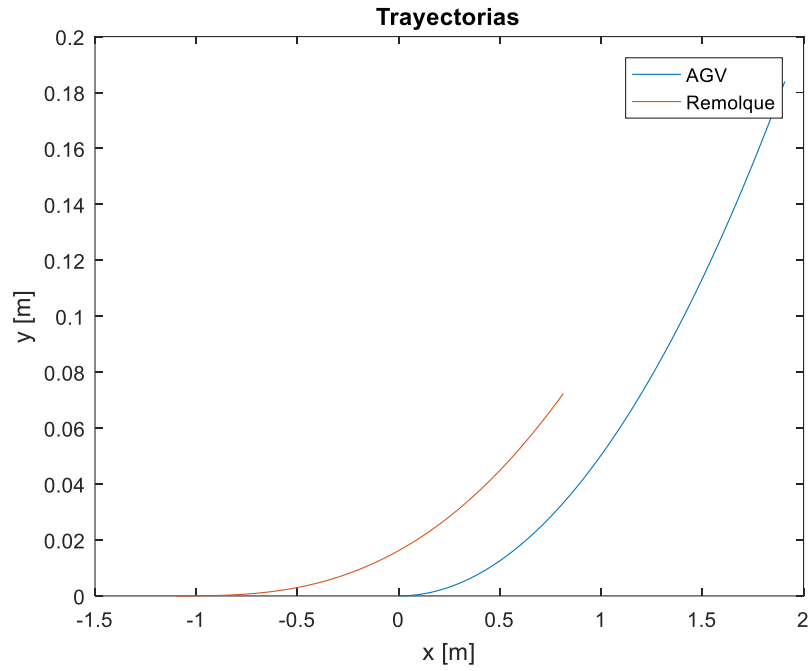


Figura 71: Trayectorias de AGV y remolque con perfil de velocidad cuadrado

La Figura 72 muestra la evolución del ángulo  $\beta$ . Se puede ver que se llega de forma casi instantánea al valor de régimen permanente cuando el AGV empieza a moverse. Una vez más no es necesario mucho par para rotar la unidad de tracción alrededor del CT.

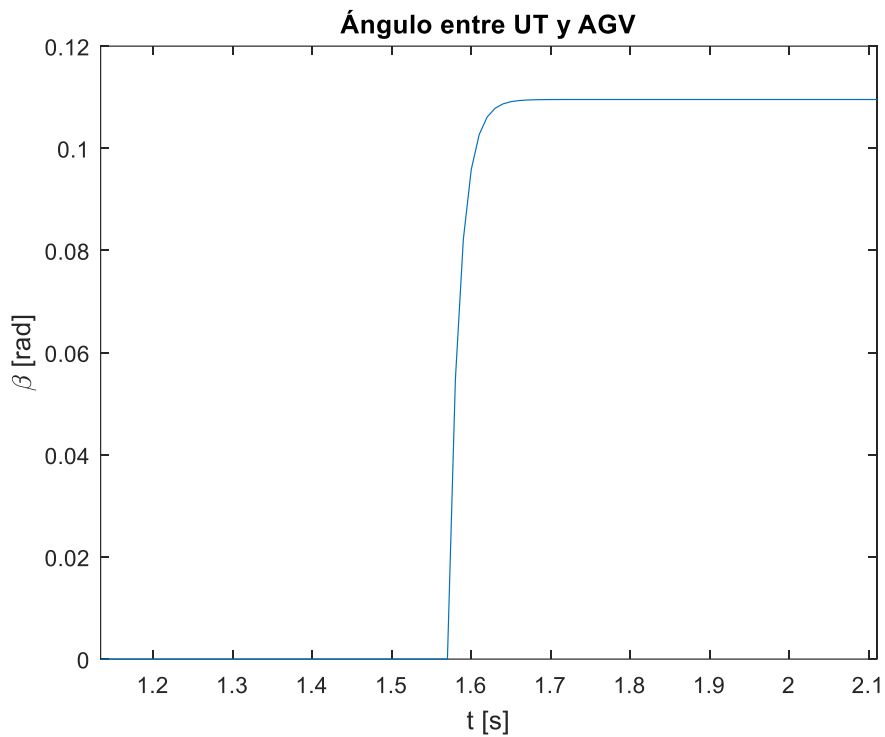


Figura 72: Ángulo entre UT y AGV con perfil de velocidad cuadrado

Las Figura 73 y Figura 74 representan la aceleración y velocidad experimentadas por el conjunto AGV + remolque durante la prueba. Como se mencionó anteriormente, los motores saturan el par que pueden entregar a las ruedas en todo momento. Sólo al final de la prueba, alrededor de los 7s, se puede observar una parte en la que la deceleración está más controlada.

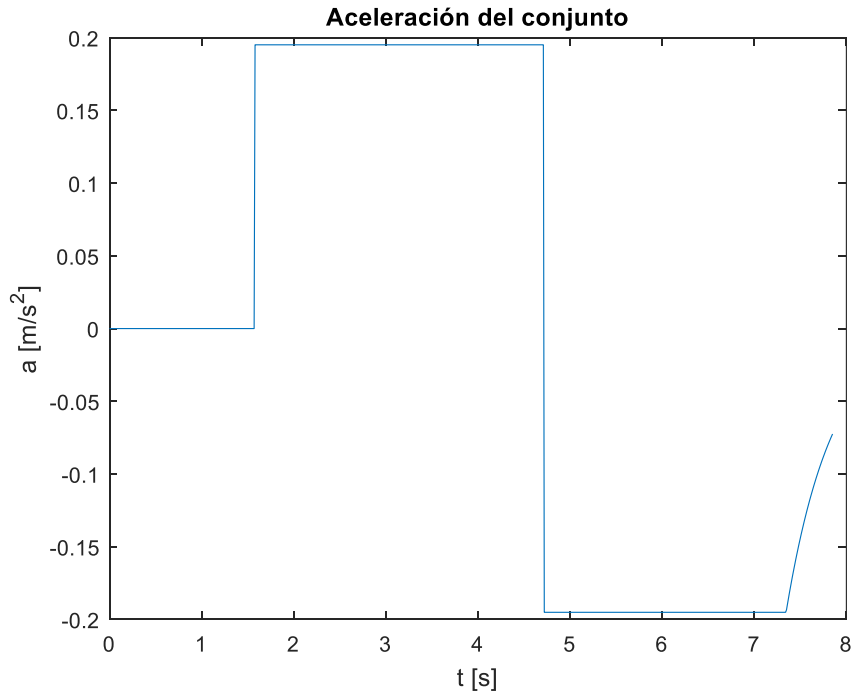


Figura 73: Aceleración del conjunto AGV + remolque con perfil de velocidad cuadrado

El perfil de velocidad es totalmente triangular y nunca llega a la referencia.

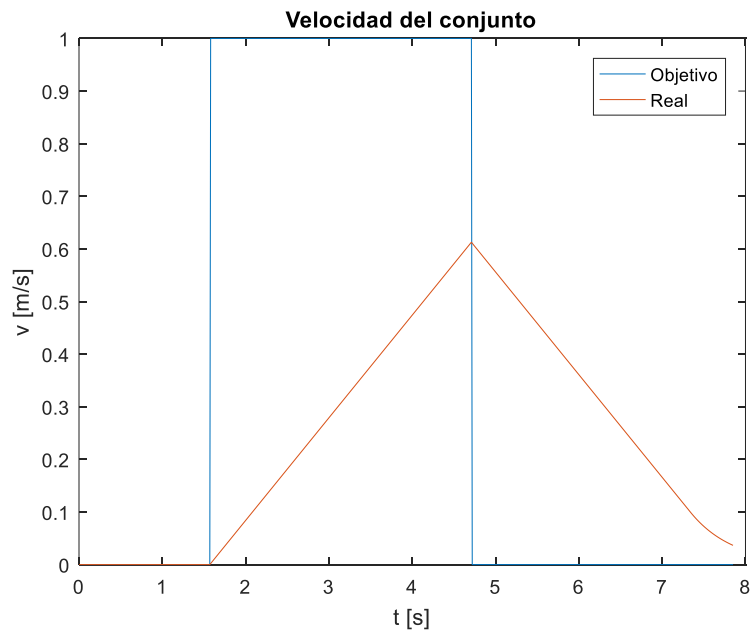


Figura 74: Velocidad del conjunto AGV + remolque con perfil de velocidad cuadrado

## 5.7 Control del modelo con interacción rueda-suelo

En este apartado se ha eliminado del modelo con remolque la condición de no deslizamiento lateral de las ruedas. En este caso no tiene interés la parte de aceleración y frenado, por lo que las pruebas se limitan a analizar las trayectorias.

### 5.7.1 Perfil de velocidad sinusoidal

La Figura 75 muestra los deslizamientos en cada uno de los puntos relevantes del conjunto AGV y remolque. Se puede observar que el punto que más desliza es el eje trasero del AGV, que contiene el CR y el centro del AGV. La aparente saturación en los deslizamientos se debe a la saturación en la aceleración del conjunto AGV + remolque. Se observa además que el punto con mayor deslizamiento es el eje trasero del remolque.

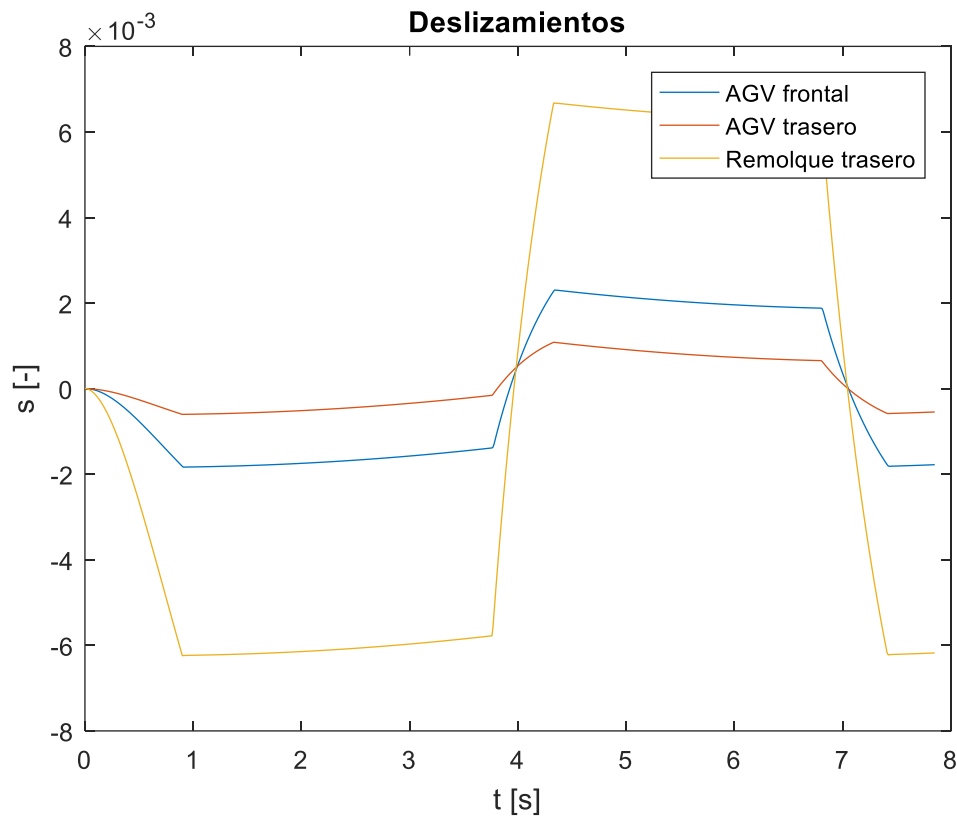


Figura 75: Deslizamientos con perfil de velocidad sinusoidal

La Figura 76 muestra las trayectorias del AGV y remolque. Las diferencias de deslizamientos observadas anteriormente se pueden ver en forma de pérdida de paralelismo entre ambas trayectorias en algunos puntos coincidentes con las zonas de no saturación de la aceleración.

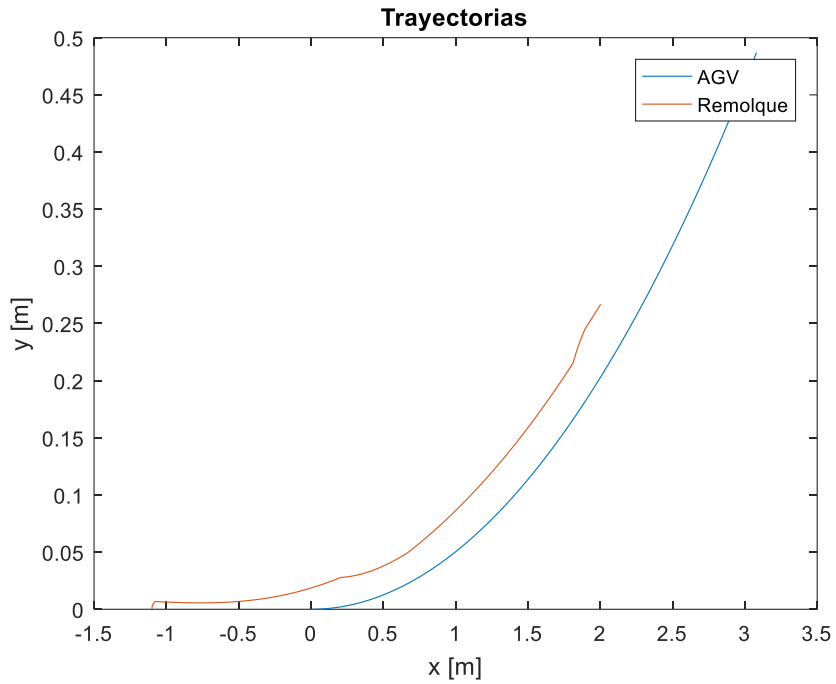


Figura 76: Trayectorias con perfil de velocidad sinusoidal y deslizamiento

La Figura 77 muestra el ángulo  $\beta$ . No parece tener ninguna particularidad ni diferencia respecto al caso sin deslizamiento salvo alguna oscilación en las zonas de no saturación de la aceleración.

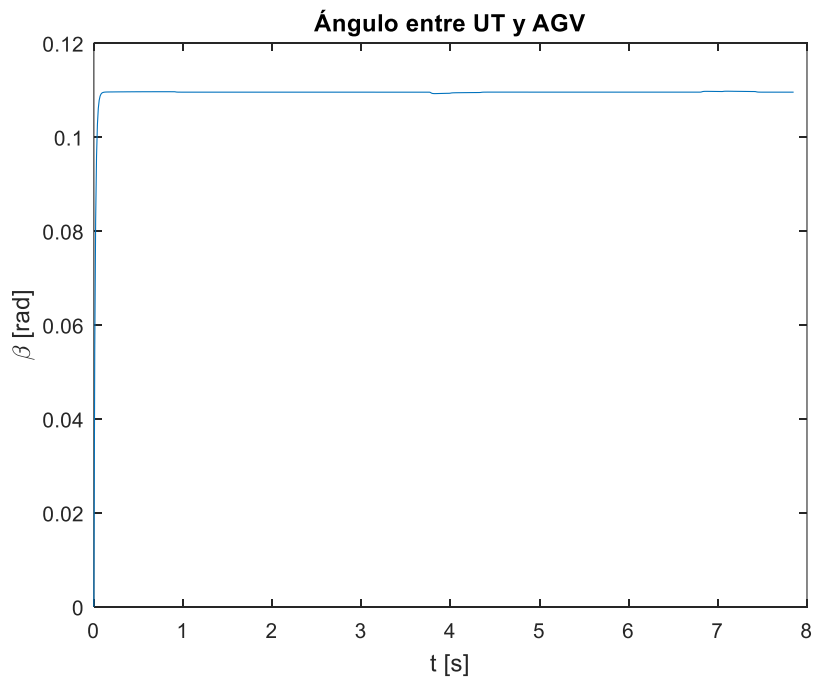


Figura 77: Ángulo entre UT y AGV con perfil de velocidad sinusoidal y deslizamiento

En la Figura 78 se puede observar en ángulo  $\gamma$  entre remolque y AGV. En este caso las zonas de no saturación se aprecian mejor que para el ángulo  $\beta$ , y se puede ver como una reducción de velocidad en el AGV provoca una reducción en el ángulo con el remolque.

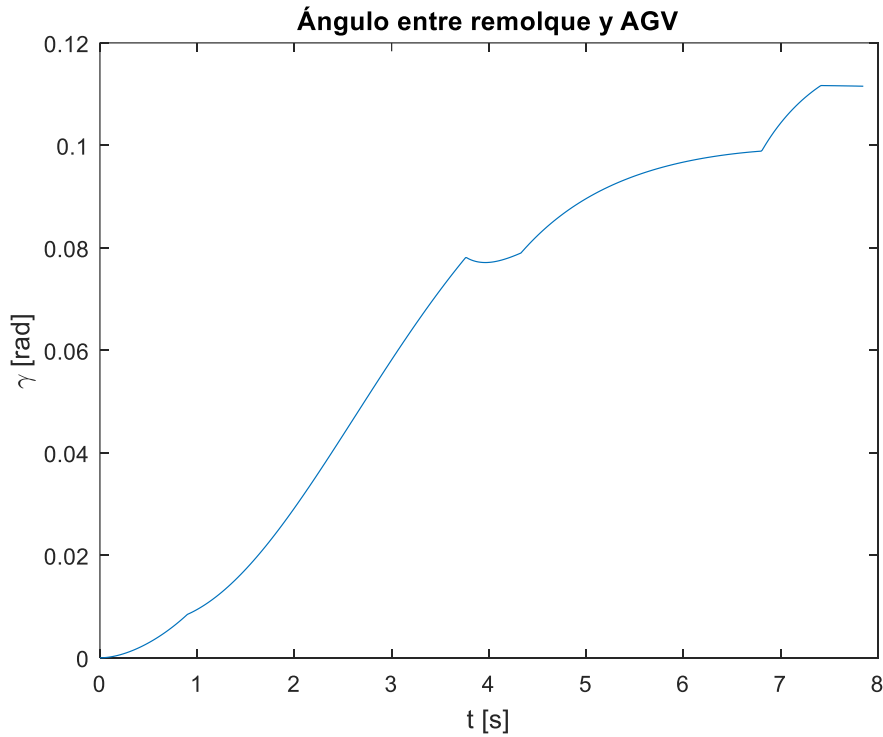


Figura 78: Ángulo entre AGV y remolque con perfil de velocidad sinusoidal y deslizamiento

### 5.7.2 Perfil de velocidad cuadrado

Como en los casos anteriores se ha hecho la misma prueba para el perfil de velocidad cuadrado. La Figura 79 muestra los deslizamientos en este caso. Se puede ver que la zona de no saturación es nula ya que los motores del AGV siempre están saturados.

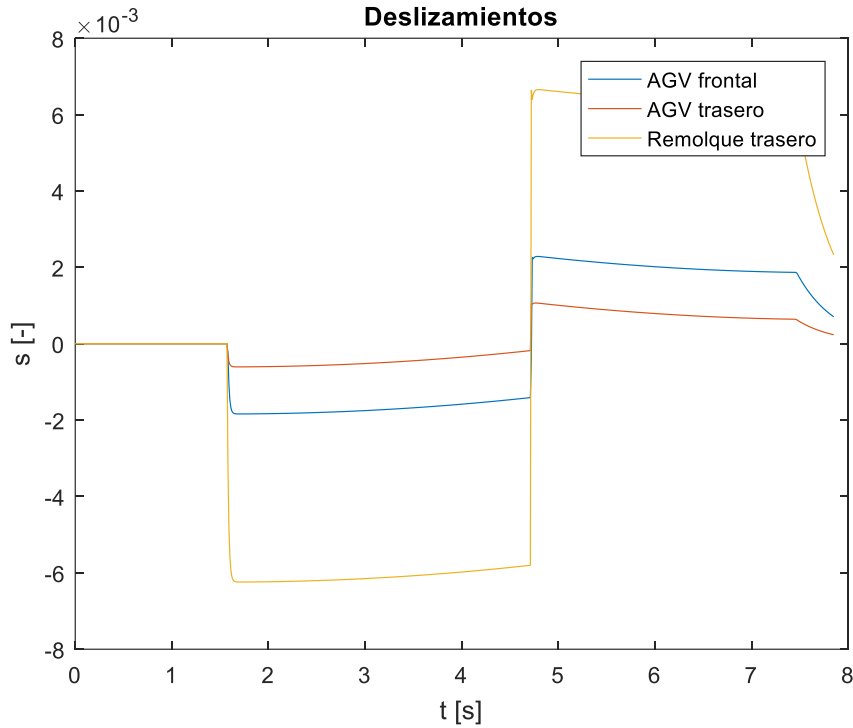


Figura 79: Deslizamientos con perfil de velocidad cuadrado

En la Figura 80 se puede ver el efecto de los deslizamientos anteriores en la trayectoria. Se producen “saltos” en la trayectoria debido a los cambios bruscos en el deslizamiento lateral de las ruedas. La razón de estos cambios bruscos es la inexistencia de un modelado de la dinámica de los motores eléctricos, lo que permite cambios bruscos de la aceleración.

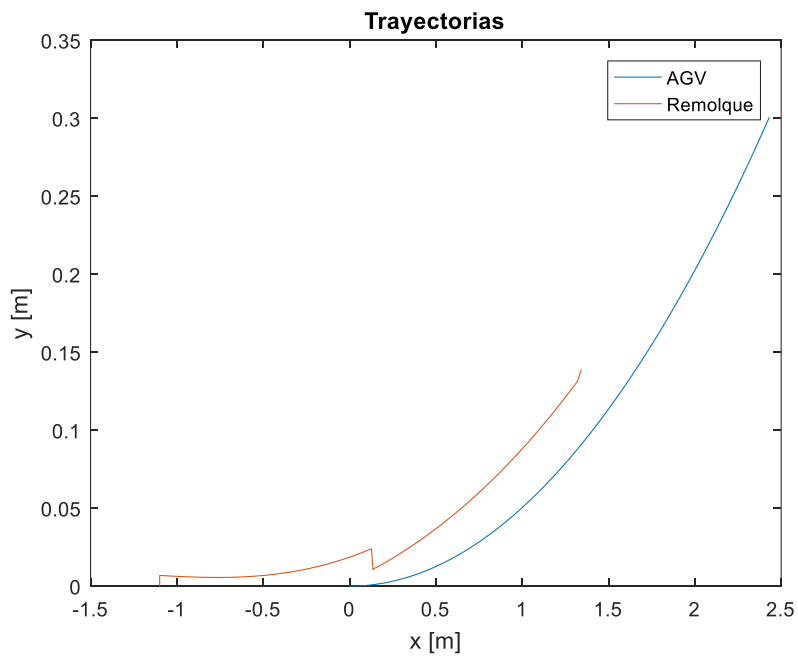


Figura 80: Trayectorias con perfil de velocidad cuadrado y deslizamiento

La Figura 81 muestra la evolución del ángulo  $\beta$ . Se puede ver un pico al entrar en la fase de frenado debido al cambio brusco de velocidad.

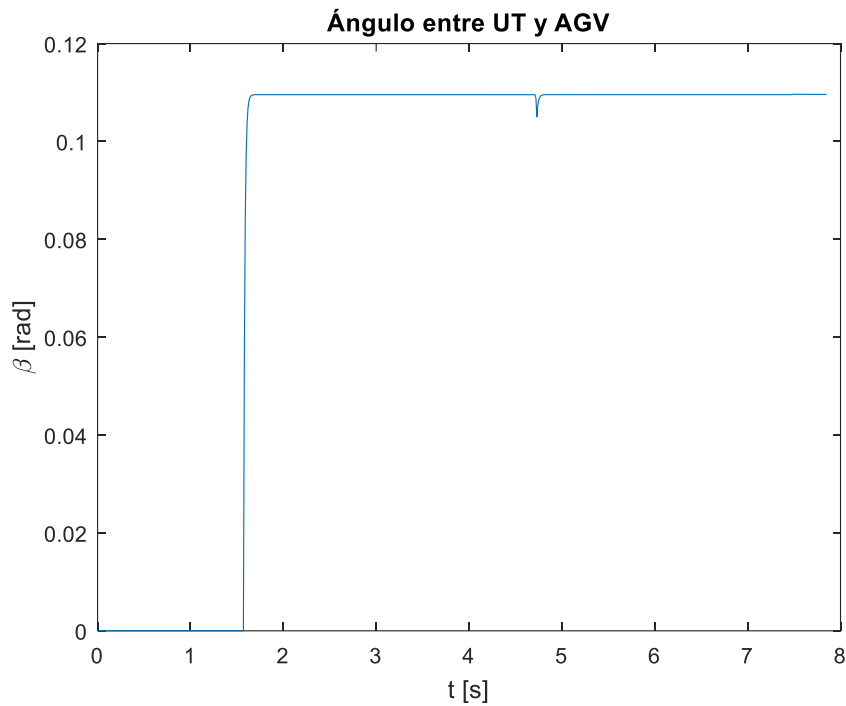


Figura 81: Ángulo entre UT y AGV con perfil de velocidad cuadrado y deslizamiento

En la Figura 82 se puede observar el ángulo  $\gamma$ . Al igual que en el apartado anterior, se producen cambios bruscos al cambiar la aceleración del AGV.

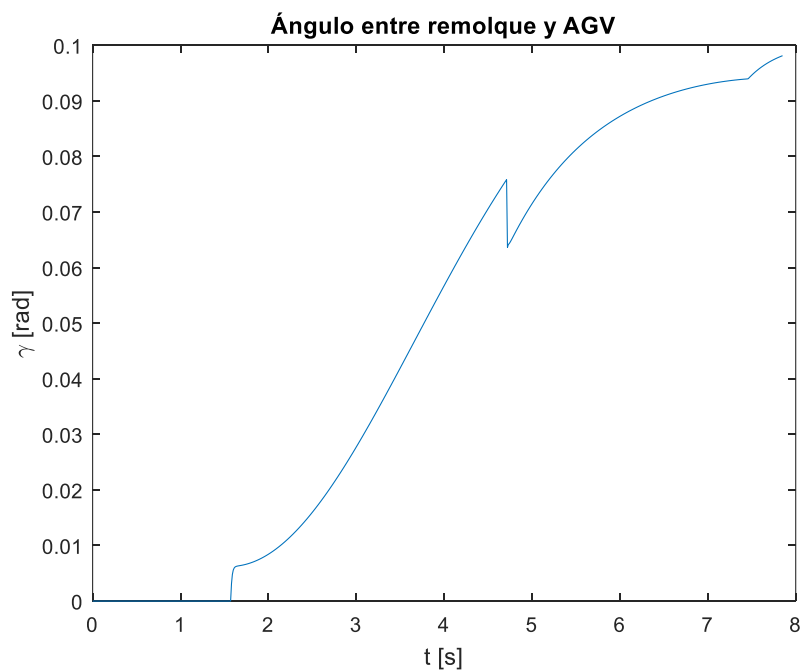


Figura 82: Ángulo entre remolque y AGV con perfil de velocidad cuadrado y deslizamiento

## 5.8 Comparativa entre los 3 casos anteriores

En este apartado se van a comparar los resultados en curva de los 3 casos anteriores para cada perfil de velocidad.

### 5.8.1 Perfil de velocidad sinusoidal

La Figura 83 muestra las trayectorias seguidas por el cuerpo del AGV en los casos: sin remolque (azul), con remolque (rojo), y con remolque incluyendo el modelado de las ruedas (amarillo). Se puede comprobar que las trayectorias no difieren mucho, aunque el caso sin remolque consigue recorrer más curva para el mismo tiempo de simulación, ya que la masa a desplazar es menor.

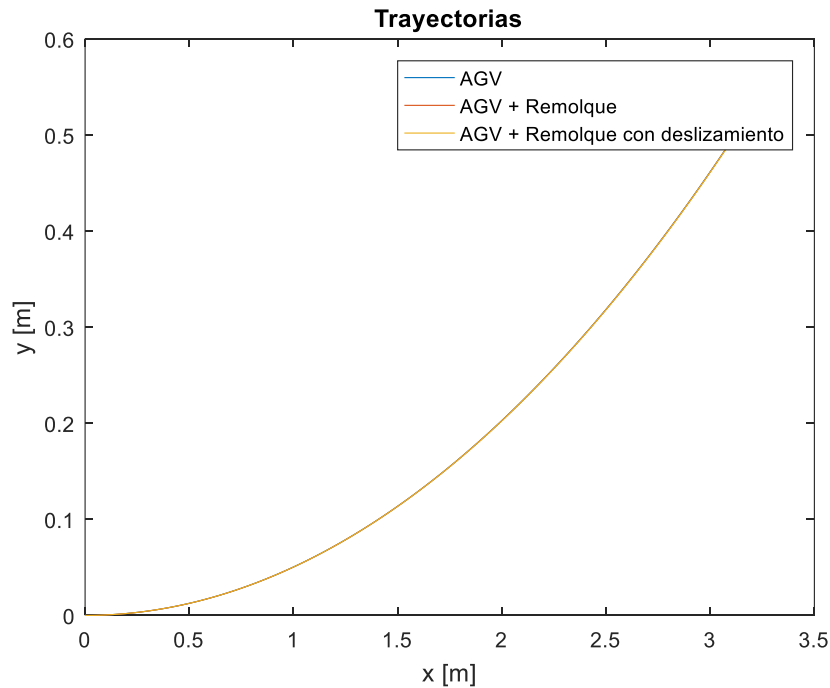


Figura 83: Comparación de trayectorias en el modelo dinámico

En la Figura 84 se ha representado una ampliación de la Figura 83 con el fin de apreciar más claramente las diferencias entre las trayectorias. Se puede comprobar que la adición de un remolque provoca que el controlador no sea capaz de seguir perfectamente la trayectoria y que el AGV describa una curva algo mayor que la de la referencia. Al incluir el modelado de las ruedas esta curva se abre aún más.

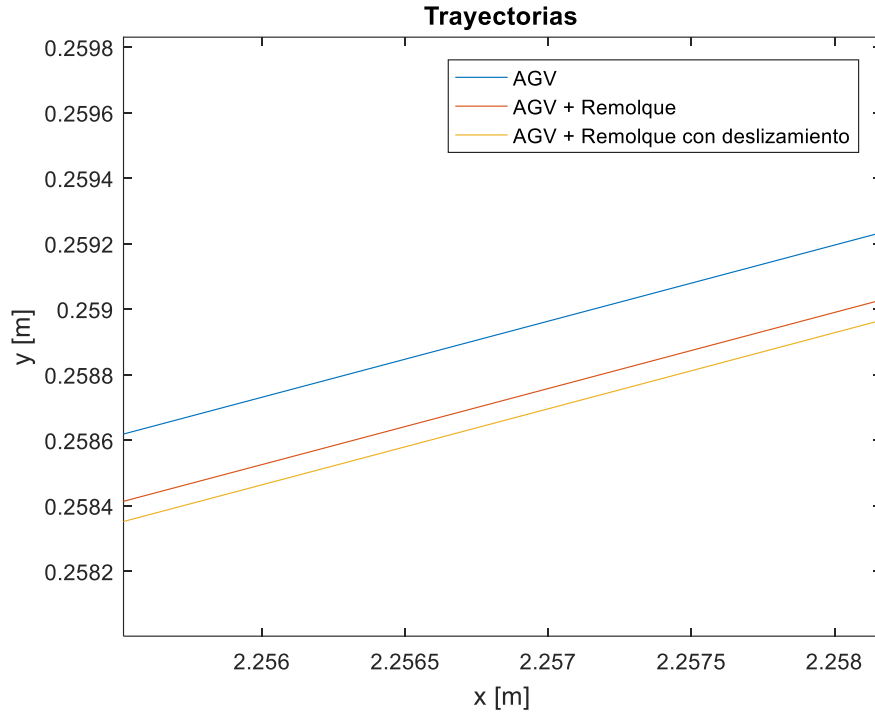


Figura 84: Comparación de trayectorias en el modelo dinámico (zoom)

La Figura 85 representa las velocidades en el eje x para cada caso. Se puede ver que en los casos con remolque el motor está saturado debido a la mayor masa que debe transportar y, por tanto, la referencia de velocidad no se puede seguir.

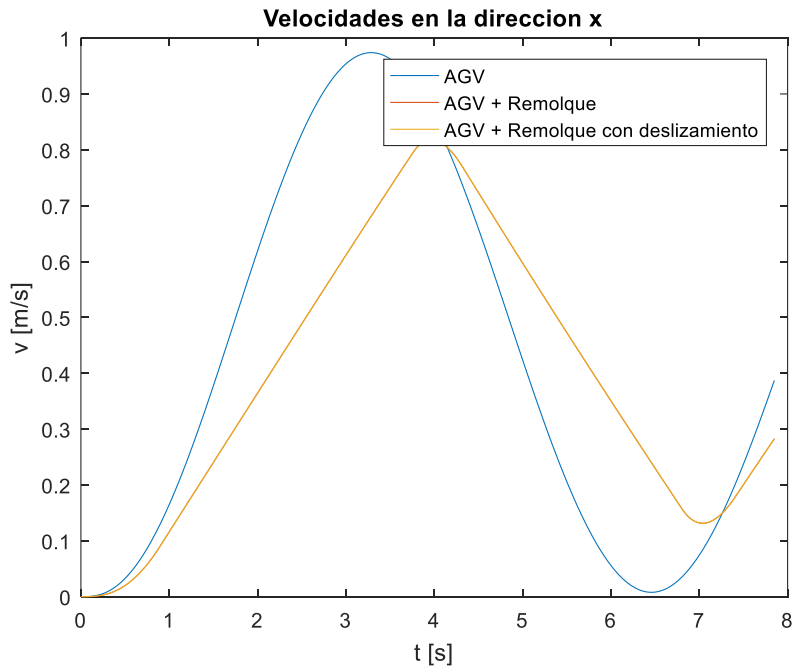


Figura 85: Comparación de velocidades en x en el modelo dinámico

La Figura 86 muestra las velocidades en el eje y. La Figura 87 es una ampliación de la Figura 86 en la que se puede apreciar como la inclusión del modelo de interacción de la rueda y el suelo provoca que la velocidad se retrase respecto al caso de rodadura perfecta.

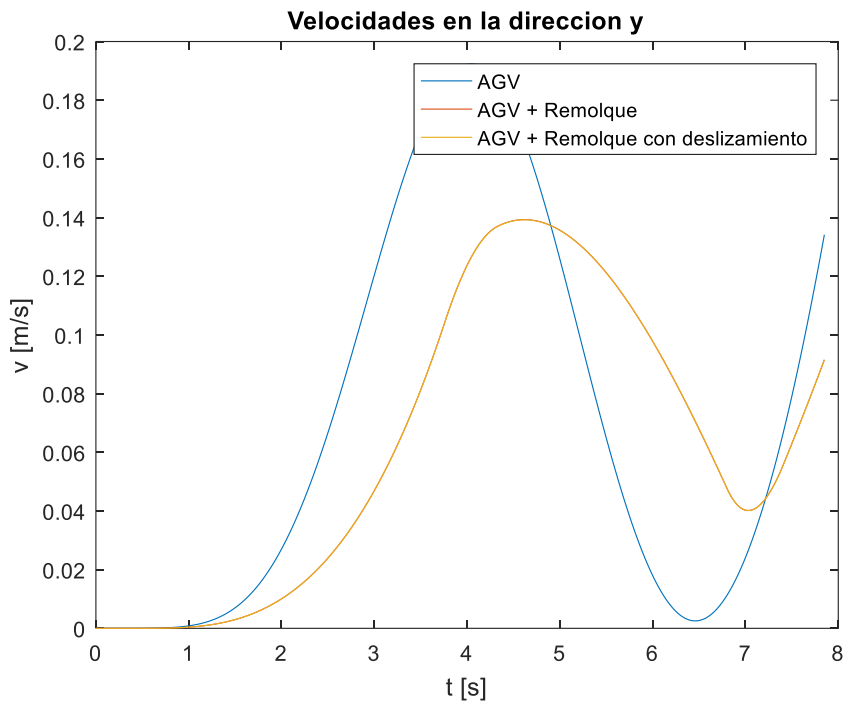


Figura 86: Comparación de velocidades en y en el modelo dinámico

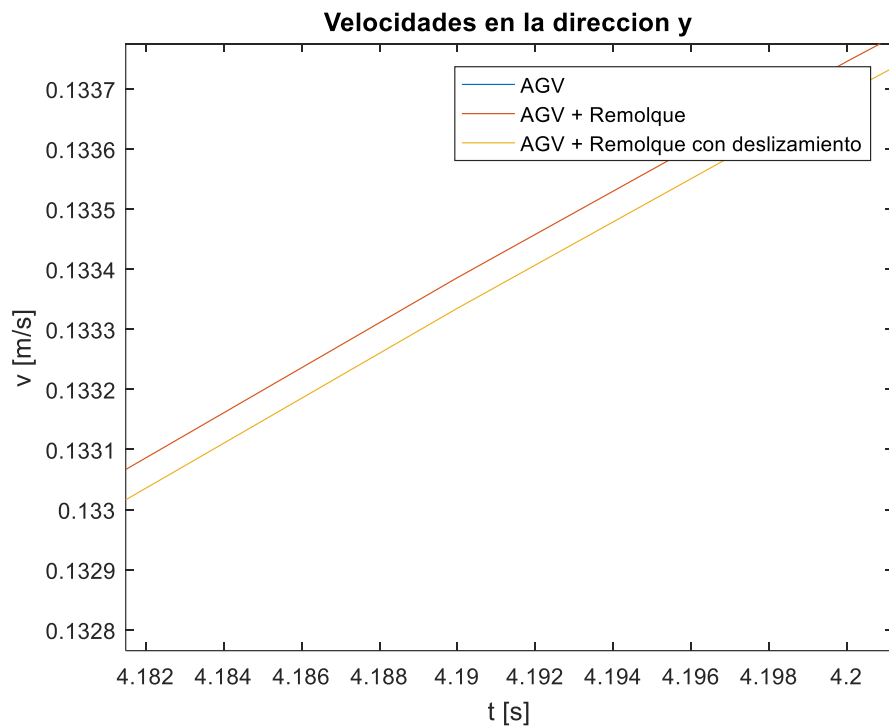


Figura 87: Comparación de velocidades en y en el modelo dinámico (zoom)

### 5.8.2 Perfil de velocidad cuadrado

La Figura 88 representa las trayectorias seguidas por el AGV para los 3 casos planteados anteriormente con un perfil de velocidad cuadrado. Se comprueba una vez más que el AGV sin remolque consigue recorrer más distancia que en los otros casos.

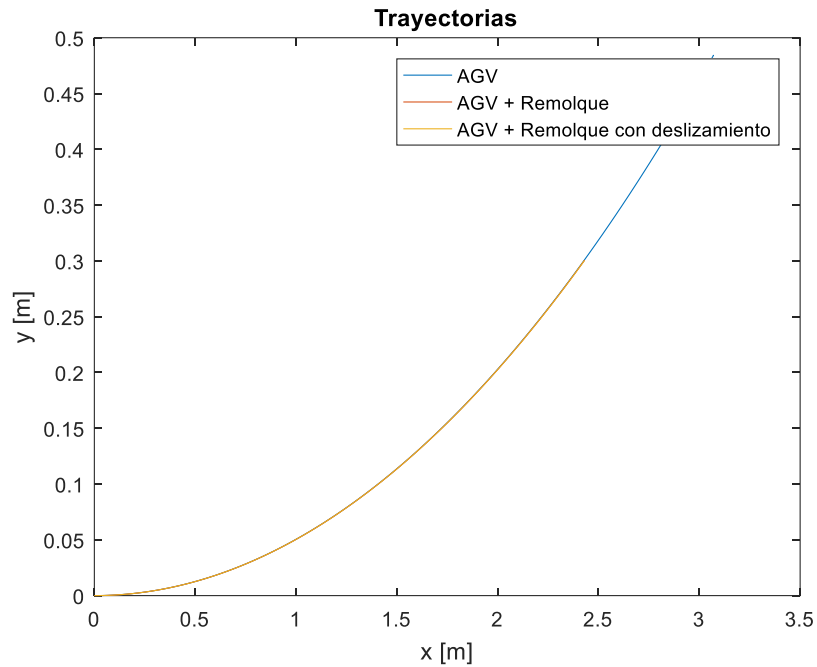


Figura 88: Comparación de trayectorias con el modelo dinámico y perfil de velocidad cuadrado

La Figura 89 muestra una parte de la Figura 88 ampliada para apreciar mejor las diferencias entre trayectorias. Como en el caso de perfil sinusoidal, se puede ver que la adición del remolque provoca que se abra la curva trazada por el AGV. El modelo de deslizamiento de las ruedas tiene el mismo efecto de aumentar el radio de la curva descrita.

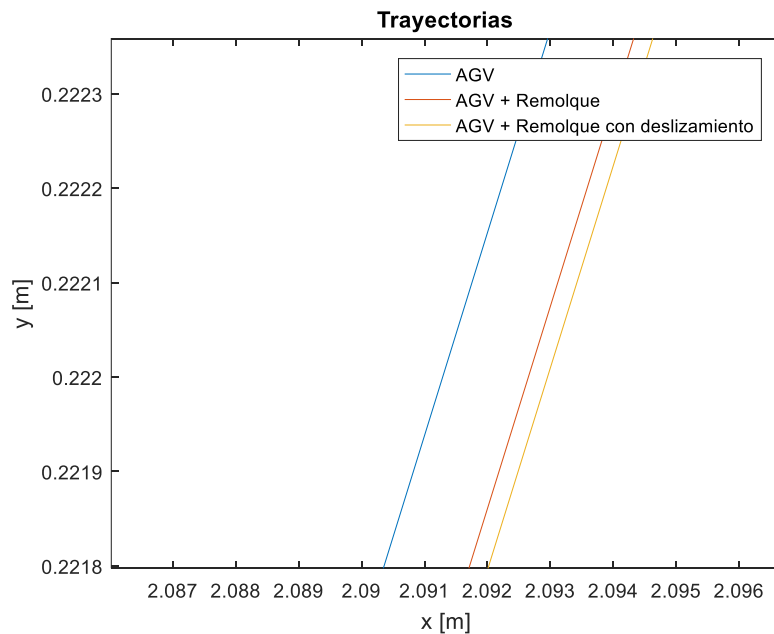


Figura 89: Zoom de trayectorias con el modelo dinámico y perfil de velocidad cuadrado

En la Figura 90 se ve de forma clara la saturación del par de los motores que se produce al añadir la masa extra del remolque. En el caso de sólo el AGV, el controlador es capaz de llegar a la velocidad objetivo, aunque el par también está saturado en los primeros tramos de aceleración. Al añadir el remolque el par satura en todo el rango de operación durante la simulación.

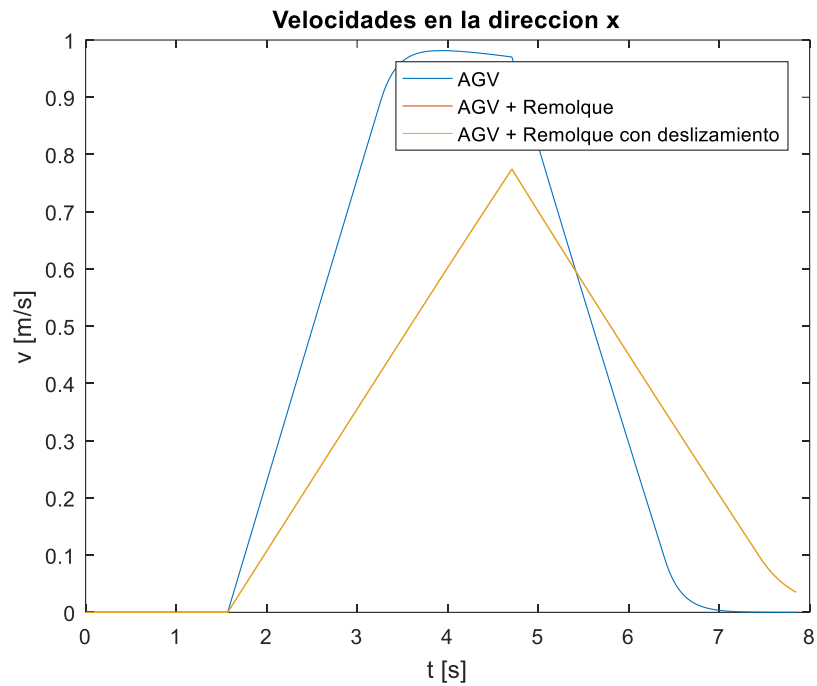


Figura 90: Comparación de velocidades en  $x$  con el modelo dinámico y perfil de velocidad cuadrado

La Figura 91 y la Figura 92 muestran la comparación de la velocidad en el eje  $y$  durante la prueba. Al igual que sucedía para el caso de perfil de velocidad sinusoidal, el deslizamiento de las ruedas provoca que la velocidad se retrase respecto del caso de rodadura perfecta.

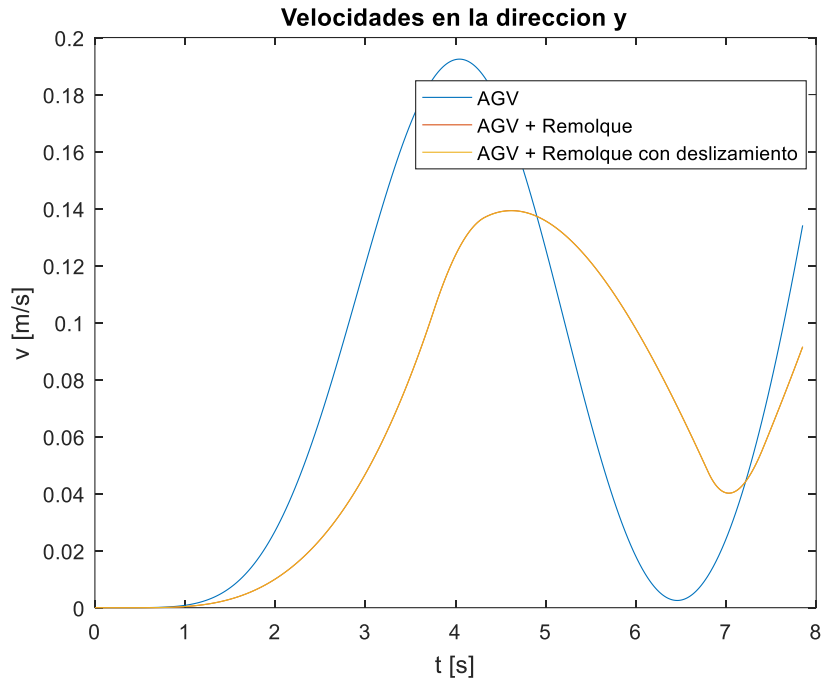


Figura 91: Comparación de velocidades en y con modelo dinámico y perfil de velocidad cuadrado

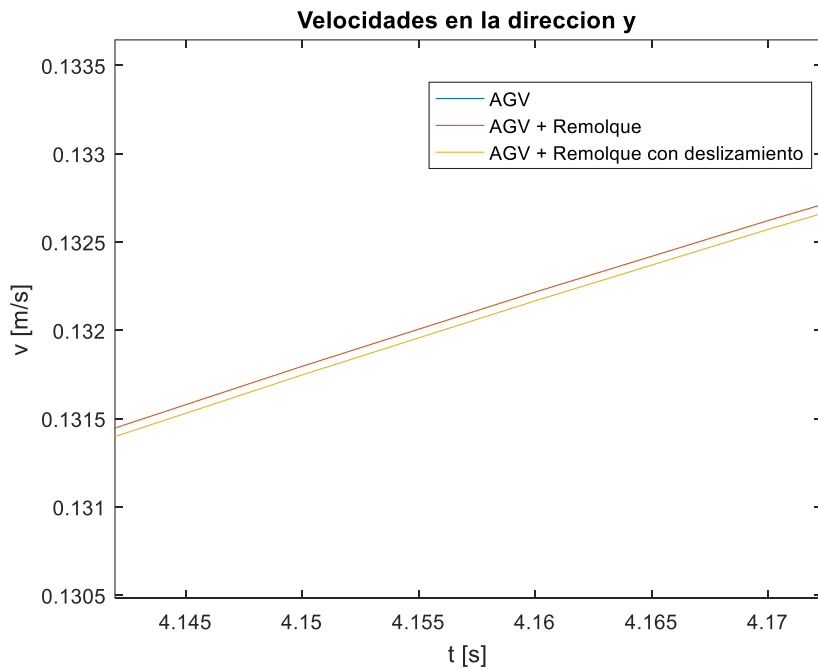


Figura 92: Comparación de velocidades en y en el modelo dinámico con perfil de velocidad cuadrado (zoom)



## 6. CAPÍTULO 6

### Conclusiones y trabajos futuros

#### 6.1 Conclusiones

### Conclusiones y trabajos futuros

#### 6.2 Conclusiones

En este proyecto se ha desarrollado e implementado un modelo de un AGV comercial. Se ha tomado como referencia el AGV comercial Easybot Std 410 de la empresa ASTI Mobile Robotics.

Se ha desarrollado un modelo dinámico de este AGV, que es un vehículo complejo ya que es un sistema híbrido triciclo-diferencial. Se ha empleado el método de Euler-Newton para obtener las ecuaciones que describen su comportamiento dinámico.

Se ha partido de un modelo cinemático que se ha obtenido combinando los modelos existentes en la literatura. Después se ha desarrollado el modelo dinámico a partir de las ecuaciones de la dinámica traslacional y rotacional. Se han combinado los dos, y este modelo se ha ido extendiendo añadiendo secuencialmente elementos más complejos como remolques o el efecto de la interacción de la rueda con la superficie de rodadura, con el objetivo de obtener resultados cada vez más cercanos al comportamiento real del AGV.

Para validar el modelo se ha implementado un control PID y se han realizado experimentos con diferentes trayectorias, comprobando el efecto del remolque, la interacción rueda suelo y los límites de operación del AGV.

Los resultados obtenidos mediante simulaciones han permitido validar los modelos y comprobar su buen funcionamiento.

La aportación presentada en este TFM es novedosa e interesante. La importancia y utilidad de estos modelos orientados al control radica fundamentalmente en dos puntos:

Diseño de sistemas de control más avanzados que permitan un funcionamiento más eficiente y seguro de estos vehículos.

Exploración de los límites de operación del AGV sin necesidad de utilizar el robot y someterlo a deterioro.

Dada la relevancia de los AGV en la industria a día de hoy, cualquier desarrollo en esta línea tiene gran interés por su aplicación práctica.

#### 6.3 Líneas futuras

Se proponen como trabajos futuros incorporar otros elementos del AGV que afectan al modelo dinámico, como los siguientes.

##### 6.3.1 Correlación del modelo con un AGV real

Todo este trabajo está basado en desarrollo de modelos teóricos en base a características técnicas bien proporcionadas por el fabricante, bien inferidas a partir de folletos. Como paso siguiente sería interesante poder sensorizar un AGV real y comparar los valores obtenidos en simulación con los valores reales medidos. Este trabajo tendría un beneficio doble:

1. Comprobar los modelos desarrollados y ajustar correctamente los parámetros no fácilmente medibles, como la interacción de las ruedas con el suelo.

2. Identificar partes del AGV que no han sido modeladas en su totalidad o el modelo actual es bastante demasiado simplista. Esto pasaría por ejemplo con las dinámicas del motor acoplado a las ruedas.

### 6.3.2 Modelado de la parte eléctrica

Se podrían considerar las características eléctricas de los motores en el modelo. Esto podría tener las siguientes implicaciones:

- Los motores eléctricos están limitados en corriente por diversos factores (desmagnetización del hierro, calentamiento excesivo, etc.), lo que limita el par que pueden desarrollar y por tanto las aceleraciones máximas del vehículo. Al no disponer de este modelo, no se pueden saber con exactitud los límites de par aplicables a las ruedas. Estas limitaciones no son constantes sino que varían en función de las condiciones de operación, velocidad de la máquina, etc.
- No hay modelado del consumo de energía del AGV y, por tanto, no se puede optimizar esta variable, lo que sería deseable.

A su vez, el AGV dispone de una batería cuya corriente máxima limitada por distintos factores, lo que restringe tanto la máxima corriente de los motores que se puede obtener como el par máximo aplicable a los motores.

### 6.3.3 Modelo con desplazamiento de la carga

Si las cargas no están bien sujetas sobre el AGV, las aceleraciones experimentadas durante el movimiento pueden desplazarlas. Esto afecta a la posición del centro de masas en cada instante y por lo tanto a la maniobrabilidad y la capacidad de seguir la trayectoria.

Para modelar estos efectos se necesitaría definir el centro de masas de cada bulto transportado y aplicar un modelo de Euler-Newton. Además se debería conocer o estimar los distintos coeficientes de rozamiento existentes entre bultos.

Esta extensión, aunque laboriosa, es sencilla desde el punto de vista de la implementación ya que utiliza el mismo procedimiento descrito en este trabajo para el desarrollo de los modelos.

### 6.3.4 Modelo con resistencias dinámicas

En él se podrían considerar e incluir las resistencias que afectan al AGV parado y en movimiento, como por ejemplo:

1. Resistencia a la rodadura.
2. Resistencia de la transmisión del AGV.
3. Resistencia aerodinámica (despreciable).
4. Rozamiento estático rueda-suelo. Esto hace que el par requerido para arrancar el AGV desde reposo sea diferente al necesario para acelerarlo una vez se está moviendo.

## Bibliografía

- [1] Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (1972). Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. Washington, D.C.: U.S. Dept. of Commerce, National Bureau of Standards.
- [2] Aparicio Izquierdo, F., Vera Alvarez, C., & Díaz López, V. (1995). Teoría de los vehículos automóviles. Madrid. Universidad Politécnica de Madrid.
- [3] ASTI MOBILE ROBOTICS, S. (2020). ASTI - Mobile Robotics. Astimobilerobotics.com. Retrieved 12 July 2020, from <https://www.astimobilerobotics.com/>.
- [4] Baffet, G., Charara, A., & Lechner, D. (2009). Estimation of vehicle sideslip, tire force and wheel cornering stiffness. *Control Engineering Practice*, 17(11), 1255-1264.
- [5] Bi, Z. M., Lang, S. Y., & Wang, L. (2008). Improved control and simulation models of a tricycle collaborative robot. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 19(6), 715-722.
- [6] Bonilla, I., Reyes, F., & Mendoza, M. (2005). Modelling and simulation of a wheeled mobile robot in configuration classical tricycle. In WSEAS (World Scientific and Engineering Academy and Society). 5th WSEAS International Conference on Instrumentation, Measurement, Control, Circuits and Systems. Cancún, México.
- [7] Dubins, L. (1957). On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents. *American Journal of Mathematics*, 79(3), 497-516. doi:10.2307/2372560
- [8] Han, K., Choi, M., & Choi, S. B. (2018). Estimation of the tire cornering stiffness as a road surface classification indicator using understeering characteristics. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 67(8), 6851-6860.
- [9] Han, Y., Cheng, Y., & Xu, G. (2019). Trajectory tracking control of AGV based on sliding mode control with the improved reaching law. *IEEE Access*, 7, 20748-20755.
- [10] Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1970). Física teórica. Mecánica (Vol. 1). Reverte.
- [11] Mora, J. F. (2008). Máquinas eléctricas (Vol. 5). McGraw-Hill.
- [12] Ogata, K., & Yang, Y. (2002). Modern control engineering (Vol. 4). India: Prentice hall.
- [13] Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., & Vetterling, W. T. (1989). Numerical recipes.
- [14] Ružinskas, A., & Sivilevičius, H. (2017). Magic formula tyre model application for a tyre-ice interaction. *Procedia Eng*, 187, 335-341.
- [15] Saha, S. K., & Angeles, J. (1991). Dynamics of nonholonomic mechanical systems using a natural orthogonal complement.
- [16] Sierra, J. E., & Santos, M. (2018). Modelling engineering systems using analytical and neural techniques: Hybridization. *Neurocomputing*, 271, 70-83.
- [17] Sierra, J.E. (2019) Industrial AGV holistic modelling approach, Proceedings of 10th Congress of the Federation of European Simulation Societies, EUROSIM 2019.
- [18] Smieszek, M., Dobrzanska, M., & Dobrzanski, P. (2019). The impact of load on the wheel rolling radius and slip in a small mobile platform. *Autonomous Robots*, 43(8), 2095-2109.
- [19] Suárez, J. I., Vinagre, B. M., Gutiérrez, F., Naranjo, J. E., & Chen, Y. Q. (2004, July). Dynamics models of an AGV Based on Experimental Results. In Proc. of the 5th IFAC Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles.
- [20] Veiga, J., Sousa, J., Machado, J., Mendonça, J., Machado, T., & Silva, P. (2019, April). Modeling of Dynamic Behavior of AGV systems. In 2019 6th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT) (pp. 1307-1312). IEEE.
- [21] Villagra, J., & Herrero-Pérez, D. (2011). A comparison of control techniques for robust docking maneuvers of an AGV. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 20(4), 1116-1123.

- [22] Yun, D. U. (2016). Kinematics and Dynamic Modeling and Simulation Analysis of Three-wheeled Mobile Robot. DEStech Transactions on Engineering and Technology Research, (mdm).
- [23] Zheng, X. L., Zhang, H., Ren, Y. Y., Wei, Z. H., & Song, X. G. (2017). Rollover stability analysis of tank vehicles based on the solution of liquid sloshing in partially filled tanks. Advances in Mechanical Engineering, 9(6), 1687814017703894.

### Lista de siglas y acrónimos

AGV	Automated Ground Vehicle
CAGV	Centro del AGV
CT	Centro de tracción
CR	Centro de remolque
CM	Centro de masas
CIR	Centro instantáneo de rotación



### Anexo 1: Método de la bisectriz para el cálculo del punto de corte de dos curvas.

El siguiente código Matlab calcula el punto de corte de una curva y una recta mediante el método de la bisectriz (Press, 1989).

```
function [x,y]=BuscarCorteCurvaRectaBis(x1,y1,xr,yr)
```

```
    if length(x1)==1 || length(y1)==1
        x=x1;
        y=y1;
        return
    end
    if diff(xr)==0
        % intercambiar x por y
        xaux=xr;
        xr=yr;
        yr=xaux;
        xaux=x1;
        x1=y1;
        y1=xaux;
        bint=1;
    else
        bint=0;
    end
    xx(1)=xr(1);
    xx(2)=xr(2);
    t1=1:length(x1);

    if isempty(find(abs(x1-xx(1))<0.01,1,'first'))
        if max(x1)<xx(1)
            tt(1)=find(x1==max(x1),1);
            xx(1)=max(x1);
        elseif min(x1)>xx(1)
            tt(1)=find(x1==min(x1),1);
            xx(1)=min(x1);
        end
    else
        tt(1)=find(abs(x1-xx(1))<0.01,1,'first');
    end
end
```

```

if isempty(find(abs(x1-xx(2))<0.01,1,'first'))
    if max(x1)<xx(2)
        tt(2)=find(x1==max(x1),1,'last');
        xx(2)=max(x1);
    elseif min(x1)>xx(2)
        tt(2)=find(x1==min(x1),1,'last');
        xx(2)=min(x1);
    end
else
    tt(2)=find(abs(x1-xx(2))<0.01,1,'first');
end

yy(1)=interp1(t1,y1,tt(1),'linear','extrap');
yy(2)=interp1(t1,y1,tt(2),'linear','extrap');
% parametros recta
m=diff(yr)/diff(xr);
b=yr(1)-m*xr(1);

fx(1)=yy(1)-m*xx(1)-b;
fx(2)=yy(2)-m*xx(2)-b;

for k = 3: 20
    xx(k)=(xx(k-1)+xx(k-2))/2;
    if isempty(find(abs(x1-xx(k))<0.01,1,'first'))
        tt(k)=tt(k-1);
    else
        tt(k)=find(abs(x1-xx(k))<0.01,1,'first');
    end
    yy(k)=interp1(t1,y1,tt(k),'linear','extrap');
    % calcular funcion
    fx(k)=yy(k)-m*xx(k)-b;
    % comprobar solucion
    if abs(fx(k))<1e-2 || tt(k)==tt(k-1)
        break;
    end
    %determinar siguiente punto

```

```
if fx(k)>0 && fx(k-1)>0
    xx(k-1)=xx(k-2);
    fx(k-1)=fx(k-2);
elseif fx(k)<0 && fx(k-1)<0
    xx(k-1)=xx(k-2);
    fx(k-1)=fx(k-2);
end
end
if bint==0
    x = xx(k);
    y = yy(k);
else
    y = xx(k);
    x = yy(k);
end
end
```



## Anexo 2: Cálculo del momento de inercia. Teorema de Steiner.

Dado un cuerpo de masa continua y un eje arbitrario, el momento de inercia del mismo se define como:

$$I = \int_0^M r^2 dm = \int_0^V \rho r^2 dV \quad (96)$$

Donde  $r$  es la distancia al eje respecto del cual se quiere calcular el momento de inercia. Para una placa rectangular de masa  $M$  con lados  $a$  y  $b$ :

$$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2) \quad (97)$$

Y para una partícula de masa  $M$  a una distancia  $R$  del eje de rotación:

$$I = MR^2 \quad (98)$$

El teorema de Steiner (Landau, 1970) permite conocer el momento de inercia respecto de un eje paralelo al eje que pasa por el centro de masa:

$$I = I_{CM} + MR^2 \quad (99)$$

Donde  $R$  es la distancia entre los ejes.



### Anexo 3: Código para modelar el sensor de posición

```
function pos=SensorPosicion(xxAGV,yyAGV,XTray,theta,LSensor)
    xAGV=[xxAGV-LSensor/2*cos(pi/2+theta) xxAGV+LSensor/2*cos(pi/2+theta)];
    yAGV=[yyAGV-LSensor/2*sin(pi/2+theta) yyAGV+LSensor/2*sin(pi/2+theta)];
    idxX=(XTray(1,:)>min(xAGV) & XTray(1,:)<max(xAGV));
    idxY=(XTray(2,:)>min(yAGV) & XTray(2,:)<max(yAGV));
    % comprobar que no se esta entre 2 puntos
    if ~any(idxX) && any(idxY)
        if max(XTray(1,find(idxY)))>=max(xAGV) & min(XTray(1,find(idxY)))<=min(xAGV)
            idxX=abs(XTray(1,find(idxY))-min(xAGV))<0.01 & abs(XTray(1,find(idxY))-max(xAGV))<0.01;
        end
    elseif ~any(idxY) && any(idxX)
        if max(XTray(2,find(idxX)))>=max(yAGV) & min(XTray(2,find(idxX)))<=min(yAGV)
            idxY=abs(XTray(2,find(idxX))-min(yAGV))<0.01 & abs(XTray(2,find(idxX))-max(yAGV))<0.01;
        end
    end
    idx=idxX&idxY;
    pos=-999;
    if any(idx)
        [xc,yc]=BuscarCorteCurvaRectaBis(XTray(1,idx),XTray(2,idx),xAGV,yAGV);
        pos=sqrt((xxAGV(1)-xc(1))^2+(yyAGV(1)-yc(1))^2);
        if theta>-pi/2 && theta<pi/2
            pos=pos*sign(yc(1)-yyAGV(1));
        elseif theta<-pi/2 || theta>pi/2
            pos=pos*-sign(yc(1)-yyAGV(1));
        end
    else
        pos=-999;
    end
end
```



#### Anexo 4: Modelo de bicicleta aplicado a un AGV

En una primera aproximación, se ha utilizado el modelo dinámico definido para automóviles, derivado a partir de la reducción al modelo de la bicicleta del modelo de dirección de Ackermann (Guiggiani, 2014).

Este modelo asume:

- El centro de gravedad de la carga se sitúa sobre el eje de simetría del AGV, por lo tanto el peso sobre las ruedas derechas es igual que sobre las ruedas izquierdas.
- El centro de gravedad se desplaza a lo largo del eje de simetría, pudiendo cambiar el peso del eje delantero al trasero.

La Figura 93 muestra esquemáticamente este modelo (Aparicio, 1995):

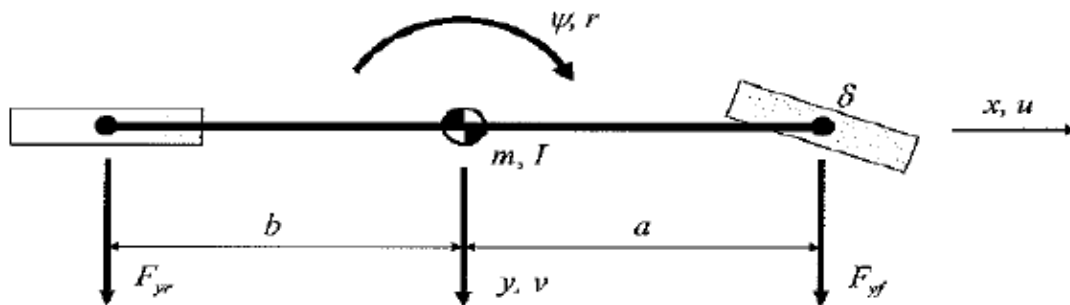


Figura 93: Modelo de bicicleta

Desarrollando las ecuaciones del modelo representado en la Figura 4, se llega al siguiente modelo matricial:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_f + C_r}{u} & \frac{mu + aC_f - bC_r}{u} \\ \frac{aC_f - bC_r}{u} & \frac{a^2C_f + b^2C_r}{u} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_f \\ aC_f \end{bmatrix} \{\delta\} \quad (100)$$

Donde:

m	Masa del AGV y la carga [kg]
I	Inercia a giro del AGV
$C_f, C_r$	Rigidez de deriva de los ejes delantero y trasero respectivamente
a	Distancia del centro de gravedad al eje delantero
b	Distancia del centro de gravedad al eje trasero
u	Velocidad longitudinal del AGV
v	Velocidad lateral del AGV [m/s]
r	Velocidad de rotación del AGV [rad/s]
$\delta$	Ángulo de la rueda directriz

### Estacionario

Para el caso en que el AGV describe una curva en estado estacionario, es decir, la aceleración lateral es nula ( $\dot{v} = 0$ ;  $\dot{r} = 0$ ), el modelo anterior se puede simplificar quedando:

$$\begin{bmatrix} \frac{C_f + C_r}{u} & mu + \frac{aC_f - bC_r}{u} \\ \frac{aC_f - bC_r}{u} & \frac{a^2C_f + b^2C_r}{u} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_f \\ aC_f \end{bmatrix} \{\delta\} \quad (101)$$

Resolviendo sale:

$$\frac{r}{\delta} = \frac{uLC_fC_r}{L^2C_fC_r + mu^2(bC_r - aC_f)} \quad (102)$$

Esta relación se conoce como ganancia de curvatura. Para este trabajo se define la ganancia de curvatura normalizada como:

$$K_n = \frac{r}{\delta} B$$

Donde B es la batalla (distancia entre ejes) del AGV. Este valor es la relación entre el ángulo de giro real y el teórico determinado por el modelo cinemático.

Por lo tanto existen 3 casos en función del valor de  $K = (bC_r - aC_f)$ . A esta relación se la llama margen de estabilidad.

- $K = 0$  – la trayectoria que sigue el AGV es la misma que para el modelo puramente cinemático.
- $K > 0$  – el AGV tiende a girar “menos” que en el modelo cinemático. Esta condición se conoce como subviraje y suele ser el caso preferido ya que siempre es estable.
- $K < 0$  – el vehículo gira “más” que la trayectoria esperada por el modelo cinemático. Esto se denomina sobreviraje y puede llevar a giros inestables o derrapes. En este caso existe una velocidad crítica a partir de la cual el AGV se inestabiliza.

Para las pruebas siguientes se han utilizado valores por defecto para  $C_f$  y  $C_r$  cogidos de un automóvil.

$$C_f = 65000 \text{ N/rad}$$

$$C_r = 65000 \text{ N/rad}$$

Se han variado los valores de a y b de la ecuación (102) para una masa constante de 1000kg transportada por el AGV. La idea es mostrar para distintas distribuciones de carga, velocidades y ángulos de giro el valor real de la trayectoria seguida por el AGV respecto del modelo cinemático. Para ello se calcula la ganancia de curvatura en distintos puntos de distribución de la carga para cada velocidad u (Figura 94):

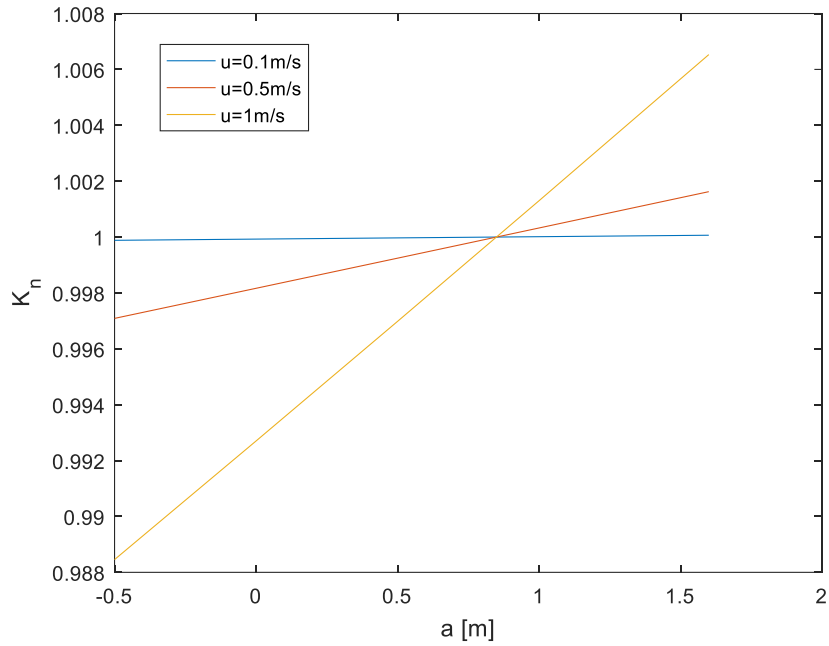


Figura 94: Comportamiento en curva frente a posición del centro de masas

Se puede ver que a medida que se desplaza el centro de masas el AGV cambia de sobrevirador a subvirador. Estos efectos se hacen más notables a medida que aumenta la velocidad. Para visibilizar estos efectos sobre una trayectoria real se cogen los valores extremos para  $K_n$ . Los resultados se pueden ver en la Figura 95:

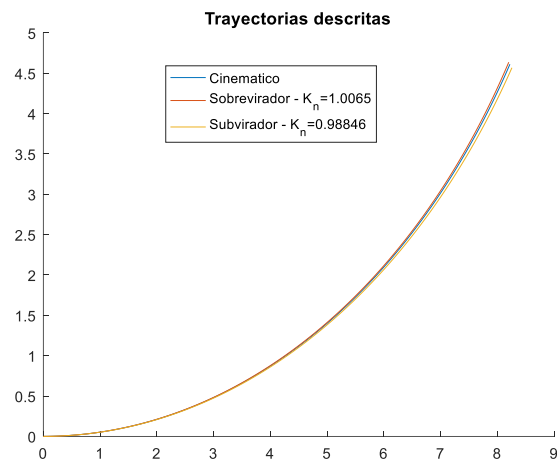


Figura 95: Trayectorias

El error en el radio de la curva descrita se puede ver a continuación. En ninguno de los casos se da la condición de parada del AGV (el sensor de posición se sale de la banda magnética), si bien es cierto que de continuar el test podría darse esta situación (Figura 96).

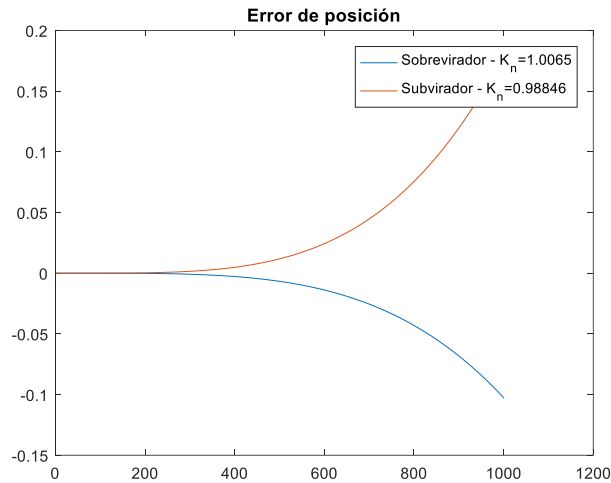


Figura 96: Error de posición

Como los valores de las rigideces de deriva no son conocidos, se va a tratar de establecer límites para los cuales se puede garantizar la estabilidad del AGV. Para ello buscamos los valores de  $C_f$  y  $C_r$  para los que el denominador de la ganancia de curvatura se hace 0. Utilizamos las siguientes hipótesis:

- Ambas rigideces son iguales.  $C_f = C_r = C$ .
- El centro de masas está en la parte trasera del AGV:  $a=L$ ;  $b=0$ .
- La velocidad del AGV es la máxima de diseño  $u=1\text{m/s}$ .
- La carga portada es de 1000kg.

Operando se obtiene:

$$C = \frac{mu^2}{L^2}(L - 0) = \frac{mu^2}{L} \approx 590\text{N/rad}$$

### Transitorio

El análisis de la ecuación anterior para comportamientos transitorios se utiliza principalmente para la respuesta a perturbaciones. Operando se llega a las siguientes expresiones para el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia natural del sistema:

$$\zeta = \frac{(C_f + C_r)I + (a^2C_f + b^2C_r)m}{2\sqrt{Im(C_fC_rL^2 + (bC_r - aC_f)mu^2)}}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\frac{C_fC_rL^2}{u^2} + (bC_r - aC_f)m}{Im}}$$

De la expresión para el coeficiente de amortiguamiento se deduce que pueden existir situaciones en las que la raíz del denominador sea negativa y por tanto no exista amortiguamiento, siendo el sistema inestable.

### Observaciones:

Los parámetros  $C_f$  y  $C_r$  no suelen ser conocidos a priori y pueden cambiar. La literatura ofrece múltiples opciones para calcular estos parámetros en tiempo real o a partir de datos experimentales.