

MODELADO Y DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL PARA UNA BARRERA DE CONTENCIÓN FLEXIBLE

MÁSTER EN INGENIERÍA DE SISTEMAS Y CONTROL



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

Trabajo fin de Master en Ingeniería de Sistemas y Control

Septiembre 2015

Estudiante: Guy Eric Gapingsi Modjo

Directora: Dra. Matilde Santos Peñas

MODELADO Y DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL
PARA UNA BARRERA DE CONTENCIÓN FLEXIBLE

MÁSTER EN INGENIERÍA DE SISTEMAS Y CONTROL

Trabajo fin de Master en Ingeniería de Sistemas y Control

Septiembre 2015

Estudiante: Guy Eric Gapingsi Modjo

Directora: Dra. Matilde Santos Peñas

Autorización

Autorizamos a la Universidad Complutense y a la UNED a difundir y utilizar con fines académicos, no comerciales y mencionando expresamente a sus autores, tanto la memoria de este Trabajo Fin de Máster, como el código, la documentación y/o el prototipo desarrollado.

Firmado:

A handwritten signature in blue ink, consisting of a stylized 'G' followed by a long horizontal line.

Guy Eric Gapingsi Modjo

Agradecimiento

Tras la finalización de este proyecto, quisiera dejar constancia de mis agradecimientos a todas aquellas personas que de una manera u otra participaron en su realización.

Primeramente, quisiera reconocer mi profunda gratitud a Matilde Santos Peñas, mi directora, por su tiempo, colaboración y dirección; los cuales han sido imprescindibles para el desarrollo de este trabajo.

Por otro lado, agradecer a Rebecca Kwakye Yeboah por su apoyo, estímulo y comprensión a lo largo de la realización de esta memoria, sin olvidar, por supuesto, las críticas constructivas y el gran soporte brindados por todos mis amigos.

Como último, pero no menos importante, con profundo cariño, quisiera dar las gracias a mis padres, Michel Modjo y Veronique, quienes a pesar de las dificultades, me enseñaron el valor de la perseverancia y del trabajo duro.

Resumen de la memoria

Las barreras de contención son una de las herramientas más utilizadas en el mundo marítimo, sobre todo cuando ocurre un accidente en el que algún tipo de contaminante se encuentra flotando en la superficie del agua. En este proyecto fin de Master tratamos de establecer un modelo matemático para una barrera de contención flexible. Para una simplificación del sistema, adoptamos una aproximación casi-estática en la que se supone que las fuerzas inerciales son despreciables comparadas con las fuerzas de arrastre aplicadas a la barrera. Luego, diseñamos un sistema de control para el control de la forma de la barrera. Para ello, fijamos como objetivo de control el cálculo de las velocidades de las dos extremidades de la barrera, que permiten que ésta tenga una forma dada.

La simulación del sistema ha permitido analizar el comportamiento de la barrera y los resultados del sistema de control implementado son satisfactorios.

Palabras claves: Barrera de contención, Control inteligente, Modelado y simulación, Vehículos marinos autónomos (USV), Sistema de control

Índice

Agradecimientos	IX
Resumen de la memoria	XI
1. Introducción	1
1.1 Motivaciones.....	1
1.2 Objetivos del trabajo.....	2
1.3 Estructura de la memoria	3
2. Estado del arte	5
2.1 Modelos de barreras de contención.....	5
2.2 Control de barreras de contención.....	9
3. Modelado de la barrera de contención	11
3.1 Descripción de la barrera de contención flexible.....	11
3.2 Dinámica de la barrera.....	12
3.3 Consideraciones	15
3.4 Resultados de las simulaciones.....	20
4. Diseño de controladores	27
4.1 Estrategia de control.....	27
4.2 Diseños de control.....	29
4.3 Simulaciones de los controladores.....	33
5. Conclusiones y Perspectivas	39
5.1 Conclusiones.....	39
5.2 Perspectivas	40
Bibliografía	41
Anexo	

Listas de Figuras

1.1 Arrastre automático de una mancha de contaminante utilizando dos barcos y una barrera de contención flexible.....	2
2.1 Barrera de contención flexible arrastrada por dos barcos.....	5
2.2 Clasificación de los tipos de barrera de contención según Oebius (1999).....	6
2.3 Esquema simplificado de la barrera de contención flexible.....	7
3.1 Un cilindro de la barrera de contención.....	11
3.2 Modelo dinámico discreto de la barrera.....	12
3.3 Resultados de las simulaciones para $\dot{P} = [0.8364 \ 0.5477 \ 0.8364 \ 0.5477]^T$	21
3.4 Resultados de las simulaciones para $\dot{P} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$	22
3.5 Resultados de las simulaciones para $\dot{P} = [1 \ 4.t \ 1 \ 4.t]^T$	23
3.6 Evolución de la forma de la barrera para $\dot{P} = [0.8364 \ 0.5477 \ 0.8364 \ 0.5477]^T$	24
4.1 Arquitectura general de un sistema de control centralizado.....	28
4.2 Forma inicial de la barrera.....	29
4.3 Forma final deseada de para la barrera.....	30
4.4 Diagrama Simulink del sistema completo.....	30
4.5 Diagrama simulink del Controlador.....	31
4.6 Diagrama simulink del modelo de la barrera.....	32
4.7 Evolución temporal de los ángulos.....	34
4.8 Evolución temporal de las velocidades.....	35
4.9 Evolución temporal de la forma de barrera.....	36
4.10 Trazas de las extremidades de la barrea.....	37
4.11 Etapas importantes en una operación de recogida de una mancha de contaminante en la superficie del mar.....	38

Lista de tablas

3.1	Script de comandos escritos en Mathematica para simplificar las ecuaciones.....	17
------------	---	----

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo describiremos las motivaciones principales de este proyecto. Presentaremos someramente trabajos realizados en el pasado que tienen relación directa con este proyecto y terminaremos detallando el plan adoptado a lo largo de esta memoria.

1.1 Motivaciones

En este proyecto fin de Master, nuestro objetivo es desarrollar un modelo matemático para una barrera de contención flexible y diseñar un sistema de control para el modelo obtenido. La idea de este trabajo ha sido motivada por la necesidad de recoger de manera eficiente fluidos contaminantes que flotan en la superficie del mar al ocurrir un accidente de barco o incidencias en una plataforma petrolífera marina, como el que ocurrió en el golfo de México en Abril 2010².

Este tipo de siniestro ocurrirá siempre que la sociedad dependa del petróleo y de sus productos derivados³. De hecho, los derrames de contaminantes han ocurrido en varios países tal y como viene reportado en ⁴. En el caso particular de España, el caso más reciente sucedió en Galicia en 2002 ⁵ tras el hundimiento de un tanque de gasolina.

Las consecuencias de este tipo de incidencia en el medio ambiente pueden ser muy desastrosas. Fue reportado en ⁶ que la contaminación de aguas marinas con productos derivados del petróleo afecta el ecosistema marino, causando la muerte de mamíferos marinos y de algunos pájaros.

Como respuesta a este fenómeno, varias técnicas de recogida han sido establecidas en los últimos años. Una lista no exhaustiva de estas técnicas incluye el uso de barreras de contención, barreras sorbentes ⁷ y dispersantes de petróleo ⁸.

En el caso particular de este proyecto fin de Master, nos interesaremos en el uso de una barrera de contención flexible junto con dos vehículos marinos autónomos (USV) para la recogida de manchas de contaminantes en la superficie del mar.

En el pasado, Joseba Menoyo y Matilde Santos, de la Facultad de Informática de la Universidad Complutense de Madrid, publicaron un artículo ⁹ en el que hicieron una descripción de un modelo del barco. En el mismo artículo, diseñaron el sistema de control utilizando varias técnicas. No

obstante, el modelo presentado en ⁹ fue establecido sin tener en cuenta el efecto que tendría la barrera de contención sobre la dinámica de los barcos.

En nuestro caso, vamos a completar el sistema con el modelo de una barrera de contención acoplada a los dos barcos, lo que modifica su dinámica.

1.2 Objetivos del trabajo

Suponemos el caso de la figura 1.1 en el que se utiliza una barrera de contención flexible (boom) y dos barcos autónomos (USV) para confinar una mancha de producto flotante ('Floating Spill') en la superficie del agua.

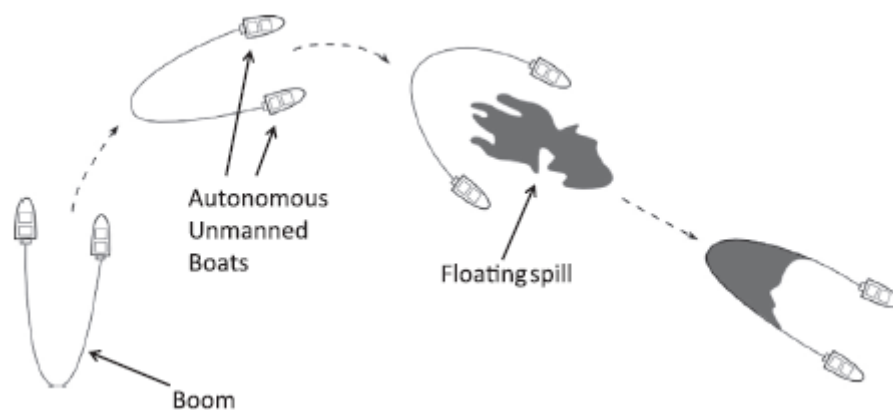


Figura 1.1 : Arrastre automático de una mancha de contaminante utilizando dos barcos y una barrera de contención flexible ¹⁰

El único conocimiento de la dinámica de los barcos no puede garantizar el éxito de la operación. Es necesario conocer también la dinámica de la barrera flexible para poder establecer una estrategia realista para la operación de recogida, ya que dicha dinámica influye de manera importante sobre la evolución de los barcos.

En este proyecto, nos enfocaremos en el estudio de la dinámica de la barrera de contención. Para ello, estableceremos un modelo matemático de ésta. Luego, simularemos dicho modelo para observar la evolución de la forma de la berrera. Por otro lado, dependiendo del tamaño de la mancha que queremos recoger hay que poder mantener la barrera de contención flexible en una configuración o forma adecuada. Para ello, diseñaremos un sistema que permita el control de la forma de la barrera de contención flexible.

1.3 Estructura de la Memoria

En este capítulo, se describe la idea general de este proyecto fin de Master.

En el capítulo 2 haremos una presentación del estado del arte sobre las barreras de contención y las estrategias de control empleadas.

El capítulo 3 estará reservado al desarrollo de un modelo matemático para la barrera de contención flexible. En este mismo capítulo, comentaremos los resultados obtenidos al simular el comportamiento de la barrera según el modelo obtenido.

En el capítulo 4, nos dedicaremos al diseño del sistema de control para el modelo obtenido en el capítulo 3.

Las conclusiones se presentan en el capítulo 5. Aprovecharemos también para describir algunas líneas interesantes para trabajos futuros.

Capítulo 2

Estado del arte

El objetivo de este trabajo es el de modelar una barrera de contención flexible y controlar su forma durante su movimiento en la superficie del mar. Uno de los problemas encontrados a la hora de identificar un sistema complejo como es una barrera de contención flexible, es el alto grado de acoplamiento que puede existir entre sus grados de libertad. En este capítulo empezaremos presentando algunos modelos de barreras de contención presentes en las bibliografías. Luego describiremos algunas técnicas de control de interés para este tipo de problema.

2.1- Modelos de barreras de contención

Las barreras de contención son uno de los equipos más utilizados cuando ocurre un derrame de contaminante en aguas marinas. En efecto, se emplean dichas barreras para confinar y arrastrar las manchas de contaminantes flotantes en la superficie del mar desde el lugar del siniestro a zonas más adecuadas para su recogida tal y como viene reflejado en la figura 2.1.



Figura 2.1: Barrera de contención flexible arrastrada por dos barcos ¹¹

En la figura anterior podemos remarcar que la barrera está enganchada a dos barcos que la arrastran al desplazarse.

Según Azin Amini , existen varias clasificaciones que permiten distinguir los diferentes tipos de barreras de contención ¹². En este sentido, Oebius (1999) ¹³, basándose en la manera con la que se despliega, hizo una clasificación de los tipos de barrera tal y como viene representada en la figura 2.2.

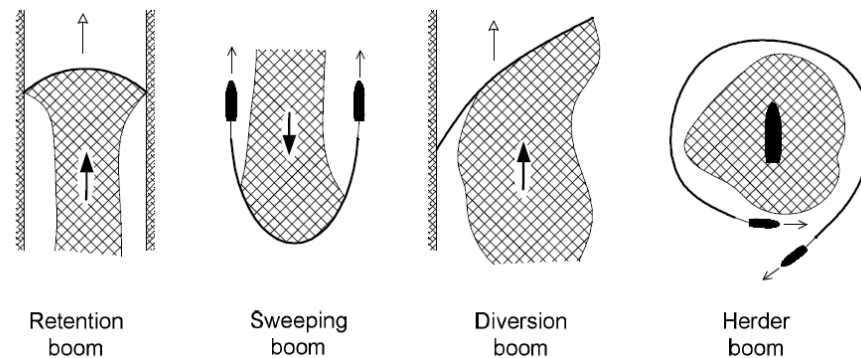


Figura 2.2 Clasificación de los tipos de barrera de contención ¹³

Otra clasificación muy utilizada para categorizar los tipos de barreras fue establecida en 2005 por el “Oil Spill Response Catalog” ¹² y ésta facilita la elección del tipo de barrera adecuado para un proyecto dado. De acuerdo con esta última clasificación, tenemos la lista (no exhaustiva) de tipos de barrera siguiente:

- El *fence boom* que presenta materiales rígidos o semi-rígidos como barrera vertical (se suele denominar barrera rígida)
- El *curtain boom* que cuenta con un calado flexible
- El *External tension boom*, que es ligeramente flexible y que está controlada por una brida externa.

En nuestro caso vamos a usar una barrera de contención flexible parecido al ‘sweeping boom’ de la figura 2.2 precedente. Para este tipo de barrera, es muy importante poder controlar su forma en función del tamaño de la mancha del contaminante que se quiere confinar. Por lo tanto, es necesario diseñar un modelo matemático para la simulación de la dinámica de dicha forma antes de proceder a experiencias reales. En este sentido, varios grupos de investigación se han interesado en los últimos años en el modelado y simulación de barreras de contención flexibles. Lo ideal sería utilizar barreras completamente flexibles; no obstante, esto supone que hay que modelizar un sistema con un número infinito de grados de libertad. Frente a esta

dificultad, se planteó en ¹⁴ el problema de modelización de una barrera de contención flexible de la forma siguiente:

- Se supuso una aproximación de la barrera flexible, formada por n segmentos rígidos de forma cilíndrica.
- Un segmento dado está unido al siguiente por un grado de libertad de rotación.

De este modo, el problema se reduce a la identificación de un sistema discreto con un número finito de grados de libertad como ilustra la figura 2.3

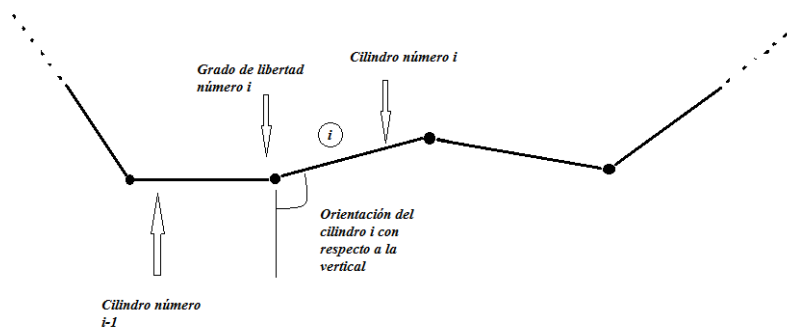


Figura 2.3: Esquema simplificado de la barrera de contención flexible.

De la misma manera que en el artículo anterior, en ¹⁵ se presenta un trabajo realizado sobre la modelización matemática de un sistema de navegación formado por una barrera de contención flexible y dos Vehículos Autónomos Marinos de Superficie (USV) empleando la técnica Null-Space-Based control. Para modelizar la barrera de contención flexible, se emplea la misma aproximación numérica que en ¹⁴. Se diseñó un sistema de control para el conjunto (USVs + Barrera de contención) mediante la técnica Null-Space-Based (NBS). Para ello, los autores plantearon tres reglas de navegación básicas:

- Durante la navegación, los dos USVs deberán mantener una cierta distancia de seguridad entre ellos.
- El centroide de la formación tiene que seguir una ruta predefinida.
- La línea pasando por los centros de gravedad de los dos USVs deberá ser perpendicular a la trayectoria seguida por ellos.

Otro trabajo interesante sobre la modelización de barreras de contención fue realizado en ¹⁶.

En este artículo, se consideró 3 tipos de barreras diferentes: una en forma de cable, otra en forma de membrana y la última en forma de cuerpos articulados.

En el caso de la barrera en forma de cable, se supuso una descomposición del cable (de la barrera) en elementos finitos. Luego, haciendo un inventario de todas las fuerzas aplicadas en cada elemento, se pudo obtener una ecuación diferencial no lineal para la barrera, que se solucionó mediante el método de iteración de Newton. En el caso de la barrera formada de cuerpos articulados, se empleó la teoría de cuerpos rígidos articulados, con conexiones elásticas, suponiendo un modelo de la barrera formados por varios cuerpos rígidos interconectados por articulaciones elásticas (formadas por dos muelles longitudinales y un muelle de torsión). En el caso de la barrera en forma de membrana, se empleó la teoría numérica de membranas para modelizar la barrera. Básicamente se considera elementos finitos de forma rectangular de la barrera con cuatro nodos utilizando elementos isoperimétricos de *Zienkiewicz-Irons*, y se utiliza el algoritmo de Newton-Raphson para la resolución de las ecuaciones no-lineales obtenidas.

Un trabajo más reciente en el confinamiento de contaminantes flotando en la superficie del mar utilizando una barrera de contención flexible es el realizado en ¹⁰. En este artículo, los autores investigaron la influencia de la barrera de contención flexible sobre los dos vehículos autónomos durante la navegación del sistema completo (barrera + vehículos) para así poder diseñar una sistema de control que compense dicha influencia.

En general, a la hora de establecer una estrategia para la recogida de manchas de contaminantes flotantes en la superficie del mar, nos enfrentamos a varias dificultades. Entre ellas podemos citar la dispersión rápida de la mancha de contaminante¹⁷ y la rotura de la barrera durante la operación¹⁸ caracterizada por el escape de una parte importante del contaminante por debajo de la barrera. Estos problemas ocurren en general en situaciones en las que el agua circula con alta velocidad¹⁹. Para ello, varias investigaciones enfocadas en el diseño de la forma de las barreras de contención han sido llevadas a cabo en los últimos años.

Para nuestro proyecto, nos basaremos en el trabajo realizado por *S.Bhattacharya et al (2011)*. En particular, emplearemos el modelo casi-estático en el que se supone que las fuerzas inerciales aplicadas a la barrera son nulas.

2.2- Control de barreras de contención

Con el fin de garantizar el éxito de una operación de confinamiento de la mancha de contaminante flotando en la superficie del mar hay que poder controlar, en cada instante dado, la forma de la barrera flexible, su apertura, y la trayectoria seguida por sus extremidades. En general, tanto debido a las condiciones geográficas como al grado de contaminación que suponen las incidencias que pueden ocurrir en una plataforma petrolera, puede resultar complicado para los seres humanos operar directamente en el lugar del siniestro. En este sentido, el hecho de poder diseñar sistemas de recogida completamente autónomos podría representar una solución muy realista y útil. Varias técnicas han sido estudiadas en los últimos años. El diseño de un sistema de control mediante la técnica de inteligencia artificial con aplicación a una barrera de contención fue reportado en ²⁰. La técnica empleada en el diseño es una red neural multicapa con algoritmo de retropropagación. Se hizo un estudio comparativo con 16 configuraciones de redes neuronales, diferentes entre ellas por el número de capas ocultas y por el número de neuronas que contiene cada una de estas capas. Este trabajo permitió destacar que la configuración de la red tiene una influencia considerable sobre los resultados del control.

Otro trabajo enfocado en la automatización de las barreras de contención fue realizado en ²¹. En este trabajo, se consideró que la barrera de contención está formada por robots marinos interconectados. De este modo, cada robot navegaba de manera autónoma para que la barrera envuelva la mancha considerada en la superficie del mar. El sistema que diseñaron los autores cuenta con un sistema de control constituido por varios sensores fusionados que sirven como sistema de visión. Por otro lado, para lidiar con las dificultades relacionados con el ambiente de trabajo, adoptaron en algoritmo de aprendizaje SARSA(λ).

Esta idea de barreras flotantes formadas por múltiples robots ha sido también estudiada en ²². Se diseñó los robots para que puedan operar en la superficie del agua (robots barcos). El chasis de los robots es de forma ovalado para minimizar la resistencia en el agua. Cada uno de los robots que forman la barrera está equipado por una placa de circuito impreso (en el que están montados un microcontrolador, GPS, pantalla LCD y drivers para los motores), un suministrador de energía, un sistema de control para los motores, un sistema de sensores y un sistema de comunicación. Con esta técnica, se pudo concluir que el uso de robot para la recogida de contaminantes en la superficie del mar es un procedimiento barato y eficiente, sobre todo para manchas de tamaño pequeño.

En ²³ se presenta una técnica de control diferente a las anteriores. Aquí, se trata de estudiar la dinámica del sistema formado por dos barcos y una barrera de contención flexible. La arquitectura del controlador diseñado en este último trabajo está dividida en tres niveles jerárquicos y cada capa opera con una frecuencia diferente de los otros.

En general, para casos en los que se utiliza una barrera de contención con los barcos, es realista pre-establecer una trayectoria para los dos vehículos marinos. En este mismo sentido, se diseñó en ²⁴ controladores para vehículos autónomos marinos mediante la técnica Model Predictive Control (**MPC**). Básicamente, tras definir las trayectorias de los vehículos, en cada paso del tiempo, se asume el conocimiento de la referencia en un horizonte finito; el controlador MPC, calcula las fuerzas óptimas y el momento necesario para que el vehículo pueda seguir la trayectoria predefinida de manera óptima.

Capítulo 3

Modelado de la barrera de contención

En este capítulo trataremos de modelizar y simular la barrera de contención. El objetivo aquí es el de determinar un modelo para la barrera de manera que, conociendo las condiciones iniciales de una operación dada y las trayectorias predefinidas para las dos extremidades de la barrera, se pueda determinar la evolución de la forma de ésta con el tiempo.

3.1. Descripción de la barrera de contención flexible.

En teoría, una barrera de contención ideal debería presentar un número infinito de grados de libertad. No obstante, tal y como hemos mencionado en el primer capítulo, para poder diseñar un sistema de control para nuestra barrera, es necesario considerar una aproximación discreta. Para ello, se supone que la barrera de contención flexible está formada por n cilindros del mismo tamaño (de longitud L) unidos entre ellos. En la figura 3.1 se representa un cilindro de la barrera.

Los vectores v^\perp y v^\parallel son las componentes de la velocidad v del cilindro considerado, representando la dirección normal y tangencial, respectivamente, al cilindro.

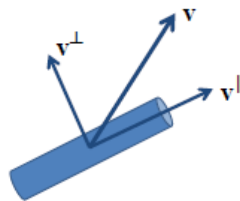


Figura 3.1: Un cilindro de la barrera de contención ¹⁴

El punto de unión entre dos cilindros sucesivos tiene un grado de libertad de rotación. Es decir, se trata de identificar un mínimo de $n + 2$ grados de libertad que presentaremos en el apartado siguiente.

3.2. Dinámica de la barrera.

Consideramos la configuración de la barrera tal y como viene representada en la figura 3.2

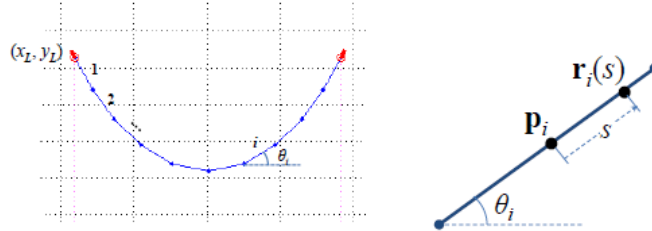


Figura 3.2: Modelo dinámico discreto de la barrera ¹⁴

- (x_L, y_L) son las coordenadas de la extremidad izquierda de la barrera en el plano XY formado por la superficie del mar
- θ_i es el ángulo que forma la dirección del cilindro i con la dirección de los x positivos (orientado de izquierda a derecha en la dirección horizontal).
- p_i representa la posición del centro de gravedad del cilindro i .

En un instante dado, es necesario conocer los valores de los parámetros $\{x_L, y_L, \theta_{i=1,2,3,\dots,n}\}$ para poder definir la forma de la barrera. Tenemos entonces un sistema con $n + 2$ grados libertad. De este modo, para el cilindro i , la posición de un punto situado a una distancia s de p_i (ver figura 3.2) con respecto a la extremidad izquierda de la barrera viene dada por la relación:

$$\mathbf{r}_i(s) = \mathbf{p}_i + s \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Las coordenadas de p_i en el plano formado por la superficie del agua se calculan como sigue:

$$\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} x_L \\ y_L \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{i-1} L \begin{bmatrix} \cos(\theta_j) \\ \sin(\theta_j) \end{bmatrix} + \frac{L}{2} \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Donde L es la longitud del cilindro.

Entonces, la velocidad del punto $r_i(s)$ vendrá dada por la relación:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}_i(s) &= \frac{d}{dt} \left(\mathbf{p}_i + s \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} \dot{x}_L \\ \dot{y}_L \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{i-1} L_j \dot{\theta}_j \begin{bmatrix} -\sin(\theta_j) \\ \cos(\theta_j) \end{bmatrix} + \left(\frac{L_i}{2} + s \right) \begin{bmatrix} -\sin(\theta_i) \\ \cos(\theta_i) \end{bmatrix} \dot{\theta}_i
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Por otro lado, si consideramos que la extremidad derecha de la barrera de contención flexible está localizada en el plano (X,Y) por sus coordenadas (x_R, y_R) , la condición de continuidad de la barrera estará dada por la expresión siguiente :

$$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_L \\ y_L \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^n L_j \begin{bmatrix} \cos(\theta_j) \\ \sin(\theta_j) \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Sean $\hat{\mathbf{u}}_i^{\parallel}$ el vector unitario paralelo al cilindro i , y $\hat{\mathbf{u}}_i^{\perp}$ vector unitario normal a dicho cilindro, la velocidad del punto $r_i(s)$ se puede descomponer según las direcciones normal y tangencial al cilindro tal y como presentamos a continuación:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_i^{\parallel}(s) &= \left(\hat{\mathbf{u}}_i^{\parallel} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i(s) \right) \hat{\mathbf{u}}_i^{\parallel} \\
\mathbf{v}_i^{\perp}(s) &= \left(\hat{\mathbf{u}}_i^{\perp} \cdot \dot{\mathbf{r}}_i(s) \right) \hat{\mathbf{u}}_i^{\perp}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

De esta manera, podemos calcular las fuerzas exteriores y los torques debidos al arrastre del cilindro i mediante las formulas siguientes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_i &:= \begin{bmatrix} F_{i,x} \\ F_{i,y} \end{bmatrix} = - \int_{-L_i/2}^{L_i/2} \left(c_V \mathbf{v}_i^{\parallel}(s) + c_S \mathbf{v}_i^{\perp}(s) \right) ds \\
\tau_i &= - \int_{-L_i/2}^{L_i/2} \mathbf{r}_i(s) \times \left(c_V \mathbf{v}_i^{\parallel}(s) + c_S \mathbf{v}_i^{\perp}(s) \right) ds
\end{aligned} \tag{3.6}$$

En la relación anterior, c_V y c_S representan los coeficientes de rozamiento del agua sobre el segmento considerado, según las direcciones tangencial y normal respectivamente. Dichos coeficientes dependen de la velocidad (o del número de Reynolds en general) del segmento considerado.

Las fuerzas generalizadas aplicadas al sistema vendrán, por lo tanto, dadas por las relaciones:

$$\begin{aligned}
Q_{x_L} &= \begin{bmatrix} f_{Lx} \\ f_{Ly} \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial \begin{bmatrix} x_L \\ y_L \end{bmatrix}}{\partial x_L} + \begin{bmatrix} f_{Rx} \\ f_{Ry} \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \end{bmatrix}}{\partial x_L} + \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_j}{\partial x_L} \\
&= f_{Lx} + f_{Rx} + \sum_{j=1}^n F_{j,x} \\
Q_{y_L} &= f_{Ly} + f_{Ry} + \sum_{j=1}^n F_{j,y} \\
Q_{\theta_i} &= -f_{Rx} L_i \sin(\theta_i) + f_{Ry} L_i \cos(\theta_i) + \tau_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_j}{\partial \theta_i} \\
&\quad \forall i = 1, 2, \dots, n
\end{aligned} \tag{3.7}$$

En estas expresiones, (f_{Rx}, f_{Ry}) son las componentes de la fuerza aplicada en la extremidad derecha de la barrera, y (f_{Lx}, f_{Ly}) las de la fuerza aplicada en su extremidad izquierda.

La energía cinética del sistema es la suma de la energía del movimiento de traslación de la barrera y la resultante de las energías cinéticas de los movimientos de rotación de cada grado de libertad del sistema. Su expresión final es a la siguiente.

$$K = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m_i |\dot{\mathbf{p}}_i|^2 + \frac{1}{2} \frac{m_i L_i^2}{12} |\dot{\theta}_i|^2 \right) \tag{3.8}$$

Por lo tanto, según el formalismo de Lagrange, las ecuaciones diferenciales para cada uno de los $n + 2$ grados de libertad ($\{x_L, y_L, \theta_i, i = 1, 2, 3, \dots, n\}$) se determinan como sigue:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} - Q_{q_i} = 0 \quad (3.9)$$

Donde q_i corresponde a la coordenada dada, y Q_i es la fuerza correspondiente a esa coordenada.

La relación (3.9) anterior corresponde al sistema de $n + 2$ ecuaciones diferenciales fuertemente acopladas. La resolución de un sistema así requiere ordenadores con alta potencia de cálculo y también un buen estudio de las condiciones iniciales del problema ya que si éstas se eligen mal, se presentará un problema de convergencia de las soluciones. Por estos motivos, hemos planteado algunas consideraciones que nos permitan simplificar las ecuaciones. Dichas consideraciones las describiremos en el apartado siguiente.

3.3. Consideraciones

En este proyecto, hemos optado por trabajar sobre una barrera con 5 segmentos ($n = 5$). Este número permite visualizar la barrera con cierto realismo, pero manteniendo visible su resolución de manera práctica y en un tiempo computacional realista. Mediante el uso del programa **Mathematica**, hemos podido determinar una expresión, la más simplificada posible, para las 7 ecuaciones diferenciales del sistema. Luego, hemos modificado las expresiones obtenidas mediante **Mathematica** para que se puedan utilizar en **Matlab** y simularlas. Las expresiones de dichas ecuaciones se encuentran en el Anexo de esta memoria. Se trata de un sistema de 7 ecuaciones diferenciales fuertemente acopladas. Tal y como hemos mencionado en el apartado anterior, una posible resolución de dichas ecuaciones requiere el uso de un ordenador con alta potencia de cálculo, y también se necesita estudiar profundamente las 14 condiciones iniciales que permitan una convergencia de las soluciones. Esto nos llevaría a resolver problemas que se encuentran fuera del propósito de este proyecto.

Para simplificar el problema, hemos considerado un modelo **casi-estático** de la barrera en el que se supone que las fuerzas inerciales son iguales a cero.

$$Q_{\theta_i} = 0 \quad (3.10)$$

Según *S.Bhattacharya et al*¹⁴, la consideración anterior es razonable cuando las fuerzas de arrastre dominan sobre las fuerzas inerciales y está justificada en el caso de desplazamiento lento del sistema. Esta simplificación es bastante interesante ya que en este proyecto, el objetivo es de diseñar un sistema que controle la forma de la barrera de contención en cada instante dado.

De este modo, combinando las 5 ecuaciones (3.10) (para $i = 1, 2, \dots, 5$) y las restricciones sobre la velocidad representadas por la relación (3.11) siguiente (obtenida derivando la ecuación 3.4), llegamos a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{x}_L \\ \dot{y}_L \end{bmatrix} - \sum_{j=1}^n L_j \dot{\theta}_j \begin{bmatrix} -\sin(\theta_j) \\ \cos(\theta_j) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.11)$$

Las otras consideraciones elegidas para nuestro modelo son las siguientes:

L (longitud de los cilindros de la barrera) = 5 m, m (masa de cada cilindro) = 5 Kg, c_V (Coeficiente de rozamiento según la dirección paralela al segmento) = 0.05

Estos valores han sido elegidos para asegurar que las simulaciones sean las más parecidas posibles a condiciones reales.

Para los cálculos en **Mathematica**, hemos definido un vector de estado como sigue:

$$\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\} = \{ \theta_{i=1,2,\dots,5}, x_L, y_L \}$$

Y las fuerzas generalizadas están representadas por los $Q_{i=1,2,\dots,7}$, con los 5 primeros correspondientes a las fuerzas inerciales Q_{θ_i} .

La lista de los comandos escritos en Mathematica para simplificar las ecuaciones se presentan en la tabla 3.1.

SCRIPT DE LOS COMANDOS ESCRITOS EN MATHEMATICA PARA LA SIMPLIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DE LAGRANGE

Valores de los parámetros

Cs=0;
m=5;
Cv=0.05;

Calculo de las posiciones y de las velocidades

Do[P_i[t_]={X₆[t]+Sum[5Cos[X_i[t]],{j,1,i-1}]+2.5Cos[X_i[t]],X₇[t]+Sum[5Sin[X_j[t]],{j,1,i-1}]+2.5Sin[X_i[t]],0},{i,1,5}]
Do[dP_i[t_]=D[P_i[t],t],{i,1,5}]
Do[r_i[s_,t_]=P_i[t]+s*{Cos[X_i[t]],Sin[X_i[t]],0},{i,1,5}]
Do[vt_i[s_]=({Cos[X_i[t]],Sin[X_i[t]],0).D[r_i[s,t],t])*{Cos[X_i[t]],Sin[X_i[t]],0},{i,1,5}]
Do[vp_i[s_]=({-Sin[X_i[t]],Cos[X_i[t]],0).D[r_i[s,t],t])*{-Sin[X_i[t]],Cos[X_i[t]],0},{i,1,5}]

Cálculo de las fuerzas exteriores

Do[F_i=-Integrate[(Cv*vt_i[s]+Cs*vp_i[s]),{s,-2.5,2.5}],{i,1,5}]

Calculo de los torques

Do[tau_i=Integrate[Cross[r_i[s,t],(Cv*vt_i[s]+Cs*vp_i[s])][[3]],{s,-2.5,2.5}],{i,1,5}]

Calculo de las fuerzas generalizadas

Do[Q_i=Simplify[-5fR_x*Sin[X_i[t]]+5fR_y*Cos[X_i[t]]+tau_i+Sum[F_j.D[P_j[t],X_i[t]],{j,1,5}],{i,1,5}]

Q₆=Simplify[fL_x+fR_x+Sum[F_j[[1]],{j,1,5}]];

Q₇=Simplify[fL_y+fR_y+Sum[F_j[[2]],{j,1,5}]];

Tabla 3.1: Script de comandos escritos en Mathematica para simplificar las ecuaciones

De esta manera, las expresiones obtenidas para los Q_{θ_i} son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 Q_1 = & 5.fRyCos[X_1[t]] - 5.fRxSin[X_1[t]] + (-12.5 + 3.125Cos[2(X_1[t] - X_2[t])] + 3.125Cos[2(X_1[t] - X_3[t])] \\
 & + 3.125Cos[2(X_1[t] - X_4[t])] + 3.125Cos[2(X_1[t] - X_5[t])])X_1'[t] + (-9.375Cos[X_1[t] - X_2[t]] \\
 & + 3.125Cos[X_1[t] + X_2[t] - 2X_3[t]] + 3.125Cos[X_1[t] + X_2[t] - 2X_4[t]] + 3.125Cos[X_1[t] + X_2[t] \\
 & - 2X_5[t]])X_2'[t] - 6.25Cos[X_1[t] - X_3[t]]X_3'[t] + 3.125Cos[X_1[t] + X_3[t] - 2X_4[t]]X_3'[t] \\
 & + 3.125Cos[X_1[t] + X_3[t] - 2X_5[t]]X_3'[t] - 3.125Cos[X_1[t] - X_4[t]]X_4'[t] + 3.125Cos[X_1[t] + X_4[t] \\
 & - 2X_5[t]]X_4'[t] + 2.5Sin[X_1[t]]X_6'[t] + 0.625Sin[X_1[t] - 2X_2[t]]X_6'[t] + 0.625Sin[X_1[t] - 2X_3[t]]X_6'[t] \\
 & + 0.625Sin[X_1[t] - 2X_4[t]]X_6'[t] + 0.625Sin[X_1[t] - 2X_5[t]]X_6'[t] + 0.125Sin[2X_1[t]]X_6[t]X_6'[t] \\
 & - 0.125X_7[t]X_6'[t] - 0.125Cos[2X_1[t]]X_7[t]X_6'[t] - 2.5Cos[X_1[t]]X_7'[t] + 0.625Cos[X_1[t] \\
 & - 2X_2[t]]X_7'[t] + 0.625Cos[X_1[t] - 2X_3[t]]X_7'[t] + 0.625Cos[X_1[t] - 2X_4[t]]X_7'[t] + 0.625Cos[X_1[t] \\
 & - 2X_5[t]]X_7'[t] + 0.125X_6[t]X_7'[t] - 0.125Cos[2X_1[t]]X_6[t]X_7'[t] - 0.125Sin[2X_1[t]]X_7[t]X_7'[t]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_2 = & 5. \text{fRyCos}[X_2[t]] - 5. \text{fRxSin}[X_2[t]] + (3.125 - 9.375\text{Cos}[X_1[t] - X_2[t]] - 3.125\text{Cos}[2(X_1[t] - X_2[t])] + 3.125\text{Cos}[X_1[t] \\
& + X_2[t] - 2X_3[t]] + 3.125\text{Cos}[X_1[t] + X_2[t] - 2X_4[t]] + 3.125\text{Cos}[X_1[t] + X_2[t] - 2X_5[t]] \\
& + (0.625\text{Cos}[X_1[t]] - 0.625\text{Cos}[X_1[t] - 2X_2[t]])X_6[t] + (0.625\text{Sin}[X_1[t]] + 0.625\text{Sin}[X_1[t] \\
& - 2X_2[t]])X_7[t]X_1'[t] + (-9.375 + 3.125\text{Cos}[2(X_2[t] - X_3[t])] + 3.125\text{Cos}[2(X_2[t] - X_4[t])] \\
& + 3.125\text{Cos}[2(X_2[t] - X_5[t])])X_2'[t] - 6.25\text{Cos}[X_2[t] - X_3[t]]X_3'[t] + 3.125\text{Cos}[X_2[t] + X_3[t] \\
& - 2X_4[t]]X_3'[t] + 3.125\text{Cos}[X_2[t] + X_3[t] - 2X_5[t]]X_3'[t] - 3.125\text{Cos}[X_2[t] - X_4[t]]X_4'[t] \\
& + 3.125\text{Cos}[X_2[t] + X_4[t] - 2X_5[t]]X_4'[t] - 0.625\text{Sin}[X_1[t]]X_6'[t] - 0.625\text{Sin}[X_1[t] - 2X_2[t]]X_6'[t] \\
& + 1.875\text{Sin}[X_2[t]]X_6'[t] + 0.625\text{Sin}[X_2[t] - 2X_3[t]]X_6'[t] + 0.625\text{Sin}[X_2[t] - 2X_4[t]]X_6'[t] \\
& + 0.625\text{Sin}[X_2[t] - 2X_5[t]]X_6'[t] + 0.125\text{Sin}[2X_2[t]]X_6[t]X_6'[t] - 0.125X_7[t]X_6'[t] \\
& - 0.125\text{Cos}[2X_2[t]]X_7[t]X_6'[t] + 0.625\text{Cos}[X_1[t]]X_7'[t] - 0.625\text{Cos}[X_1[t] - 2X_2[t]]X_7'[t] \\
& - 1.875\text{Cos}[X_2[t]]X_7'[t] + 0.625\text{Cos}[X_2[t] - 2X_3[t]]X_7'[t] + 0.625\text{Cos}[X_2[t] - 2X_4[t]]X_7'[t] \\
& + 0.625\text{Cos}[X_2[t] - 2X_5[t]]X_7'[t] + 0.125X_6[t]X_7'[t] - 0.125\text{Cos}[2X_2[t]]X_6[t]X_7'[t] \\
& - 0.125\text{Sin}[2X_2[t]]X_7[t]X_7'[t]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_3 = & 5. \text{fRyCos}[X_3[t]] - 5. \text{fRxSin}[X_3[t]] + (3.125 + 3.125\text{Cos}[X_1[t] - X_2[t]] - 3.125\text{Cos}[X_1[t] + X_2[t] - 2X_3[t]] \\
& - 6.25\text{Cos}[X_1[t] - X_3[t]] - 3.125\text{Cos}[2(X_1[t] - X_3[t])] + 3.125\text{Cos}[X_1[t] + X_3[t] - 2X_4[t]] \\
& + 3.125\text{Cos}[X_1[t] + X_3[t] - 2X_5[t]] + (0.625\text{Cos}[X_1[t]] - 0.625\text{Cos}[X_1[t] - 2X_3[t]])X_6[t] \\
& + (0.625\text{Sin}[X_1[t]] + 0.625\text{Sin}[X_1[t] - 2X_3[t]])X_7[t]X_1'[t] + (3.125 + 3.125\text{Cos}[X_1[t] - X_2[t]] \\
& - 3.125\text{Cos}[X_1[t] + X_2[t] - 2X_3[t]] - 6.25\text{Cos}[X_2[t] - X_3[t]] - 3.125\text{Cos}[2(X_2[t] - X_3[t])] \\
& + 3.125\text{Cos}[X_2[t] + X_3[t] - 2X_4[t]] + 3.125\text{Cos}[X_2[t] + X_3[t] - 2X_5[t]] + (0.625\text{Cos}[X_2[t]] \\
& - 0.625\text{Cos}[X_2[t] - 2X_3[t]])X_6[t] + (0.625\text{Sin}[X_2[t]] + 0.625\text{Sin}[X_2[t] - 2X_3[t]])X_7[t]X_2'[t] \\
& - 6.25X_3'[t] + 3.125\text{Cos}[2(X_3[t] - X_4[t])]X_3'[t] + 3.125\text{Cos}[2(X_3[t] - X_5[t])]X_3'[t] - 3.125\text{Cos}[X_3[t] \\
& - X_4[t]]X_4'[t] + 3.125\text{Cos}[X_3[t] + X_4[t] - 2X_5[t]]X_4'[t] - 0.625\text{Sin}[X_1[t]]X_6'[t] - 0.625\text{Sin}[X_2[t]]X_6'[t] \\
& - 0.625\text{Sin}[X_1[t] - 2X_3[t]]X_6'[t] - 0.625\text{Sin}[X_2[t] - 2X_3[t]]X_6'[t] + 1.25\text{Sin}[X_3[t]]X_6'[t] \\
& + 0.625\text{Sin}[X_3[t] - 2X_4[t]]X_6'[t] + 0.625\text{Sin}[X_3[t] - 2X_5[t]]X_6'[t] + 0.125\text{Sin}[2X_3[t]]X_6[t]X_6'[t] \\
& - 0.125X_7[t]X_6'[t] - 0.125\text{Cos}[2X_3[t]]X_7[t]X_6'[t] + 0.625\text{Cos}[X_1[t]]X_7'[t] + 0.625\text{Cos}[X_2[t]]X_7'[t] \\
& - 0.625\text{Cos}[X_1[t] - 2X_3[t]]X_7'[t] - 0.625\text{Cos}[X_2[t] - 2X_3[t]]X_7'[t] - 1.25\text{Cos}[X_3[t]]X_7'[t] \\
& + 0.625\text{Cos}[X_3[t] - 2X_4[t]]X_7'[t] + 0.625\text{Cos}[X_3[t] - 2X_5[t]]X_7'[t] + 0.125X_6[t]X_7'[t] \\
& - 0.125\text{Cos}[2X_3[t]]X_6[t]X_7'[t] - 0.125\text{Sin}[2X_3[t]]X_7[t]X_7'[t]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_4 = & 5. \text{fRyCos}[X_4[t]] - 5. \text{fRxSin}[X_4[t]] + (3.125 + 3.125\text{Cos}[X_1[t] - X_2[t]] + 3.125\text{Cos}[X_1[t] - X_3[t]] - 3.125\text{Cos}[X_1[t] \\
& + X_2[t] - 2X_4[t]] - 3.125\text{Cos}[X_1[t] + X_3[t] - 2X_4[t]] - 3.125\text{Cos}[X_1[t] - X_4[t]] - 3.125\text{Cos}[2(X_1[t] \\
& - X_4[t])] + 3.125\text{Cos}[X_1[t] + X_4[t] - 2X_5[t]] + (0.625\text{Cos}[X_1[t]] - 0.625\text{Cos}[X_1[t] - 2X_4[t]])X_6[t] \\
& + (0.625\text{Sin}[X_1[t]] + 0.625\text{Sin}[X_1[t] - 2X_4[t]])X_7[t]X_1'[t] + (3.125 + 3.125\text{Cos}[X_1[t] - X_2[t]] \\
& + 3.125\text{Cos}[X_2[t] - X_3[t]] - 3.125\text{Cos}[X_1[t] + X_2[t] - 2X_4[t]] - 3.125\text{Cos}[X_2[t] + X_3[t] - 2X_4[t]] \\
& - 3.125\text{Cos}[X_2[t] - X_4[t]] - 3.125\text{Cos}[2(X_2[t] - X_4[t])] + 3.125\text{Cos}[X_2[t] + X_4[t] - 2X_5[t]] \\
& + (0.625\text{Cos}[X_2[t]] - 0.625\text{Cos}[X_2[t] - 2X_4[t]])X_6[t] + (0.625\text{Sin}[X_2[t]] + 0.625\text{Sin}[X_2[t] \\
& - 2X_4[t]])X_7[t]X_2'[t] + 3.125X_3'[t] + 3.125\text{Cos}[X_1[t] - X_3[t]]X_3'[t] + 3.125\text{Cos}[X_2[t] - X_3[t]]X_3'[t] \\
& - 3.125\text{Cos}[X_1[t] + X_3[t] - 2X_4[t]]X_3'[t] - 3.125\text{Cos}[X_2[t] + X_3[t] - 2X_4[t]]X_3'[t] - 3.125\text{Cos}[X_3[t] \\
& - X_4[t]]X_3'[t] - 3.125\text{Cos}[2(X_3[t] - X_4[t])]X_3'[t] + 3.125\text{Cos}[X_3[t] + X_4[t] - 2X_5[t]]X_3'[t] \\
& + 0.625\text{Cos}[X_3[t]]X_6[t]X_3'[t] - 0.625\text{Cos}[X_3[t] - 2X_4[t]]X_6[t]X_3'[t] + 0.625\text{Sin}[X_3[t]]X_7[t]X_3'[t] \\
& + 0.625\text{Sin}[X_3[t] - 2X_4[t]]X_7[t]X_3'[t] - 3.125X_4'[t] + 3.125\text{Cos}[2(X_4[t] - X_5[t])]X_4'[t] \\
& - 0.625\text{Sin}[X_2[t]]X_6'[t] - 0.625\text{Sin}[X_2[t]]X_6'[t] - 0.625\text{Sin}[X_3[t]]X_6'[t] - 0.625\text{Sin}[X_1[t] \\
& - 2X_4[t]]X_6'[t] - 0.625\text{Sin}[X_2[t] - 2X_4[t]]X_6'[t] - 0.625\text{Sin}[X_3[t] - 2X_4[t]]X_6'[t] \\
& + 0.625\text{Sin}[X_4[t]]X_6'[t] + 0.625\text{Sin}[X_4[t] - 2X_5[t]]X_6'[t] + 0.125\text{Sin}[2X_4[t]]X_6[t]X_6'[t] \\
& - 0.125X_7[t]X_6'[t] - 0.125\text{Cos}[2X_4[t]]X_7[t]X_6'[t] + 0.625\text{Cos}[X_1[t]]X_7'[t] + 0.625\text{Cos}[X_2[t]]X_7'[t] \\
& + 0.625\text{Cos}[X_3[t]]X_7'[t] - 0.625\text{Cos}[X_1[t] - 2X_4[t]]X_7'[t] - 0.625\text{Cos}[X_2[t] - 2X_4[t]]X_7'[t] \\
& - 0.625\text{Cos}[X_3[t] - 2X_4[t]]X_7'[t] - 0.625\text{Cos}[X_4[t]]X_7'[t] + 0.625\text{Cos}[X_4[t] - 2X_5[t]]X_7'[t] \\
& + 0.125X_6[t]X_7'[t] - 0.125\text{Cos}[2X_4[t]]X_6[t]X_7'[t] - 0.125\text{Sin}[2X_4[t]]X_7[t]X_7'[t]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_5 = & 5 \cdot fRy \cos[X_5[t]] - 5 \cdot fRx \sin[X_5[t]] + (3.125 + 3.125 \cos[X_1[t] - X_2[t]] + 3.125 \cos[X_1[t] - X_3[t]] + 3.125 \cos[X_1[t] \\
& - X_4[t]] - 3.125 \cos[X_1[t] + X_2[t] - 2X_5[t]] - 3.125 \cos[X_1[t] + X_3[t] - 2X_5[t]] - 3.125 \cos[X_1[t] \\
& + X_4[t] - 2X_5[t]] - 3.125 \cos[2(X_1[t] - X_5[t])] + (0.625 \cos[X_1[t]] - 0.625 \cos[X_1[t] - 2X_5[t]])X_6[t] \\
& + (0.625 \sin[X_1[t]] + 0.625 \sin[X_1[t] - 2X_5[t]])X_7[t]X_1'[t] + (3.125 + 3.125 \cos[X_1[t] - X_2[t]] \\
& + 3.125 \cos[X_2[t] - X_3[t]] + 3.125 \cos[X_2[t] - X_4[t]] - 3.125 \cos[X_1[t] + X_2[t] - 2X_5[t]] \\
& - 3.125 \cos[X_2[t] + X_3[t] - 2X_5[t]] - 3.125 \cos[X_2[t] + X_4[t] - 2X_5[t]] - 3.125 \cos[2(X_2[t] - X_5[t])] \\
& + (0.625 \cos[X_2[t]] - 0.625 \cos[X_2[t] - 2X_5[t]])X_6[t] + (0.625 \sin[X_2[t]] + 0.625 \sin[X_2[t] \\
& - 2X_5[t]])X_7[t]X_2'[t] + 3.125X_3'[t] + 3.125 \cos[X_1[t] - X_3[t]]X_3'[t] + 3.125 \cos[X_2[t] - X_3[t]]X_3'[t] \\
& + 3.125 \cos[X_3[t] - X_4[t]]X_3'[t] - 3.125 \cos[X_1[t] + X_3[t] - 2X_5[t]]X_3'[t] - 3.125 \cos[X_2[t] + X_3[t] \\
& - 2X_5[t]]X_3'[t] - 3.125 \cos[X_3[t] + X_4[t] - 2X_5[t]]X_3'[t] - 3.125 \cos[2(X_3[t] - X_5[t])]X_3'[t] \\
& + 0.625 \cos[X_3[t]]X_6[t]X_3'[t] - 0.625 \cos[X_3[t] - 2X_5[t]]X_6[t]X_3'[t] + 0.625 \sin[X_3[t]]X_7[t]X_3'[t] \\
& + 0.625 \sin[X_3[t] - 2X_5[t]]X_7[t]X_3'[t] + 3.125X_4'[t] + 3.125 \cos[X_1[t] - X_4[t]]X_4'[t] + 3.125 \cos[X_2[t] \\
& - X_4[t]]X_4'[t] + 3.125 \cos[X_3[t] - X_4[t]]X_4'[t] - 3.125 \cos[X_1[t] + X_4[t] - 2X_5[t]]X_4'[t] \\
& - 3.125 \cos[X_2[t] + X_4[t] - 2X_5[t]]X_4'[t] - 3.125 \cos[X_3[t] + X_4[t] - 2X_5[t]]X_4'[t] - 3.125 \cos[2(X_4[t] \\
& - X_5[t])]X_4'[t] + 0.625 \cos[X_4[t]]X_6[t]X_4'[t] - 0.625 \cos[X_4[t] - 2X_5[t]]X_6[t]X_4'[t] \\
& + 0.625 \sin[X_4[t]]X_7[t]X_4'[t] + 0.625 \sin[X_4[t] - 2X_5[t]]X_7[t]X_4'[t] - 0.625 \sin[X_1[t]]X_6'[t] \\
& - 0.625 \sin[X_2[t]]X_6'[t] - 0.625 \sin[X_3[t]]X_6'[t] - 0.625 \sin[X_4[t]]X_6'[t] - 0.625 \sin[X_1[t] \\
& - 2X_5[t]]X_6'[t] - 0.625 \sin[X_2[t] - 2X_5[t]]X_6'[t] - 0.625 \sin[X_3[t] - 2X_5[t]]X_6'[t] - 0.625 \sin[X_4[t] \\
& - 2X_5[t]]X_6'[t] + 0.125 \sin[2X_5[t]]X_6[t]X_6'[t] - 0.125X_7[t]X_6'[t] - 0.125 \cos[2X_5[t]]X_7[t]X_6'[t] \\
& + 0.625 \cos[X_1[t]]X_7'[t] + 0.625 \cos[X_2[t]]X_7'[t] + 0.625 \cos[X_3[t]]X_7'[t] + 0.625 \cos[X_4[t]]X_7'[t] \\
& - 0.625 \cos[X_1[t] - 2X_5[t]]X_7'[t] - 0.625 \cos[X_2[t] - 2X_5[t]]X_7'[t] - 0.625 \cos[X_3[t] - 2X_5[t]]X_7'[t] \\
& - 0.625 \cos[X_4[t] - 2X_5[t]]X_7'[t] + 0.125X_6[t]X_7'[t] - 0.125 \cos[2X_5[t]]X_6[t]X_7'[t] \\
& - 0.125 \sin[2X_5[t]]X_7[t]X_7'[t]
\end{aligned}$$

Como podemos observar en las ecuaciones anteriores, las fuerzas inerciales dependen de las coordenadas y de sus derivadas primeras. Tomando en cuenta las ecuaciones (3.10), tendremos un sistema de 7 ecuaciones dependientes de las coordenadas, de sus derivadas primeras, y de las fuerzas aplicadas en las extremidades de la barrera.

A este nivel, podemos plantear el problema siguiente:

Para valores dados de las velocidades instantáneas de las dos extremidades de la barrera, ¿cómo evolucionará su forma en función del tiempo?

Como mencionamos anteriormente, las 5 ecuaciones (3.10) dependen de las velocidades generalizadas y de las fuerzas f_{Lx} y f_{Ly} . Podemos eliminar f_{Lx} y f_{Ly} de estas ecuaciones, llegando a un sistema de 5 ecuaciones dependientes de

$$\{X_1'[t], X_2'[t], X_3'[t], X_4'[t], X_5'[t], X_6'[t], X_7'[t]\} = \{\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \dot{\theta}_5, \dot{x}_L, \dot{y}_L\}$$

De la misma manera, las ecuaciones (3.11) depende de $\{\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \dot{\theta}_5, \dot{x}_L, \dot{y}_L, \dot{x}_R, \dot{y}_R\}$.

Sean los dos vectores siguientes:

$$\dot{P} = [\dot{x}_L, \dot{y}_L, \dot{x}_R, \dot{y}_R]^T \text{ y } \dot{\theta} = [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \dot{\theta}_5]^T$$

El conjunto de ecuaciones (3.10) y (3.11) se puede reescribir como sigue

$$A \cdot \dot{P} + B \cdot \dot{\theta} = 0 \quad (3.12)$$

Donde A es una matriz 7×4 , B una Matriz 7×5 y dependen de $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, x_L, y_L\}$.

Con la ecuación (3.12), si fijamos algunos valores para las velocidades $[\dot{x}_L, \dot{y}_L, \dot{x}_R, \dot{y}_R]$ se puede determinar la dinámica de la forma de la barrera de contención calculando para cada instante el valor del vector θ . Para ello, bastará con integrar el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal siguiente:

$$\dot{\theta} = -B^+ \cdot A \cdot \dot{P} \quad (3.13)$$

Donde B^+ representa la pseudoinversa de Moore Penrose de la matriz B .

Para la integración de las ecuaciones (3.13), hemos empleado el software Matlab. A partir de las expresiones obtenidas con Mathematica, hemos reordenado las ecuaciones para obtener 7 expresiones de la forma:

$$\begin{aligned} & f_{1i}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, x_L, y_L) \cdot \dot{\theta}_1 + f_{1i}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, x_L, y_L) \cdot \dot{\theta}_2 + f_{1i}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, x_L, y_L) \cdot \dot{\theta}_3 + \\ & f_{1i}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, x_L, y_L) \cdot \dot{\theta}_4 + f_{1i}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, x_L, y_L) \cdot \dot{\theta}_5 + g_{1i}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, x_L, y_L) \cdot \dot{x}_L + \\ & g_{1i}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, x_L, y_L) \cdot \dot{y}_L + g_{1i}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, x_L, y_L) \cdot \dot{x}_R + g_{1i}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, x_L, y_L) \cdot \dot{y}_R = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Luego, en Matlab hemos creado 14 funciones que toman como parámetro de entrada el vector $u = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, x_L, y_L]$ y calculan los coeficientes f_{ij} y g_{ij} .

Además de estas 14 funciones, hemos escrito otra función para definir las matrices A y B presentadas anteriormente, y las 5 ecuaciones diferenciales (3.13).

Para resolver las ecuaciones, hemos empleado el solucionador **ode45** disponible en Matlab.

3.4. Resultados de las simulaciones.

Para las simulaciones del modelo casi-estático de la barrera de contención, hemos considerado tres valores diferentes para el vector \dot{P} tal y como detallamos a continuación:

$\dot{P} = [0.8364 \ 0.5477 \ 0.8364 \ 0.5477]^T$, $\dot{P} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ y $\dot{P} = [1 \ 4 \cdot t \ 1 \ 4 \cdot t]^T$ donde t corresponde al tiempo en segundos.

Para el vector θ elegimos las condiciones iniciales siguientes:

$$\theta_0 = [\pi, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}, 0]^T$$

En donde cada valor de elemento de θ_0 corresponde al ángulo que forma la dirección de los X positivos con la dirección del segmento correspondiente de la barrera.

Con estos valores, los resultados obtenidos al simular nuestro modelo vienen representados en las gráficas de la figura 3.3, 3.4 y 3.5 sucesivamente.

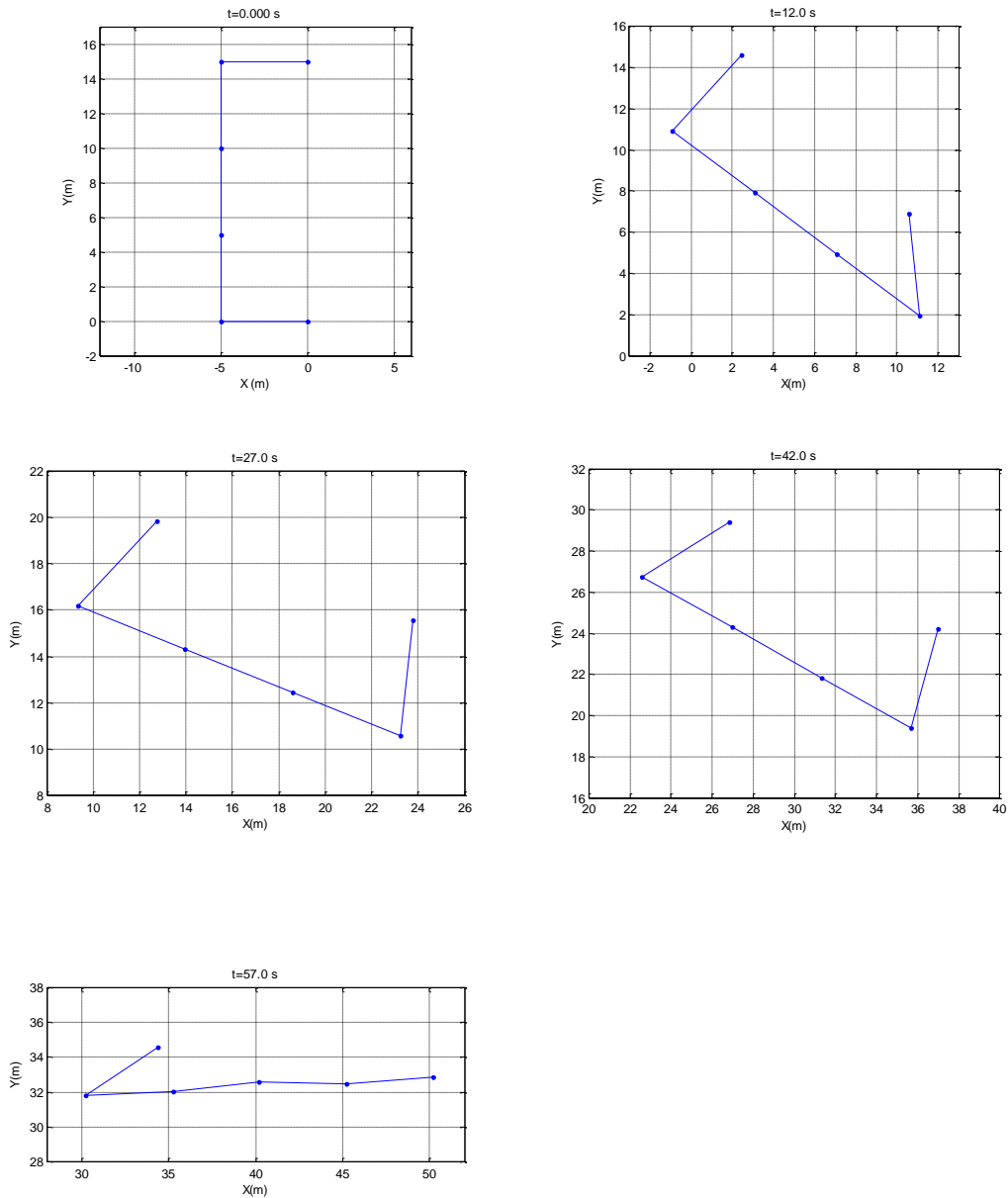


Figura 3.3: Resultados de las simulaciones para $\dot{P} = [0.8364 \quad 0.5477 \quad 0.8364 \quad 0.5477]^T$

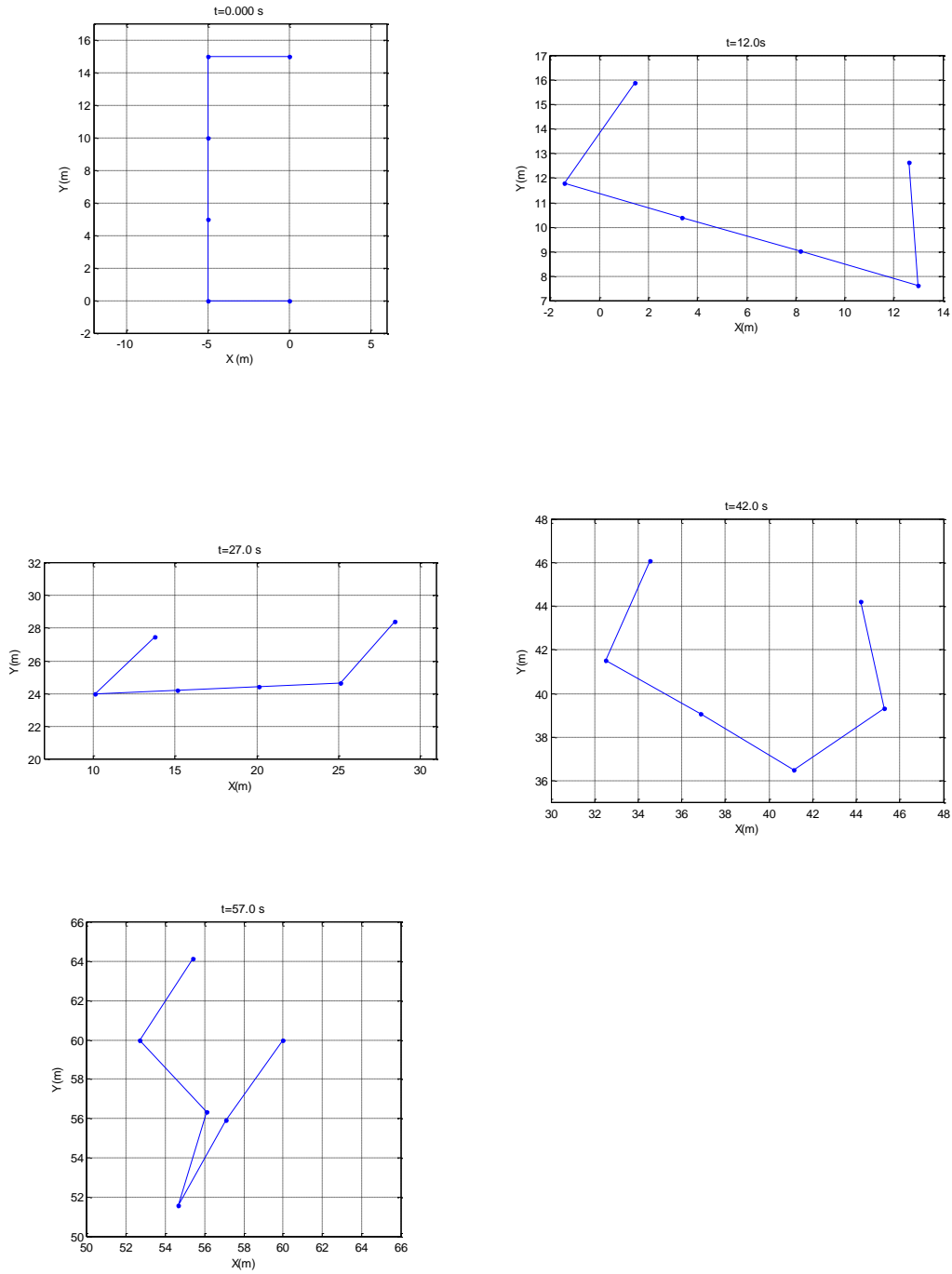


Figura 3.4: Resultados de las simulaciones para $\dot{P} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$

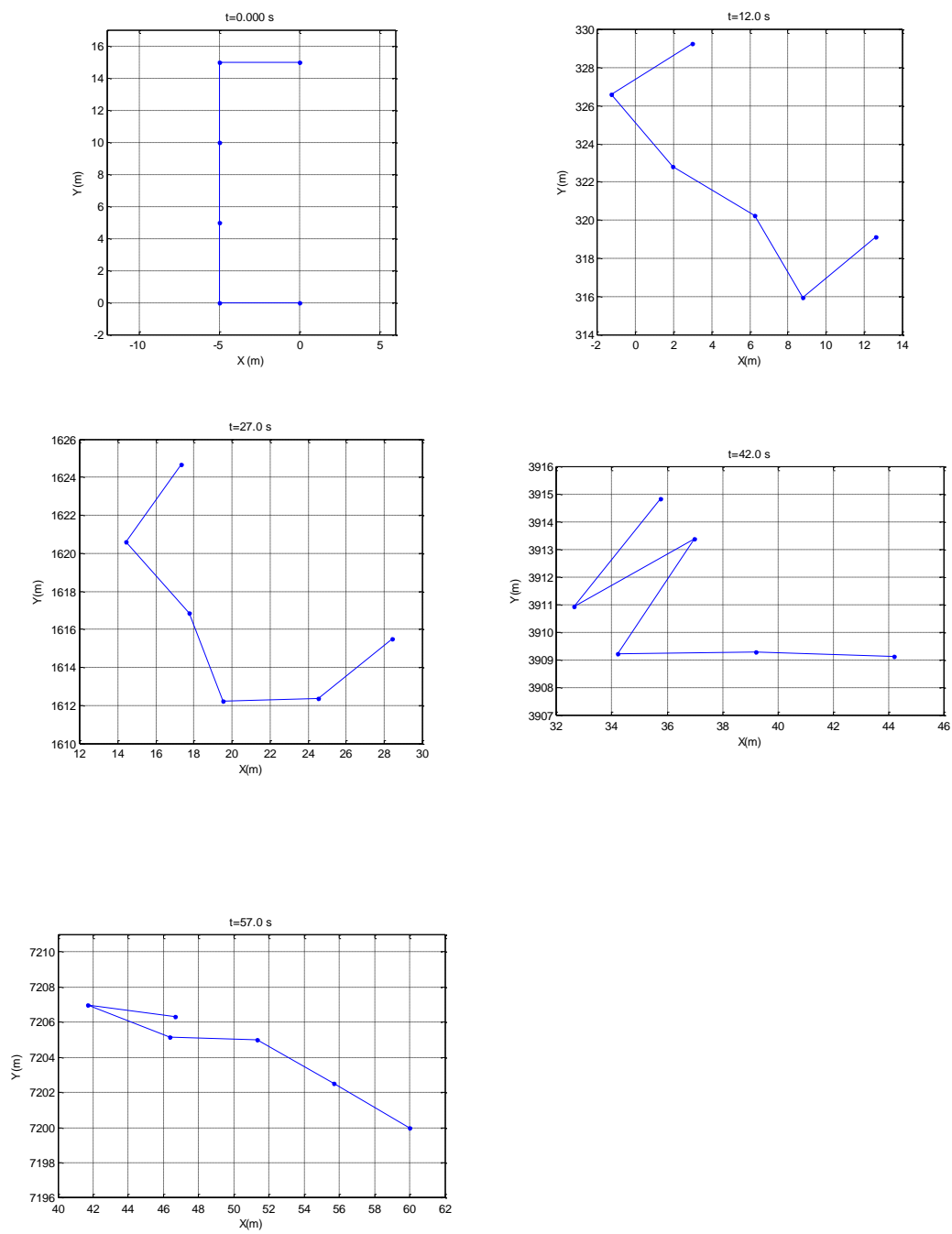


Figura 3.5: Resultados de las simulaciones para $\dot{P} = [1 \ 4 \ t \ 1 \ 4 \ t]^T$

En las gráficas anteriores, hemos representado la forma de la barrera para diferentes tiempos y velocidades de las extremidades de nuestra barrera. La elección de $t=0s, 12s, 27s, 42s$ y $57s$ es un caso particular. Se podía haber elegido otros valores de t entre 0 y 60s.

En el caso de la figura 3.3, podemos observar una evolución lenta de los grados de libertad. La forma de la barrera va cambiando lentamente hasta presentar una forma casi-lineal a $t=57s$. La respuesta del modelo en este caso es aceptable ya que los grados de libertad no presentan cambios bruscos y las formas sucesivas de la barrera guardan una coherencia tal y como podemos observar en la figura 3.6

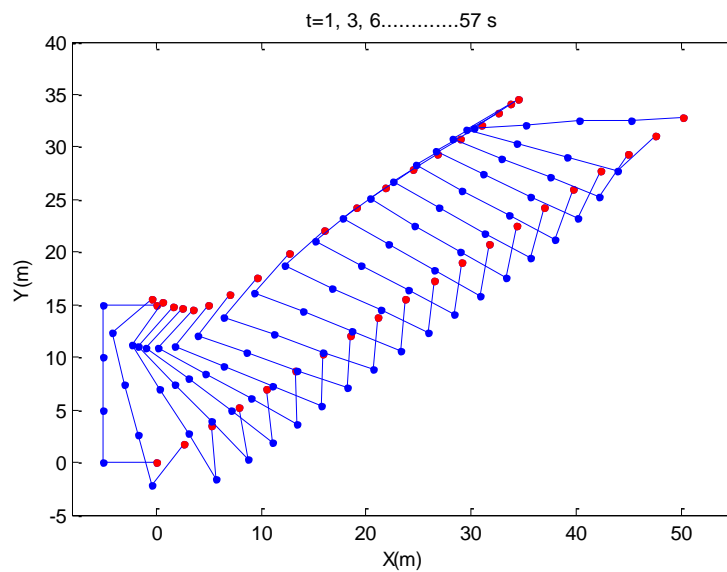


Figura 3.6: Evolución de la forma de la barrera para $\dot{P} = [0.8364 \ 0.5477 \ 0.8364 \ 0.5477]^T$

Observamos un comportamiento casi parecido en la figura 3.4. La única diferencia es que la forma de la barrera cambia más rápidamente. Esto se explica por el hecho de que aquí, las velocidades de las extremidades de la barrera (1.414 m/s) son mayores comparados con el caso de la figura 3.3 (1 m/s).

En el caso de la figura 3.5, podemos notar que para tiempos elevados ($t=42s$ y $t=57s$), la forma de la barrera empieza a acercarse a una línea. Este comportamiento en general no es deseable ya que puede llevarnos a una situación en la que las dos extremidades tiendan a moverse en direcciones contrarias. No obstante, se puede explicar dado que según la aproximación casi-estática que hicimos para obtener este modelo, era de esperar mejores resultados para velocidades bajas.

En general, el modelo obtenido es razonable y permite representar y estudiar el comportamiento dinámico de la barrera.

Con el fin de asegurar una buena configuración de la barrera de contención flexible en una operación dada, es necesario poder controlar su forma en cualquier momento. En otros términos, hay que diseñar un sistema de control para nuestro modelo.

Capítulo 4

Diseño de controladores

En el capítulo 3, considerando una aproximación casi-estática en la que se supone que las fuerzas inerciales son muy pequeñas comparadas con las fuerzas de arrastre de la barrera, hemos podido diseñar un modelo matemático para nuestra barrera de contención flexible. En el presente capítulo, nos dedicaremos al diseño de controladores para la forma de la barrera. Para ello, empezaremos describiendo la estrategia de control adoptada. Luego procederemos al diseño de los controladores y al final, representaremos los resultados obtenidos al aplicar los controladores diseñados al modelo obtenido en el capítulo anterior.

4.1 Estrategia de control

La ecuación diferencial que describe el modelo matemático de nuestra barrera de contención flexible corresponde a la relación (3.13) siguiente:

$$\dot{\theta} = -B^+ \cdot A \cdot \dot{P} \quad (3.13)$$

La variable que queremos controlar es el vector $\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5]^T$, formado por cinco elementos que definen en cada instante la forma de la barrera. La variable de control corresponde al vector $\dot{P} = [\dot{x}_L, \dot{y}_L, \dot{x}_R, \dot{y}_L]^T$ formado por 4 elementos (las velocidades según los ejes X e Y de las extremidades de la barrera). Las matrices A y B son de dimensiones 7×4 y 7×5 respectivamente. Dichas matrices dependen en cada instante del vector θ y de la posición de la extremidad izquierda de la barrera de contención.

La ecuación diferencial (3.13) corresponde a un sistema de 5 ecuaciones diferenciales no-lineales y acopladas.

Para el diseño de los controladores, hemos optado por una estrategia de control centralizado empleando la arquitectura de la figura 4.1 en la que la matriz K corresponde a los controladores y G al sistema en sí mismo²⁵.

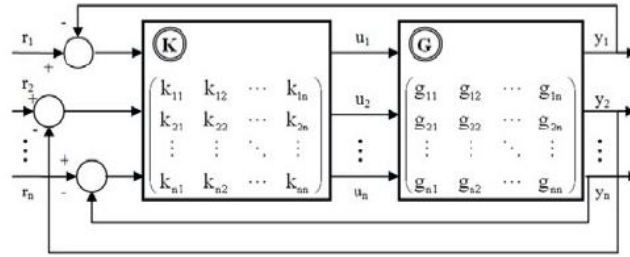


Figura 4.1: Arquitectura general de un sistema de control centralizado ²⁵

En la figura anterior, la matriz K trabaja como un bloque único para controlar las diferentes señales y reducir las interacciones ²⁶.

De este modo, si llamamos θ_r al vector de señales de referencia, el objetivo del controlador será el de calcular los valores del vector \dot{P} que aseguren que la salida del sistema sea igual a la referencia. Para ello, la ley de control elegida en este trabajo corresponde a la siguiente:

$$\dot{P} = -A^+ \cdot B \cdot K(s) \cdot (\theta_r - \theta) \quad (4.1)$$

Con A^+ la Pseudoinversa de Moore Pansore de la Matriz A .

El regulador $K(s)$ elegido aquí es una matriz 5×5 diagonal, cuyos elementos de la diagonal corresponden a controladores PI de fórmula siguiente para el elemento i :

$$K_{ii}(s) = k_{pi} + \frac{1}{s} k_{Ii} \quad (4.2)$$

En la fórmula anterior, k_{pi} corresponde al coeficiente proporcional del regulador PI y k_{Ii} la ganancia integral.

La principal dificultad es encontrar los parámetros (k_{pi}, k_{Ii}) que permiten estabilizar la barrera según la referencia fijada en el menor tiempo posible. De hecho esta tarea se complica aún más debido a que en la ley de control establecida (ecuación 4.1), se utiliza la pseudoinversa de la matriz A , lo que aumenta la dificultad en controlar de manera perfecta los 5 ángulos de la barrera.

4.2 Diseños de control

Antes de proceder al diseño de los controladores, hemos construido el modelo simulink de nuestra barrera fijando como condición inicial $\theta_0 = \left[\pi \quad \frac{3\pi}{4} \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{4} \quad 0 \right]^T$, correspondiente a la forma de la barrera tal y como viene representada en la figura 4.2. Luego hemos fijado el vector de referencia $\theta_r = \left[\pi \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad -\frac{\pi}{4} \quad -\frac{5\pi}{6} \right]^T$; la forma de la barrera correspondiente a este vector de referencia viene representada en la figura 4.3. Hemos elegido esta forma como referencia porque existe una gran diferencia entre ella y la forma inicial, lo que supondrá variaciones importantes de cada uno de los grados de libertad entre la situación inicial y el estado estacionario. De este modo los controladores diseñados podrían ser considerados como realistas. Además, la forma final corresponde a una posible situación en la que se encierre un vertido completamente en la barrera.

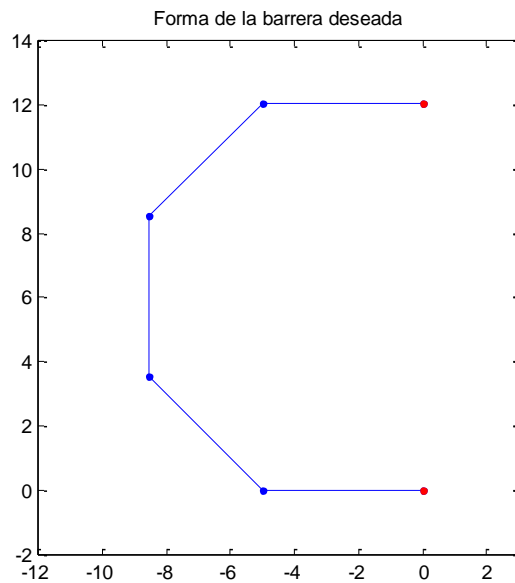


Figura 4.2: Forma inicial de la barrera.

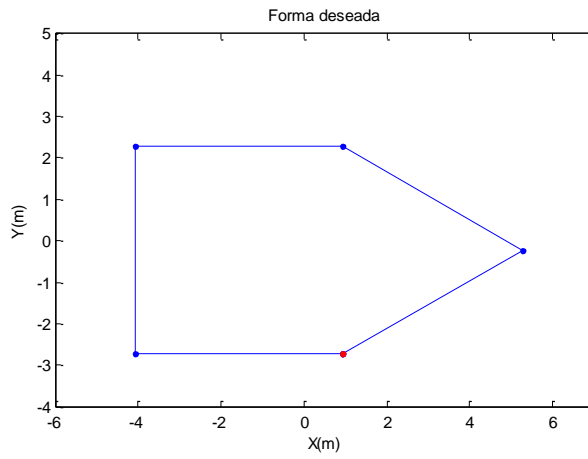


Figura 4.3: Forma final deseada para la barrera

El diagrama simulink construido para llevar a cabo esta tarea viene representado en la figura 4.4

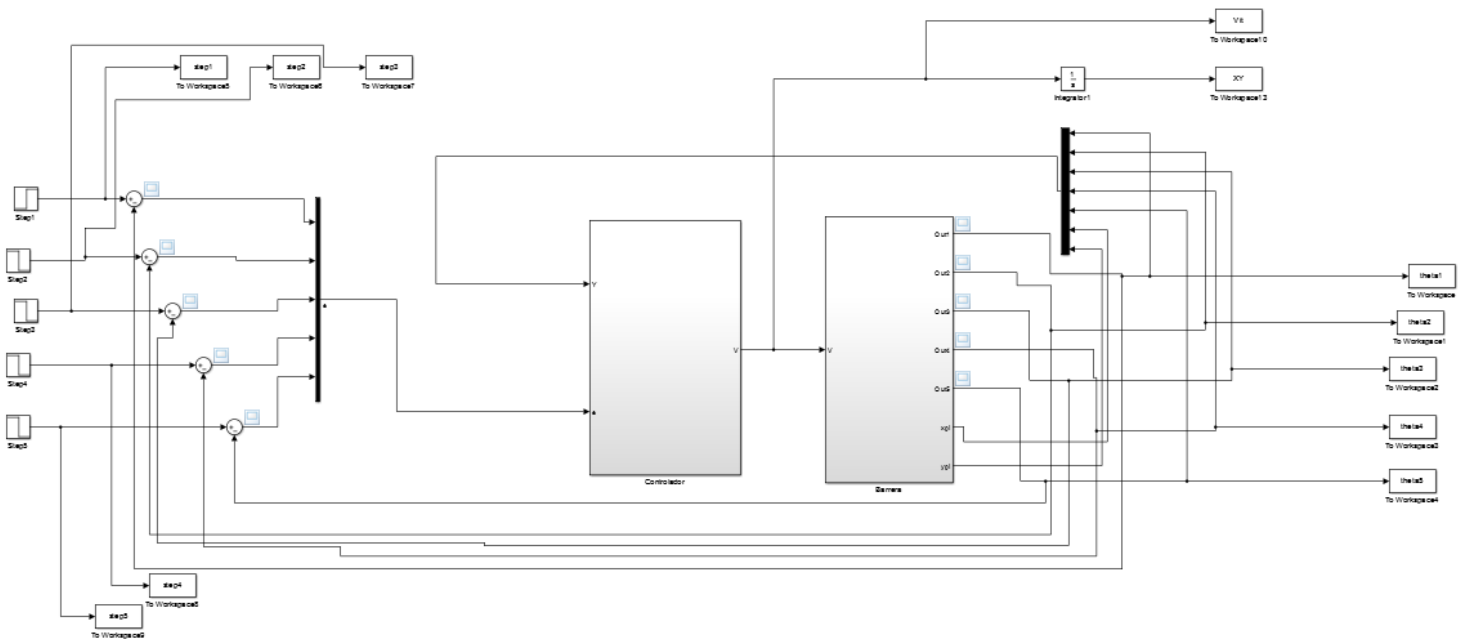


Figura 4.4: Diagrama Simulink del sistema completo

El diagrama de la figura 4.4 está formado por dos bloques principales.

- El bloque controlador que recibe como entrada los vectores $Y = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, x_L, y_L]^T$ y $e = \theta_r - [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5]$ (vector error), y calcula el vector de velocidades V como salida.

El diagrama simulink correspondiente a este bloque controlador (Figura 4.5) está formado por el regulador PI aplicado al vector error y una función que se encarga de realizar la operación

$$-A^+ . B . K(s) . (\theta_r - \theta) = -A^+ . B . PI(s) * e$$

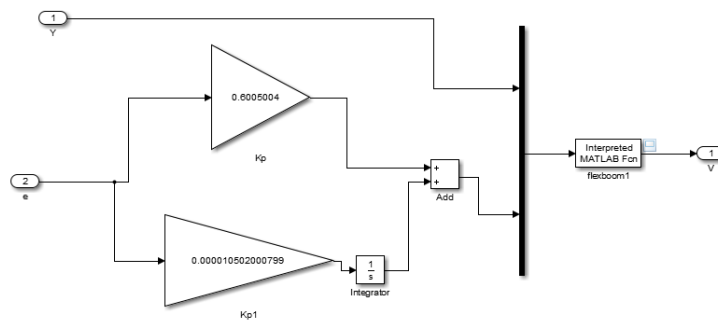


Figura 4.5: Diagrama simulink del Controlador

- El segundo bloque de la figura 4.4 corresponde al modelo de nuestra barrera flexible.

Su entrada es el vector de velocidades proporcionado por el controlador, y su salida es el vector $Y = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, x_L, y_L]^T$. El diagrama simulink correspondiente viene representado en la figura 4.6

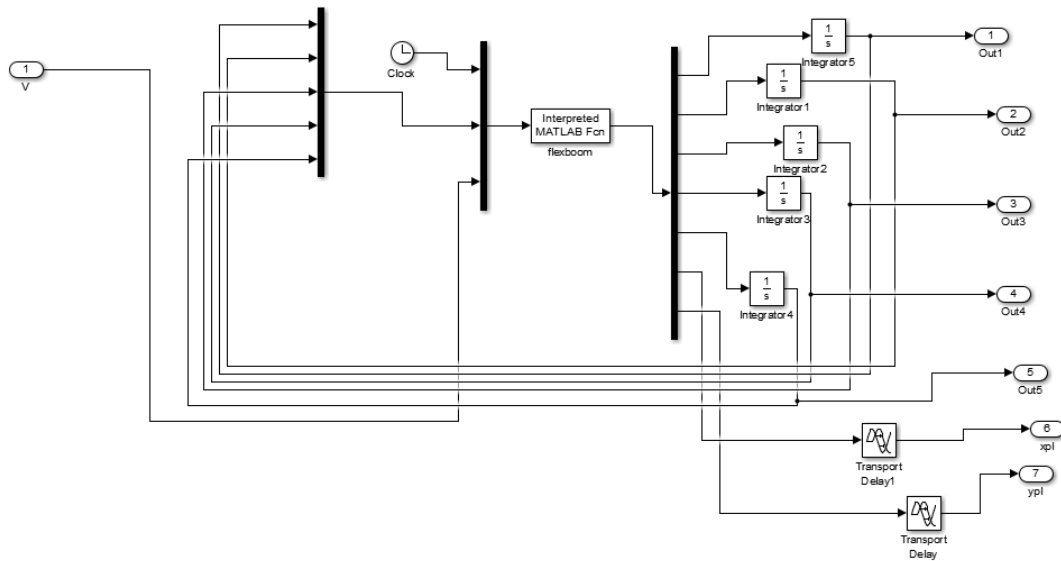


Figura 4.6: Diagrama simulink del modelo de la barrera

En la figura precedente, el bloque de la función “flexboom” calcula las ecuaciones diferenciales (3.13). Dichas ecuaciones se integran para obtener los valores de los ángulos en cada instante. Además de los ángulos, la función “flexboom” proporciona también en su salida los valores instantáneos de x_L e y_L ya que son necesarios para el cálculo de las matrices A y B para la iteración siguientes. Hemos añadido dos bloques de retardo en las variables x_L e y_L para evitar los errores de bucles algebraicos a la hora de simular.

Durante las simulaciones, nos hemos dado cuenta que la respuesta del sistema es muy sensible a los valores de k_p y k_I . Al inicio, hemos fijado un valor de 0.001 para k_p y $k_I = 0$. Tras múltiples operaciones de prueba y error, hemos determinado que el valor de k_p que permite un buen seguimiento de las referencias y un tiempo de asentamiento óptimo (50 s) es :

$$k_p = 0.6005004$$

En este valor de k_p todos los números después de la coma son significativos. Hemos comprobado que poniendo un valor ligeramente diferente del anterior (0.6005003 o 0.600539), la respuesta del sistema se degrada y el controlador deja de estabilizar el modelo.

Hemos conseguido que con este valor de la constante proporcional del regulador PI el sistema se estabilice lo más antes posible, pero los valores en el estacionario de las salidas del sistema no eran exactamente iguales a las referencias (sobre todo para los ángulos θ_3 y θ_4). Esto se puede justificar por el hecho de que el controlador es una matriz 4×5 y se obtiene calculando la pseudoinversa de la matriz A (7×4), haciendo que la acción del controlador sobre las variables controladas sea menos efectivo.

Para eliminar el error estacionario, hemos activado la componente integral del regulador PI. También tras varias operaciones de prueba y error el valor obtenido para el coeficiente integral es

$$k_I = 1.0502000799 \times 10^{-5}$$

En este caso también todos los dígitos después de la coma son significativos.

4.3 Simulaciones de los controladores

Con los controladores diseñados, hemos podido realizar simulaciones para comprobar el comportamiento del sistema. Los resultados obtenidos han sido satisfactorios. Los controladores diseñados llevan el sistema al estado estacionario en aproximadamente 60 segundos lo que es muy interesante dada la complejidad de la forma final deseada para la barrera y también el carácter no lineal del modelo de la misma.

Las variaciones de los ángulos en función del tiempo, están representadas en las gráficas de la figura 4.7. Para los cinco ángulos, podemos observar fluctuaciones importantes en las variables controladas para tiempos entre 0 y 60 segundos aproximadamente. A partir de los 60 segundos el sistema se estabiliza completamente y las salidas siguen con precisión a las referencias. Estos resultados nos confirman que los controladores diseñados responden a nuestras expectativas. También es importante mencionar que tanto simulando solo el modelo de la barrera como simulando el sistema total (Modelo + Sistema de control) los valores de los ángulos obtenidos siempre han estado comprendido entre -2π y 2π , por lo que no fue necesario incluir bloques limitadores en los diseños.

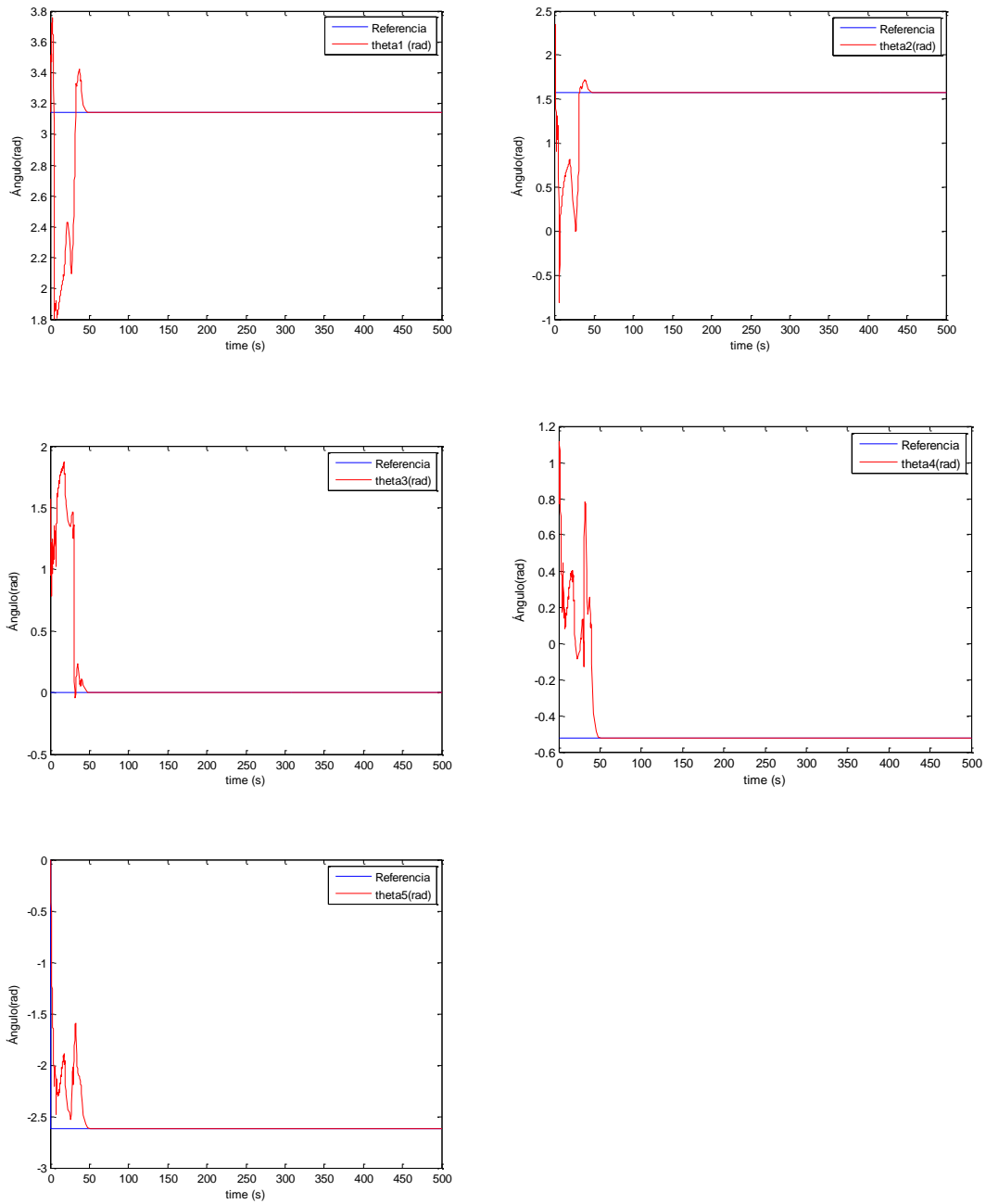


Figura 4.7: Evolución temporal de los ángulos

Las velocidades en las direcciones X e Y de las extremidades derecha (R) e izquierda (L) necesarias para conseguir los objetivos de control vienen representadas en las gráficas de la figura 4.8.

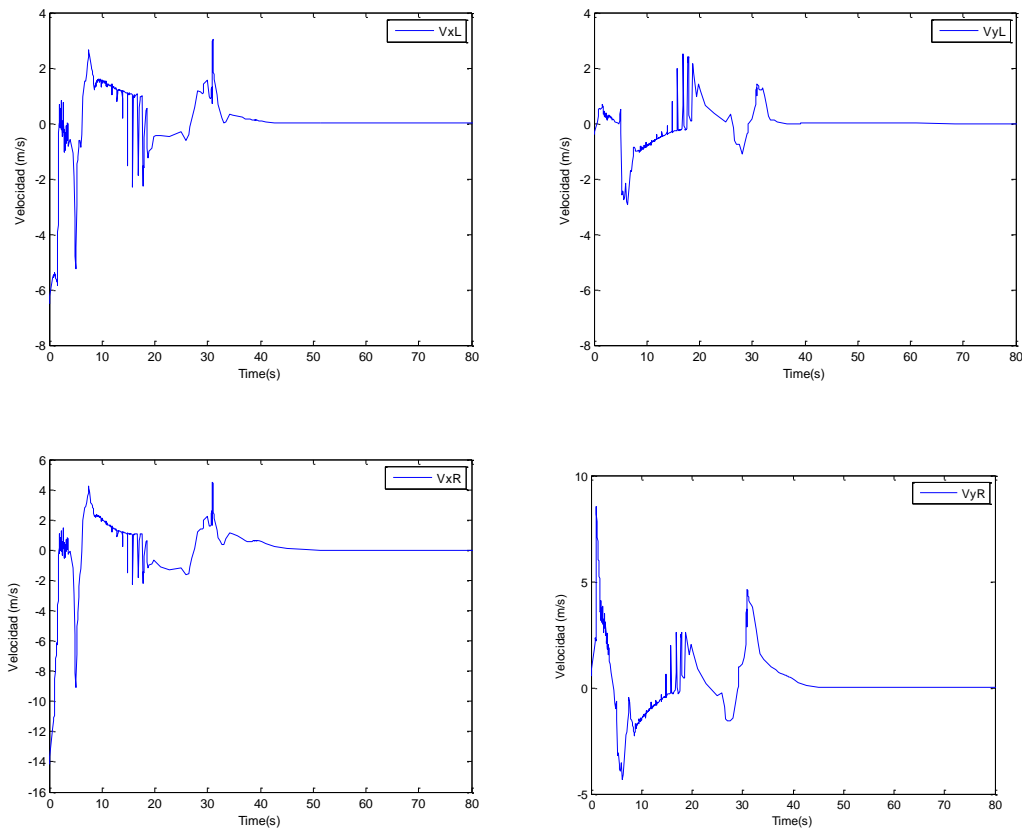


Figura 4.8: Evolución temporal de las velocidades

Como se puede observar en las gráficas de la figura precedente, al inicio de la operación se necesita aplicar velocidades relativamente altas en las extremidades de la barrera. Normalmente, en las experiencias de recogida de manchas mediante barcos y barrera de contención flexible, los barcos (al igual que las extremidades de la barrera) se desplazan a una velocidad constante de 2 m/s (al menos en los prototipos reales utilizados por el grupo ISCAR de la UCM). No obstante, las velocidades iniciales relativamente altas (10 m/s aproximadamente) obtenidas aquí son aceptables ya que solo son necesarias al inicio de la operación para orientar la barrera en las direcciones adecuadas. De hecho, podemos observar que dichas velocidades van decreciendo de manera exponencial hasta llegar a sus valores mínimos correspondiente al estado estacionario. Durante las simulaciones, hemos introducido bloques limitadores para saturar los valores de las velocidades a ± 2 m/s y observamos que el sistema se estabilizaba a 200 s.

En las gráficas de la figura de 4.9 hemos representado la evolución temporal de forma de la barrera junto con la forma deseada al final de la operación.

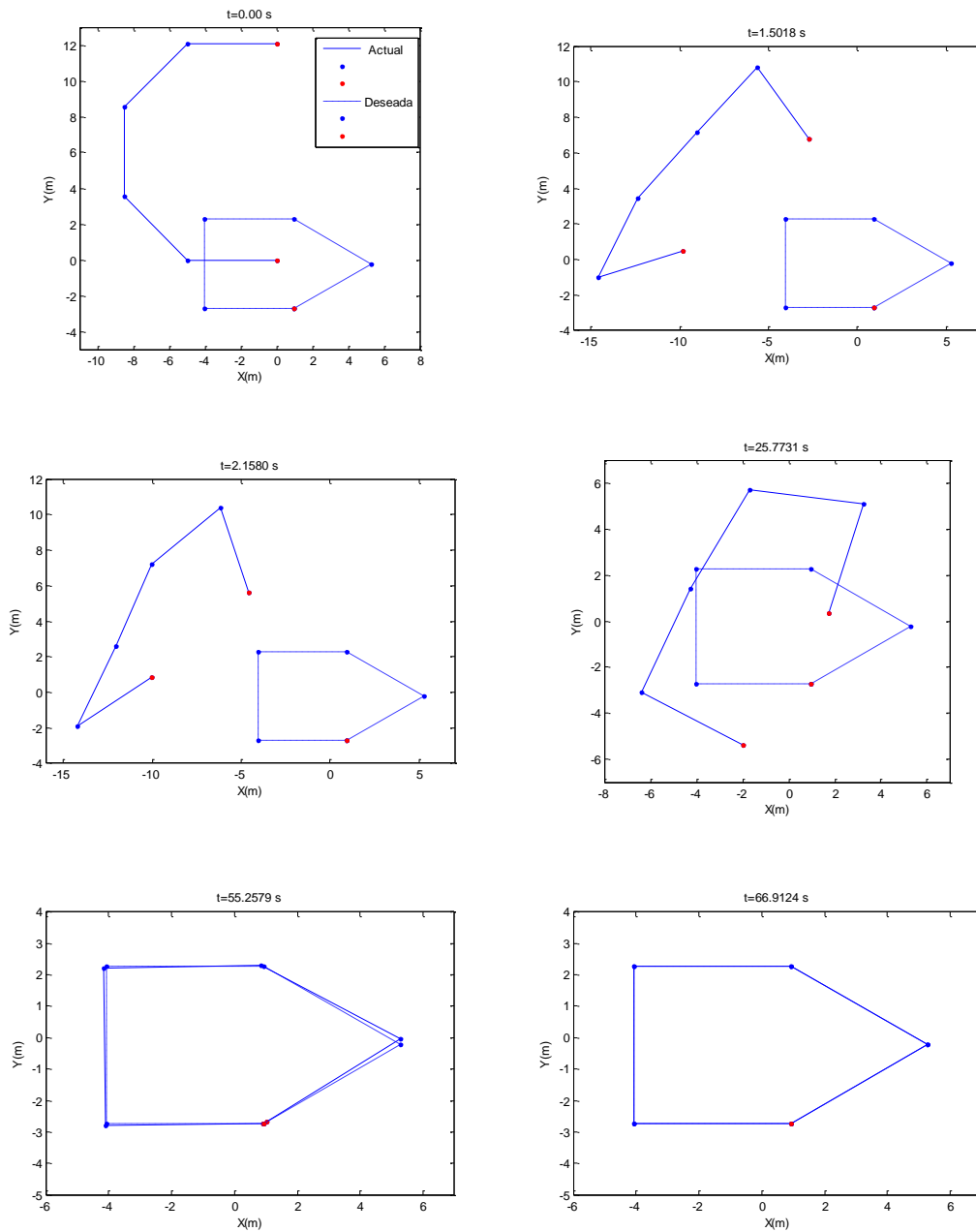


Figura 4.9: Evolución temporal de la forma de barrera

Como era de esperar, la forma de la barrera se va modificando con el tiempo acercándose a la forma deseada. Podemos observar que para $t=67$ s, la forma de la barrera es exactamente la forma deseada.

Las trazas de las 2 extremidades de la barrera están representadas en la figura 4.10. En esta figura, los puntos verde y rojo representan las posiciones inicial y final respectivamente.

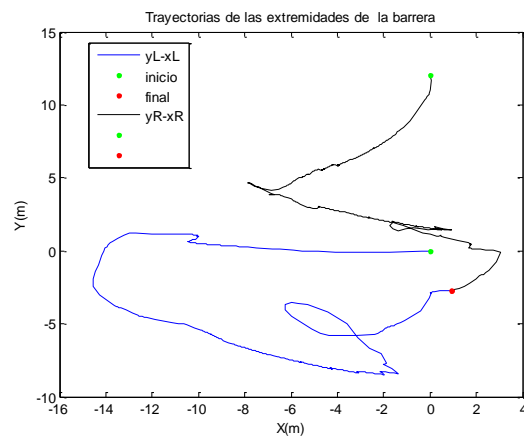


Figura 4.10: Trazas de las extremidades de la barrera.

A modo de resumen, podemos dividir una operación completa de recogida de una macha de contaminante en la superficie del mar en 4 etapas consecutivas como presentamos en el organigrama de la figura 4.11.

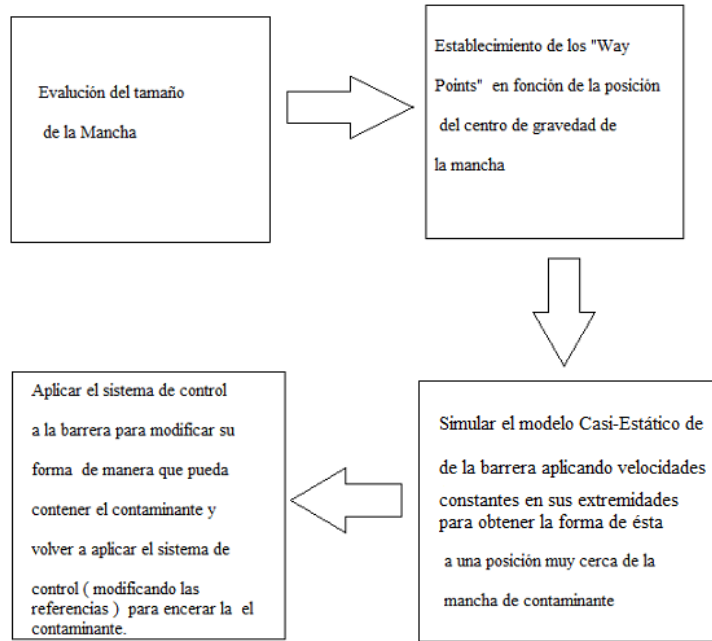


Figura 4.11: Etapas de una operación de recogida de una mancha de contaminante en la superficie del mar.

Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas

5.1 Conclusiones

Llegando al final de nuestro trabajo, podemos afirmar con satisfacción que hemos conseguido nuestro objetivo principal. La idea general de este proyecto era establecer un modelo matemático para una barrera de contención flexible, simularlo y diseñar un sistema de control para su forma. El modelo ideal estaría constituido de un número infinito de grados de libertad, lo que no es posible implementar. Para evitar este problema, hemos optado por un modelo discreto de la barrera formado por 5 segmentos de forma cilíndrica, interconectados mediante grados de libertad rotatorios. De esta forma, el modelo se redujo a un sistema con 7 grados de libertad, descrito por 7 ecuaciones diferenciales de segundo orden, no lineales y fuertemente acopladas. La integración de tal sistema requiere computadores de alta potencia de cálculo y además es necesario realizar un buen estudio matemático de las condiciones iniciales del problema que aseguren la convergencia de las soluciones. Nosotros en este trabajo, para simplificar el problema, hemos supuesto un modelo casi-estático, correspondiente a una situación en la que las fuerzas inerciales son despreciables comparadas con las fuerzas de arrastre aplicadas a la barrera. Esta aproximación permite una buena descripción del sistema para situaciones en las que la barrera se desplaza a velocidades bajas. De este modo hemos podido obtener un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales y acopladas que la representan de forma bastante realista.

Para el control de nuestro sistema, hemos adoptado una estrategia de control centralizado. El objetivo de control es el de determinar los valores de las velocidades de las extremidades izquierda y derecha de la barrera que permiten que ésta tenga una forma dada. Para el diseño de los controladores, hemos elegido una forma compleja como referencia y mediante la ley de control de la relación (4.1), hemos podido obtener que nuestro sistema de control establezca el modelo en 1 minuto aproximadamente. Esta respuesta es bastante interesante dada la complejidad que presenta el modelo. De hecho, debido a que tanto el sistema de control como el modelo están formados por matrices rectangulares cuyos elementos dependen de los grados de libertad, el rango de estas matrices va variando con el tiempo, haciendo complicado el control de todos los grados de libertad.

Terminamos nuestro trabajo proponiendo una posible estrategia en 4 etapas principales para preparar una operación de recogida en el mar utilizando dos barcos y una barrera de contención.

5.2 Perspectivas

En este trabajo, hemos considerado una aproximación casi-estática para el modelo matemático. Con esta aproximación hemos podido diseñar un sistema que permite el control de la forma de la misma. Un posible trabajo futuro sería partir de las ecuaciones diferenciales de segundo orden del sistema sin simplificar, para establecer un modelo matemático más completo de la barrera flexible. Así, además de la forma de la barrera, se podría controlar también su posición.

Sería también interesante estudiar un modelo discreto de la barrera con un número elevado de segmentos cilíndricos, aunque no sería determinante, pero sí más cercano a la realidad.

Por otro lado, para mejorar el sistema de control, se podría aplicar la lógica fuzzy para el cálculo de los coeficientes del regulador PI como proponen *Sharad et al*²⁷.

Bibliografía

- [1] Santos, M. (2011). Un enfoque aplicado del control inteligente. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 8(4), 283-296. [2] Harold F. Upton, *The Deepwater Horizon Oil Spill and the Gulf of Mexico Fishing Industry*, February, 2011.
- [3] Fingas, M. (2012). *The basics of oil spill cleanup*. CRC Press.
- [4] https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_oil_spills
- [5] https://en.wikipedia.org/wiki/Prestige_oil_spill
- [6] http://environment.about.com/od/petroleum/a/oil_spills_and_environment.htm
- [7] <http://www.wcmrc.com/wp-content/uploads/2011/07/Marine-Oils-Spill-Response-Techniques.pdf>
- [8] <http://wildpro.twycrosszoo.org/000ADOBES/NOAAMontereyD162/chapter5.pdf>
- [9] J. Menoyo, M . Santos, *Autonomous ship course intelligent control*, Facultad de Informática, UCM,
- [10] Giron-Sierra, J. M., Gheorghita, A. T., Angulo, G., & Jimenez, J. F. (2015). Preparing the automatic spill recovery by two unmanned boats towing a boom: Development with scale experiments. *Ocean Engineering*, 95, 23-33.
- [11] <http://whyfiles.org/2011/testing-seafood-in-the-gulf/>
- [12] Amini, A., & Schleiss, A. (2007). *Contractile floating barriers for confinement and recuperation of oil slicks* (No. LCH-BOOK-2008-035). EPFL-LCH.
- [13] Oebius, H. U. (1999). Physical properties and processes that influence the clean up of oil spills in the marine environment. *Spill Science & Technology Bulletin*, 5(3), 177-289.
- [14] Pereda, F. J., de Marina, H. G., Giron-Sierra, J. M., & Jimenez, J. (2011). Towards automatic oil spill confinement with autonomous marine surface vehicles. In *OCEANS 2011 IEEE-Spain*.

- [15] Bhattacharya, S., Heidarsson, H., Sukhatme, G. S., & Kumar, V. *Supplementary report: Cooperative control of autonomous surface vehicles for oil skimming and cleanup*. Technical report, February 2011. See URL <http://fling.seas.upenn.edu/~subhrabh/cgibin/wiki/index.php>.
- [16] Boushaba, F., Nouchi, S., Boulerhcha, M., & Muttin, F. (2005, May). Structural Modelling of Oil Spill Containment Booms by the Finite Element Method. In *International Oil Spill Conference* (Vol. 2005, No. 1, pp. 595-599). American Petroleum Institute.
- [17] The International Tanker Owners Pollution Federal Limited, *Use of boom in oil pollution response*, Technical Information paper, P-3
- [18] Goodman, R. H., Brown, H. M., An, C. F., & Rowe, R. D. (1996). Dynamic modelling of oil boom failure using computational fluid dynamics. *Spill Science & Technology Bulletin*, 3(4), 213-216.
- [19] Wicks III, M. (1969, December). Fluid dynamics of floating oil containment by mechanical barriers in the presence of water currents. In *International Oil Spill Conference* (Vol. 1969, No. 1, pp. 55-106). American Petroleum Institute.
- [20] Iglesias, G., Castro, A., & Fraguera, J. A. (2010). Artificial intelligence applied to floating boom behavior under waves and currents. *Ocean Engineering*, 37(17), 1513-1521.
- [21] Kim, Y. H., Lee, S. W., Yang, H. S., & Shell, D. A. (2012). Toward autonomous robotic containment booms: visual servoing for robust inter-vehicle docking of surface vehicles. *Intelligent Service Robotics*, 5(1), 1-18.
- [22] Zahugi, E. M. H., Shanta, M. M., & Prasad, T. V. (2012). Design of multi-robot system for cleaning up marine oil spill. *International Journal of Advanced Information Technology (IJAIT)* Vol, 2.
- [23] Arrichiello, F., Heidarsson, H., Chiaverini, S., & Sukhatme, G. S. (2010, May). Cooperative caging using autonomous aquatic surface vehicles. In *Robotics and automation (ICRA), 2010 IEEE international conference on* (pp. 4763-4769). IEEE.

- [24] Zheng, H., Negenborn, R. R., & Lodewijks, G. (2014, August). Trajectory tracking of autonomous vessels using model predictive control*. In *19th IFAC World Congress (IFAC WC'14)*.
- [25] Morilla, F., Garrido, J., & Vázquez, F. (2013). Control multivariable por Desacoplo. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 10(1), 3-17.
- [26] Garrido Jurado, J. (2012). Diseño de sistemas de control multivariable por desacoplo con controladores PID.
- [27] Tiwari, S. K. (2011). *Analysis of fuzzy PID and Immune PID controller for three tank liquid level control* (Doctoral dissertation, Thapar University).