

Máster en Ingeniería de Sistemas y Control



**Universidad Nacional de Educación a Distancia
Universidad Complutense de Madrid**

Proyecto Fin de Master Planificación de trayectorias utilizando métodos de avance/propagación rápidos

Alumno: Antonio Revuelta Bayod

Directores: Jesús Manuel Cruz García y José Antonio López Orozco

Autorización

Autorizamos a la Universidad Complutense de Madrid (UCM) y a la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED) a difundir y utilizar con fines académicos, no comerciales y mencionando expresamente a sus autores, tanto la memoria de este Trabajo Fin de Máster, como el código, la documentación y/o el prototipo desarrollado.

Firmado:

Resumen

El objetivo de este trabajo es desarrollar un planificador de trayectorias para vehículos marinos no tripulados en formación o realizando tareas colaborativas, basándose en una familia de técnicas computacionalmente robustas y eficientes: los métodos de nivel y de avance rápido, *Fast Marching*. Tras familiarizarnos con los métodos matemáticos de avance rápido, se ha aplicado el método Fast Marching Square, FM^2 al cálculo de la trayectoria de un único vehículo autónomo, y más tarde a una formación de éstos. Posteriormente se ha extendido a la simulación de vehículos autónomos marinos, con sus propias escalas características, diferentes de la aplicación original, las formaciones de robots.

Palabras clave:

Ecuación eikonal, Fast Marching Method (FMM), Fast Marching Square (FM^2), planificador de trayectorias, USVs (Unmanned Surface Vehicles)

Abstract

The aim of this investigation is to implement a path planning of marine unmanned vehicle formations, carrying out collaborative tasks. This path planning tool is done using a group of robust and reliable computational methods: the level sets and Fast Marching methods. In particular, the Fast Marching Square method, FM^2 for the path planning of robot formations, was implemented. Later, this algorithm was extended to marine unmanned vehicle formation path planning, taking into account its own length and time characteristics, different of those corresponding to the formations of robots.

Keywords:

Eikonal equation, Fast Marching Method (FMM), Fast Marching Square (FM^2), path planning, USVs (Unmanned Surface Vehicles)

ÍNDICE

Resumen	3
Abstract.....	3
ÍNDICE	4
Lista de figuras	5
1. Introducción	6
Antecedentes	6
Objetivos del trabajo	7
Estructura del trabajo.....	7
2. El método de propagación rápida (<i>Fast Marching Method</i>).....	8
Introducción	8
Solución de la ecuación eikonal.....	9
El método de propagación rápido (<i>Fast Marching Method</i> FMM)	11
Planificación de trayectorias con FMM	14
3. Planificación de trayectorias de formaciones de robots con FM^2	16
Introducción	16
El algoritmo <i>Fast Marching Square</i> FM^2	17
Planificación de trayectorias de formaciones con FM^2	21
Simulaciones	22
Discusión y conclusiones	31
4. Planificación de trayectorias de formaciones de vehículos en un medio marino.....	32
Introducción	32
Saturación del potencial $W(x)$	33
Trayectorias de formaciones de vehículos marinos no tripulados FM^2	36
Simulaciones con obstáculos móviles.....	41
5. Conclusiones y trabajo futuro	50
Conclusiones	50
Trabajo futuro	51
Referencias:.....	52

Lista de figuras

Figura 2.1: Evolución del método FMM en una malla 5x5	12
Figura 2.2: Test del método FMM. Sensibilidad al tamaño de malla.....	13
Figura 2.3: Ejemplo de planificación de una trayectoria con FMM	15
Figura 3.1: Pasos del algoritmo FM^2	19
Figura 3.2: Campos potenciales del FM^2	20
Figura 3.3: Diagrama de flujo para la planificación de una formación de robots con FM^2 [9]	23
Figura 3.4: Mapa de velocidades y potenciales D_i^t de la formación en un instante.....	25
Figura 3.5: Potenciales D_i^t de los seguidores calculados en un instante de tiempo.	25
Figura 3.6: Secuencia del movimiento de una formación triangular de robots con FM^2	26
Figura 3.7: Velocidades para cada vehículo de la formación triangular	26
Figura 3.8: Secuencia del movimiento de una formación lineal de robots con FM^2	27
Figura 3.9: Velocidades para cada vehículo de la formación lineal	27
Figura 3.10: Secuencia del movimiento de una formación con 4 robots con FM^2	28
Figura 3.11: Velocidades para cada vehículo de la formación con 4 USVs	28
Figura 3.12: Área y perímetro de la formación triangular a lo largo del tiempo	29
Figura 3.13: Área y perímetro de la formación lineal de tres USVs a lo largo del tiempo	29
Figura 3.14: Área y perímetro de la formación de cuatro USVs a lo largo del tiempo.....	29
Figura 3.15: Mapa de velocidades y potenciales W_{leader}^t a partir de las funciones de incertidumbre [9]	30
Figura 4.1: Ejemplo (Gijón) de planificación de una trayectoria con FMM y FM^2	34
Figura 4.2: Ejemplo (Luanco) de planificación de una trayectoria con FMM y FM^2	35
Figura 4.3: Ejemplo (Luanco) de planificación de una trayectoria con FM^2 no saturado y saturado	36
Figura 4.4: Secuencia del movimiento de una formación triangular de USVs marinos con FM^2 (potencial W_{leader})	37
Figura 4.5: Secuencia del movimiento de una formación triangular de USVs marinos con FM^2 (potencial D_{leader})	38
Figura 4.6: Secuencia del movimiento de una formación lineal de USVs marinos con FM^2 (potencial W_{leader})	39
Figura 4.7: Secuencia del movimiento de una formación lineal de USVs marinos con FM^2 (potencial D_{leader})	40
Figura 4.8: Modelo de un obstáculo móvil	41
Figura 4.9: Secuencia del movimiento de una formación triangular de USVs marinos ante un obstáculo dinámico(potencial W_{leader})	44
Figura 4.10: Secuencia del movimiento de una formación triangular de USVs marinos ante un obstáculo dinámico(potencial D_{leader})	45
Figura 4.11: Captura en un instante temporal de los potenciales de los vehículos no líderes de la formación triangular.....	46
Figura 4.12: Secuencia del movimiento de una formación lineal de USVs marinos ante un obstáculo dinámico(potencial W_{leader})	47
Figura 4.13: Secuencia del movimiento de una formación lineal de USVs marinos ante un obstáculo dinámico(potencial D_{leader})	48
Figura 4.14: Dependencia de las trayectorias con el radio mínimo de giro	49

1. Introducción

Antecedentes

El problema de la planificación de trayectorias ha sido ampliamente estudiado desde los inicios de la Inteligencia Artificial. Muchos investigadores consideran que el problema de la planificación de trayectorias está suficientemente resuelto para la mayoría de los problemas de movimiento en robots o vehículos autónomos. Sin embargo todavía es un campo de investigación muy activo principalmente en la búsqueda de métodos mejores y más rápidos o que sean capaces de modelizar el entorno real de forma más compleja, para que la planificación del movimiento no requiera un esfuerzo computacional grande.

Aunque existen buenas soluciones, ninguna de ellas puede considerarse como general. No hay un único algoritmo capaz de satisfacer todos los requerimientos que un algoritmo de planificación de trayectorias necesita satisfacer: baja complejidad computacional, fiabilidad, robustez, trayectorias suaves, soluciones óptimas. Algunas aproximaciones sólo funcionan bien en ciertos casos especiales o no son capaces de adaptarse a nuevos modelos de robots o ambientes. Así, por ejemplo, aquellos algoritmos que funcionan bien en pocas dimensiones, se convierten en muy lentos al incrementar la dimensionalidad del problema. Del mismo modo, los algoritmos más rápidos proporcionan soluciones estocásticas con pocas garantías sobre sus soluciones. Otros planificadores son difíciles de ajustar si la configuración del espacio no sigue una métrica euclídea. Por otro lado, la evolución tecnológica hacia robots más pequeños y ágiles con menores capacidades computacionales, hace necesarias soluciones más rápidas. Existen además problemas con las restricciones cinemáticas y dinámicas de los vehículos, que de acuerdo con el estado del arte actual, hace que los planificadores necesiten de cientos de segundos para obtener una solución satisfactoria.

Es importante señalar las diferencias entre planificación de la trayectoria y planificación del movimiento. La planificación del camino o la trayectoria trata de calcular una trayectoria puramente geométrica que va de un estado a otro. De este modo, los estados son sólo movimientos y orientaciones. Sin embargo, la planificación del movimiento también calcula las propiedades dinámicas a lo largo del camino calculado, tales como velocidades y aceleraciones. Aunque hay una distinción entre planificación de trayectorias y de movimiento, algunas veces ambos términos se usan indistintamente, o la planificación del movimiento puede resolverse incrementando la dimensionalidad de la configuración del espacio y aplicando técnicas de planificación de trayectorias.

La planificación del movimiento es generalmente más compleja, a menudo se resuelve en una aproximación a dos niveles. En el primer nivel se aborda la planificación de la trayectoria, y posteriormente una capa de control trata de conducir el sistema a lo largo del camino especificado. Es difícil, poder asegurar que la trayectoria final mantendrá las características iniciales.

El algoritmo de avance rápido, Fast Marching, es un algoritmo simple pero muy potente que permite resolver los problemas de la planificación de trayectorias y del movimiento. La trayectoria calculada mediante este algoritmo es la más corta en longitud. Sin embargo, ésta

puede no ser la más segura debido a la proximidad a los obstáculos, e incluso no ser factible debido a las restricciones cinemáticas de los vehículos. Además, la trayectoria calculada, no tiene por qué ser la más corta en tiempo, ya que la proximidad a los obstáculos puede obligar a un movimiento más lento para disminuir el riesgo de colisión. Debido a estas limitaciones que presenta el método Fast Marching, se han desarrollado diferentes variantes de éste, como las que lo combinan con el uso de diagramas de Voronoi [5], [7], o la finalmente utilizada en este trabajo, Fast Marching Square FM² [8], [9] que se ha revelado como un método muy robusto y fiable.

Centrándonos en la aplicación final, motivación del presente trabajo, hay operaciones marinas, como el confinamiento de derrames, remolque, rescate, etc, que necesitan la cooperación y coordinación en tiempo real de varios barcos. La investigación en barcos trabajando conjuntamente ha empezado recientemente. Se han considerado diferentes escenarios, como por ejemplo, el remolque, el control de formaciones de barcos o la sincronización de dos barcos.

Objetivos del trabajo

El presente trabajo se centra en analizar las capacidades del método Fast Marching, y en particular en la variante propuesta por Garrido et al. [8], [9], el Fast Marching Square FM² para la planificación de trayectorias de formaciones de robots. Después se estudia la aplicación de este método a la planificación de trayectorias de vehículos marinos, en la línea del trabajo desarrollado por Liu y Bucknall [13] en formaciones de vehículos autónomos y ante obstáculos móviles.

Estructura del trabajo

La memoria de este trabajo se organiza:

- En el capítulo 2, se presentan los esquemas básicos de discretización y resolución de la ecuación eikonal, y el método de avance rápido, Fast Marching Method.
- En el capítulo 3, se presenta y explica el algoritmo Fast Marching Square FM² [8], [9], para la planificación de trayectorias, tanto para vehículos autónomos individuales, como su extensión a formaciones de vehículos.
- En el capítulo 4, se aplica el método FM² a formaciones de barcos, en entornos marinos arbitrarios, teniendo en cuenta las escalas, diferentes de las formaciones de robots para las que en un principio fue planteada esta metodología.
- Finalmente, en el capítulo 5 se presenta un resumen de las conclusiones del trabajo, y las posibles tareas futuras a abordar.

2. El método de propagación rápida (*Fast Marching Method*)

Introducción

En este capítulo introducimos el método FMM, y su aplicación a la planificación de trayectorias.

El método de propagación rápido, Fast Marching Method (FMM) es un caso particular del método de las curvas de nivel, Level Sets Method, inicialmente desarrollado por Osher y Sethian [18], [23]. Se ha utilizado ampliamente desde que fue propuesto como una solución para problemas de control isotrópico utilizando discretizaciones semi-lagrangianas de primer orden sobre mallas cartesianas. Su principal campo de aplicación es la robótica [5], [6], [7], [12] y la visión por computador y el procesamiento de imágenes [4], [16], [17], . Además, se ha demostrado útil en muchas otras aplicaciones como la tomografía o la sismología [19], [20], [21], [27]. El FMM fue originalmente propuesto para simular la propagación de un frente de onda a través de una discretización regular del espacio. Posteriormente, se han propuesto otras aproximaciones extendiendo estos métodos a otras discretizaciones triangulares, y mallas no estructuradas [2], [22].

El FMM se puede entender intuitivamente como la expansión de una onda. Si una piedra se arroja sobre un estanque, se origina un frente de onda y esta onda se expande con una forma circular alrededor del punto donde la piedra cae. En este ejemplo el medio es agua, y la velocidad de expansión de la onda es siempre la misma, y por lo tanto el frente de onda es circular. Si el experimento se repite en agua mezclada con aceite, se podría observar como la onda se expande a diferentes velocidades en cada medio, y por lo tanto el frente de onda deja de ser circular. Si se considera otro punto como destino final, el frente de onda llegará a ese punto después de un cierto tiempo. El camino que el frente de onda ha seguido desde el origen hasta el objetivo final, será el camino más corto en términos de tiempo, considerando que la velocidad de propagación a lo largo del camino es la velocidad de expansión del frente de onda, que difiere según el medio de propagación. La trayectoria de la onda se puede calcular utilizando el método del gradiente descendente, siguiendo la dirección de máximo cambio. Cuanto más suaves son los cambios en la velocidad de propagación de la onda, más suave es la trayectoria. El FMM calcula los tiempos de llegada del frente de onda desde un punto a todos los puntos alcanzables del espacio.

El FMM asume que la velocidad de propagación es siempre no negativa, y por lo tanto, el frente de onda nunca se contrae. Normalmente las velocidades de propagación se definen por el ambiente o por capas algorítmicas de más alto nivel por lo que esta hipótesis es fácilmente asumible. Si se utiliza sólo una única onda, el método FMM asegura que el mapa del tiempo de llegada tiene un único mínimo, local y global en el punto de partida.

El FMM calcula el tiempo de llegada para un punto en cada iteración. Esto se lleva a cabo seleccionando los puntos no visitados con el menor valor calculado. Cuando evaluamos un punto, su valor se incrementa teniendo en cuenta la velocidad de propagación y sólo los vecinos con menores tiempos en cada dimensión. Como las velocidades son siempre no

negativas, serán al menos igual de altas que las de su vecino con menor valor, y por lo tanto no puede aparecer un mínimo local. Sin embargo, son posibles puntos silla, pero no son un problema para el posterior cálculo de trayectorias con el algoritmo del gradiente descendente. En este caso, serán posibles dos soluciones con el mismo tiempo de propagación, en el que una de los dos se elige en función de la implementación del método del gradiente descendente.

En el método FMM, la onda es una interfaz que se propaga en un medio, como una curva plana en un dominio bidimensional, o como una superficie en uno tridimensional. Esta interfaz que se propaga es perpendicular en todo punto e instante a la dirección de propagación. El movimiento de expansión de una onda se ha modelado mediante la ecuación eikonal formulada por Osher y Sethian [18]

$$\|\nabla\phi\| = \frac{1}{F(x)} \quad \forall x \in \Omega, \quad (2.1)$$

con $\phi(x) = 0$ para $x \in \partial\Omega$

ecuación no lineal, donde el gradiente de la función del tiempo de llegada de la onda, o distancia al punto o puntos origen de la onda, ϕ , es inversamente proporcional a la velocidad local de la onda $F(x)$. Esta ecuación que aparece en problemas de propagación de onda, se deriva de las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo y proporciona un vínculo entre la óptica física y la óptica geométrica. En la óptica geométrica, el principio del mínimo tiempo de Fermat para la velocidad de propagación de la luz en un medio con índice de refracción variable es equivalente a la ecuación eikonal, ecuación fundamental de la óptica geométrica.

Solución de la ecuación eikonal

En esta sección, se detalla el método más común de discretización de primer orden de la ecuación eikonal (2.1). La ecuación discreta eikonal se presenta en dos dimensiones, como las aplicaciones objeto del presente trabajo.

Se utiliza un esquema de diferenciación *upwind*, para aproximar las derivadas parciales de $\phi(x)$, tomando las derivadas en las direcciones x e y en el sentido creciente de $\phi(x)$. De este modo, se denota como $D_{ij}^{\pm x}$, a la derivada en la dirección $\pm x$. Siendo Δx e Δy el espaciado de la malla en las direcciones x e y , la discretización de la ecuación eikonal resulta

$$\begin{aligned} \phi_x(x) &\approx D_{ij}^{\pm x} \phi = \frac{\phi_{i\pm 1 j} - \phi_{ij}}{\pm \Delta x} \\ \phi_y(x) &\approx D_{ij}^{\pm y} \phi = \frac{\phi_{i j\pm 1} - \phi_{ij}}{\pm \Delta y} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\max(D_{ij}^{-x} \phi, 0)^2 + \min(D_{ij}^{+x} \phi, 0)^2 + \\ &\max(D_{ij}^{-y} \phi, 0)^2 + \min(D_{ij}^{+y} \phi, 0)^2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{F_{ij}^2} \quad (2.3)$$

Un esquema ligeramente diferente que resulta más conveniente es [23]

$$\left\{ \begin{aligned} &\max(D_{ij}^{-x} \phi, -D_{ij}^{+x} \phi, 0)^2 + \\ &\max(D_{ij}^{-y} \phi, -D_{ij}^{+y} \phi, 0)^2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{F_{ij}^2} \quad (2.4)$$

Reemplazando (2.2) en la anterior ecuación, y denotando

$$\begin{aligned}
\phi &= \phi_{ij} \\
\phi_x &= \min(\phi_{i-1,j}, \phi_{i+1,j}) \\
\phi_y &= \min(\phi_{i,j-1}, \phi_{i,j+1})
\end{aligned} \tag{2.5}$$

la ecuación eikonal en un espacio discreto de dos dimensiones se puede reescribir como

$$\max\left(\frac{\phi - \phi_x}{\Delta x}, 0\right)^2 + \max\left(\frac{\phi - \phi_y}{\Delta y}, 0\right)^2 = \frac{1}{F_{ij}^2} \tag{2.6}$$

Como se asume que la velocidad del frente es positiva, ($F > 0$), ϕ debe ser mayor que ϕ_x y ϕ_y , siempre y cuando el frente de onda no haya ya visitado el punto (i,j) . Por lo tanto, se puede simplificar la anterior ecuación como:

$$\left(\frac{\phi - \phi_x}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\phi - \phi_y}{\Delta y}\right)^2 = \frac{1}{F_{ij}^2} \tag{2.7}$$

Esta ecuación es una ecuación cuadrática regular, de la forma $a\phi^2 + b\phi + c = 0$, donde

$$\begin{aligned}
a &= \Delta_x^2 + \Delta_y^2 \\
b &= -2(\Delta_y^2 \phi_x + \Delta_x^2 \phi_y) \\
c &= \Delta_y^2 \phi_x^2 + \Delta_x^2 \phi_y^2 - \frac{\Delta_x^2 \Delta_y^2}{F_{ij}^2}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

cuyas soluciones resultan

$$\phi = \frac{\Delta_y^2 \phi_x + \Delta_x^2 \phi_y}{\Delta_x^2 + \Delta_y^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\Delta_x^2 \Delta_y^2}{(\Delta_x^2 + \Delta_y^2) F_{ij}^2} - \frac{4\Delta_x^2 \Delta_y^2 (\phi_x - \phi_y)^2}{(\Delta_x^2 + \Delta_y^2)^2}} \tag{2.9}$$

Las dos posibles soluciones de esta ecuación deben ser reales y por lo tanto el radicando debe ser positivo. Además se debe cumplir que ϕ debe ser mayor que ϕ_x y ϕ_y , ya que la propagación del frente de onda implica causalidad. Esto es, para alcanzar un punto en un cierto instante de tiempo, debe haber viajado el frente de onda a los puntos vecinos de éste, con menores valores de ϕ . La solución propuesta de la ecuación eikonal no garantiza la causalidad del mapa de distancias, cuando F y Δx , Δy toman valores arbitrarios. Por lo tanto la causalidad de las soluciones de la ecuación eikonal se debe comprobar.

Para facilitar la discusión, si suponemos $\Delta x = \Delta y = h$, la ecuación (2.9) resulta:

$$\phi = \frac{\phi_x + \phi_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2h^2}{F_{ij}^2} - (\phi_x - \phi_y)^2} \tag{2.10}$$

Como la solución sólo es aceptable si $\phi \geq \max(\phi_x, \phi_y)$, de acuerdo con la causalidad de la ecuación, la solución con el signo menos en la raíz no será válida y por lo tanto

$$\phi = \frac{\phi_x + \phi_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2h^2}{F_{ij}^2} - (\phi_x - \phi_y)^2} \tag{2.11}$$

Desarrollando esta igualdad se llega a la expresión

$$(\phi_x - \phi_y)^2 + 2(\phi - \phi_x)(\phi - \phi_y) = \frac{h^2}{F_{ij}^2} \tag{2.12}$$

Con la que se demuestra la condición *upwind*

$$\phi \geq \max(\phi_x, \phi_y) \Leftrightarrow |\phi_x - \phi_y| \leq \frac{h}{F} \quad (2.13)$$

Si esta condición falla, entonces debe considerarse la propagación de la onda en una dirección preferente, x o y , desde el valor más pequeño de ϕ_x y ϕ_y hacia (i,j)

$$\frac{1}{F_{ij}} = \|\nabla\phi\| \approx \frac{\phi - \min(\phi_x, \phi_y)}{h} \quad (2.14)$$

de donde

$$\phi = \min(\phi_x, \phi_y) + \frac{h}{F_{ij}} \quad (2.15)$$

El método de propagación rápido (*Fast Marching Method FMM*)

El método de propagación rápido o Fast Marching es el método más común utilizado para resolver la ecuación eikonal (2.1), donde $F(x)$ es una función de velocidad monótona para una interface que avance. Si $\phi^{-1}(0)$ representa la interface inicial y ϕ resuelve la ecuación eikonal, entonces $\phi^{-1}(t)$ proporciona la posición de la interface con velocidad normal $F(x)>0$ en el instante t . La ventaja de este método sobre el método de curvas de nivel o level-sets original es que la evolución entera del frente se evalúa en un único paso sobre los elementos de la malla en una operación de orden $O(N \times \log N)$ para N puntos de la malla. Es también ventajoso sobre otros algoritmos de seguimiento o propagación de frentes al usar técnicas tomadas de las leyes de conservación hiperbólicas para hacer avanzar el frente en presencia de esquinas. En el método Fast Marching, la ecuación eikonal se resuelve utilizando diferencias finitas *upwind* para aproximar $\nabla\phi$. El uso de diferencias finitas *upwind* indica causalidad, o sea, existe una dirección para el flujo de información, que se propaga desde el contorno inicial $\phi^{-1}(0)$ hacia mayores valores de ϕ . Esta causalidad significa que el valor de ϕ en un punto sólo depende del valor de ϕ en puntos en los que es más pequeño. Por lo tanto, si se resuelven para los valores de ϕ de una forma monótona, entonces las diferencias *upwind*, son siempre válidas y todos los puntos de la malla son finalmente calculados.

Se describen a continuación los pasos del algoritmo del método Fast Marching. Para empezar, todos los puntos de la malla se separan en tres conjuntos disjuntos: el conjunto de puntos aceptados A, el conjunto de puntos frontera F, y el de los puntos distantes D. Los puntos en el conjunto A se consideran calculados, y son siempre los más próximos a la interface o frente de onda inicial que el resto de los dos conjuntos. Los puntos en F están siempre en la pila para que el mejor candidato pueda ser encontrado. Los puntos en el conjunto D se consideran demasiado lejos de la interface inicial para ser posibles candidatos para su inclusión en A.

- 1) Inicialización. Los puntos iniciales, de donde surgen las ondas se incluyen en el conjunto de puntos aceptados A, y se les asigna el valor $\phi=0$. Los puntos adyacentes a éstos pasan a formar el conjunto de puntos frontera F.
- 2) La ecuación eikonal se evalúa en todos los puntos o celdas del conjunto frontera F. De entre todos ellos, se elige el que tiene un menor valor de ϕ , pasándolo al conjunto de valores aceptados. Las celdas adyacentes a este nuevo elemento aceptado, y que pertenecían al conjunto de celdas distantes del frente, pasan al conjunto frontera.

- 3) Se vuelve a evaluar la ecuación eikonal en los nuevos puntos frontera, y se repite el paso anterior, hasta que todas las celdas libres, inicialmente en los conjuntos frontera o distante pasan al conjunto de celdas aceptadas, o bien se alcanza la posición objetivo.

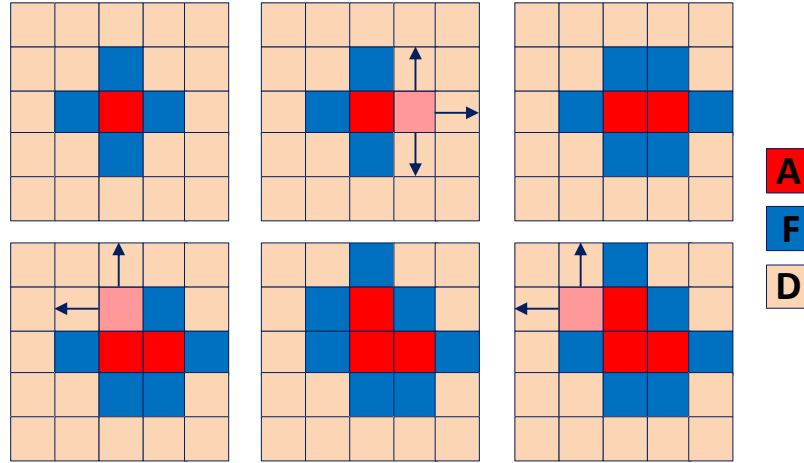
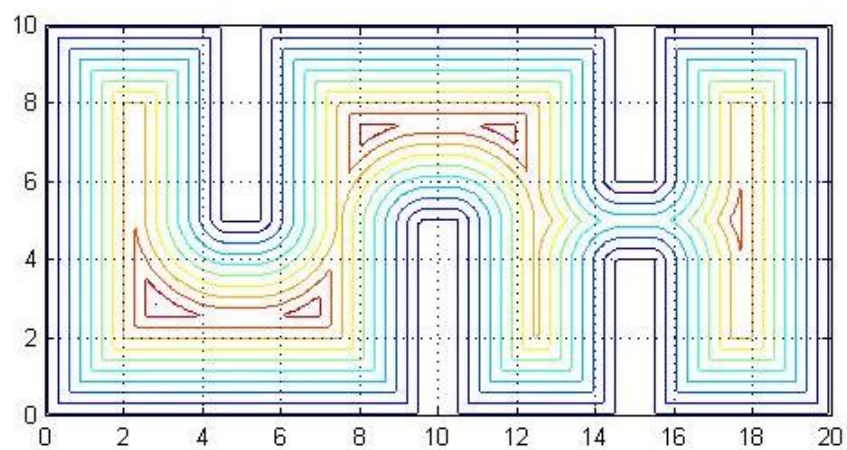


Figura 2.1: Evolución del método FMM en una malla 5x5

En la Figura 2.2 se muestra sobre el dominio usado como ejemplo en el capítulo siguiente, el mapa de potencial resultante $\phi = W(x)$ con $F(x)=1$ en las celdas libres, junto con la tabla y una gráfica con los tiempos de cálculo empleado por el algoritmo Fast Marching en función del tamaño de la malla $N=N_X \times N_Y$. De la gráfica puede deducirse la dependencia en función del número de celdas apuntada anteriormente, $O(N \times \log N)$. El cálculo se ha realizado con Matlab v.7.6 (R2008a), en un procesador Intel Core2 Duo CPU T6600 2.20GHz con 4GB de RAM.



N=NX x NY	Time (sec)
101 x 51	0.256
151 x 76	1.161
201 x 101	2.079
251 x 126	3.713
301 x 151	5.100
351 x 176	8.104
401 x 201	10.514

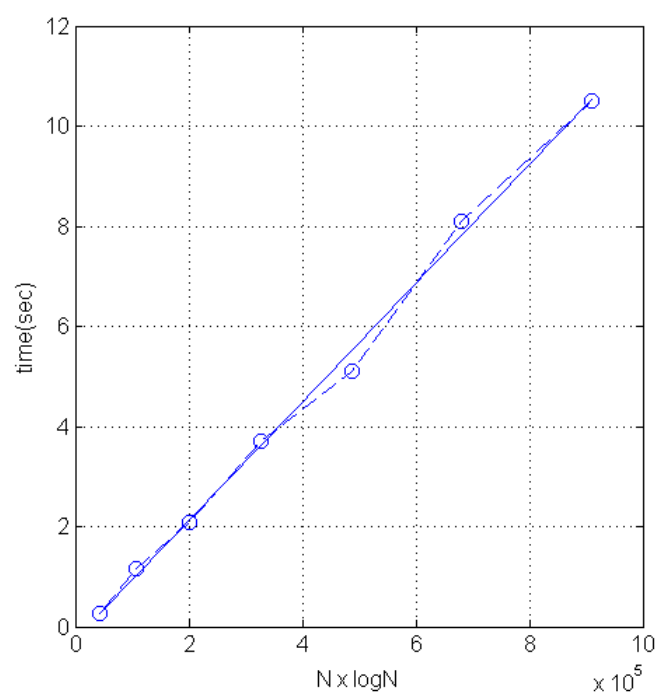


Figura 2.2: Test del método FMM. Sensibilidad al tamaño de malla

Planificación de trayectorias con FMM

Para calcular la trayectoria a un punto destino, se calcula primero el campo ϕ , tomando inicialmente $\phi=0$ en este punto objetivo. Asumiendo que existe una celda destino, se calcula la trayectoria a partir del punto de partida elegido, mediante el método del gradiente descendente. Éste calculará la trayectoria desde el punto de partida al único mínimo del dominio. El FMM garantiza que el camino calculado por el gradiente descendente es óptimo, porque cada celda tiene el valor más bajo posible de ϕ asignado.

La dirección de gradiente se calcula mediante el operador Sobel sobre el mapa de la malla

$$grad_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \phi \quad grad_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} * \phi \quad (2.16)$$

La trayectoria entre el punto inicial y el final de la trayectoria sigue la dirección del gradiente máximo del campo ϕ . Como el punto final está localizado en el mínimo global, éste se alcanza, siempre que exista un camino posible entre el punto de partida y el final de acuerdo con

$$\begin{aligned} \theta_i &= \arctan\left(\frac{grad_{ix}}{grad_{iy}}\right) \\ x_{i+1} &= x_i + step \cdot \cos(\theta_i) \\ y_{i+1} &= y_i + step \cdot \sin(\theta_i) \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde el paso entre dos puntos, $step$, se fija arbitrariamente.

La Figura 2.3 muestra un ejemplo de la planificación de una trayectoria con FMM en dos dimensiones. El mapa de velocidad, correspondiente a la figura central, es un mapa binario, con las celdas libres con una velocidad igual a 1 (blanco) y las celdas que representan los obstáculos con velocidad cero (negras). La figura inferior corresponde con el mapa de ϕ calculado, con $NX \times NY=677 \times 314$, $t= 13.4$ segundos.

Las principales desventajas de la planificación de trayectorias con método Fast Marching son fundamentalmente:

- No se tienen en cuenta las dimensiones de los vehículos de forma explícita.
- Las restricciones cinemáticas tampoco son tenidas en cuenta.

La primera se resuelve parcialmente con la dilatación de los obstáculos en el mapa binario que definen inicialmente las posiciones o celdas libres y las ocupadas por los obstáculos. La segunda, la posibilidad de incluir las restricciones cinemáticas de los vehículos en la definición de la trayectoria, todavía resulta un problema abierto, pudiendo ser necesario en ocasiones un postproceso de la trayectoria inicialmente calculada con FMM.

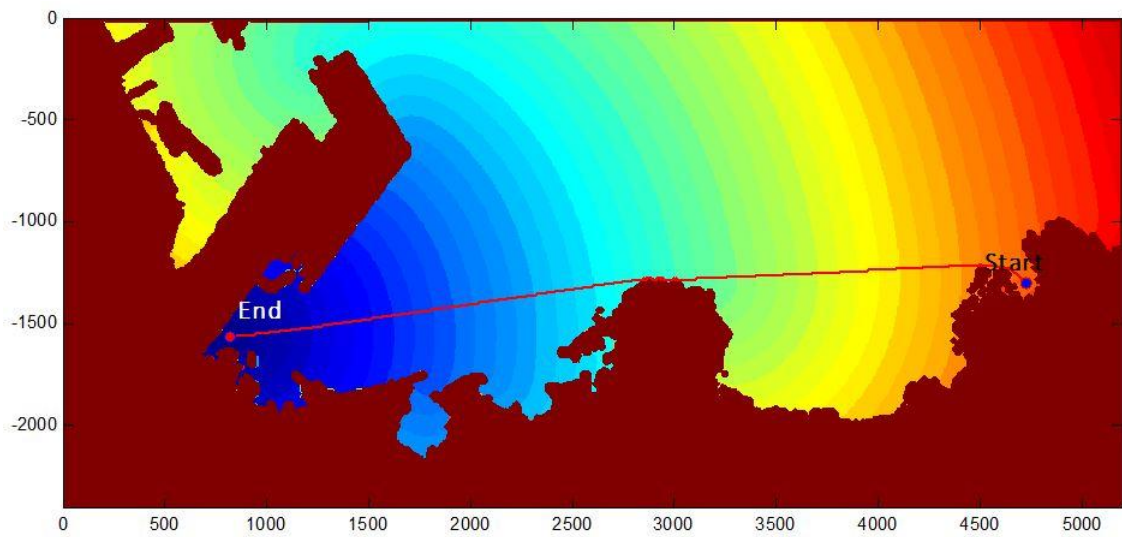


Figura 2.3: Ejemplo de planificación de una trayectoria con FMM

3. Planificación de trayectorias de formaciones de robots con FM²

Introducción

Debido a su amplio rango de aplicaciones como vigilancia o creación de mapas, las formaciones de robots se han convertido en uno de los temas más interesantes en la investigación en robótica. Aunque un robot, individualmente, es normalmente capaz de realizar tareas complejas por sí solo, algunas de estas tareas se pueden realizar de forma más eficiente utilizando grupos de robots. La principal dificultad de las formaciones de robots es mantener la posición y orientación de cada uno de los robots individuales dependiendo a su vez de las posiciones y orientaciones de los otros robots con un objetivo común. Uno de los principales problemas es que la posición de los robots no se conoce de manera precisa. Esta incertidumbre se convierte en peligrosa cuando la formación debe navegar a través de corredores estrechos, curvas cerradas o en condiciones ambientales severas. En estas situaciones, los robots podrían colisionar entre sí.

Se han propuesto diferentes aproximaciones para resolver el problema del control de la formación de robots. Las diferentes aproximaciones se clasifican en tres grupos principales: *leader-following*, donde un robot es el líder y el resto los seguidores. El movimiento del líder se puede determinar por una trayectoria calculada o por teleoperación, y el movimiento de los seguidores es determinado por seguimiento del líder, con algunas restricciones geométricas. Este movimiento puede cambiar dinámicamente a lo largo del tiempo si fuera necesario. Estos líderes pueden ser robots reales o líderes virtuales. El segundo grupo propuesto es de conducta, donde varios comportamientos se sopesan para dar lugar a un plan de movimiento para cada vehículo. El tercer grupo, es la estructura virtual, donde la formación entera es tratada como una estructura simple, y el movimiento deseado del conjunto es trasladado al movimiento deseado de cada vehículo.

El algoritmo propuesto por Garrido et al. [8], [9] y que reproducimos en este trabajo se centra en una arquitectura dinámica líder-seguidores. Los resultados previos con formaciones de robots, motivaron el estudio intensivo de cómo se comportaba este método cuando existía incertidumbre en la posición de los robots o de los obstáculos.

La trayectoria calculada con el método FM es la más corta en términos de longitud, pero puede no ser segura debido a su proximidad a los obstáculos o incluso no ser posible debido a las restricciones cinemáticas del vehículo. En la práctica, este aspecto también causa que la trayectoria puede no ser la más corta en tiempo, ya que el vehículo debe moverse lentamente cerca de los obstáculos para disminuir la posibilidad de daños en caso de colisión por causas como el fallo de sensores o de motor. La solución normal es expandir los obstáculos, antes de calcular la trayectoria, o calcular potenciales o fuerzas repulsivas artificiales. Sin embargo, estos últimos métodos clásicos generan otros problemas tales como la existencia de mínimos locales o el ignorar algunas trayectorias realmente realizables.

El método Fast Marching Square, FM², surge como un método robusto, eficiente y seguro. Este método es determinista, y es fácil de predecir su salida, no produciendo nunca resultados inesperados. También, desde un punto de vista ingenieril, el uso de memoria está limitado por el tamaño de la malla que representa el entorno y la cantidad de tiempo requerido para obtener una solución es también predecible porque depende del tamaño de esta malla. El método es además eficiente al analizar el entorno y devolver una trayectoria con un algoritmo relativamente ligero, y seguro porque mantiene las trayectorias suficientemente lejos de los obstáculos y es teóricamente imposible que las trayectorias colisionen con los obstáculos.

El algoritmo *Fast Marching Square* FM²

Las trayectorias generadas a partir del método FM son óptimas de acuerdo al criterio de mínima distancia euclídea, pero éstas pueden discurrir muy cerca de los obstáculos y no ser suaves. Estos hechos muestran al FMM como un planificador de trayectorias poco fiable para muchas de las aplicaciones en robótica o con vehículos autónomos no tripulados. Sin embargo, el algoritmo FM² resuelve estos problemas obteniendo un mapa de velocidades que modifica la expansión de la onda de acuerdo a la distancia al objeto más próximo.

El algoritmo FM² puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Modelado. La información de los sensores se transforma en información binaria, evitando una modelización compleja de toda información
2. Dilatación de los obstáculos. Los objetos detectados en el paso previo se agrandan en el radio de los robots. De este modo, los objetos y las paredes se dilatan para asegurar que los robots o vehículos no colisionan entre sí, y que pueden pasar por pasillos más estrechos que su dimensión.
3. Primer paso FM. Utilizando el mapa obtenido después de la dilatación de los objetos, se propaga una onda desde todos los puntos que representan los obstáculos y paredes (negro en el mapa binario, velocidad nula). La propagación de esta onda se realiza mediante el método FM. El resultado de este paso es un potencial, $W(x)$, en el que el valor de cada pixel es proporcional a la distancia al obstáculo más próximo. El mapa del potencial de velocidad se representa en una escala de grises, donde el valor cero representa paredes y obstáculos. Cuando las celdas se alejan de éstos, se convierten en más claros, la velocidad tiende a la unidad, representando la seguridad de las celdas. Este mapa se puede interpretar como un mapa de velocidades, o un índice de refracción similar al de la óptica geométrica, donde los rayos de luz viajan en trayectorias curvas en el medio con un índice de refracción cambiante. Debido a esta analogía, las leyes que gobiernan la transmisión de las ondas electromagnéticas y la luz se utilizan para calcular las trayectorias de los vehículos del grupo.
4. Segundo paso, FM. El método Fast Marching es aplicado de nuevo sobre el mapa de velocidades obtenido en el paso anterior. Un nuevo potencial $D(x)$ aparece, representando la propagación de una onda electromagnética. El origen de la onda es el punto destino y se propaga hasta que alcanza la posición actual del robot o vehículo. Entonces, el gradiente descendente se aplica desde la posición del vehículo. La trayectoria obtenida es la geodésica, línea más corta, del potencial $D(x)$. Como, sólo hay una onda en este paso, el potencial $D(x)$ tendrá un único mínimo local, localizado en el punto destino objetivo. Si al vehículo, siguiendo la trayectoria, se le da una

velocidad de acuerdo al mapa de velocidades, entonces la trayectoria es óptima en términos de tiempo de acuerdo a la métrica definida en el paso anterior. Respecto a la analogía con la óptica geométrica, el tiempo óptimo se justifica de acuerdo al principio de Fermat: la luz viaja a lo largo de la trayectoria que toma el mínimo tiempo.

El método FM² no presenta los problemas de otros métodos como la posibilidad de que los robots o vehículos autónomos queden atrapados en mínimos locales o pasajes estrechos, y oscilaciones en presencia de obstáculos o corredores estrechos. Este método busca trayectorias con las propiedades adecuadas, como suavidad en las trayectorias o curvatura continua. En concreto las características del método FM² son:

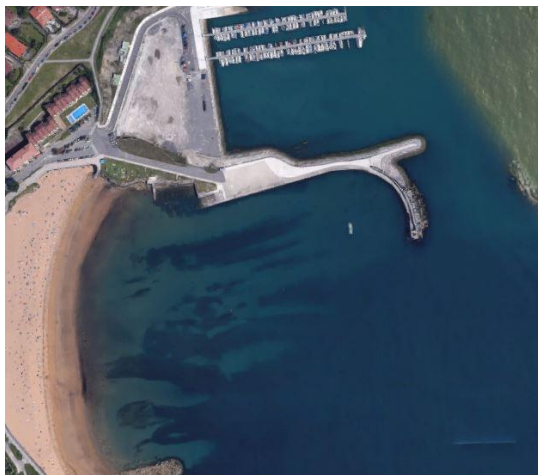
- Ausencia de mínimos locales. Expandiendo solo una onda cuando se calcula un segundo potencial se asegura que no hay mínimos locales. Como las velocidades del primer potencial son siempre no negativas, independientemente del tipo de ambiente y los obstáculos, es imposible tener mínimos locales. En el peor de los casos, pueden aparecer puntos silla, pero no es un problema en el siguiente paso del gradiente descendente.
- Rápida respuesta. El tratamiento simple de la información de los sensores y el bajo orden de complejidad del algoritmo permite una buena respuesta en términos de tiempo de computación.
- Trayectorias suaves. Al no tener discontinuidades el mapa de velocidades, las trayectorias obtenidas son continuas y derivables.
- Trayectorias fiables. El planificador proporciona trayectorias seguras y fiables, evitando el problema de coordinación entre el evitar las colisiones locales y la planificación global de la formación.
- Completo. Como el método consiste en la propagación de la onda, siempre se encontrará desde la posición inicial al punto destino, si existe una solución.

La Figura 3.1 y la Figura 3.2 muestran dos ejemplos de la aplicación del método FM² para el cálculo de la trayectoria de un vehículo. El primero corresponde a la playa y el puerto deportivo de Luanco (Asturias) tomando la imagen área de Google. Se muestra en la Figura 3.1 el mapa binario correspondiente, extraído de la fotografía, y los potenciales $W(x)$ y $D(x)$ obtenidos con el método FM². Se han tomado dos puntos del mapa, como punto de partida y objetivo o destino final, se ha calculado sobre el potencial $D(x)$ la trayectoria a través del gradiente descendente. El mapa binario W_0 , se ha obtenido a partir de la fotografía con las siguientes instrucciones de Matlab:

```
clear;clc;
f=imread('LuancoGoogleEarth.jpg');
T=graythresh(f);
fbw0=im2bw(f,T);
fbw1=imfill(fb0,'holes');
gbw0=imcomplement(fb0);
SE = strel('square',8); % dilatation
gbw1=imerode(gbw0,SE);
gbw=imresize(gbw1,0.4); % scaling of the photo-mapping
imwrite(gbw,'LuancoBinary.jpg');
```



Mapa binario $W_0(x)$



Potencial de velocidad $W_1(x)$

Potencial $D(x)$

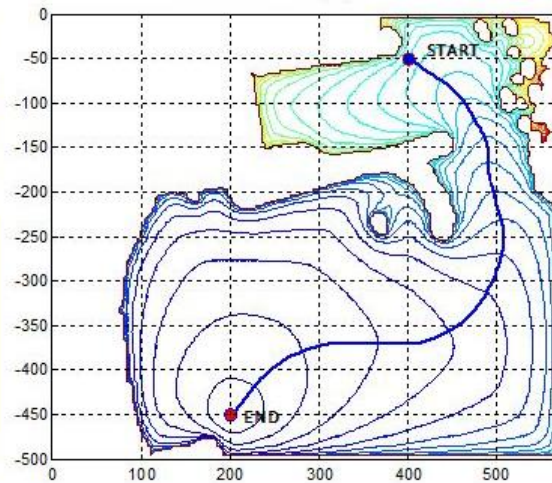
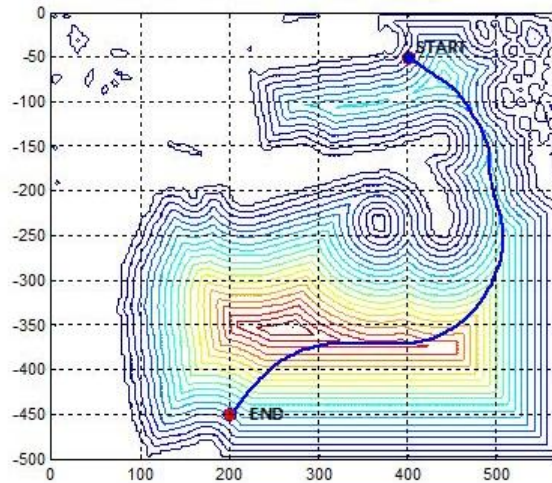


Figura 3.1: Pasos del algoritmo FM^2

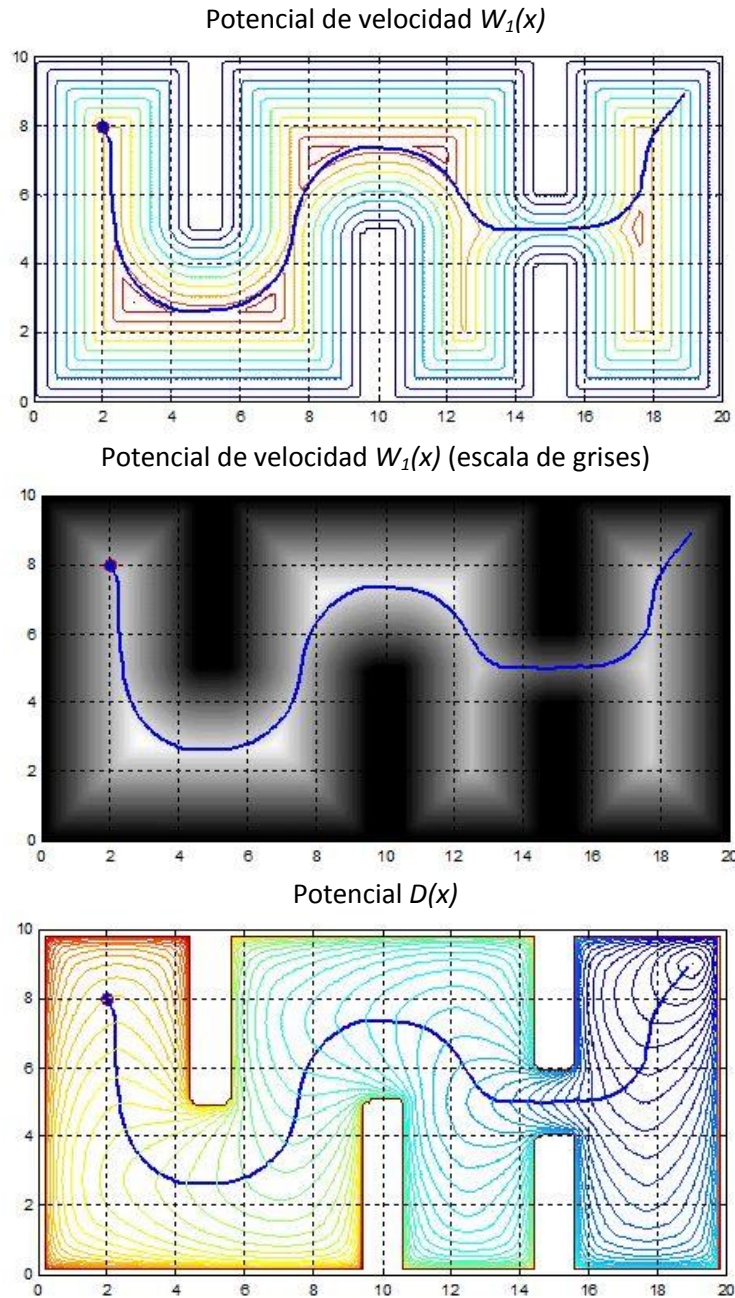


Figura 3.2: Campos potenciales del FM^2

En la Figura 3.2, se muestra el segundo ejemplo de aplicación del algoritmo FM^2 , sobre un laberinto arbitrario. A partir de un objetivo final, y del mapa de velocidades $W_1(x)$, se ha calculado el potencial $D(x)$, y la trayectoria desde un punto inicial, dibujada en las figuras. Se muestran mapas de isolíneas para los potenciales, en las figuras superior e inferior. En la figura central, se representa el campo de velocidades en un mapa de grises, de forma similar a como se representa en el trabajo de Gómez et al. [9], donde se presenta el método FM^2 para formaciones de robots. En este mapa, el color blanco representa la velocidad máxima, $W_1(x)=1$, y el negro $W_1(x)=0$ los obstáculos y las paredes, y los diferentes niveles de grises las velocidades intermedias. Utilizaremos este modelo en las siguientes secciones para mostrar la aplicación del método FM^2 a formaciones de vehículos autónomos.

Planificación de trayectorias de formaciones con FM²

El objetivo final en la planificación de trayectorias de robots es encontrar las trayectorias y posiciones y orientaciones para cada robot de la formación, teniendo en cuenta las características del ambiente, los otros robots de la formación, y el objetivo final. Por lo tanto, la formación de robots debe ser capaz de moverse a través del escenario, adaptando la forma de la formación a sus necesidades. El esquema líder-seguidores se utiliza para la planificación de trayectorias de la formación de robots. La referencia de posición y orientación para los robots seguidores se define a través de ecuaciones geométricas, localizando el punto objetivo de cada seguidor como una función de la posición y la orientación del líder. El líder puede ser un robot, otro vehículo e incluso un líder virtual, que es un punto definido, utilizando generalmente relaciones geométricas.

El algoritmo descrito a continuación es una adaptación del método VFM propuesto en [5], [7], combinación del método FM, Fast Marching, con diagramas de Voronoi. El método FM² proporciona un potencial artificial a dos niveles que repele el robot de paredes y obstáculos. Por otro lado, el control del movimiento de la formación de robots requiere de fuerzas repulsivas entre robots. Trabajando sólo con el potencial repulsivo artificial dado por FM², los robots de la formación podrían chocar entre sí. Por lo tanto, integrando el potencial dado por FM², y la fuerza repulsiva entre robots, cada robot tiene en cada momento un potencial simple atrayéndolo hacia el objetivo pero repeliéndolo de los obstáculos, paredes y otros robots. El principal requerimiento cuando integramos todos los potenciales es hacerlo de un modo que no se creen mínimos locales.

El método FM² utiliza un potencial en dos pasos para calcular la trayectoria: el primer paso crea un potencial que se puede interpretar como un potencial de velocidades, que denotamos como $W(x)$, y un segundo paso que crea un potencial con forma de embudo, que representa la distancia al objetivo en la métrica de $W(x)$, y que denotamos como $D(x)$. La planificación de las trayectorias de la formación de los robots utilizando FM² es la siguiente:

- El mapa del ambiente W_0 se lee como un mapa binario, donde los 0 (negro) son los obstáculos o las paredes y 1 (blanco) significa el espacio libre. Este mapa es común a todos los robots de la formación, tanto líderes como seguidores.
- El primer potencial $W(x)$ se calcula aplicando el método FM al mapa binario W_0 , de acuerdo al primer paso FM del método FM².
- El segundo potencial $D(x)$, se calcula aplicando el método FM sobre el potencial $W(x)$
- Se calcula una trayectoria inicial para el líder aplicando el gradiente descendente sobre el potencial $D(x)$, de acuerdo al método FM².

Hasta aquí el algoritmo descrito corresponde con la aplicación del método FM² al líder de la formación. Entonces se inicia un lazo en cada ciclo que representa un paso del movimiento de los robots. Este ciclo consiste en:

1. Para cada instante de tiempo t , cada robot i , líder o seguidores, incluye en su mapa binario W_{t0} a los otros robots en las posiciones (x_i, y_i) , en 2D, como puntos negros representándolos como obstáculos.
2. Para cada ciclo t , cada robot i genera un nuevo primer potencial W_{ti} a partir de W_{oti} .
3. A partir de la posición y la orientación del líder, y la geometría de la formación deseada, el objetivo parcial $(X_{\text{goal-k}}, Y_{\text{goal-k}})$ se calcula para cada seguidor k , donde k

representa todos los seguidores de la formación. La forma de la formación se deforma proporcionalmente al nivel gris de la posición parcial de los objetivos. Por lo tanto, la formación se adapta al ambiente moviéndose más allá de los obstáculos y las paredes también evitando colisiones con otros robots, que son tratados como obstáculos. De este modo, la fuerza repulsiva entre los robots y las paredes y también las fuerzas repulsivas entre robots se implementan.

4. Los potenciales D_{ti} se calculan aplicando el método FM a la métrica de los potenciales de velocidad W_{ti} . Para el líder el punto objetivo es el final de la trayectoria. Los objetivos de los seguidores son los objetivos parciales calculados en el paso anterior.
5. Se calcula la trayectoria para cada robot i . Esta trayectoria es aquella con la mínima distancia en la métrica W_{ti} , y se obtiene aplicando el gradiente descendente sobre el potencial D_{ti} .

Todos los robots se mueven hacia delante siguiendo sus trayectorias hasta que se completa una nueva iteración. El algoritmo tal y como se ha explicado se resume en el diagrama de flujo de la Figura 3.3. Éste asegura la correcta navegación de una formación de robots a través de diferentes ambientes evitando obstáculos y adaptándose a corredores estrechos.

En la siguiente sección se presentan diferentes simulaciones con tres diferentes formaciones, con este algoritmo como base, e introduciendo la simplificación para los potenciales de velocidad de los robots de la formación formulada en [9] con el importante ahorro de tiempo de cálculo.

Simulaciones

Se muestran a continuación sobre el modelo anteriormente presentado en la sección anterior en la Figura 3.2, tres diferentes formaciones de vehículos autónomos o robots, y su evolución temporal, desde un punto origen a otro objetivo final.

La primera formación elegida es una formación triangular, ya que es quizás la más fácil de analizar. En la Figura 3.4 se muestran los potenciales y los mapas de velocidades como mapas de niveles de grises, para un instante de tiempo del líder y de cada uno de los dos seguidores de la formación triangular. Para los seguidores, se pueden observar en sus potenciales, $D_1(x)$ y $D_2(x)$, los mínimos correspondientes a sus objetivos parciales, a alcanzar en cada ciclo del algoritmo FM² con el método del gradiente descendente. Aunque en esta figura se muestran los potenciales calculados para los seguidores en todo el dominio, para su comparación entre sí y con el líder de la formación, realmente sólo se requiere el cálculo del potencial en las celdas que contengan la posición en ese momento y el objetivo parcial de los vehículos seguidores en ese ciclo del algoritmo FM², tal y como se muestra en la Figura 3.5. Esto es, el método Fast Marching sólo barre el dominio necesario entre la posición y el punto objetivo parcial, con el consiguiente ahorro de cálculo.

La Figura 3.6 muestra capturas de la evolución de una formación triangular de vehículos autónomos desde el punto inicial al final, sobre el potencial $D(x)$ del vehículo líder de la formación. Tanto en ésta, como en los dos siguientes ejemplos mostrados, la velocidad del líder se mantiene constante, $v=1\text{m/sec}$, y la velocidad de los seguidores varía en función de su distancia al líder entre 0.5 y 2, según sea ésta respecto a la que tenía inicialmente en la formación original. En la siguiente Figura 3.7, se muestran las velocidades en cada instante del robot o vehículo líder y de los seguidores. Otros parámetros utilizados en esta simulación son el paso temporal $\Delta t=0.125\text{sec}$ y $n=5$, pasos del gradiente descendente entre actualizaciones

de los campos potenciales $W_i(x)$ y $D_i(x)$. La distancia de seguridad entre los vehículos se ha fijado en 0.25m.

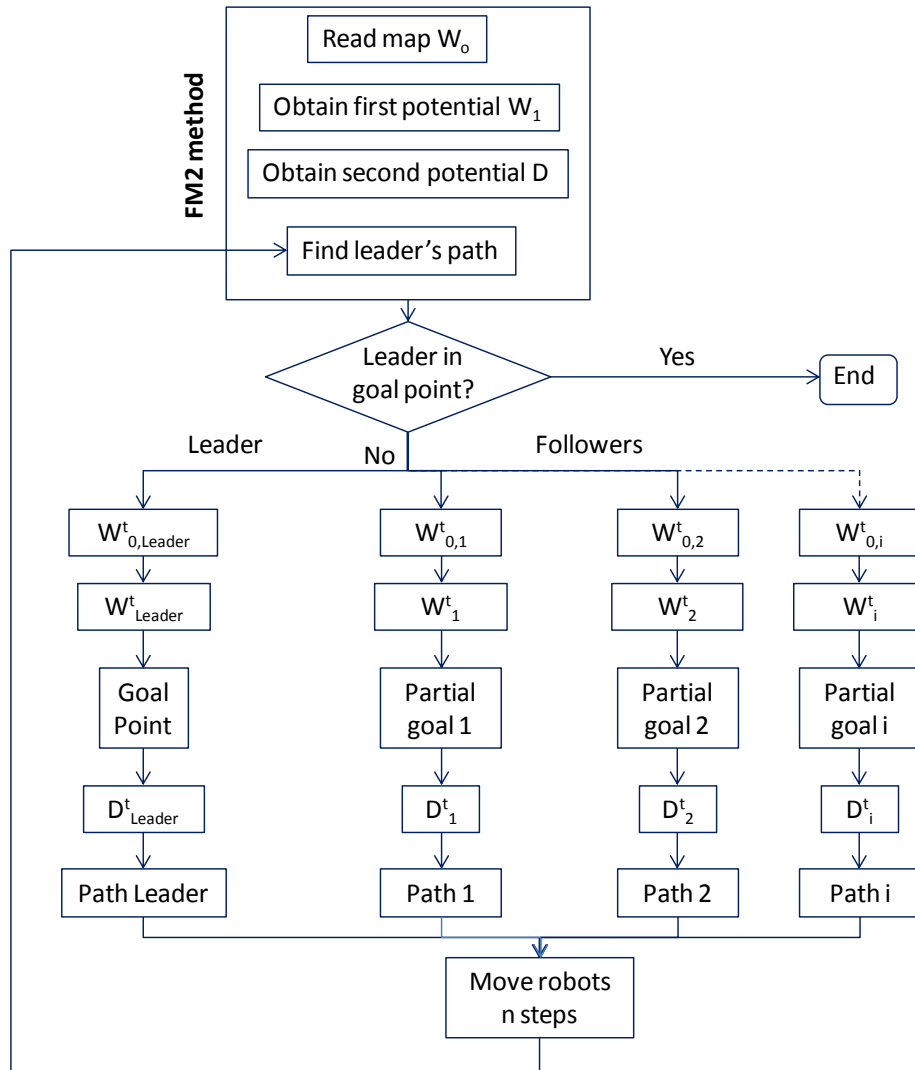


Figura 3.3: Diagrama de flujo para la planificación de una formación de robots con FM² [9]

En la Figura 3.8 se muestra otro ejemplo sobre una formación en línea, en este caso con $n=3$. La Figura 3.9 muestra, de nuevo, las velocidades de los vehículos de la formación, constante la del líder, y la de los seguidores entre 0.5 y 2: mayor velocidad de 1 cuando se han alejado del líder y menor de 1 cuando se han acercado respecto a la distancia que tenían respecto a éste inicialmente.

En la Figura 3.10 se muestran las capturas de la simulación de un último ejemplo, con una formación de cuatro vehículos, y la Figura 3.11 con las velocidades de los vehículos.

Se han realizado las simulaciones en las tres formaciones en dos mallas diferentes de $NX \times NY=201 \times 101$ y $NX \times NY=401 \times 201$, con tiempos de ejecución para las simulaciones con Matlab v.7.6 (R2008a), con un procesador Intel Core2 Duo CPU T6600 2.20GHz y 4GB de RAM, de 702, 1060 y 1600 segundos con la malla más burda, y de 3750, 5700 y 8500 segundos en la más fina. Tiempos de ejecución que nos proporcionan ratios entre mallas muy similares, ~ 5.3 , para las tres formaciones, en línea con la dependencia del tiempo de ejecución con el tamaño de malla mencionada en el capítulo 2 del método FMM de orden $\sim O(N \times \log N)$. Teniendo en

cuenta que se realizan unos 44 ciclos para la formación triangular (steps $n=5$) y 72 para las formaciones lineal y con cuatro robots (steps $n=3$) , tenemos un tiempo de ejecución para cada ciclo del algoritmo de aproximadamente 15-16 segundos para la formación de tres vehículos, y 22 para la de cuatro.

En general, el comportamiento del algoritmo resulta aceptable, similar al observado en [9]. No se ha establecido una métrica de la formación para la evaluación cuantitativa de cuán bien se mantenía ésta en cada instante, la cual debe deformarse ante obstáculos, o a su paso por corredores estrechos, como reflejan las figuras. En las Figura 3.12 a Figura 3.14 se muestran la evolución de las áreas encerradas y el perímetro de las formaciones de los ejemplos en cada instante de tiempo, para los dos tamaños de malla utilizados. Se deduce de estas gráficas cómo las formaciones se deforman al girar la formación, y más aún a su paso por el corredor más estrecho, que en las simulaciones presentadas y en la representación temporal de la evolución de áreas y perímetros se corresponde aproximadamente entre $t=22s$ y $24s$. La dependencia en la evolución del área y el perímetro de las formaciones con el tamaño de malla es muy débil. Se puede observar una desviación ligeramente menor respecto al área y el perímetro iniciales en la formación triangular, y diferencias mínimas en las otras dos, salvo en la formación lineal a su paso por el corredor, entre 22 y 24 segundos. Entendemos que métodos alternativos o variantes del algoritmo FM² que podamos considerar que puedan mejorar a éste, deberían presentar al menos similar comportamiento en la evolución y las variaciones respecto al perímetro y el área inicial de la formación, que las mostradas en estas figuras. El ajuste de parámetros como el paso temporal de avance del algoritmo, o el número de pasos entre actualizaciones de los potenciales de los vehículos debería considerar también la evolución de estas magnitudes de la formación.

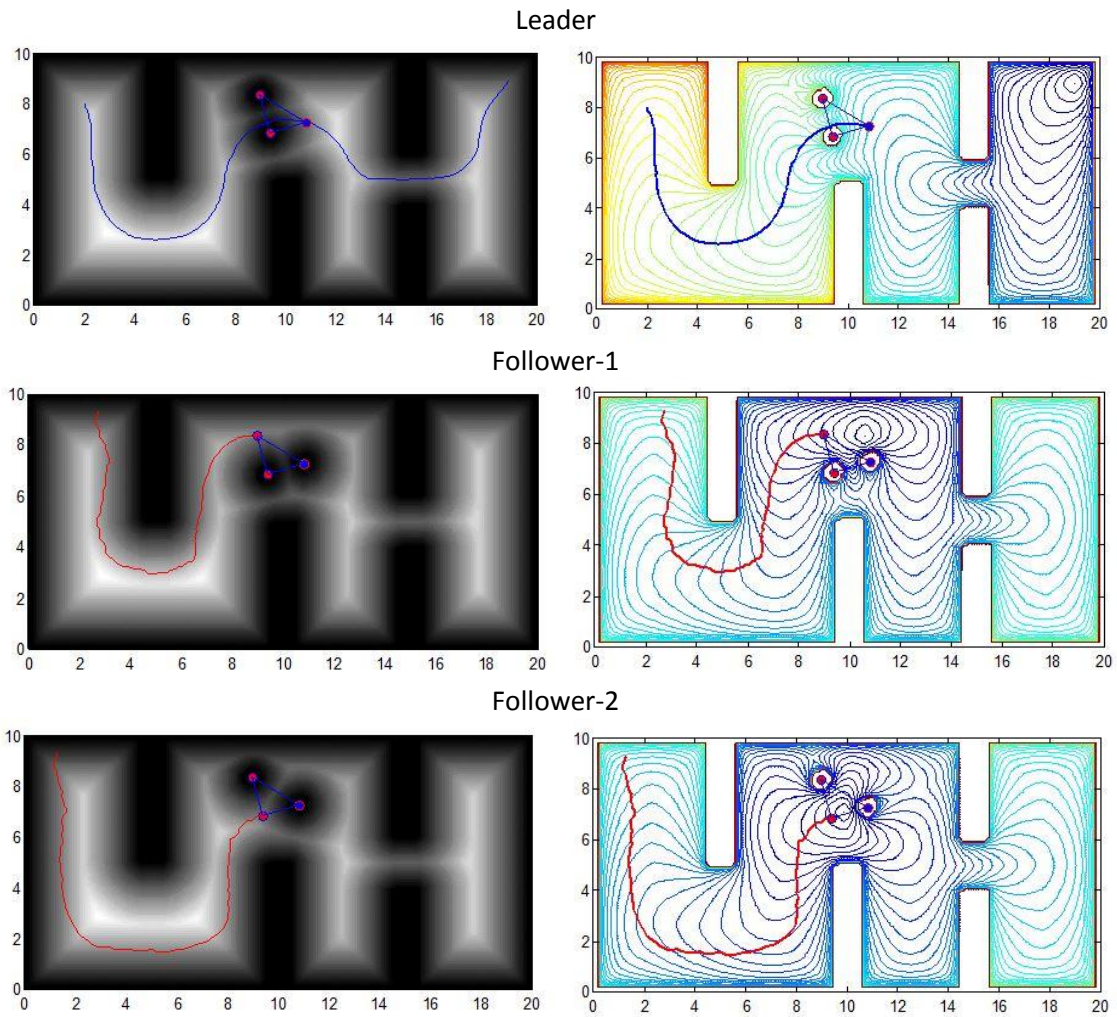


Figura 3.4: Mapa de velocidades y potenciales D_i^t de la formación en un instante

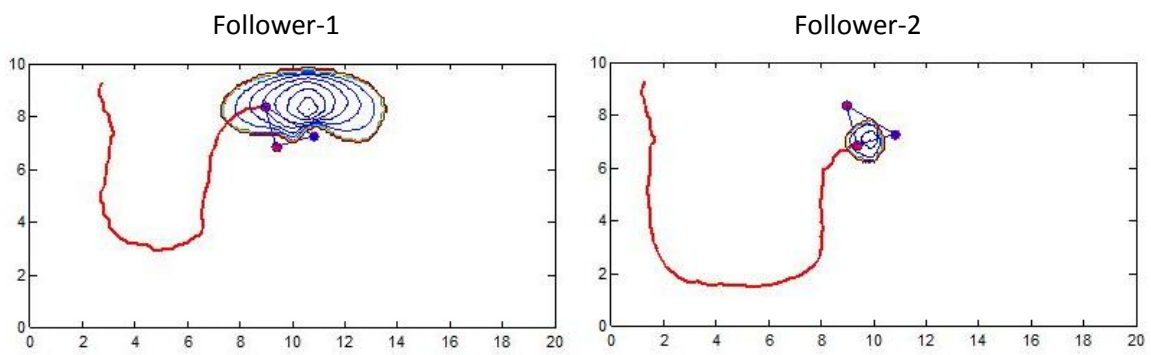


Figura 3.5: Potenciales D_i^t de los seguidores calculados en un instante de tiempo.

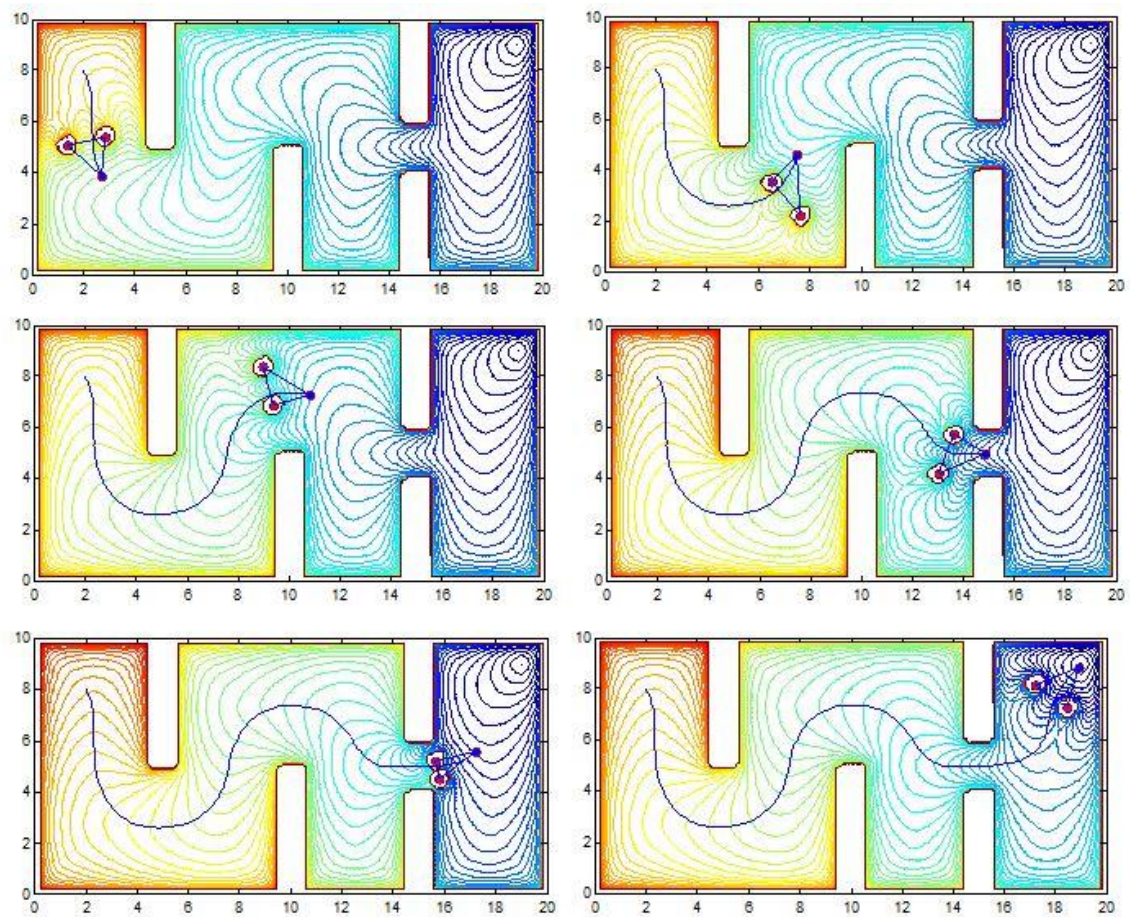


Figura 3.6: Secuencia del movimiento de una formación triangular de robots con FM^2

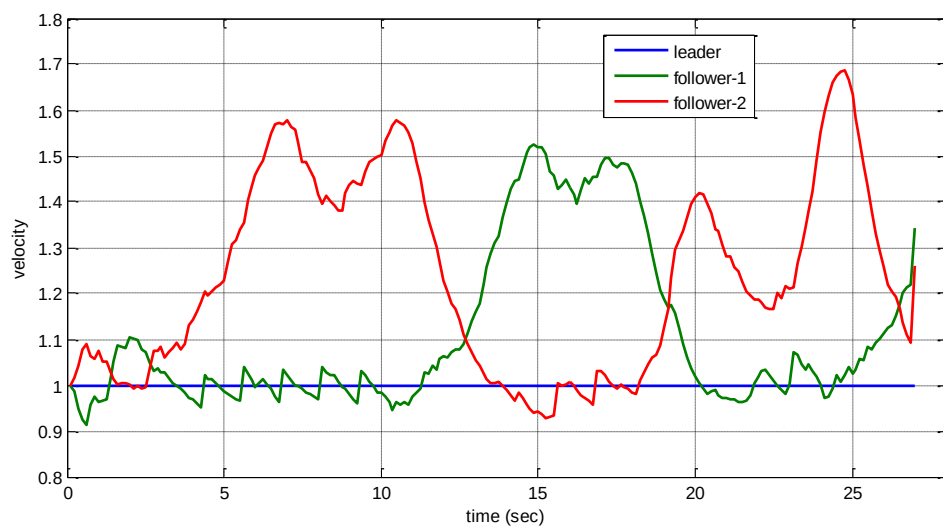


Figura 3.7: Velocidades para cada vehículo de la formación triangular

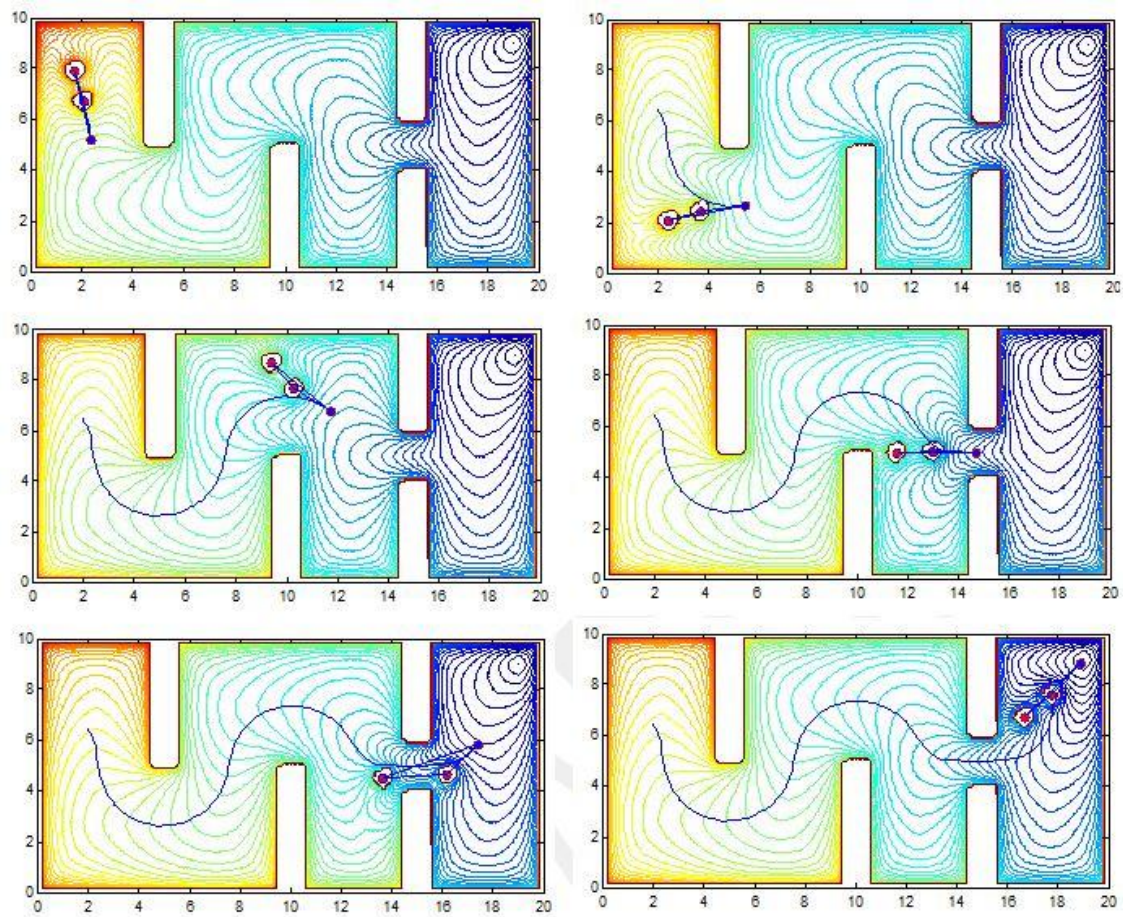


Figura 3.8: Secuencia del movimiento de una formación lineal de robots con FM²

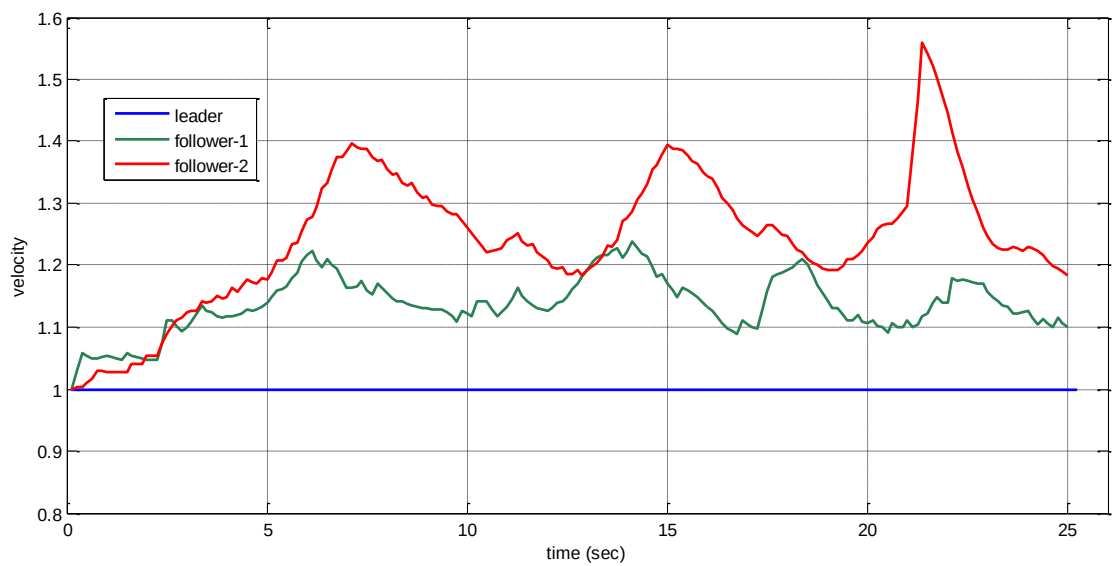


Figura 3.9: Velocidades para cada vehículo de la formación lineal

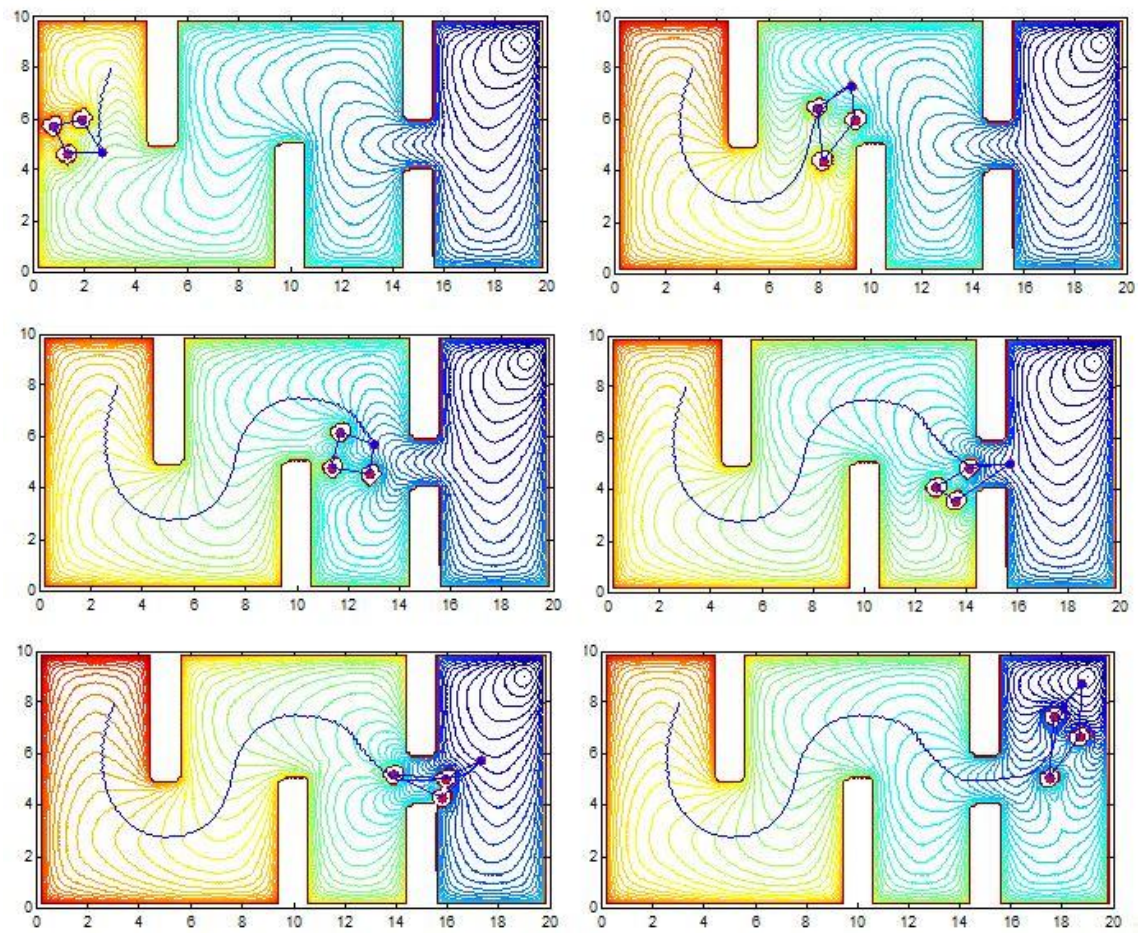


Figura 3.10: Secuencia del movimiento de una formación con 4 robots con FM²

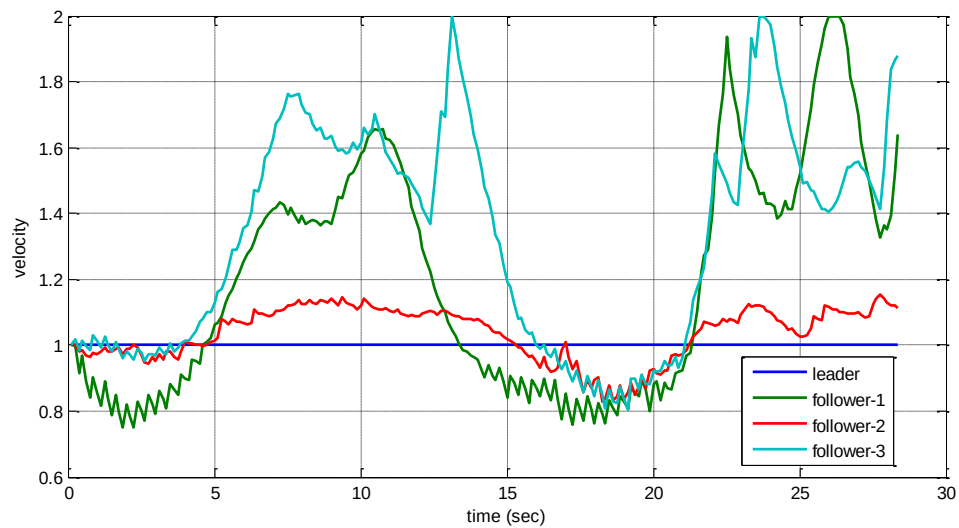


Figura 3.11: Velocidades para cada vehículo de la formación con 4 USVs

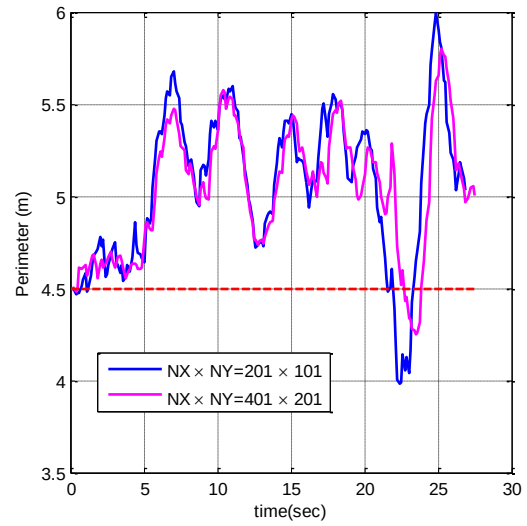
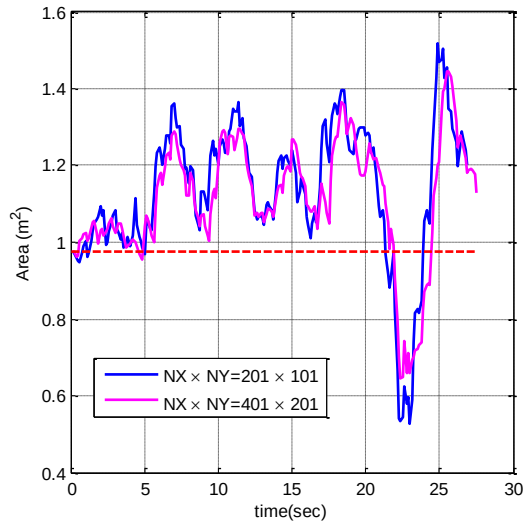


Figura 3.12: Área y perímetro de la formación triangular a lo largo del tiempo

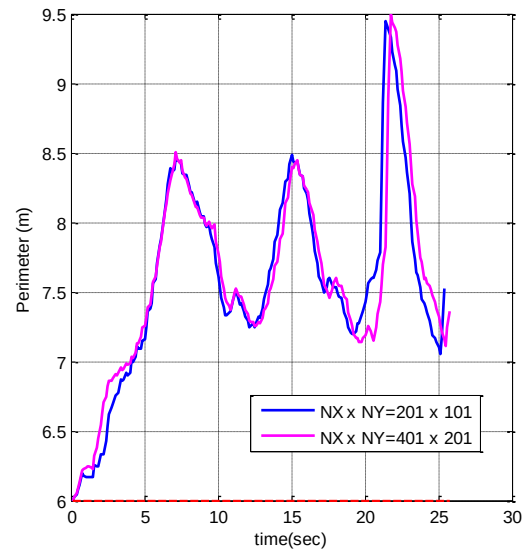
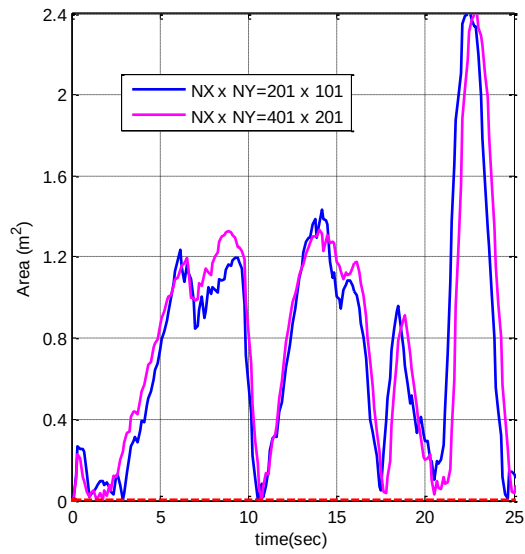


Figura 3.13: Área y perímetro de la formación lineal de tres USVs a lo largo del tiempo

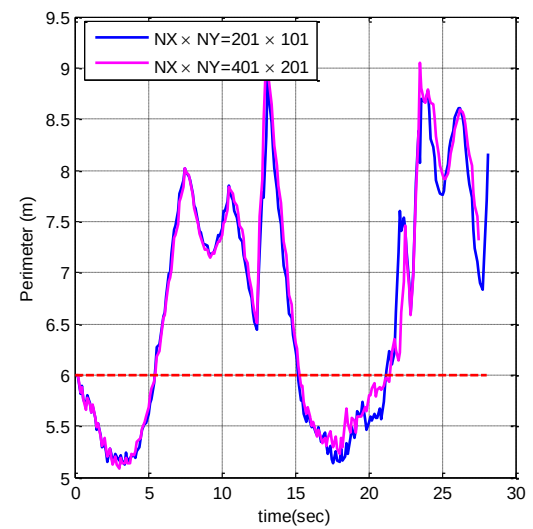
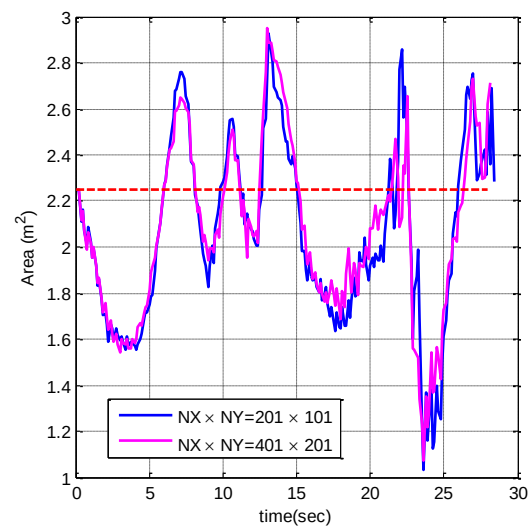


Figura 3.14: Área y perímetro de la formación de cuatro USVs a lo largo del tiempo

Leader

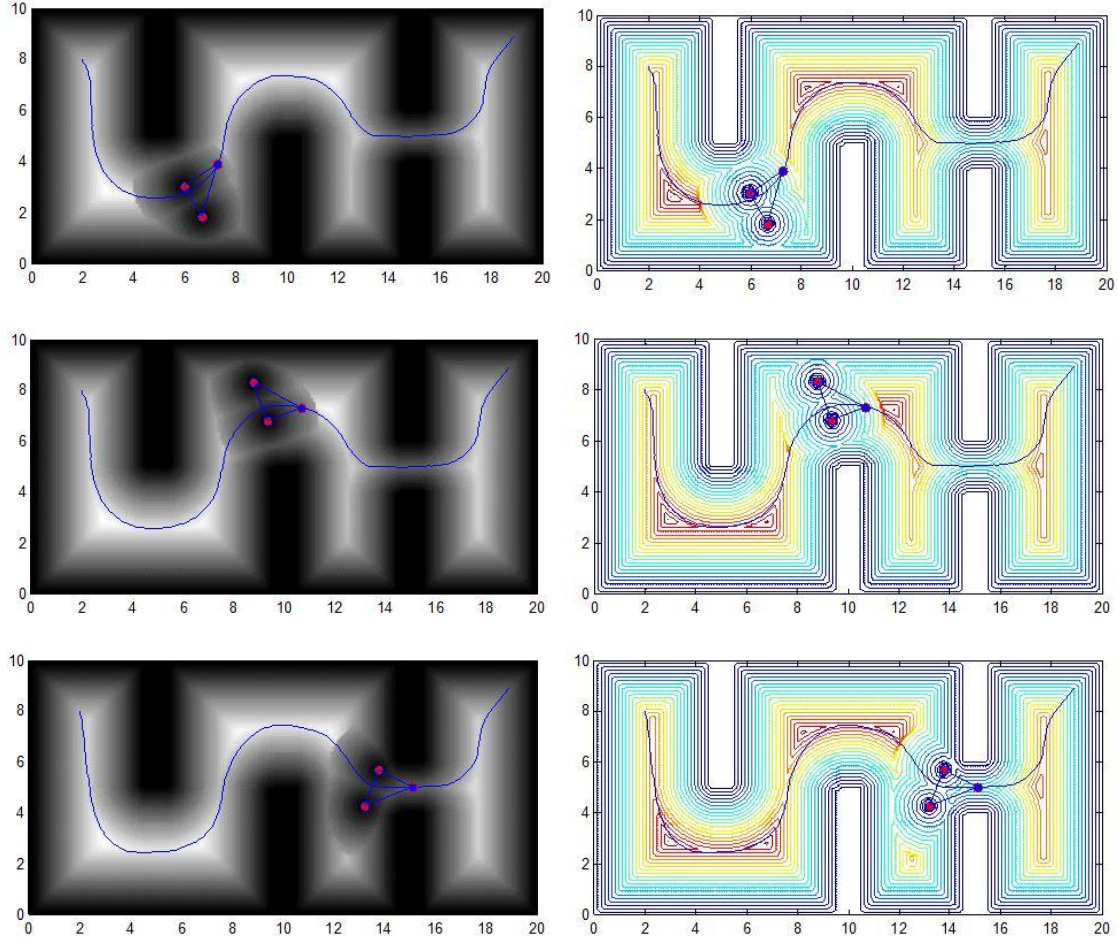


Figura 3.15: Mapa de velocidades y potenciales W_{leader}^t a partir de las funciones de incertidumbre [9]

Es posible reducir de forma muy significativa, por encima del 50% [9], el tiempo de cálculo del algoritmo FM^2 con formaciones, a través de las funciones de incertidumbre [9] para obstáculos dinámicos y el resto de robots o vehículos de la formación, evitando así el recalculer los potenciales W_i^t mediante FM en cada ciclo. A partir del primer potencial de velocidades calculado W_1 , ausentes los vehículos de la formación y los obstáculos móviles, se introducen en éste a modo de pozos del potencial de velocidad en cada instante temporal y para cada robot, la posición del resto de integrantes de la formación, y de los obstáculos móviles, teniendo en cuenta su geometría como celdas de velocidad nula. La incertidumbre sobre la posición de robots y obstáculos se modela con un incremento suave del potencial de velocidad, desde cero en las celdas en las que se establece la posición de los obstáculos hasta el valor en el mapa inicial W_1 . La extensión de esta zona de incertidumbre, que evite la colisión entre vehículos o con obstáculos, es arbitraria, en función del grado de incertidumbre en la posición de éstos. En la Figura 3.15, se muestran ciertos instantes y para el líder de la formación el potencial W_{leader}^t construido de esta forma, en un mapa de isolíneas y con diferentes niveles de grises, que se pueden confrontar con el que se presenta en la parte superior de la Figura 3.4. La reducción en el tiempo de ejecución lograda para la formación triangular resulta en torno al 80%.

Discusión y conclusiones

En este capítulo se ha presentado el método FM^2 , y se han mostrado algunos ejemplos de su aplicación. El método calcula dos potenciales a partir de la propagación de dos ondas diferentes. Una primera calcula, a través del método de propagación rápida o Fast Marching, FM, un mapa potencial de velocidad $W_1(x)$, que proporciona en cada punto la velocidad máxima de propagación. Este mapa se utiliza para calcular un segundo mapa de propagación de la onda, $D(x)$, desde el punto destino. Sobre este potencial se calcula la trayectoria utilizando la dirección de máximo gradiente. Esta solución proporciona una trayectoria y una velocidad de control en cada punto. Esta trayectoria, es por lo tanto, segura y óptima en tiempo. El método FM^2 calcula trayectorias que tienden a discurrir lejos de los obstáculos, lo que no siempre es necesario. Para abordar esta limitación, se propuso el FM^2 saturado [11], variante que se discute más adelante en esta memoria, por su aplicación inmediata en ambientes abiertos como los marinos, objeto del siguiente capítulo.

El método FM^2 no tiene en cuenta de forma explícita las dimensiones de los vehículos o sus restricciones cinemáticas. Se puede utilizar una dilatación de los obstáculos como un paso de preproceso para resolver el primer problema. Dada la suavidad de las soluciones, generalmente, éstas se pueden utilizar directamente en robots con restricciones cinemáticas. Sin embargo, puede ser necesario un paso de validación posterior para asegurar también un mínimo ángulo de giro.

La extensión del método FM^2 a la planificación de trayectorias de formaciones de vehículos autónomos, de acuerdo al flujograma de Figura 3.3, ha demostrado un muy buen comportamiento con diferentes formaciones. Todos los tests presentados por [9], y aquellos abordados en el presente trabajo muestran que es un algoritmo robusto, que permite evitar los diferentes obstáculos de forma satisfactoria, eficiente y sencilla.

Por último, en el siguiente capítulo se mostrará cómo podemos extender estos resultados a la formación de vehículos en entornos marinos, y ante la presencia de obstáculos móviles.

4. Planificación de trayectorias de formaciones de vehículos en un medio marino

Introducción

En los últimos años, con el beneficio de reducir pérdidas humanas e incrementar la eficiencia de las misiones, ha habido un importante desarrollo de aplicaciones civiles y militares de vehículos autónomos no tripulados, USVs (unmanned surface vehicles). Sin embargo, las actuales plataformas USV tienen una baja capacidad de carga y poca autonomía. Con el objetivo de superar estas limitaciones, la actual y futura tendencia en la utilización de vehículos autónomos es emplear múltiples vehículos en una formación de flota para actuar en operaciones cooperativas. Los beneficios de utilizar formaciones de vehículos en operaciones incluyen áreas de misión más amplias, mejora de la robustez de los sistemas o mayor tolerancia a fallos.

La estructura del sistema de una formación de vehículos consiste en tres capas: una capa de organización de las tareas, otra capa de planificación de trayectorias y una tercera de ejecución de las tareas. La primera capa define la misión individualmente de cada vehículo de la formación, basándose en un requerimiento general de la misión. Una misión se puede definir como un conjunto de puntos. De acuerdo a los requerimientos de la misión, la segunda capa, la planificación de las trayectorias, define trayectorias fiables de la formación de vehículos. Debe existir un comportamiento cooperativo entre los vehículos, por lo que cada uno de ellos debe ser capaz de establecer una buena comunicación con el resto que asegure el mantenimiento de la formación. Además, las trayectorias deberán poder replanificarse en un entorno dinámico. Las trayectorias generadas pasarán a la capa de ejecución, para calcular para cada vehículo en particular el control específico. Para mejorar la robustez del sistema así como minimizar el error del sistema, la información de la velocidad y la posición se deben de transmitir en tiempo real a la capa de planificación de trayectorias para modificar éstas si fuera necesario.

La capa de planificación de las trayectorias conecta la capa de dirección de las tareas con la capa de ejecución, y dirige la formación. La planificación de las trayectorias es una tarea complicada que se puede considerar como un problema de optimización multiobjetivo. La trayectoria planeada debe optimizarse de acuerdo con aspectos tales como la distancia total, el tiempo de navegación o el consumo de energía. Esto es debido a la alta incertidumbre y complejidad de los obstáculos en un ambiente marino. El algoritmo propuesto en [13] y que reproducimos en este capítulo es capaz de extraer información de un mapa real de navegación para construir una malla, donde tanto los obstáculos estáticos como dinámicos están representados. Utilizando este mapa, se puede generar una trayectoria libre de colisiones que puede ser usada directamente como una trayectoria guía para la navegación práctica.

Para las formaciones de vehículos no tripulados, el mantenimiento de la forma de la formación es de gran importancia. Para mantenerla, se han propuesto en la literatura diferentes estructuras de control como líder-seguidor o el uso de una estructura virtual. En el caso de la estructura líder-seguidor, a un vehículo se le asigna el papel de líder de la formación, con lo

que tiene acceso a la información de la navegación global y traza la trayectoria previamente definida. El resto de los vehículos de la formación son seguidores cuyo objetivo es mantener la forma geométrica de la formación deseada. Alternativamente, la estructura virtual, trata la formación como un sólido rígido y la mantiene haciendo que cada vehículo siga un punto de referencia del sólido rígido. Ambas aproximaciones adoptan una topología de control centralizada, donde las decisiones importantes de control se toman en el centro del sistema.

El punto objetivo para el vehículo líder es el punto final de la misión, y es fijo, mientras para los seguidores, los puntos objetivos son replanteados en cada paso temporal de acuerdo a la estructura de la formación. Basado en estos puntos objetivos, el método Fast Marching se aplica iterativamente a cada vehículo para buscar un camino libre en tiempo real. Una vez que se determina la trayectoria del líder, el algoritmo empieza a iterar para calcular las trayectorias de los seguidores. Se siguen procedimientos similares, sin embargo, cuando los puntos objetivos de los seguidores se replanifican durante un paso de tiempo, es posible que el punto objetivo éste localizado dentro de un obstáculo de tal forma que el algoritmo falle al encontrar la trayectoria. Por ello, es necesario sacar al punto objetivo a una nueva posición alcanzable con un mínimo impacto en la actuación global de la formación.

A lo largo de este capítulo se presentara la aplicación del método FM^2 a la planificación de trayectorias de formaciones de vehículos marinos de acuerdo con el trabajo de Liu y Bucknall [13], incluyendo una modelización del comportamiento dinámico de los barcos u obstáculos móviles para evitar la colisión con la formación.

Saturación del potencial $W(x)$

En ambientes con grandes áreas abiertas, el método FM^2 puede proporcionar buenas trayectorias, pero se pueden mejorar porque en la mayoría de las situaciones no es necesario mover a la trayectoria más segura, más alejada de los obstáculos, sino simplemente a una suficientemente segura. Resulta suficiente con mantener una distancia mínima de seguridad a los obstáculos. Para resolver esto, se utiliza una versión saturada del mapa de velocidades. Esto resulta en una velocidad máxima en las áreas abiertas que decrece cuando los vehículos están cerca de los obstáculos. Se establece así una distancia máxima de seguridad a los obstáculos, a partir de la cual la velocidad de propagación, valor del potencial $W(x)$, se mantiene constante e igual a su valor máximo, $W(x)=1$.

En la Figura 4.1 se muestra junto a una fotografía aérea de las playas y el puerto del Musel en Gijón, los potenciales y las trayectorias calculadas con el método Fast Marching FMM, el Fast Marching Square FM^2 , y el FM^2 saturado con una distancia máxima de 100 metros. De los potenciales mostrados, y las trayectorias, puede concluirse que la obtenida con el método FM^2 no es necesariamente la óptima en términos de distancia, al alejarse demasiado de la costa que es un obstáculo. Mientras la obtenida con FMM se acerca en exceso en algún punto a la costa, lo que haría necesario la dilatación de los obstáculos, como se mencionó en capítulos anteriores, previo al cálculo del potencial que define la trayectoria.

En la Figura 4.2 mostramos un segundo ejemplo de las diferencias entre el método inicial FMM, y FM^2 , no saturado y saturado (distancia máxima de seguridad 50 metros), con campos potenciales y las diferentes trayectorias calculadas, tomando como referencia la foto de la playa de Luanco ya mostrada en el capítulo anterior en la Figura 3.1.

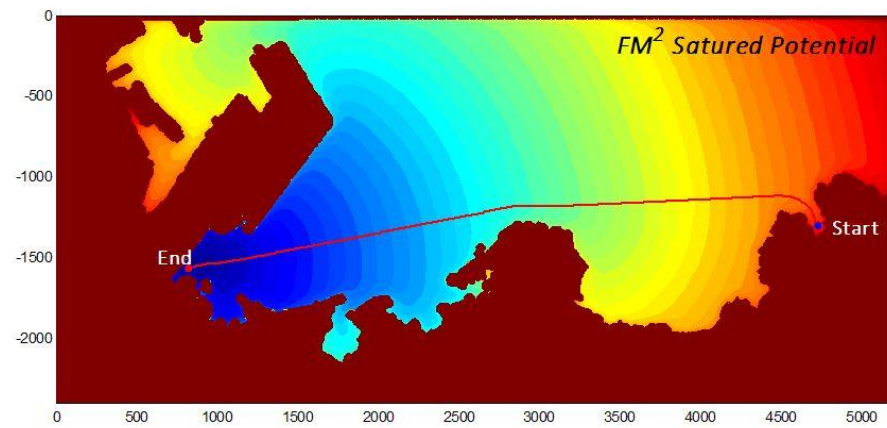
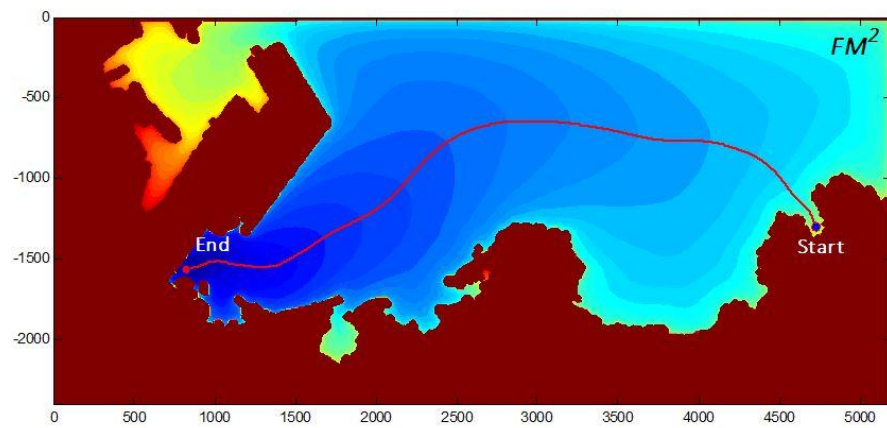
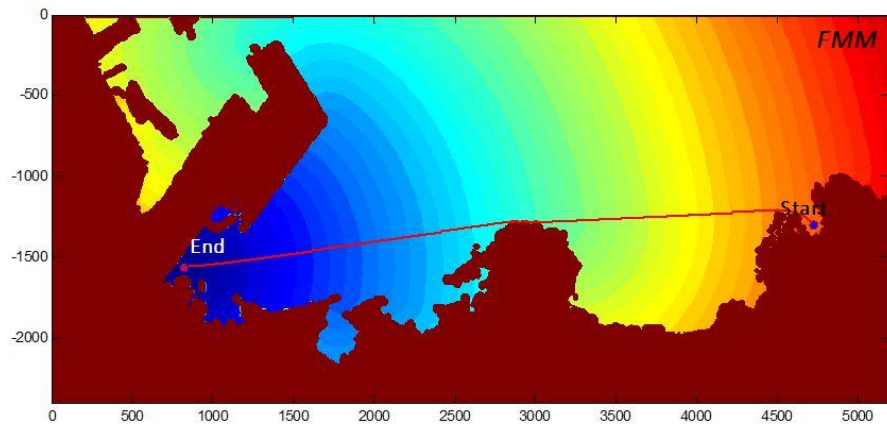


Figura 4.1: Ejemplo (Gijón) de planificación de una trayectoria con FMM y FM^2

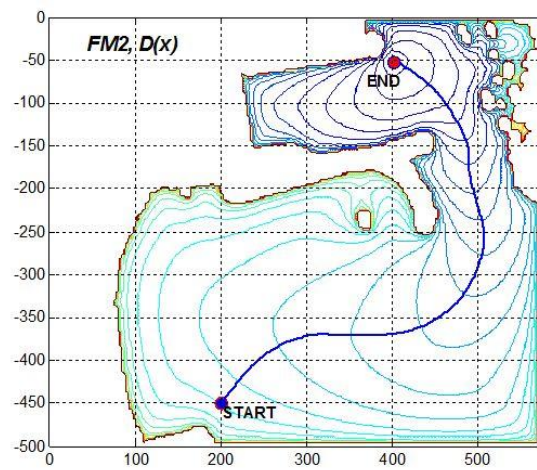
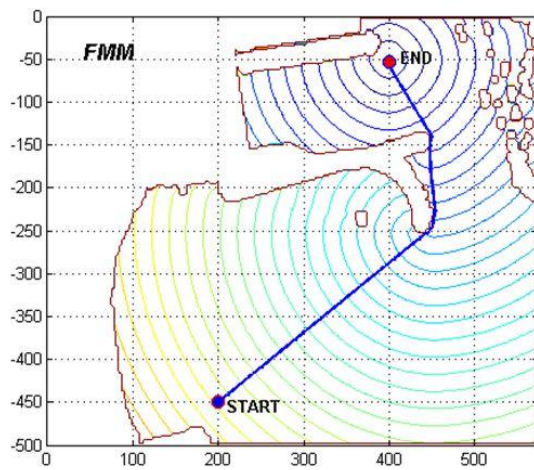
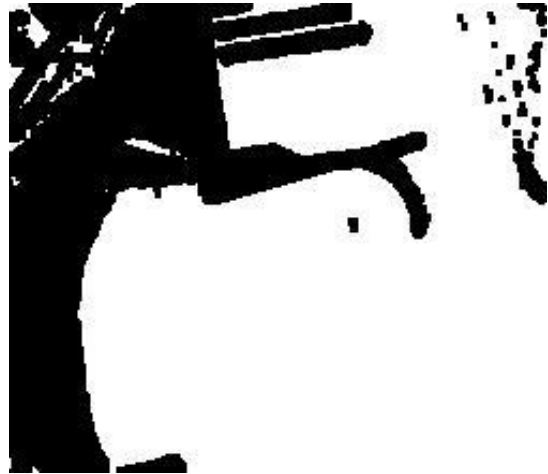
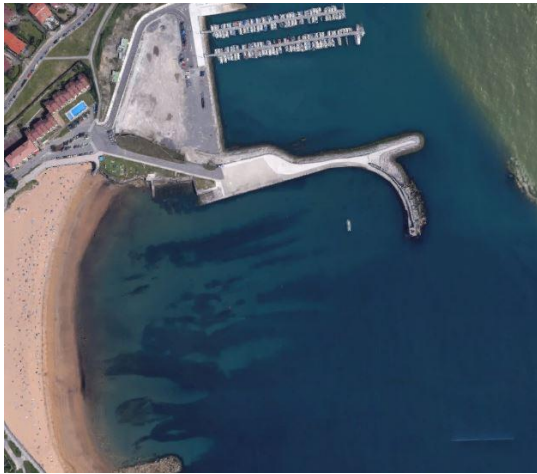


Figura 4.2: Ejemplo (Luanco) de planificación de una trayectoria con FMM y FM^2

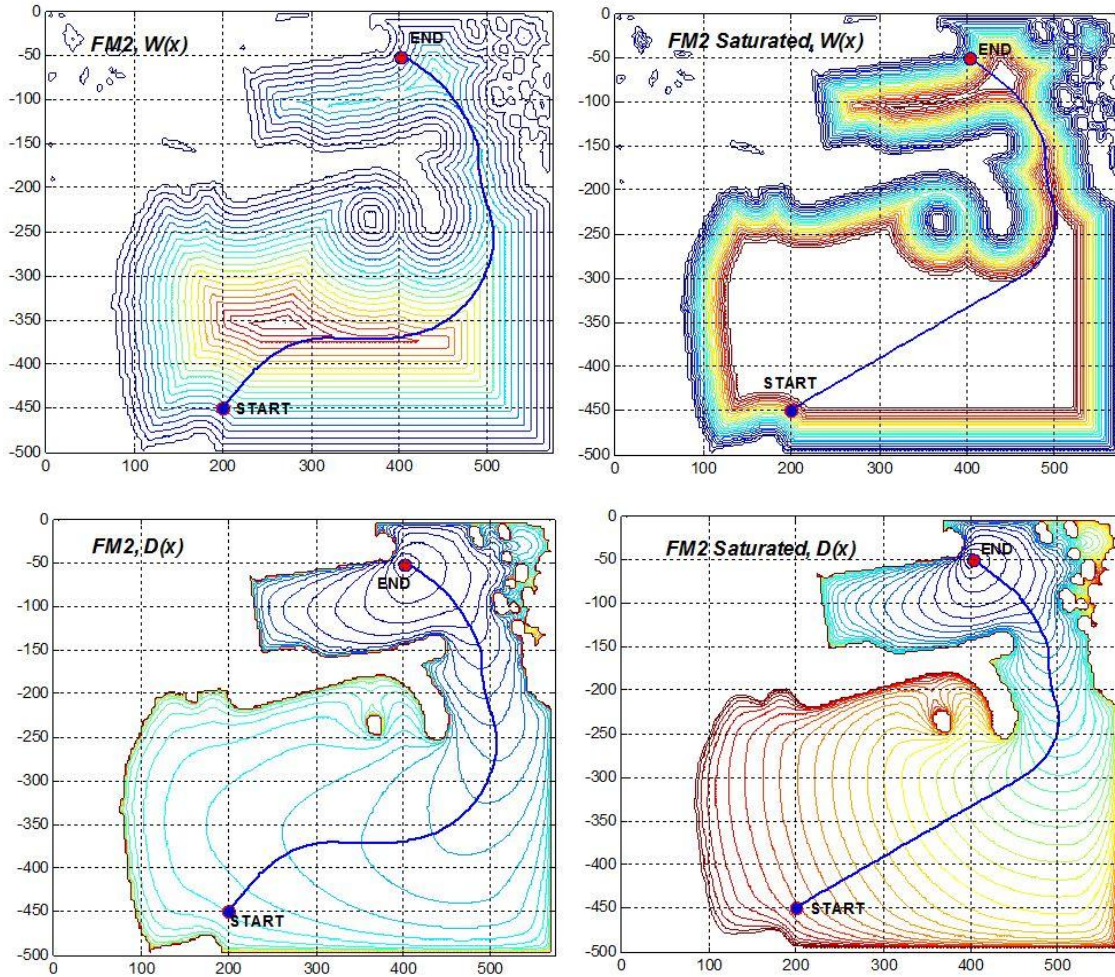


Figura 4.3: Ejemplo (Luanco) de planificación de una trayectoria con FM^2 no saturado y saturado

Trayectorias de formaciones de vehículos marinos no tripulados FM^2

Haciendo uso del algoritmo presentado en el capítulo anterior se presentan sobre el potencial saturado del último ejemplo, la evolución temporal de dos formaciones diferentes de barcos, lineal y triangular.

En la Figura 4.4 y la Figura 4.5 se muestran capturas en diferentes instantes temporales de la evolución de una formación triangular de barcos, sobre el potencial de velocidad W_{leader} y el potencial D_{leader} , respectivamente. En la Figura 4.6 y la Figura 4.7, se muestran las de una formación lineal. Las simulaciones se han realizado sobre una malla de tamaño $NX \times NY = 251 \times 219$, con $\Delta t = 1 \text{ sec}$ y un número de pasos temporales entre objetivos parciales $n = 5$. La distancia mínima de seguridad entre vehículos se ha establecido en $R_{min} = 15$ metros, y se ha fijado un radio mínimo de giro para los barcos de 20 metros.

Al igual que en el capítulo anterior, asumimos que los barcos autónomos son iguales, y que la velocidad del líder de la formación se mantiene constante, igual 1 m/s. El resto de los vehículos pueden variar sus velocidades de acuerdo a sus posiciones en la formación, manteniendo la misma velocidad del líder cuando se mantienen en la formación, y cuando se desvían, acelerando para acercarse al líder o decelerando si se han acercado demasiado respecto a su distancia original.

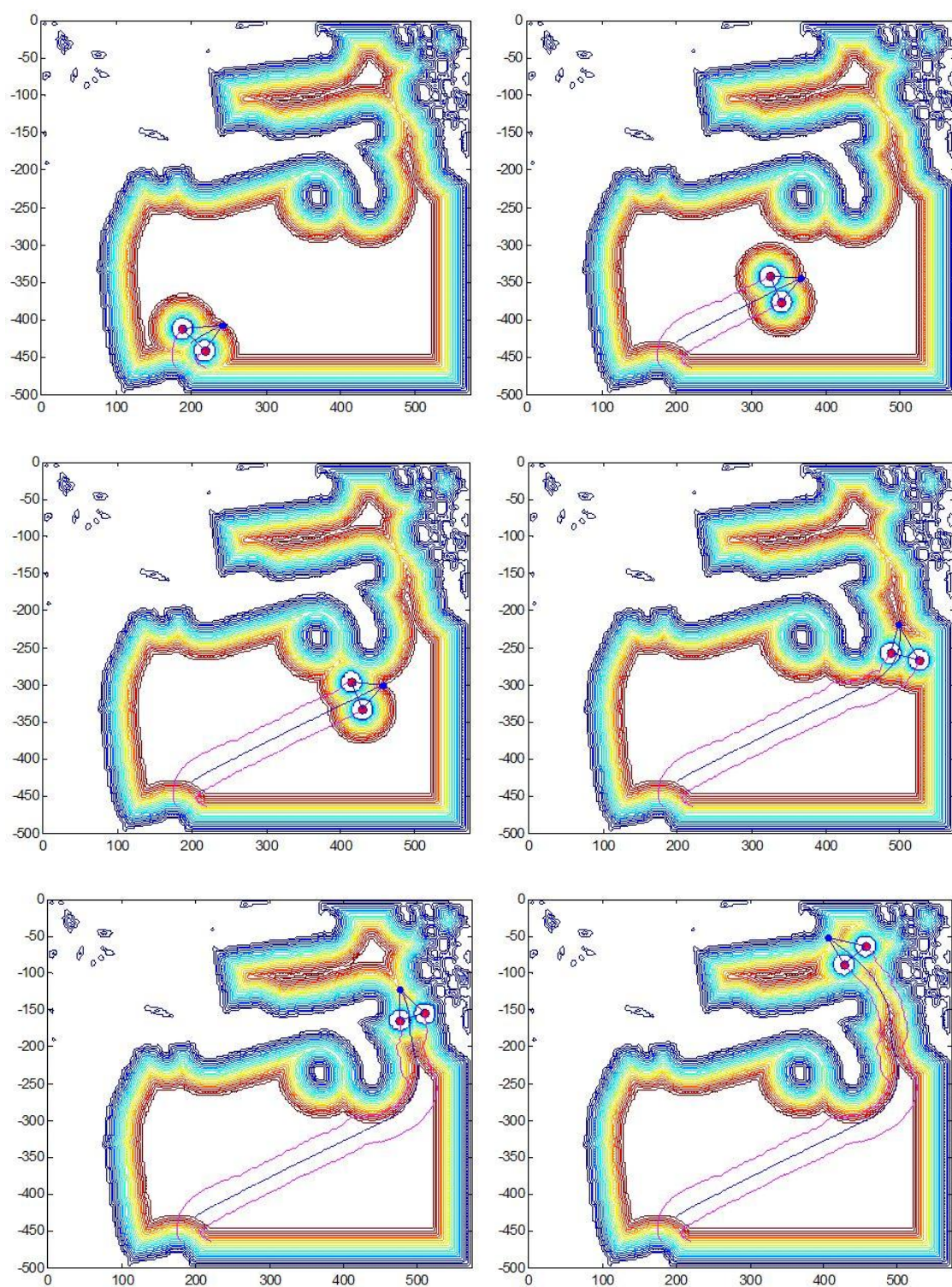


Figura 4.4: Secuencia del movimiento de una formación triangular de USVs marinos con FM^2 (potencial W_{leader})

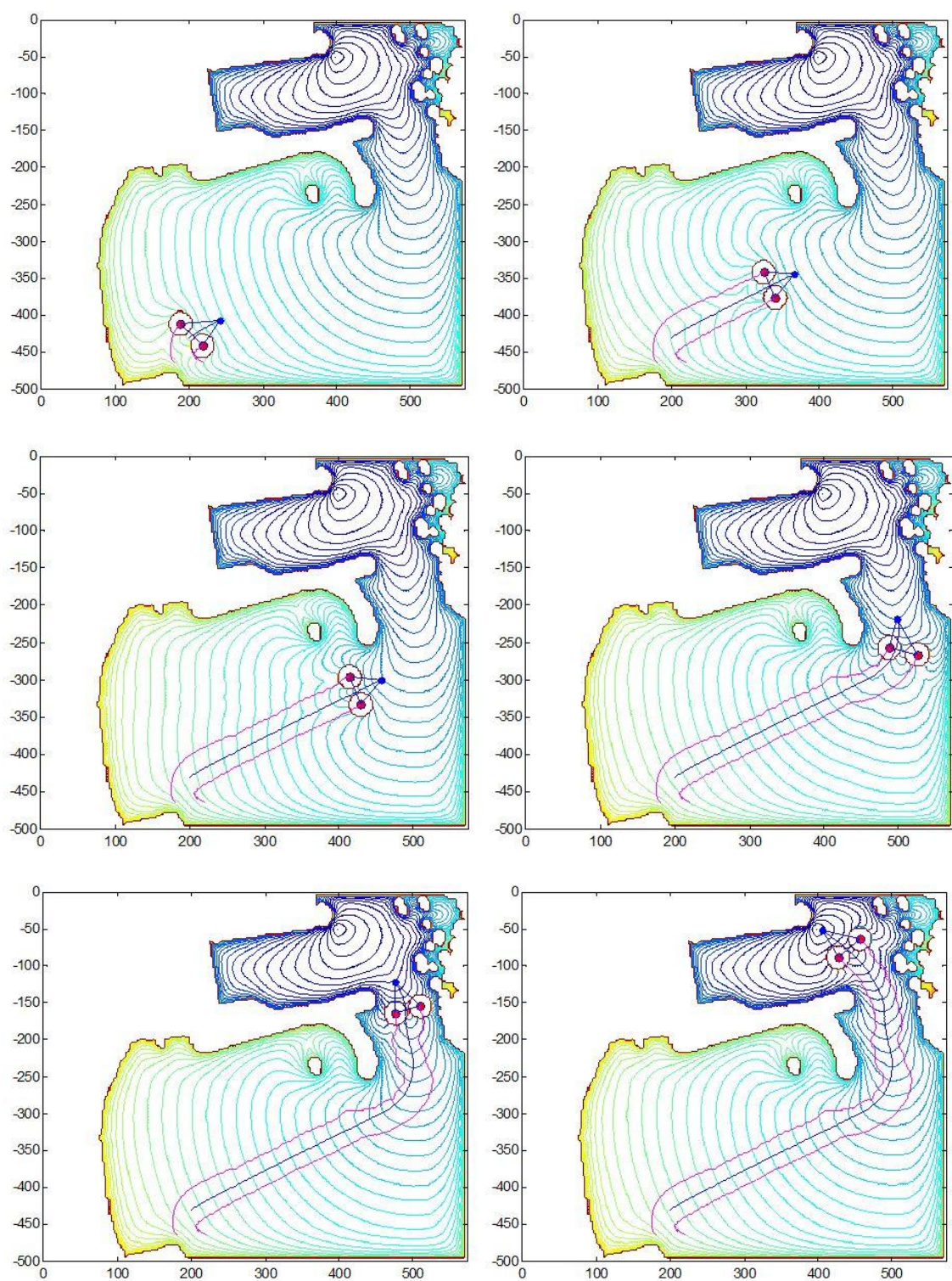


Figura 4.5: Secuencia del movimiento de una formación triangular de USVs marinos con FM² (potencial D_{leader})

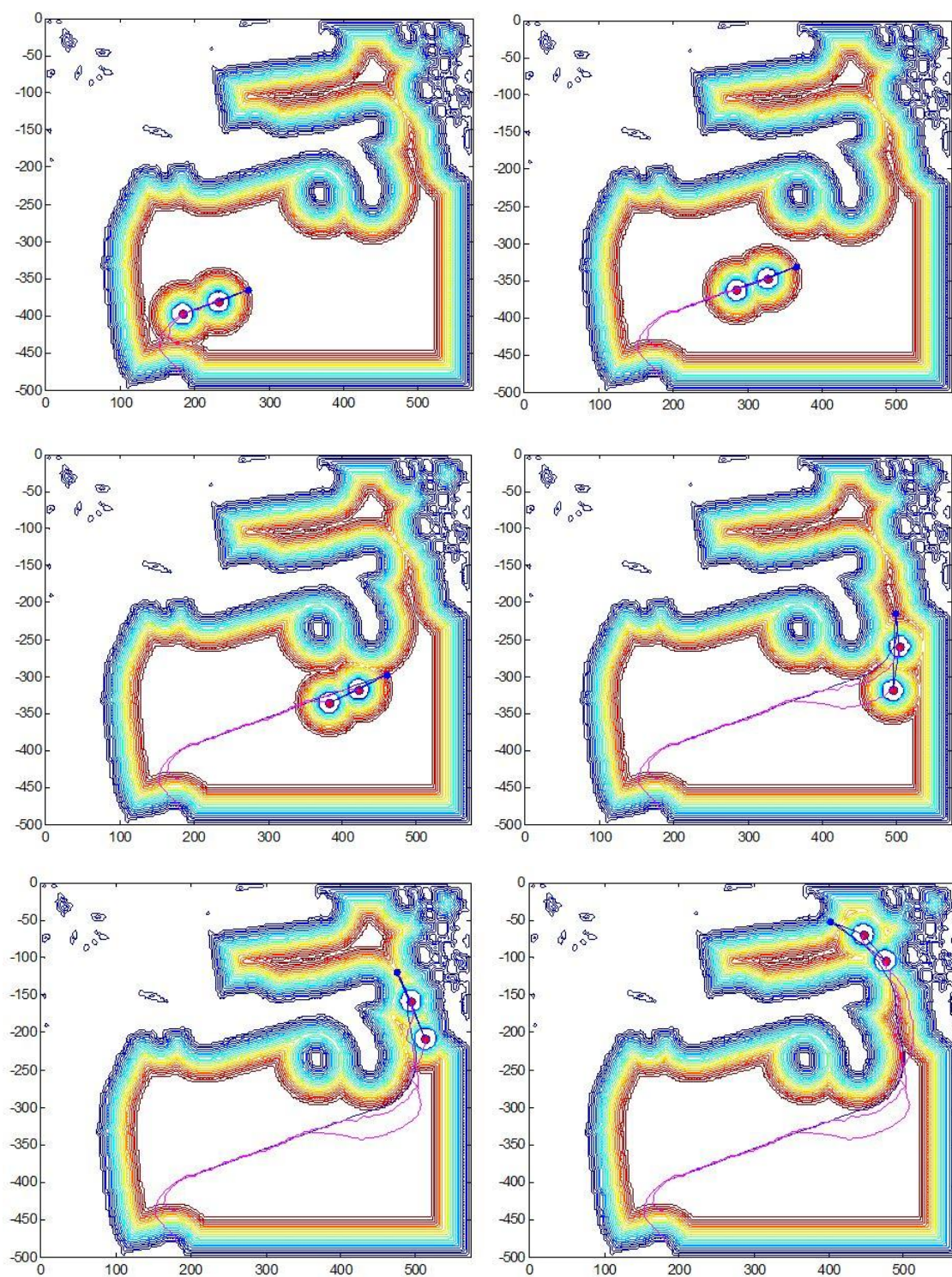


Figura 4.6: Secuencia del movimiento de una formación lineal de USVs marinos con FM^2 (potencial W_{leader})

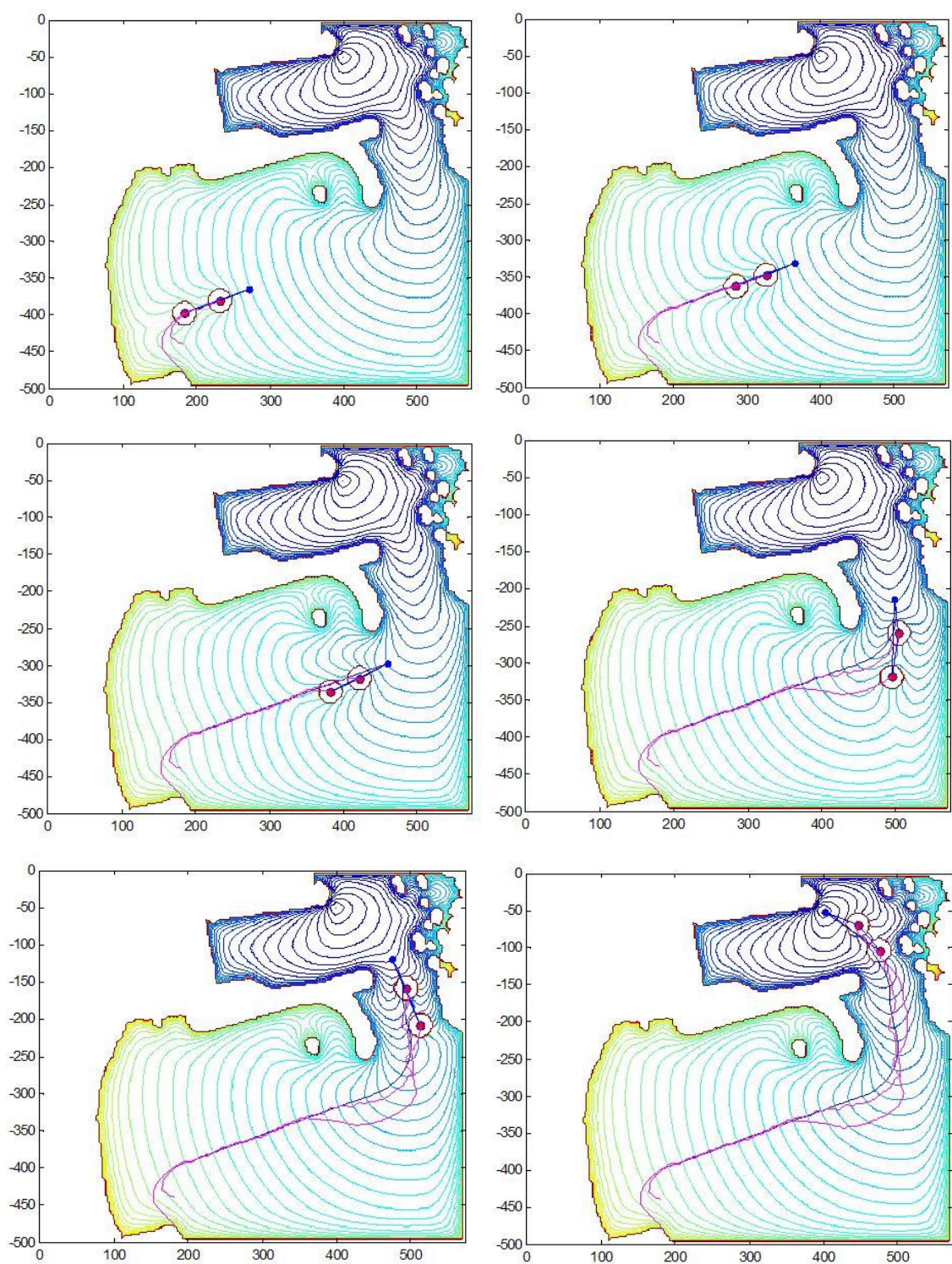


Figura 4.7: Secuencia del movimiento de una formación lineal de USVs marinos con FM^2 (potencial D_{leader})

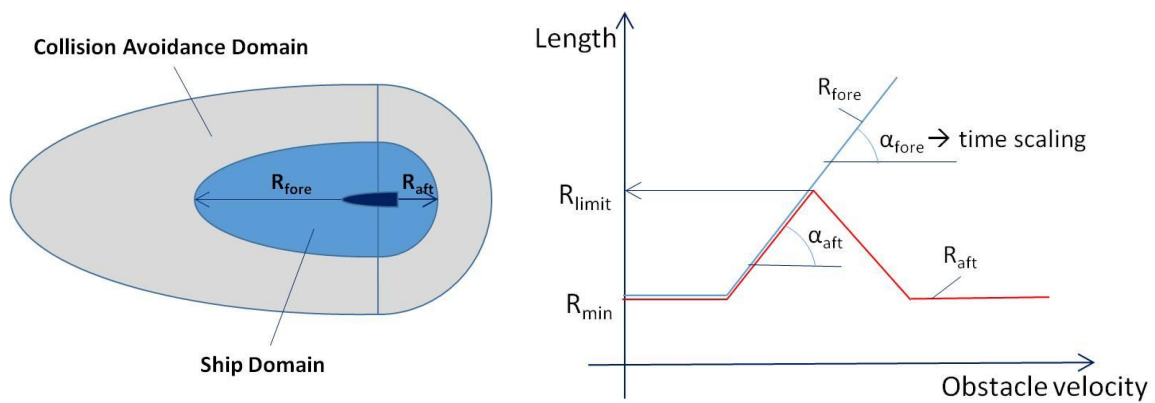


Figura 4.8: Modelo de un obstáculo móvil

Simulaciones con obstáculos móviles

Para evitar colisiones con obstáculos móviles, la mayoría de los estudios en planificación de trayectorias han adoptado el concepto de un área de seguridad ('*Ship Domain*'), para evitar las colisiones, delimitando así el área en torno al barco dentro de la cual la presencia de otros está prohibida. La forma de esta área generalmente es circular, y su centro está colocado en la posición instantánea del obstáculo. Sin embargo, en la planificación de trayectorias de barcos autónomos, la forma circular no siempre es práctica, especialmente cuando el obstáculo está desplazándose a gran velocidad, ya que supone un mayor riesgo de colisión en la zona de proa que en los laterales o en la popa. La forma del área de seguridad de un barco, obstáculo móvil para una formación, debe estar relacionada con su velocidad. La Figura 4.8 muestra la modelización de un obstáculo móvil propuesta en [13] [25]. El dominio del barco debe alterar su forma de acuerdo a su velocidad; una forma circular se construye si el barco se desplaza a baja velocidad, y una forma semielíptica se usa para velocidades más altas. De esta forma el área de seguridad del obstáculo queda definida por dos dimensiones, a proa R_{fore} el radio mayor de la semielipse, y a popa R_{aft} radio de la semicircunferencia trasera y distancia de seguridad en los laterales. A velocidades bajas, para las que el área de seguridad es circular tenemos $R_{fore}=R_{aft}=R_{min}$. A velocidades más altas, ambas longitudes, R_{fore} y R_{aft} crecen proporcionales a la velocidad del obstáculo. Alcanzada cierta velocidad, con $R_{aft}=R_{limit}$, el radio de la sección a popa decrece nuevamente hasta la longitud mínima de seguridad, tal y como se muestra en la curva de la Figura 4.8. Tanto la distancia mínima R_{min} , la máxima a popa R_{limit} , como las escalas temporales que establecen cómo crecen R_{fore} y R_{aft} con la velocidad deben de establecerse de acuerdo a cada aplicación práctica, teniendo en cuenta el tipo de formación, el entorno, la clase de obstáculos, la capacidad de maniobra de los barcos, etc.

Después de determinar el dominio del barco, se puede propagar la interface del barco mediante el método Fast Marching. El dominio del barco actúa como un obstáculo frente a los demás. Se define una nueva zona, '*Collision Avoidance Area*', que se construye en torno al dominio del barco. Esta área constituye el área en el que se propaga la interface del barco, en lugar de hacerlo en todo el dominio. Se establece de forma arbitraria su tamaño de forma proporcional al dominio del barco, con una constante de proporcionalidad que se ajustaría de acuerdo a la aplicación en el que se planifican las trayectorias, y que será del mismo orden que la distancia que satura el potencial de velocidad W .

Otra posible tipo de colisión con obstáculos dinámicos a evitar en trayectorias de formaciones, es la que se puede producir entre los propios vehículos que forman parte de la formación. Cuando dos barcos de la formación se están moviendo muy cerca uno del otro, desde cualquier dirección, se necesita una fuerza de repulsión para mantener la distancia de seguridad. Por lo tanto, se debe usar la misma aproximación entre los barcos de la formación. En este caso, se usa una forma circular para modelar a cada vehículo dentro de la formación, ya que se debe asumir que la velocidad relativa entre los miembros de la formación es pequeña, e idealmente nula. Podemos asumir que las zonas de evitación de la colisión, *Collision Avoidance Area*, son similares a las denominadas por Gómez et al. [9] como funciones de incertidumbre, sólo que en la propuesta de Liu y Bucknall [13] la forma de estas áreas puede variar en función de la velocidad del vehículo u obstáculo cuando éste no es un miembro de la formación.

En las figuras siguientes se muestran los resultados de la evolución de dos formaciones diferentes ante un obstáculo móvil u otro barco, en el mismo entorno utilizado en las simulaciones de la sección anterior. La trayectoria del obstáculo móvil se define en sentido opuesto a la de la formación, y su forma y dominio de colisión como una semielipse a proa, con semieje mayor $R_{fore} = 2 \times R_{min} = 30$ metros y un semicírculo a popa de radio $R_{aft} = R_{min} = 15$ metros. En la Figura 4.9 y la Figura 4.10 se muestra la evolución de diferentes instantes de la formación y cómo está es capaz de evitar la colisión del obstáculo que se mueve hacia ella, y recuperar su forma triangular de partida. La Figura 4.9 muestra la evolución de la formación sobre el potencial W_{leader} , y la Figura 4.10 lo hace sobre D_{leader} . La Figura 4.11 muestra en un instante en que obstáculo y formación de USVs se encuentran próximos, los potenciales de los vehículos seguidores, W_1 y W_2 en las gráficas superiores y D_1 y D_2 en las del centro. Como se ha comentado anteriormente, los potenciales D_1 y D_2 no se calculan en todo el dominio, sino en un entorno reducido que engloba el punto de partida y el objetivo o destino parcial de estos vehículos en ese instante de tiempo. En las figuras inferiores de la Figura 4.11, se representan un detalle ampliado de estos potenciales, D_1 y D_2 , con el bosquejo en rojo de la trayectoria a seguir por cada uno de los vehículos. En particular, puede verse cómo la trayectoria mostrada a la izquierda no resulta la más corta entre los dos puntos, al interponerse el otro vehículo seguidor como obstáculo en la trayectoria. Esto sugiere cómo podemos encontrar variaciones de las soluciones dependiendo de la longitud del paso temporal, o del número de pasos de avance del gradiente descendente entre las sucesivas definiciones de los objetivos parciales, y refresco o redefinición de D_1 y D_2 al actuar unos vehículos como obstáculos de los otros. Esto también explica en parte las desviaciones que podemos encontrar respecto a la forma de la formación inicial que se desea mantener, ya que el gradiente descendente no tiene que seguir para los vehículos seguidores una trayectoria entre dos objetivos parciales que mantenga la forma de la formación.

Junto con la simulación presentada en la sección anterior, en la Figura 4.4 y la Figura 4.5 también con una formación triangular, se muestra que el método FM² es capaz de establecer las trayectorias de la formación manteniendo la forma deseada de ésta, y evitando la colisión con el obstáculo dinámico, recuperando además su forma cuando se supera éste.

Al igual que en la sección anterior, en la Figura 4.12 y la Figura 4.13 se muestra la evolución de una formación lineal de tres vehículos ante el mismo obstáculo móvil. La Figura 4.12 representa la captura de diferentes instantes temporales sobre el potencial de velocidad

W_{leader} , y la Figura 4.13 sobre el potencial D_{leader} . Al igual que en el caso de la formación triangular, se observa como la formación de USVs se mantiene lineal, se deforma en las proximidades del obstáculo móvil, evita la colisión, y es capaz de recuperar su forma una vez superado el obstáculo.

El tiempo de ejecución característico de estas simulaciones en una malla $NX \times NY=259 \times 219$, $\sim O(5 \times 10^4)$ de acuerdo con el escalado hecho de la foto inicial, es del orden de 900 segundos. Teniendo en cuenta el número de ciclos del algoritmo ejecutados, 97 para la formación triangular, tenemos aproximadamente 9-10 segundos de tiempo de computación, de cada ciclo del algoritmo para la definición de los potenciales y avance con el gradiente descendente. Esto muestra la posibilidad del uso del método en barcos reales, pudiendo modificar las trayectorias ante un obstáculo móvil con un tiempo de respuesta suficientemente rápido.

La Figura 4.14 muestra diferentes trayectorias para tres valores diferentes del radio mínimo de giro de los barcos, 5, 10 y 20 metros, valor este último más realista. Puede observarse en las figuras como la trayectoria puede ser sensible a este parámetro de la dinámica de los barcos, más aún en el entorno de la simulación establecido, con quizás poca capacidad de maniobra e interferencia directa del obstáculo con la trayectoria del barco.

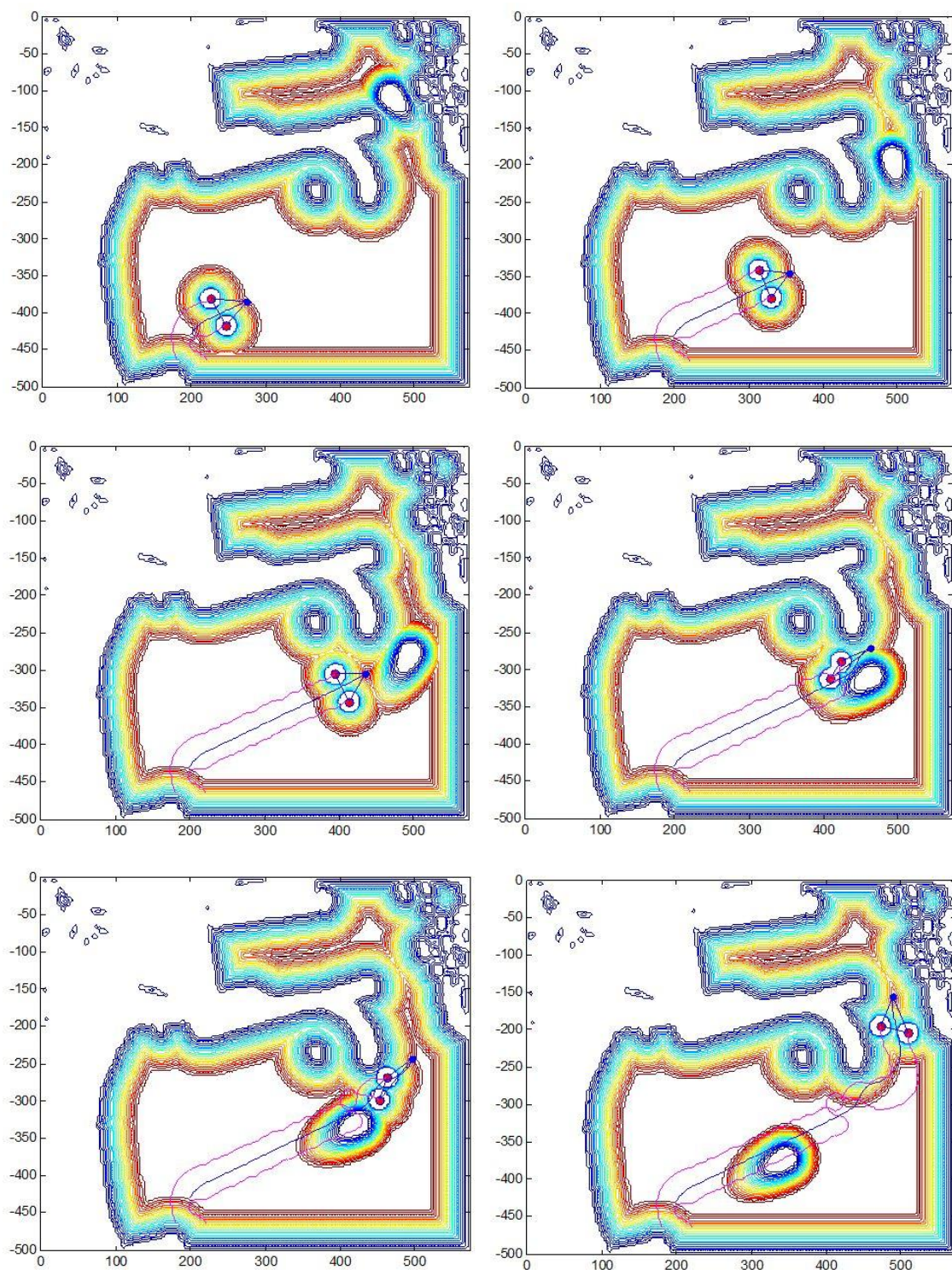


Figura 4.9: Secuencia del movimiento de una formación triangular de USVs marinos ante un obstáculo dinámico(potencial W_{leader})

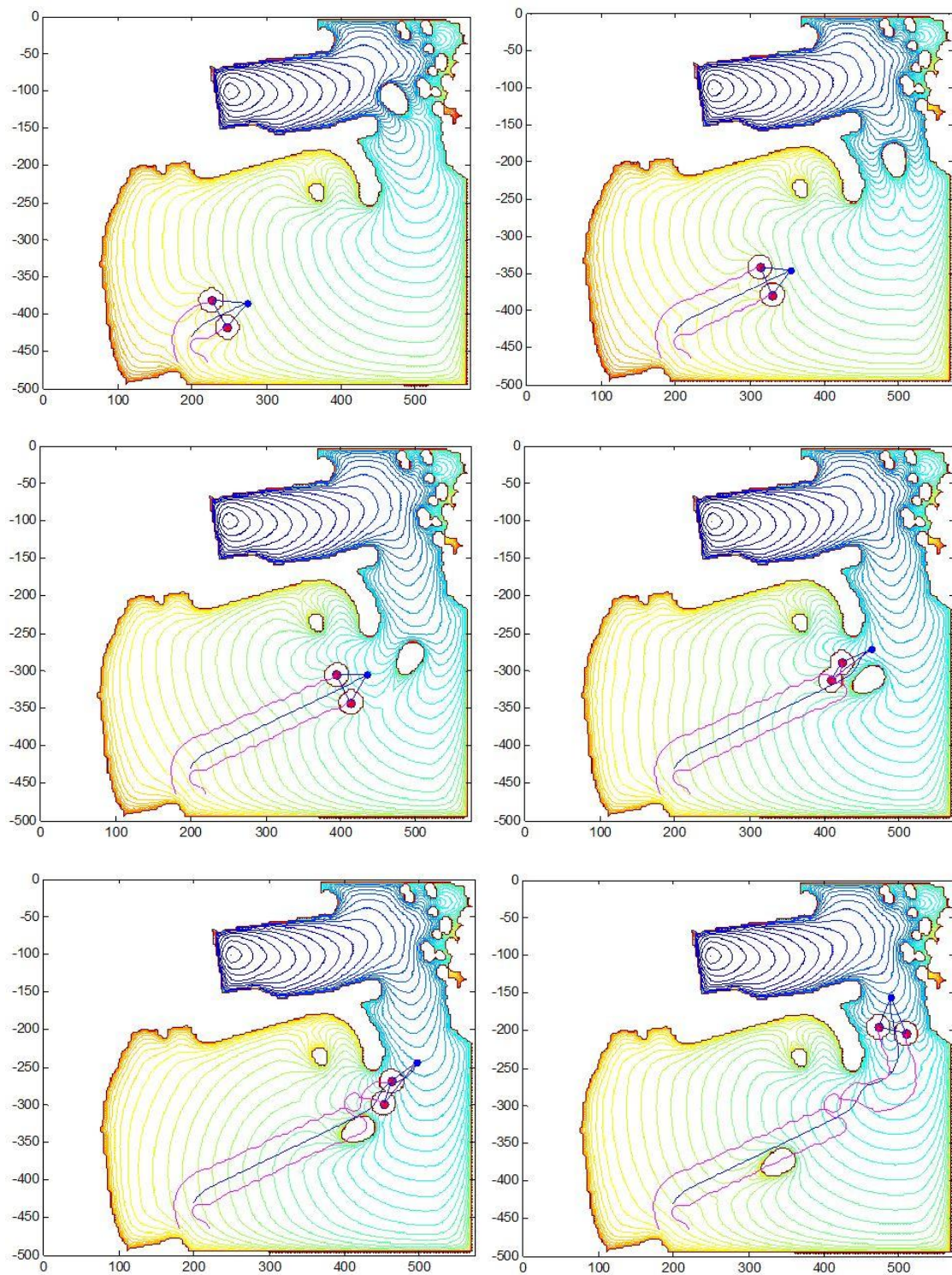


Figura 4.10: Secuencia del movimiento de una formación triangular de USVs marinos ante un obstáculo dinámico (potencial D_{leader})

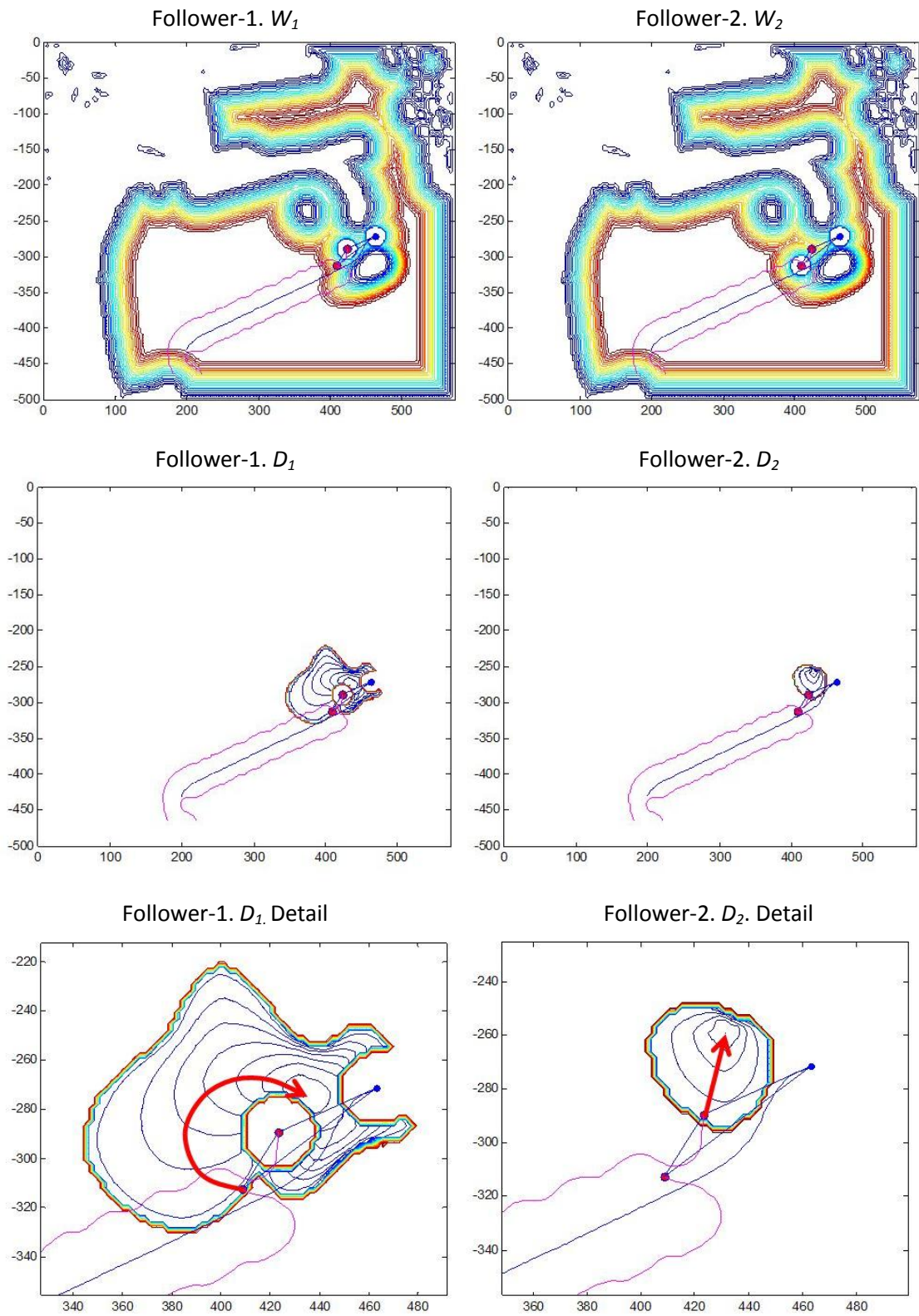


Figura 4.11: Captura en un instante temporal de los potenciales de los vehículos no líderes de la formación triangular

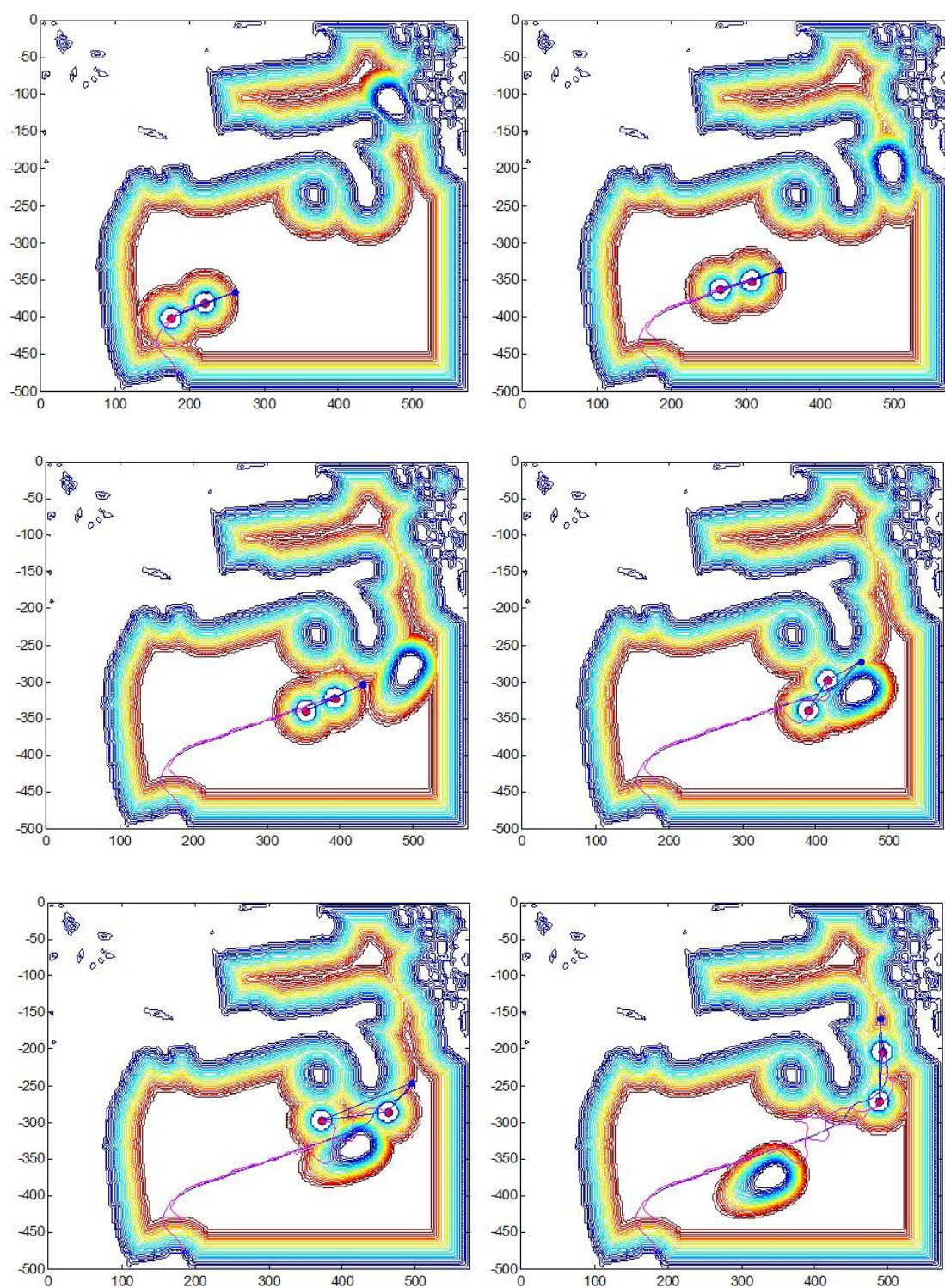


Figura 4.12: Secuencia del movimiento de una formación lineal de USVs marinos ante un obstáculo dinámico (potencial W_{leader})

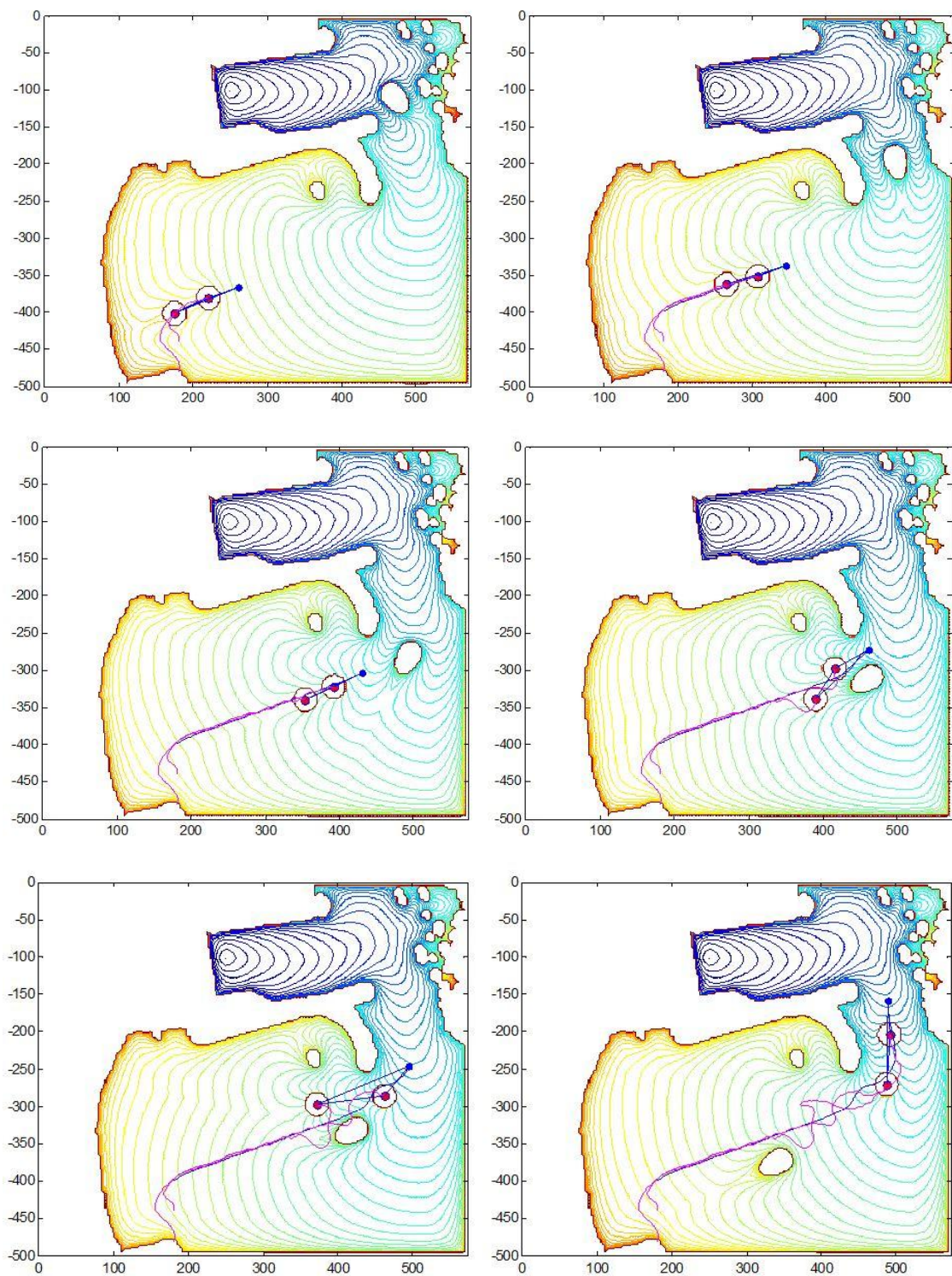


Figura 4.13: Secuencia del movimiento de una formación lineal de USVs marinos ante un obstáculo dinámico (potencial D_{leader})

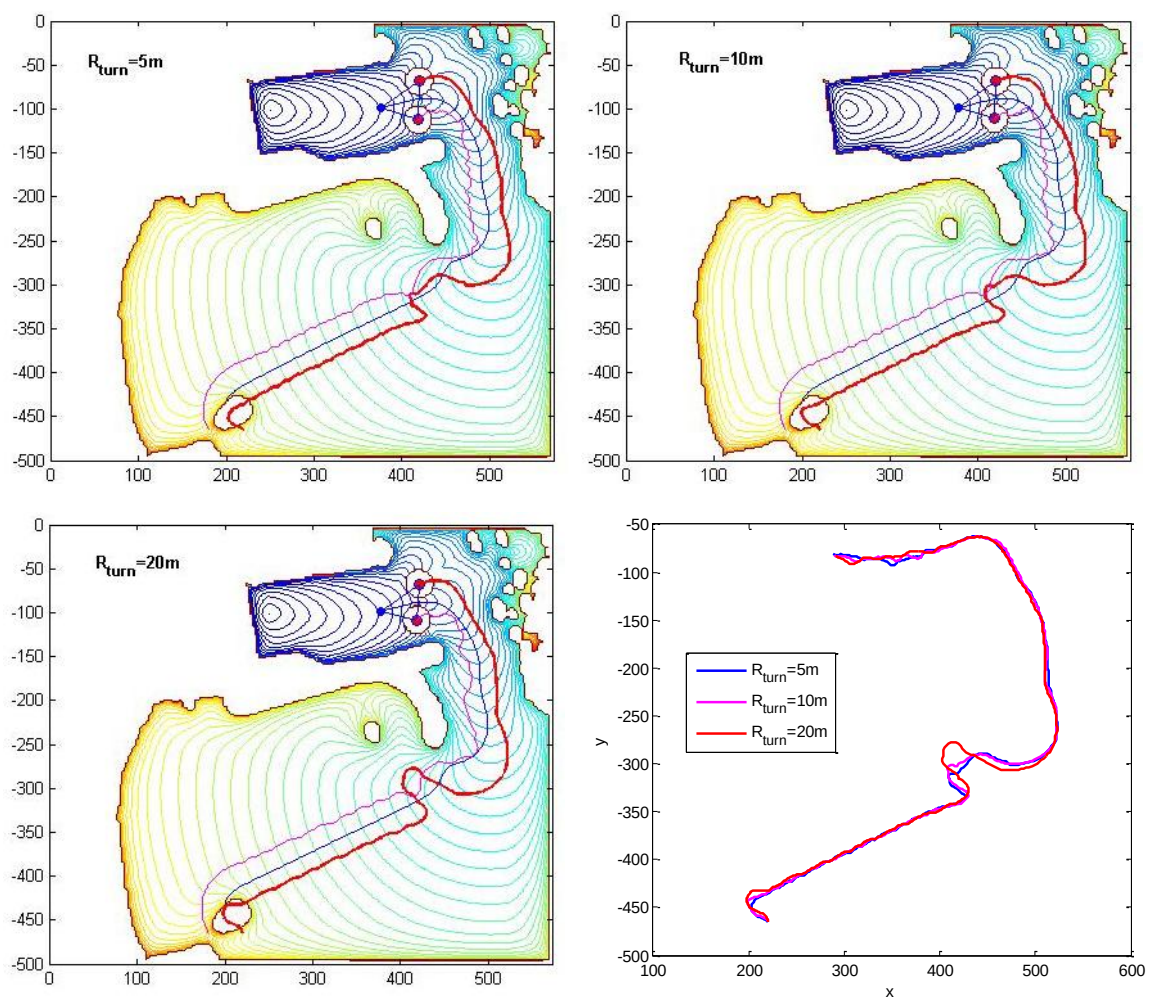


Figura 4.14: Dependencia de las trayectorias con el radio mínimo de giro

5. Conclusiones y trabajo futuro

Conclusiones

En este trabajo fin de máster se han desarrollado las funciones Matlab para un planificador de trayectorias de vehículos marinos no tripulados, basado en los métodos de avance rápido, o Fast Marching [23].

Tras familiarizarnos con los métodos matemáticos de avance rápido, se ha implementado en Matlab, y aplicado el método Fast Marching Square, FM^2 , propuesto por Garrido et al. [9] al cálculo de la trayectoria de un único vehículo autónomo, y más tarde a una formación de éstos. Tras comprobar la robustez y rapidez del algoritmo, se ha extendido a la simulación de vehículos autónomos marinos, con sus propias escalas características, diferentes de la aplicación original, las formaciones de robots, para la que fue desarrollado por Garrido y sus colaboradores. La planificación de las trayectorias, previa al control, de vehículos marinos autónomos en formación o realizando tareas colaborativas constituía el objetivo final del presente trabajo.

Las funciones implementadas deben integrarse en un modelo dinámico Simulink para el control de los vehículos o barcos autónomos marinos [3]. La dinámica de éstos es muy diferente de la de los vehículos terrestres, con diferentes restricciones en su movimiento, velocidades, aceleraciones, tiempos de respuestas, a partir de las fuerzas y momentos sobre el barco.

Las simulaciones realizadas muestran que el método FM^2 constituye un método rápido, robusto y fiable en la planificación de la trayectoria de un único vehículo y para formaciones de vehículos. Las soluciones resultan poco sensibles a parámetros del algoritmo como el paso temporal de integración, el número de pasos dentro de cada ciclo del algoritmo FM^2 en el que se actualizan los potenciales de los vehículos de la formación o la densidad de malla en la que se calculan los potenciales.

Se ha reproducido la variante del algoritmo FM^2 propuesta por Liu y Bucknall [13] en entornos reales de navegación, de dimensiones similares a los de futuras aplicaciones, demostrando ser robusto y rápido. En el capítulo 4 se han presentado diferentes simulaciones de formaciones, triangulares y de tres elementos en línea ante un obstáculo dinámico en una malla $O(5 \times 10^4)$. Éstas requerían de un tiempo de menos de 10 segundos por cada ciclo de construcción de los potenciales de los barcos, y menos de 100 ciclos de éstos para establecer una trayectoria de 730 metros. Tiempos de cálculo de este orden muestran que el método es potencialmente aplicable en la navegación de barcos tripulados. Debe señalarse, sin embargo, que se ha observado en las simulaciones realizadas que al introducir condicionantes, como por ejemplo el radio mínimo de giro de los barcos, ante obstáculos dinámicos pueden aparecer trayectorias diferentes para los vehículos de la formación.

Trabajo futuro

La tarea futura inmediata es la integración de las funciones implementadas con la planificación de las trayectorias en un modelo existente Simulink de la dinámica de un barco autónomo [3]. Después, se llevaría a cabo la realización de experimentos del funcionamiento de las funciones del planificador, en barcos a escala.

Otras posibles mejoras y estudios futuros a realizar sobre el planificador implementado serían:

- Introducir técnicas heurísticas como la evolución diferencial [24], para el cálculo de las trayectorias de los vehículos o barcos seguidores o esclavos, manteniendo el método FM^2 para el cálculo de la trayectoria del líder. Sería posible de este modo incluir ciertas restricciones al movimiento en la función objetivo que determina la posición del vehículo esclavo en cada etapa de las trayectorias, que quizás no son fáciles de introducir en el método FM^2 .
- Análisis en profundidad de la aplicación de las variantes del algoritmo FMM propuestas en [10], [11], [26] al algoritmo FM^2 , para evaluar las posibles mejoras en su velocidad. Las variantes propuestas como FM^* , aumentan la velocidad frente al método Fast Marching habitual al reducir el número de celdas exploradas dentro del dominio hasta alcanzar el objetivo. Sin embargo, las pruebas previas que hemos realizado en el cálculo de los potenciales $D_i(x)$ de los seguidores de la formación no nos han proporcionado mejoras relevantes en la velocidad global del algoritmo.
- Evaluar la posibilidad, coste y beneficio, de utilizar mallas localmente refinadas en las proximidades de los barcos de la formación y ante la proximidad de obstáculos dinámicos. La magnitud de los entornos en los que se calculan los potenciales invita a discriminar entre las regiones más cercanas a los barcos y aquellas más lejanas, donde una estimación precisa de los potenciales no es necesaria. Del mismo modo se podría analizar el efecto de la utilización de discretizaciones de alto orden de la ecuación eikonal [1], [15], sobre todo en el entorno más cercano a la formación.
- Estudio de la sensibilidad del método tanto a los parámetros propios del algoritmo, como a aquellos relacionados con la dinámica de los barcos como el radio mínimo de giro, o las características de la formación.
- Estudio de la aplicación del método FM^2 con un líder virtual de la formación cuya trayectoria sigue una curva paramétrica previamente fijada. Habría que analizar si los miembros de la formación siguiendo al líder virtual son capaces de evitar la colisión con obstáculos móviles, manteniendo la formación o en qué condiciones y condiciones de maniobra de los barcos es necesario rectificar la trayectoria del líder.
- Estudiar la incorporación del efecto de las corrientes y los vientos en la planificación de las trayectorias [14].

Referencias:

- [1] Ahmed, S., Bak, S., McLaughlin, J., Renzi, D. A Third Order Accurate Fast Marching for the Eikonal Equation in Two Dimensions, *SIAM Journal on Scientific Computing* 33, 2402-2420, 2011.
- [2] Barth, T. J., Sethian, J. A. Numerical Schemes for the Hamilton-Jacobi and Level Sets Equations on Triangulated Domains, *Journal of Computational Physics*, 145, 77-91, 1998.
- [3] Carrillo, D. M., López-Orozco, J. A., Girón-Sierra, J. M. Simulation environment for the investigation of automatized cooperation of marine crafts, *Mathematics and Computers in Simulation* 79, 947-954, 2008.
- [4] Forcadel, N., Le Guyader, C., Gout, C. Generalized Fast Marching Method: Applications to image segmentation, *Numerical Algorithms*, 48, 189-211, 2008.
- [5] Garrido, S., Moreno, L., Abderrahim, M., Martin, F. Path Planning for Mobile Robot Navigation Using Voronoi Diagram and Fast Marching, in *Proceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation*, 2376-2381, 2006.
- [6] Garrido, S., Moreno, L., Blanco, D., Muñoz, M. L., Sensor-based Global Planning for Mobile Robot Navigation, *Robotica* 25, 189-199, 2007.
- [7] Garrido, S., Moreno, L., Blanco, D. Exploration of a Cluttered Environment using Voronoi Transform and Fast Marching Method, *Robotics and Autonomous Systems* 56, 1069-1081, 2008.
- [8] Garrido, S., Moreno, L., Abderrahim, M., Blanco, D. FM2: A real-time sensor-based Feedback Controller for Mobile Robots, *IEEE Transactions on Automatic Control* 24, 3169-3192, 2009.
- [9] Gómez, J. V., Lumbier, A., Garrido, S., Moreno, L. Planning robot formations with fast marching square including uncertainty conditions. *Robotics and Autonomous Systems* 61 137-152, 2013.
- [10] Gómez, J. V., Lumbier, A., Garrido, S., Moreno, L. Fast Methods for Eikonal Equations: an Experimental Survey. *arXiv:1506.03771v1*, 2015.
- [11] Gómez, J. V. Fast Marching Methods in path and motion planning: improvements and high-level applications, Thesis, Universidad Carlos III, Madrid, 2015.
- [12] Latombe, J. C. Robot motion planning, Kluwer Academic Publishers, Boston MA, 1991.
- [13] Liu, Y., Bucknall, R. Path planning algorithm for unmanned surface vehicle formations in a practical environment. *Ocean Engineering* 97126-144, 2015.
- [14] Lolla, T., Haley, P. J., Lermusiaux, P. F. J. Path planning in multi-scale ocean flows: Coordination and dynamic obstacles, *Ocean Modelling* 94, 46-66, 2015.
- [15] Luo, S. High-order Factorizations and High-order Schemes for Point-source Eikonal Equations, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 52, 23-44, 2014
- [16] Malladi, R., Sethian, J. A. Level Set and Fast Marching Methods in Image Processing and Computer Vision, *Proceedings of the Fourth European Conference on Computer Vision*, 1064, 251-261, 1996.
- [17] Malladi, R., Sethian, J. A. A real-time algorithm for medical shape recovery, *Proceedings of ICCV'98*, 304-310, 1998.
- [18] Osher, S., Sethian, J. A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics* 79, 12-49, 1988.

- [19] Rawlinson, N., Sambridge, M. Wave front evolution in strongly heterogeneous layered media using the fast marching method, *Geophysical Journal International*, 156, 631-647, 2004.
- [20] Rouy, E., Tpurin, A. A Viscosity Solutions Approach to Shape-From-Shading, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 29(3), 867-884, 1992.
- [21] Sethian, J. A., Popovici, M. Three dimensional traveltimes computation using the Fast Marching Method, *Geophysics*, 64, 516-523, 1999.
- [22] Sethian, J. A., Vladimirsky, A. Fast Methods for the Eikonal and Related Hamilton-Jacobi Equations on Unstructured Meshes, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 97, 5699-5703, 2000.
- [23] Sethian, J. A. *Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid mechanics, Computer Vision and Material Science*. Cambridge University Press, 2000.
- [24] Storn, R., Price, K. Differential Evolution. A simple and Efficient Heuristic for Global optimization over Continuous Spaces, *Journal of Global Optimization* 11, 341-359 , 1997.
- [25] Tam, C., Bucknall, R., Greig, A. Collision risk assessment for ship. *Journal of Marine Science and Technology*. 15, 257-270 , 2010.
- [26] Valero-Gómez, A. , Gómez, J. V., Garrido, S., Moreno, L. The Path to efficiency: Fast Marching Method for safer, more efficient mobile robot trajectories, *IEEE Robotics and Automation Magazine* 20, 111-120, 2013.
- [27] Zhang, X., Bording, R. Fast marching method seismic travel times with reconfigurable field programmable gate arrays, "*Canadian Journal of Exploration Geophysics*, 36, 60-68, 2011.

