



UNED

E.T.S. DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

Titulación:

MÁSTER EN INGENIERÍA DE SISTEMAS Y DE CONTROL

Título del proyecto:

MODELADO Y CONTROL DE UN HELICÓPTERO DE CUATRO  
HÉLICES

Alumno - Antonio González Elías

Director – Jesús Manuel de la Cruz

Curso 2014/2015 – Convocatoria de Junio



Máster en Ingeniería de Sistemas y de Control  
Modelado y control de un helicóptero de cuatro hélices  
Proyecto tipo B: Proyecto propuesto por el alumno  
Alumno - Antonio González Elías  
Director – Jesús Manuel de la Cruz









## Autorización

Autorizamos a la Universidad Complutense y a la UNED a difundir y utilizar con fines académicos, no comerciales y mencionando expresamente a sus autores, tanto la memoria de este Trabajo Fin de Máster, como el código, la documentación y/o el prototipo desarrollado.

Firmado:

Firma del alumno



## RESUMEN DEL PROYECTO

En los últimos años se ha presenciado un creciente desarrollo de los vehículos aéreos no tripulados (UAVs), los cuales han encontrado multitud de aplicaciones en diversos sectores como el militar, la seguridad civil, la industria y el ocio/entretenimiento. Los helicópteros de cuatro hélices, también conocidos como cuadricópteros, han adquirido gran popularidad entre los UAVs debido a su sencillez, maniobrabilidad y seguridad. Estos vehículos poseen cuatro hélices de características idénticas dispuestas en cruz. Las dos hélices de una diagonal giran en sentido horario y las de la diagonal contraria, en sentido anti-horario (ver Figura 1-1).

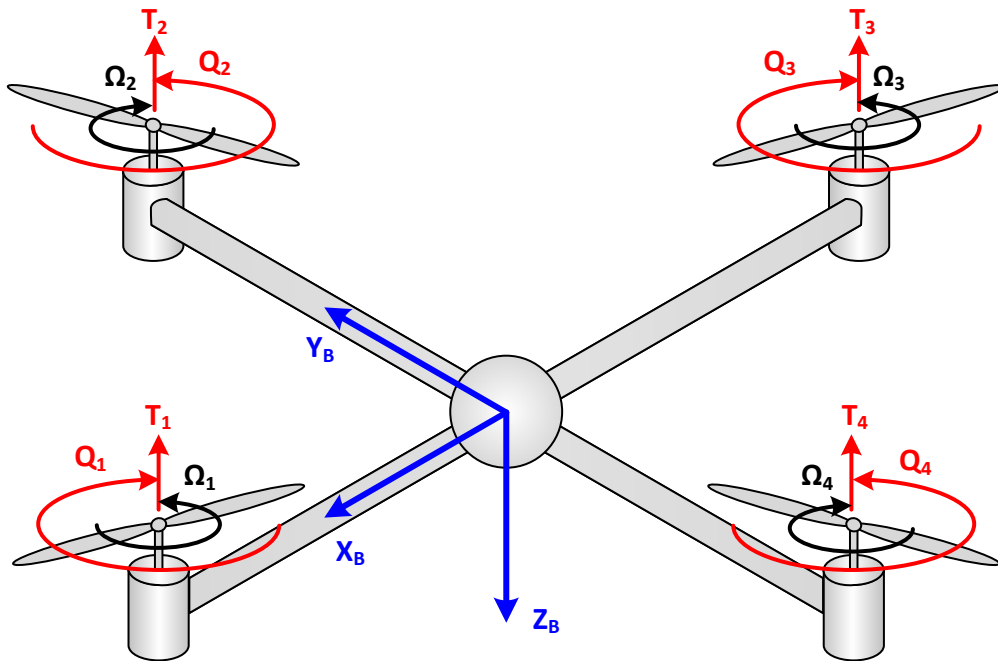


Figura 1-1 Esquema del cuadricóptero. En cada propulsor aparece una fuerza de empuje ( $T_i$ ) y un par aerodinámico ( $Q_i$ ) en sentido contrario a la rotación ( $\Omega_i$ ).

En este trabajo se desarrollan dos aspectos fundamentales del estudio de los helicópteros de cuatro hélices: el modelado dinámico y el diseño de las leyes de control.

Para el modelado dinámico se han desarrollado, por un lado, las herramientas matemáticas para describir la posición y orientación del vehículo, y por otro, las leyes físicas que explican su evolución temporal. Se ha prestado especial atención al modelado de los propulsores; para ello se ha recurrido a la teoría de helicópteros [13], que se puede adaptar fácilmente a este problema.

El sistema de control está compuesto de dos partes principales: el control de actitud y el control de posición/altura. El primero controla la orientación ( $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ ), mientras que el segundo controla la posición ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) del sistema (ver Figura 1-2). El control de actitud se encuentra anidado dentro del lazo de posición/altura y constituye el “corazón” del sistema de control. Se han propuesto cuatro diseños alternativos para el control de actitud: control lineal (PID), control PID difuso [5], control “integral backstepping” [4] y control “integral backstepping” difuso, que es una combinación de

los dos anteriores. Los cuatro controladores se han ajustado mediante algoritmos evolutivos, lo cual posibilita la comparación directa entre ellos. Los resultados muestran que la última propuesta, “integral backstepping” difuso, ofrece las mejores prestaciones. En cuanto a los controladores de posición/altitud se han empleado controladores PID con saturación que añaden un sencillo mecanismo “anti-windup” para mejorar su respuesta dinámica.

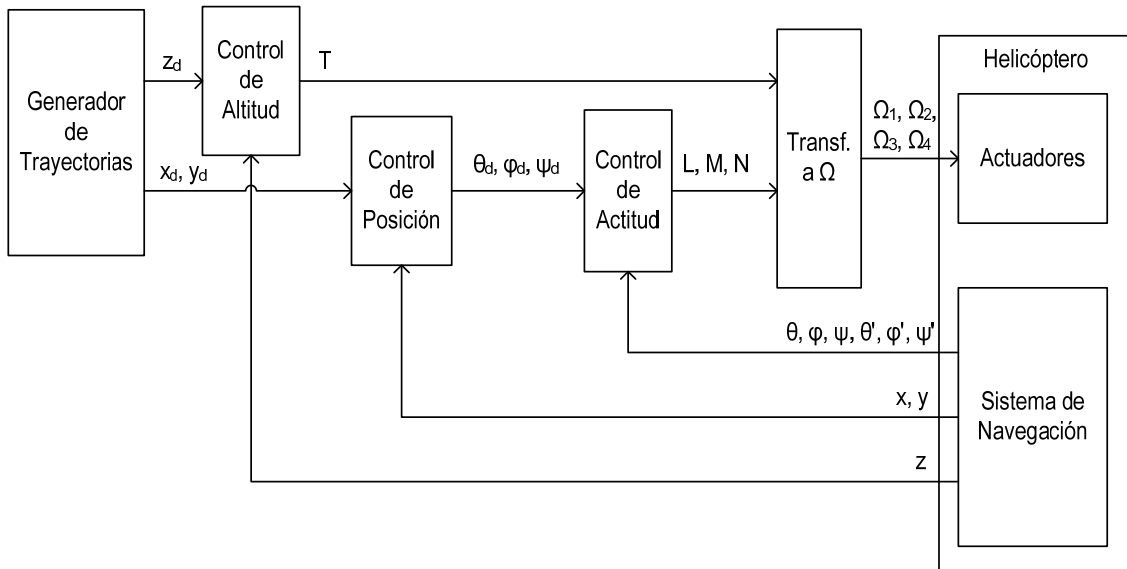


Figura 1-2 Esquema del sistema de control del cuadricóptero.

Tanto el modelo matemático del helicóptero como el sistema de control se han integrado en un simulador dinámico. Este simulador incluye: la dinámica del helicóptero, la dinámica de los propulsores, las fuerzas y pares aerodinámicos, el modelado de los sensores, el sistema de control y un generador de trayectorias. Además, se han desarrollado tres modelos dinámicos alternativos para el helicóptero: un modelo linealizado y dos modelos no lineales. Los modelos no lineales son equivalentes pero se han desarrollado siguiendo dos paradigmas de modelado distintos: analógico y físico [1]. Al final del trabajo se presenta un conjunto de simulaciones que permiten evaluar el comportamiento del sistema en lazo cerrado: seguimiento de trayectorias, los saltos en los comandos de posición y el rechazo a perturbaciones.

## **LISTA DE PALABRAS CLAVE**

- Helicóptero de cuatro hélices, cuadricóptero, cuadrotor
- PID
- Backstepping
- Lógica difusa
- Anti-windup
- Algoritmos evolutivos
- Teoría del elemento de pala
- Teoría de la cantidad de movimiento, modelo de Glauert
- Paradigma de modelado físico

## ÍNDICE

1	INTRODUCCIÓN .....	19
1.1	Motivación.....	19
1.2	Estado del arte .....	23
1.3	Objetivos del trabajo .....	25
1.4	Organización del documento .....	26
2	MODELADO DEL HELICÓPTERO .....	27
2.1	Posición y orientación del helicóptero .....	28
2.2	Fuerzas y pares aerodinámicos .....	32
2.2.1	Teoría de cantidad de movimiento (TCM). Modelo de Glauert.....	33
2.2.2	Teoría del elemento de pala (TEP).....	36
2.2.3	Combinación de las teorías TCM y TEP.....	42
2.2.4	Resistencia aerodinámica del cuerpo .....	47
2.3	Dinámica del helicóptero .....	49
2.4	Modelo para el diseño del control.....	51
2.5	Modelo para simulación.....	54
2.5.1	Modelo aerodinámico.....	55
2.5.2	Modelo del helicóptero h4h.....	61
2.5.3	Modelo de los sensores.....	65
3	DISEÑO DE LA LEY DE CONTROL.....	66
3.1	Estructura general del control.....	66
3.2	Control de actitud.....	69
3.2.1	Control lineal (PID) .....	70
3.2.2	Control PID difuso .....	70
3.2.3	Control “integral backstepping” .....	74
3.2.4	Control “integral backstepping” difuso.....	77
3.2.5	Ajuste mediante algoritmos evolutivos.....	78
3.3	Control de altitud y posición.....	88
4	RESULTADOS DE SIMULACIÓN .....	91
4.1	Rechazo a perturbaciones .....	91
4.2	Seguimiento de trayectorias .....	96
4.3	Saltos de posición .....	101
5	CONCLUSIONES.....	106
5.1	Cumplimiento de los objetivos.....	107

5.2	Líneas de trabajo futuro.....	108
6	REFERENCIAS .....	110
7	ANEXOS.....	113
7.1	Anexo I: Resumen características del helicóptero .....	113
7.2	Anexo II: Componentes .....	115
7.2.1	Hoja característica de los motores.....	115
7.2.2	Hoja característica de las baterías.....	116
7.2.3	Descripción de las palas.....	117
7.3	Anexo III: Figuras complementarias del modelo de simulación .....	118

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-1 Esquema del cuadricóptero. En cada propulsor aparece una fuerza de empuje ( $T_i$ ), y un par aerodinámico ( $Q_i$ ) en sentido contrario a la rotación ( $\Omega_i$ ).....	9
Figura 1-1 Helicóptero de cuatro hélices modelo DraganFlyer V Ti Pro. Las hélices se disponen de forma simétrica, dos giran en sentido horario y dos en sentido antihorario. ....	20
Figura 1-2 Foto del modelo de George de Bothezat e Ivan Jerome en 1923. Fue construido para el servicio aéreo de EEUU y llegó a alcanzar una altura vertical de cinco metros. ....	21
Figura 1-3 Helicóptero de paso variable [16]. Laboratorio de control aeroespacial del instituto tecnológico de Massachusetts (MIT).....	21
Figura 1-4 Proyecto de un UAV ambulancia desarrollado en la universidad TU Delft para el envío urgente de un desfibrilador [18]. ....	22
Figura 1-5 Cuadricóptero camarero en Singapur desarrollado por la empresa Infinium Robotics [19].....	23
Figura 2-1 Partes del modelo de helicóptero de cuatro hélices DraganFlyer V Ti Pro.	27
Figura 2-2 Sistemas de referencia empleados para definir la posición y orientación del vehículo: sistema de referencia fijo ( $F_E$ ), sistema de referencia del vehículo ( $F_V$ ), y sistema de referencia del cuerpo ( $F_B$ ). ....	28
Figura 2-3 Secuencia de tres rotaciones elementales que permiten pasar del sistema de referencia ( $F_V$ ), al sistema asociado al cuerpo ( $F_B$ ): un ángulo $\psi$ en torno a $Z_V$ , un ángulo $\theta$ en torno a $Y'$ y un ángulo $\phi$ en torno a $X''$ ( $X_B$ ). ....	29
Figura 2-4 Representación de los ángulos de Euler mediante una suspensión cardán compuesta por tres marcos. Los ejes de giro están asociados a cada ángulo de Euler ( $\psi$ , $\theta$ , $\phi$ ). La situación mostrada en la figura es la de referencia y se emplea como origen de ángulos. ....	30
Figura 2-5 Singularidad en la representación de los ángulos de Euler cuando se alinean dos ejes de rotación ( $\theta=\pi/2$ ). Para poder realizar la rotación en torno a $Z_B$ (coincidente con $X_V$ ) los ángulos $\psi$ y $\phi$ dan un salto brusco de 0 a $\pi/2$ rad. ....	32
Figura 2-6 Volumen de control en el modelo de Glauert. El disco actuador se representa en posición horizontal, mientras que la sección equivalente está inclinada y es perpendicular al flujo.....	33
Figura 2-7 Sistema de ejes árbol [ $X_A$ , $Y_A$ , $Z_A$ ], y ejes ligados a la pala [ $X_P$ , $Y_P$ , $Z_P$ ]. Sobre el elemento diferencial de la pala aparece una fuerza aerodinámica ( $dF_b^a$ ) debido a la intensidad del viento ( $V^{air,A}$ ) y a la velocidad de giro de la pala ( $\Omega$ ). ....	37
Figura 2-8 Esquema de las velocidades relativas al perfil y de las fuerzas que actúan sobre el mismo en el sistema de la pala [ $X_P$ , $Y_P$ , $Z_P$ ]......	38
Figura 2-9 Par en la dirección horizontal del viento debido a la descompensación en la fuerza de sustentación entre la pala de avance y la pala de retroceso.....	42
Figura 2-10 Cálculo de la velocidad inducida en condiciones de descenso axial ( $\mu_x=0$ , $\mu_y=0$ , $\mu_z=0.5$ ) al combinar las teorías de cantidad de movimiento (TCM) y de elemento de pala (TEP). Izquierda: ecuación original (2.19) y (2.42), derecha: ecuación modificada (2.20) y (2.42) (parámetros en Anexo I).....	43
Figura 2-11 Vuelo axial. Variación del parámetro de velocidad inducida ( $\lambda_i=-v_i/(\Omega \cdot R)$ ), del coef. de empuje ( $C_T$ ), y del coef. de par ( $C_Q=C_{Qi}+C_{Q0}$ ) en función del parámetro de velocidad vertical ( $\mu_z$ ), y velocidad horizontal nula ( $\mu_x=0$ , $\mu_y=0$ ) (parámetros en Anexo I) .....	44

Figura 2-12 Vuelo horizontal. Variación del parámetro de velocidad inducida ( $\lambda_i = -v_i/(\Omega \cdot R)$ ), del coeficiente de empuje ( $C_T$ ), y del coeficiente de par ( $C_Q = C_{Qi} + C_{Q0}$ ) en función del parámetro de velocidad horizontal en X ( $\mu_x$ ) con velocidades vertical y perpendicular nulas ( $\mu_y = 0, \mu_z = 0$ ) (parámetros en Anexo I).....	45
Figura 2-13 Vuelo horizontal. Variación de los coeficientes de fuerza ( $C_H, C_Y, C_T$ ), y de par aerodinámicos ( $C_{Mx}, C_{My}, C_{Mz}$ ) en función del parámetro de velocidad horizontal en X ( $\mu_x$ ) con velocidades vertical y perpendicular nulas ( $\mu_y = 0, \mu_z = 0$ ).....	46
Figura 2-14 Variación del parámetro de velocidad inducida ( $\lambda_i = -v_i/(\Omega \cdot R)$ ), del coeficiente de empuje ( $C_T$ ), y del coeficiente de par ( $C_Q$ ) en función del parámetro de velocidad horizontal en X ( $\mu_x$ ) y velocidad vertical ( $\mu_z$ ).....	47
Figura 2-15 Coeficiente de resistencia ( $C_d$ ) de una esfera en función de número de Reynolds ( $Re$ ) [11].....	48
Figura 2-16 Coeficientes de resistencia ( $C_d$ ) para varios cuerpos tridimensionales para número de Reynolds ( $Re$ ) entre $10^4$ y $10^6$ [11].....	49
Figura 2-17 Sistema de fuerzas y momentos que actúan sobre el cuadricóptero. En cada propulsor aparece una fuerza y un momento ( $F_i, M_i$ ), y en el cuerpo también aparece una fuerza de resistencia aerodinámica ( $F_c$ ), y la gravedad ( $m \cdot g$ ). ....	49
Figura 2-18 Modelo del helicóptero para el control. En cada propulsor aparece una fuerza de empuje o tracción ( $T_i$ ), y un par aerodinámico ( $Q_i$ ) que va en sentido contrario a la velocidad de la hélice ( $\Omega_i$ ). ....	52
Figura 2-19 Modelado de la planta en Simulink .....	55
Figura 2-20 Modelo aerodinámico del helicóptero.....	56
Figura 2-21 Modelado de la dinámica del propulsor.....	57
Figura 2-22 Prestaciones del control de velocidad del propulsor .....	58
Figura 2-23 Modelado de la Fuerza-Momento del propulsor.....	59
Figura 2-24 Cálculo de los coeficientes aerodinámicos a partir de un lazo algebraico que calcula la velocidad inducida. ....	60
Figura 2-25 Modelado de la Fuerza-Momento en el cuerpo debido a la resistencia aerodinámica. ....	61
Figura 2-26 Modelo del helicóptero .....	62
Figura 2-27 Visualización de helicóptero en SimMechanics .....	63
Figura 2-28 Perfiles de par y empuje para comparar los modelos .....	64
Figura 2-29 Evolución de la posición y orientación de los distintos modelos .....	64
Figura 2-30 Modelo dinámico de los sensores. ....	65
Figura 3-1 Modelo del sistema completo y arquitectura del sistema de control .....	67
Figura 3-2 Implementación en Simulink de la transformación de los comandos de momento [ $Lc, Mc, Nc$ ], y empuje ( $Tc$ ) a los comandos de velocidad en los motores ( $\Omega c1, \Omega c2, \Omega c3, \Omega c4$ ).....	68
Figura 3-3 Representación gráfica de la transformación de los comandos de momento [ $Lc, Mc, Nc$ ], y empuje ( $Tc$ ) a los comandos de velocidad en los motores ( $\Omega c1, \Omega c2, \Omega c3, \Omega c4$ ).....	68
Figura 3-4 Alternativas para el control de actitud .....	69
Figura 3-5 Control lineal (PID).....	70
Figura 3-6 Estructura del control PID difuso.....	71
Figura 3-7 Funciones miembro.....	72
Figura 3-8 Método de razonamiento difuso .....	72
Figura 3-9 Curva error-salida para $x_1 = 0.6, x_2 = 0.2$ . ....	73
Figura 3-10 Implementación del control “integral backstepping” en Simulink .....	77

Figura 3-11 Implementación del control “integral backstepping” difuso en Simulink....	78
Figura 3-12 Algoritmo de optimización <i>patternsearch()</i> .....	80
Figura 3-13 En la gráfica superior, evolución del índice de ajuste en cada iteración para el caso del control PID lineal. En la gráfica inferior, incremento del índice de ajuste con respecto al valor óptimo (final) en porcentaje: $100 \cdot J_i / J_{opt} - 100$ . A partir de la iteración 82 el incremento está por debajo del 1%.....	81
Figura 3-14 Trayectoria de optimización de los parámetros del control PID lineal. A la izquierda, vista general de la trayectoria que comienza arriba a la izquierda y finaliza en el abajo centrado. A la derecha, zoom del final de la trayectoria. ....	81
Figura 3-15 Evolución del índice de ajuste en cada iteración y su descomposición en los cuatro subíndices, los cuales se calculan por medio de los índices [IST1, IST2, ISE1 ISE2] multiplicados por sus respectivos pesos [wt1 wt2 we1 we2] .....	82
Figura 3-16 Comparación numérica para el eje de alabeo y cabeceo .....	85
Figura 3-17 Comparación numérica para el eje de guiñada.....	88
Figura 3-18 Control lineal (PID) con anti-windup.....	89
Figura 3-19 Prestaciones del control de posición este (o norte) .....	90
Figura 3-20 Prestaciones del control de altura .....	90
Figura 4-1 Perturbaciones: control lineal con modelo lineal .....	92
Figura 4-2 Perturbaciones: control lineal con modelo no lineal .....	93
Figura 4-3 Perturbaciones: control no lineal con modelo lineal .....	94
Figura 4-4 Perturbaciones: control no lineal con modelo no lineal .....	95
Figura 4-5 Seguimiento trayectorias: control lineal con modelo lineal.....	97
Figura 4-6 Seguimiento trayectorias: control lineal con modelo no lineal.....	98
Figura 4-7 Seguimiento trayectorias: control no lineal con modelo lineal.....	99
Figura 4-8 Seguimiento trayectorias: control no lineal con modelo no lineal.....	100
Figura 4-9 Salto de posición: control lineal con modelo lineal.....	102
Figura 4-10 Salto de posición: control lineal con modelo no lineal.....	103
Figura 4-11 Salto de posición: control no lineal con modelo lineal.....	104
Figura 4-12 Salto de posición: control no lineal con modelo no lineal.....	105
Figura 7-1 Palas de los propulsores .....	117
Figura 7-2 Cálculo de los coeficientes aerodinámicos. ....	118
Figura 7-3 Modelo lineal del helicóptero; ecuación (2.59).....	119
Figura 7-4 Modelo no lineal del helicóptero suponiendo matriz diagonal de inercia; ecuación (2.53).....	119
Figura 7-5 Modelo no lineal del helicóptero mediante el bloque predefinido de Simulink “6DoF (Euler Angles)”.....	120
Figura 7-6 Modelo no lineal del helicóptero mediante SimMechanics.....	120
Figura 7-7 Control de velocidad de los propulsores con saturación de tensión. ....	121

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2-1 Parámetros del modelo del helicóptero para el diseño del control.....	53
Tabla 2-2 Parámetros del modelo de la Dinámica del propulsor.....	57
Tabla 2-3 Parámetros del control de velocidad del propulsor.....	57
Tabla 2-4 Parámetros del modelo de la resistencia aerodinámica del cuerpo.....	60
Tabla 2-5 Parámetros del sensor.....	65
Tabla 3-1 Parámetros ajuste control lineal (PID).....	70
Tabla 3-2 Parámetros ajuste control PID difuso.....	73
Tabla 3-3 Parámetros ajuste “integral backstepping”.....	77
Tabla 3-4 Parámetros ajuste “integral backstepping” difuso.....	78
Tabla 3-5 Comparación grafica de las prestaciones para el eje de alabeo.....	84
Tabla 3-6 Comparación numérica para el eje de alabeo y cabeceo.....	85
Tabla 3-7 Comparación grafica de las prestaciones para el eje de guiñada.....	87
Tabla 3-8 Comparación numérica para el eje de guiñada.....	88
Tabla 3-9 Parámetros ajuste control posición y altitud.....	89
Tabla 5-1 Consecución de los objetivos del trabajo.....	108
Tabla 7-1 Resumen de características del helicóptero.....	114
Tabla 7-2 Características del motor del propulsor.....	115
Tabla 7-3 Características de la batería.....	116

## ÍNDICE DE ACRÓNIMOS

c.d.m.	Centro de masas
coef.	Coeficiente
GPS	“Global positioning system”
IB	“Integral backstepping”
LSN	Línea de sustentación nula
p. ej.	Por ejemplo
PID	Proporcional-Integral-Derivativo
TCM	Teoría de cantidad de movimiento
TEP	Teoría del elemento de pala
UAV	“Unmanned Aerial Vehicle”

## 1 INTRODUCCIÓN

En este trabajo final de máster se desarrollan dos aspectos fundamentales del estudio de los helicópteros de cuatro hélices: el modelado dinámico y el diseño de las leyes de control. Este trabajo se basa en el estudio previo que se realizó en la asignatura de prácticas [2]. Este estudio inicial se ha extendido añadiendo mayor nivel de detalle en el modelado y profundidad en los análisis.

El modelado dinámico se desarrolla en la primera parte del documento y explica en detalle las herramientas matemáticas necesarias para describir, por un lado, la posición y orientación del vehículo, y por otro, las ecuaciones dinámicas que explican su evolución temporal. Se ha prestado especial atención al modelado de las hélices propulsoras; para ello se ha recurrido a la teoría de helicópteros [13], que se puede adaptar fácilmente a este caso de aplicación.

El sistema de control está compuesto de dos partes principales: el control de actitud y el control de posición/altura. El primero controla la orientación, mientras que el segundo controla la posición absoluta del sistema. El control de actitud se encuentra anidado dentro del control de posición/altura y constituye el “corazón” del sistema de control. Se han propuesto cuatro controladores alternativos para el control de actitud: control lineal (PID), control PID difuso, control “integral backstepping” y control “integral backstepping” difuso. Los cuatro controladores se han ajustado mediante algoritmos evolutivos, lo cual posibilita la comparación directa entre ellos y la selección del más prometedor. Los resultados muestran que la última propuesta, “integral backstepping” difuso, ofrece las mejores prestaciones. En cuanto a los controladores de posición/altitud se han empleado controladores PID con saturación que añaden un sencillo mecanismo “anti-windup” para mejorar su respuesta dinámica.

Tanto el modelo matemático del helicóptero como el sistema de control se han integrado en un simulador dinámico para su estudio y análisis. Este simulador incluye: la dinámica del helicóptero, la dinámica de los propulsores, las fuerzas y pares aerodinámicos, el modelado de los sensores, el sistema de control y un generador de trayectorias. Se han desarrollado varios modelos dinámicos para el helicóptero siguiendo distintas técnicas de diseño. El simulador permite seleccionar el tipo de modelo para el helicóptero; en particular tiene especial interés el poder elegir entre un modelo lineal o no lineal de la planta.

Por último, se comparan los controladores para varios casos de simulación. En particular se combinan los controladores con los dos tipos de planta: lineal o no lineal. Los casos de simulación permiten evaluar el seguimiento de trayectorias, los saltos en los comandos de posición y el rechazo a perturbaciones.

### 1.1 Motivación

En los últimos años se ha presenciado un amplio desarrollo en la tecnología de vehículos aéreos no tripulados, o Unmanned Aerial Vehicles (UAVs). Esta evolución se ha debido fundamentalmente a las ventajas que presentan este tipo de aeronaves en actividades que requieren una alta maniobrabilidad o reducidas dimensiones del vehículo, así como en misiones de alto riesgo para vehículos tripulados. Otra ventaja de los UAVs es que los costes de operación pueden ser inferiores a los de vuelos

tripulados. Existen diversos tipos de UAVs. Entre ellos, los helicópteros de cuatro hélices, también conocidos como cuadricópteros, se han posicionado con mayor popularidad debido a su sencillez, maniobrabilidad y seguridad.

Los cuadricópteros son vehículos aéreos propulsados por cuatro hélices dispuestas de forma simétrica. Dos hélices giran en sentido horario y dos en sentido antihorario, tal como se muestra en la siguiente figura. Las hélices poseen características idénticas salvo el sentido de torsión de las palas, que depende del sentido de giro de la hélice.

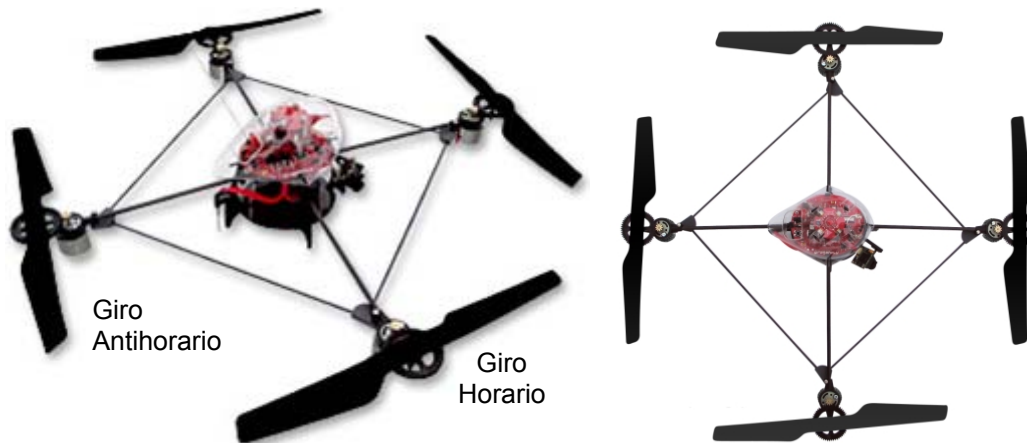


Figura 1-1 Helicóptero de cuatro hélices modelo DraganFlyer V Ti Pro. Las hélices se disponen de forma simétrica, dos giran en sentido horario y dos en sentido antihorario.

Este tipo de vehículos comparte los atractivos y las limitaciones principales de los helicópteros. La principal ventaja consiste en su gran maniobrabilidad, que permite realizar vuelo a punto fijo, y aterrizar y despegar en espacios reducidos. Por otro lado, la limitación principal de los helicópteros es su elevado consumo de potencia en relación a su capacidad de carga y velocidad máxima de vuelo [13]. Sin embargo, ciertas aplicaciones requieren las mencionadas funcionalidades, lo que abre la puerta a este tipo de vehículos.

Los primeros desarrollos de helicópteros de cuatro hélices se iniciaron a finales de la década de 1920. El uso de varias hélices permitía emplear palas de menor longitud, facilitando su construcción, y resolvía el problema de par inducido en el eje vertical. Conviene observar que muchos de los helicópteros actuales emplean un rotor antipar cuya potencia no es aprovechada. Estos primeros diseños estuvieron entre los primeros sistemas en lograr vuelos verticales (ver figura). Sin embargo, sus pobres prestaciones y baja estabilidad, hicieron que estos diseños cayeran en desuso [14].

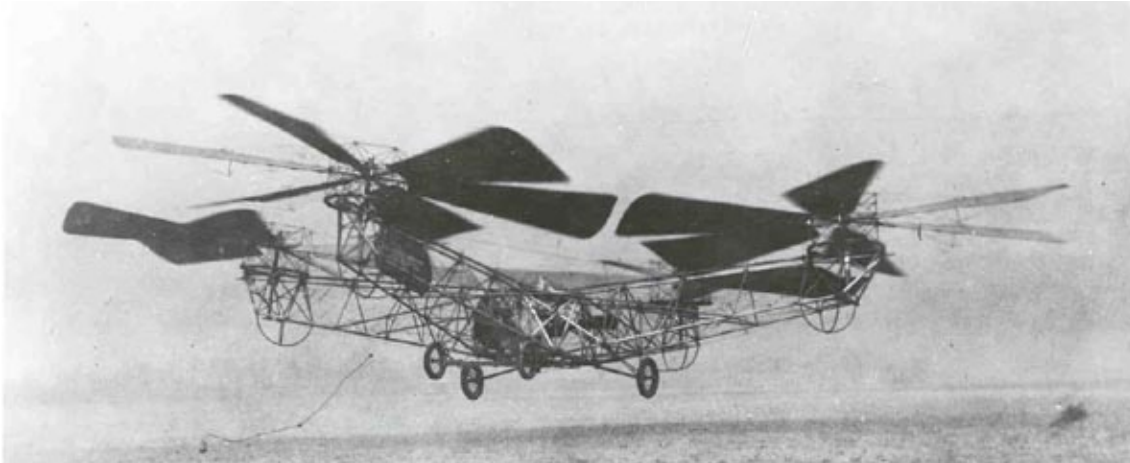


Figura 1-2 Foto del modelo de George de Bothezat e Ivan Jerome en 1923. Fue construido para el servicio aéreo de EEUU y llegó a alcanzar una altura vertical de cinco metros.

El desarrollo de los cuadricópteros ha recibido fuerte impulso con la reciente aparición de los UAVs. Estos equipos incluyen sistemas de navegación y control que permiten estabilizar el vehículo de forma automática. Su reducido tamaño, y elevada maniobrabilidad permiten su utilización en aplicaciones tanto de interior como de exterior [15].

El cuadricóptero presenta una serie de ventajas frente a los helicópteros convencionales. Algunas de estas ventajas provienen de su sencillez mecánica, ya que emplean cuatro propulsores rígidos prácticamente iguales entre sí. En los helicópteros convencionales el rotor principal incorpora un control de paso en las palas para posibilitar el vuelo de avance. El control de paso consiste en un sistema que varía el ángulo de paso de las palas de forma periódica en cada vuelta. Esto evita el par debido a las diferencias de velocidades entre la pala de avance y la de retroceso (ver §2.2.2). En el cuadricópteros este fenómeno se compensa entre las hélices que giran en un sentido y las que giran en sentido contrario. No obstante existen propuestas de cuadricópteros que emplean palas de paso variable tal como se presenta en [16], esto tiene como objetivo alcanzar aún mayor maniobrabilidad, ya que permite incluso el vuelo invertido.



Figura 1-3 Helicóptero de paso variable [16]. Laboratorio de control aeroespacial del instituto tecnológico de Massachusetts (MIT)

Por otro lado el uso de cuatro propulsores presenta ventajas en cuanto a maniobrabilidad y seguridad. La dinámica del helicóptero se controla variando la velocidad relativa de sus cuatro hélices, que dada la simetría del vehículo, permite realizar movimientos con gran agilidad. Además, al usar cuatro propulsores en vez de uno, como es el caso del helicóptero convencional, es posible reducir su tamaño y potencia. Esto mejora la seguridad para trabajar en entornos humanos, por ejemplo, en el interior de edificios. La posibilidad de emplear motores eléctricos también permite reducir la emisión de ruidos.

Las aplicaciones de los UAVs en general son numerosas. Su desarrollo en el ámbito militar es ampliamente conocido. Además, en los últimos años, los UAVs han comenzado a emplearse en otras áreas, tales como en operaciones de búsqueda y rescate, catástrofes naturales, vigilancia e inspección de instalaciones o cartografía [17]. En la Figura 1-4 y Figura 1-5 se muestran dos aplicaciones novedosas, la primera el proyecto de un UAV ambulancia capaz de entregar un desfibrilador en cuestión de minutos, y en la segunda un cuadricóptero camarero operativo en un restaurante de Singapur.

Los helicópteros de cuatro hélices, comúnmente denominados en inglés como “quadrotors” o “quadcopters”, han encontrado múltiples aplicaciones en campos de defensa, seguridad civil, e industria:



Figura 1-4 Proyecto de un UAV ambulancia desarrollado en la universidad TU Delft para el envío urgente de un desfibrilador [18].



Figura 1-5 Cuadricóptero camarero en Singapur desarrollado por la empresa Infinium Robotics [19].

Sin embargo es importante tener en cuenta que las aplicaciones están limitadas por la legislación vigente en cada país. En España existe un régimen temporal aprobado por el Consejo de Ministros del 4 de julio de 2014, cuyas condiciones y requisitos se recogen en el BOE del 5 de julio de 2014 [20]. Esta regulación se ve completada por el régimen general de la Ley 48/1960, de 21 de julio, sobre Navegación Aérea. El régimen temporal surge en respuesta a la necesidad de contar con un marco adecuado que permita el desarrollo de actividades con UAVs de peso inferior a 150 kg al despegue, en condiciones seguras. El régimen temporal describe, en primer lugar, el alcance del mismo, es decir, las actividades que regula, como por ejemplo trabajos científicos, demostraciones aéreas a público limitado o vuelos de programas de investigación. En segundo lugar, se regula el espacio físico donde podrán realizarse estas actividades, fundamentalmente en zonas no pobladas. A continuación se describen los requisitos para poder operar, aplicables tanto al piloto como al UAV, y, por último, se establece el procedimiento para solicitar la autorización de realización de la actividad a la Agencia Estatal de Seguridad Aérea (AESA).

## 1.2 Estado del arte

A pesar de que ha transcurrido un tiempo considerable desde la aparición de cuadricópteros en aplicaciones para UAVs, el control de estos vehículos sigue suscitando un gran interés en la comunidad científica. Su atractivo radica, por una parte, en las dificultades ligadas a este tipo de sistema, tales como una naturaleza multivariable, un comportamiento no lineal y la existencia de acoplamientos dinámicos. Por otra parte, se trata además de un sistema subactuado, ya que la dinámica posee seis salidas, tres para la posición ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) y tres para la orientación ( $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ ), mientras que sólo posee cuatro entradas independientes de actuación, esto es, la velocidad de cada propulsor. Y por último también hay que considerar las incertidumbres y dinámicas no modeladas, que pueden ser desconocidas durante el diseño del control.

En este trabajo se abordan dos aspectos fundamentales del estudio de los helicópteros de cuatro hélices: el modelado dinámico y el diseño de las leyes de control.

En la literatura se puede encontrar gran variedad de técnicas para abordar el problema del control. Algunos métodos emplean controladores lineales como PID's o reguladores cuadráticos [21] [22] [23]. Sin embargo, la estabilidad de estos métodos sólo se garantiza en regiones de operación reducidas, lo que motiva y justifica el uso de controles no lineales.

Dentro de las técnicas de control no lineal se pueden encontrar, entre otras: saturación, linealización por realimentación de estados, control en modo deslizante, "backstepping" y lógica difusa. La técnica de saturación se emplea, por ejemplo, en controladores PID que incluyen algún sistema "anti-windup" [24]. Esta idea se emplea para el control de altitud y posición en este trabajo (ver §3.3). En [25] se presenta un control por realimentación de estados en la que el sistema se descompone en estructuras anidadas. Una propuesta por control en modo deslizante se puede encontrar en [26], donde se puede modificar la consigna para la posición ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) y el ángulo de guiñada ( $\psi$ ) del helicóptero, mientras que los ángulos de cabeceo ( $\theta$ ) y alabeo ( $\phi$ ) se mantienen estabilizados. El control por "backstepping" se puede encontrar en [27], [4] y [28]; la ventaja de estas técnicas es que la estabilidad se verifica durante la fase de diseño, ya que esta metodología se fundamenta en la teoría de estabilidad de Lyapunov. Una de las propuestas para el control presentada en este trabajo (ver §3.2.3) se basa en el artículo de Bouabdallah y Siegwart [4]. Por último, el control basado en lógica difusa permite desarrollar controladores que emulan el razonamiento humano. Estas técnicas se han empleado con éxito en multitud de aplicaciones industriales [6], y en particular, en el control de cuadricópteros [29]. En este trabajo se presenta una alternativa no lineal basada en el PID difuso presentado en [5]. Este control presenta ciertas ventajas. Por un lado, es un control de propósito general sencillo y versátil con una entrada, tres reglas y como máximo seis parámetros de configuración. Por otro lado, presenta una forma cerrada que facilita su optimización y análisis.

En cuanto al modelado dinámico del cuadricóptero, la mayor parte de los trabajos que se pueden encontrar en la literatura consideran el vehículo como un sólido rígido al que se añade el efecto giroscópico de los propulsores. En cuanto al modelado aerodinámico de las palas, se suelen emplear modelos simplificados en los que los coeficientes aerodinámicos se aproximan mediante constantes. Esta aproximación puede alejarse de la realidad en ciertas regiones de operación, como por ejemplo, en el vuelo de descenso. En este trabajo se ha hecho un esfuerzo especial en el desarrollo de un modelo de simulación que permita recoger cualquier situación de vuelo. Para ello se ha recurrido a la teoría de helicópteros [13] [14] para el modelado detallado de los propulsores (ver §2.2).

### 1.3 Objetivos del trabajo

Los objetivos principales de este trabajo son:

- 1) Desarrollar un modelo de simulación considerando los siguientes aspectos:
  - a) Que permita comparar las siguientes opciones de modelado del helicóptero:
    - i) Modelo linealizado en torno a la operación de vuelo a punto fijo.
    - ii) Modelo no lineal mediante paradigma de simulación analógica.
    - iii) Modelo no lineal mediante paradigma de modelado físico.
  - b) Que incluya un modelo aerodinámico de los propulsores:
    - i) Que calcule las fuerzas y los momentos que actúan sobre el propulsor en función de las características de las palas (p. ej. longitud, perfil), del aire (p. ej. densidad, velocidad).
    - ii) Que incluya el control y la dinámica de los actuadores.
  - c) Que permita simular y comparar los distintos tipos de controles propuestos.
  - d) Que permita generar las siguientes trayectorias:
    - i) Movimientos a velocidad lineal constante en ejes geográficos.
    - ii) Movimientos de un punto a otro expresados en ejes geográficos.
- 2) Diseñar, analizar y comparar distintas propuestas para el control del helicóptero considerando los siguientes aspectos:
  - a) Que el método de ajuste y la medida de prestaciones permitan una comparación justa entre los controladores propuestos.
  - b) Que los controladores propuestos tengan las siguientes capacidades:
    - i) Estabilizar la actitud (orientación) y altura del vehículo tanto para el modelo lineal como para el no lineal.
    - ii) Seguir las trayectorias deseadas en presencia de perturbaciones.

## 1.4 Organización del documento

Este documento se ha estructurado en seis capítulos:

1. Introducción: presenta la información contenida en este trabajo, su relación con la literatura existente y los objetivos que se desean alcanzar.
2. Modelado del helicóptero: presenta el modelado matemático del helicóptero. Primero se hace una descripción de los sistemas de referencia empleados para definir la posición y orientación del vehículo. A continuación se aborda el cálculo de las fuerzas y los pares aerodinámicos que aparecen en los propulsores y el cuerpo del helicóptero. Después se describe la dinámica del sistema, la cual combina los dos apartados anteriores, es decir, se estudia la evolución de la posición y la orientación del vehículo en función de las fuerzas y momentos que actúan sobre el mismo. Las ecuaciones dinámicas resultantes poseen naturaleza no lineal; en el siguiente apartado se obtiene un modelo simplificado para el diseño del control y se linealiza en el entorno de operación correspondiente al vuelo en punto fijo. Finalmente, en el último apartado, se presenta la implementación del modelo matemático en Matlab/Simulink.
3. Diseño de la ley de control: presenta la estructura global del sistema control y las partes en las que se descompone: el control de actitud (orientación), el control de altura (z), y el control de posición (x-y). A continuación, se describen los controladores propuestos para cada parte. El control de actitud (orientación) recibe una atención especial, ya que es la parte principal del sistema de control; por este motivo, se proponen y comparan cuatro alternativas para esta parte. El ajuste de estos controladores se realiza por algoritmos evolutivos para conseguir una comparación justa entre ellos. El control de actitud que proporciona mejores resultados es seleccionado para las simulaciones del siguiente capítulo. El control de altura y posición, de menor criticidad, se ajustan por métodos clásicos.
4. Resultados de simulación: presenta un conjunto de casos de simulación para evaluar las prestaciones del sistema en lazo cerrado. Los casos de simulación incluyen perturbaciones, seguimiento de trayectorias y saltos de posición. Para la simulación se emplean tanto el modelo no lineal del helicóptero como su versión linealizada.
5. Conclusiones: resume los principales resultados del trabajo, el cumplimiento de los objetivos que se presentaron en el primer capítulo y las líneas de trabajo futuro.
6. Referencias: se listan las fuentes bibliográficas consultadas para la elaboración del trabajo.
7. Anexos: incluye la información complementaria de este trabajo. Por un lado, presenta una tabla resumen de los parámetros del sistema. Y por otro, se añaden las hojas de características de los componentes del helicóptero considerados en este trabajo (p. ej. motores).

## 2 MODELADO DEL HELICÓPTERO

En este capítulo se presenta el modelo matemático que describe la dinámica del helicóptero. Esta descripción matemática se puede aplicar a cualquier modelo real de cuadricóptero, la diferencia entre modelos sería básicamente paramétrica. De cara a los cálculos, simulaciones y ajustes del control, en este trabajo se ha basado en el modelo DraganFlyer V Ti Pro (ver Figura 1-1 y Figura 2-1). Los parámetros considerados de han agrupado en la tabla del Anexo I.

En la siguiente figura se muestran los elementos fundamentales que componen helicóptero. Los propulsores se disponen en cruz y de forma simétrica con respecto al cuerpo del helicóptero. Los propulsores de una diagonal giran en sentido horario, y los de la diagonal contraria en sentido anti horario. Además incluyen una reductora que conecta los motores con las hélices. La electrónica y las baterías se sitúan en el centro del helicóptero. La electrónica se encarga de las comunicaciones con la estación base (intercambio de telecomandos y telemetrías), de determinar la posición y orientación del vehículo a partir de los sensores inerciales (p. ej. giróscopos, acelerómetros, brújula, GPS), de implementar las leyes de control, y de transmitir la potencia requerida a los motores.

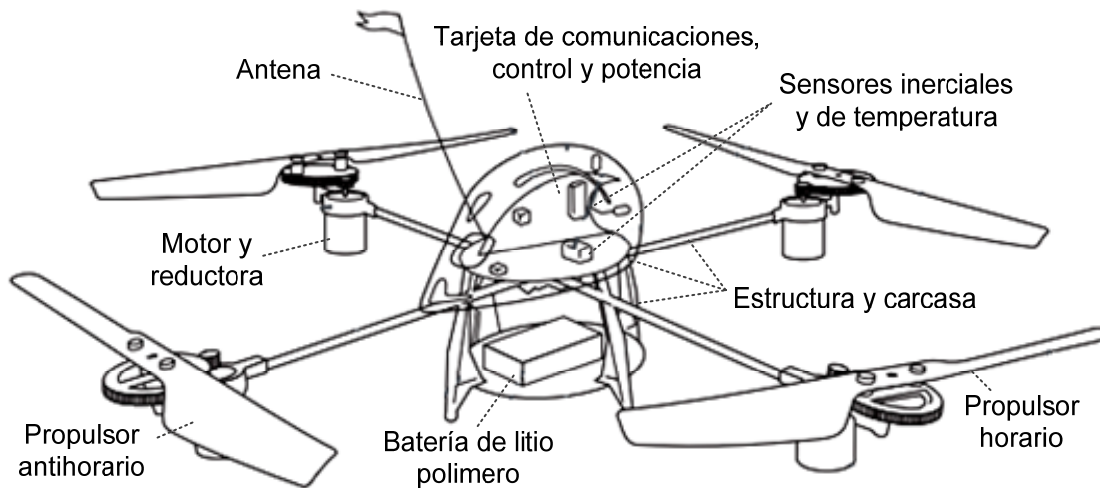


Figura 2-1 Partes del modelo de helicóptero de cuatro hélices DraganFlyer V Ti Pro.

La información de este capítulo se organiza en cinco apartados. El primer apartado definen los sistemas de referencia necesarios para describir la posición y orientación del vehículo. El segundo apartado aborda el cálculo de las fuerzas y momentos aerodinámicos que aparecen tanto en los propulsores como en el cuerpo del helicóptero; para ello se emplea la teoría de helicópteros [13]. En el tercer apartado se desarrolla la dinámica del helicóptero según el formalismo Newton-Euler. Las ecuaciones resultantes permiten estudiar la evolución de la posición y la orientación del vehículo en función de las fuerzas y momentos que actúan sobre él. Estas ecuaciones dinámicas poseen naturaleza no lineal; en el cuarto apartado se obtiene un modelo simplificado para el diseño del control y se linealiza en el entorno de operación correspondiente al vuelo en punto fijo. El quinto apartado presenta la implementación del modelo matemático en el simulador desarrollado en Matlab/Simulink. Este último apartado incluye también un modelo sencillo de los sensores.

## 2.1 Posición y orientación del helicóptero

En este apartado se describen las ecuaciones que permiten definir la posición y la orientación del helicóptero.

Los sistemas de referencia empleados se muestran en la siguiente figura y se describen a continuación:

- $F_E$  ("earth frame") representa un sistema de referencia fijo o inercial. Habitualmente se selecciona el eje  $X_e$  apuntando al Norte, el eje  $Y_e$  apuntado hacia el este y el eje  $Z_e$  apuntando hacia abajo. Esta orientación se conoce como NED ("North, East, Down").
- $F_V$  ("vehicle-carried vertical frame") representa un sistema de referencia con ejes paralelos a los fijos cuyo origen se hace coincidir con el centro de gravedad del vehículo, y por tanto se desplaza con él.
- $F_B$  ("Body frame") representa un sistema de referencia unido solidariamente con el vehículo y cuyo origen se sitúa en su centro de gravedad.

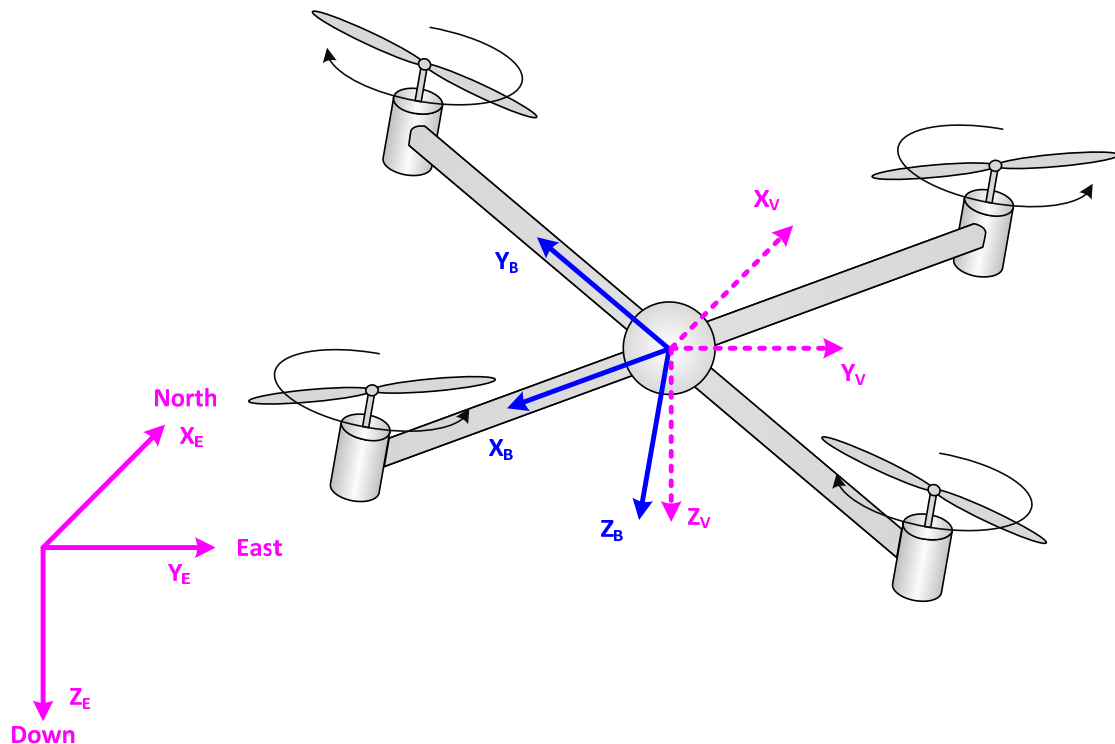


Figura 2-2 Sistemas de referencia empleados para definir la posición y orientación del vehículo: sistema de referencia fijo ( $F_E$ ), sistema de referencia del vehículo ( $F_V$ ), y sistema de referencia del cuerpo ( $F_B$ ).

La orientación del vehículo (ejes cuerpo,  $F_B$ ) se puede referenciar al sistema del vehículo ( $F_V$ ), cuyos ejes poseen orientación fija. Para ello se van a emplear los ángulos de Euler, que representan una secuencia de tres rotaciones elementales que permiten pasar del sistema de referencia ( $F_V$ ), al sistema asociado al cuerpo ( $F_B$ ). En la siguiente figura se ilustra la secuencia ordenada de tres rotaciones z-y'-x'':

- 1° Rotación en torno al eje  $Z_V$  un ángulo  $\psi$ : ángulo de guiñada ("yaw")
- 2° Rotación en torno al eje  $Y'$  un ángulo  $\theta$ : ángulo de cabeceo ("pitch")
- 3° Rotación en torno al eje  $X''$  ( $X_B$ ) un ángulo  $\phi$ : ángulo de alabeo ("roll").

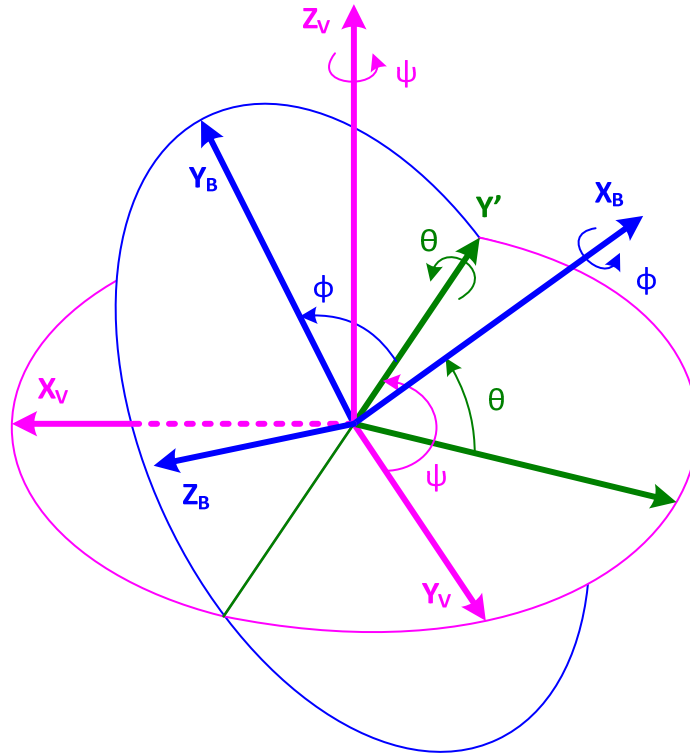


Figura 2-3 Secuencia de tres rotaciones elementales que permiten pasar del sistema de referencia ( $F_V$ ), al sistema asociado al cuerpo ( $F_B$ ): un ángulo  $\psi$  en torno a  $Z_V$ , un ángulo  $\theta$  en torno a  $Y'$  y un ángulo  $\phi$  en torno a  $X''$  ( $X_B$ ).

Una forma ilustrativa de visualizar los ángulos de Euler es a través de una suspensión cardán ("gimbal"), tal como se muestra en la siguiente imagen. En ella se pueden ver tres marcos que pueden girar de forma relativa. El marco interior es solidario al helicóptero y por tanto representa su orientación. De acuerdo a esta descripción, los ángulos de Euler son precisamente los ángulos de giro relativos entre los marcos. En la figura se ha representado la posición de referencia que se emplea para definir el origen de ángulos ( $\psi=0$ ,  $\theta=0$ ,  $\phi=0$ ). También es importante observar la relación de los ejes de giro con los ejes cuerpo ( $F_B$ ) y del vehículo ( $F_V$ ):

- El primer eje de giro, asociado al ángulo de guiñada ( $\psi$ ), coincide con el eje  $Z_V$  del sistema del vehículo.
- El tercer eje de giro, asociado al ángulo de alabeo ( $\phi$ ), coincide con el eje  $X_B$  del sistema del cuerpo.
- El segundo eje de giro, asociado al ángulo de cabeceo ( $\theta$ ), es la perpendicular común a los dos anteriores.

En la posición de la figura (posición de referencia) los ejes de giro, los ejes cuerpo ( $F_B$ ), y los ejes del vehículo ( $F_V$ ) son coincidentes. Naturalmente, tal coincidencia no ocurre en general en otras orientaciones.

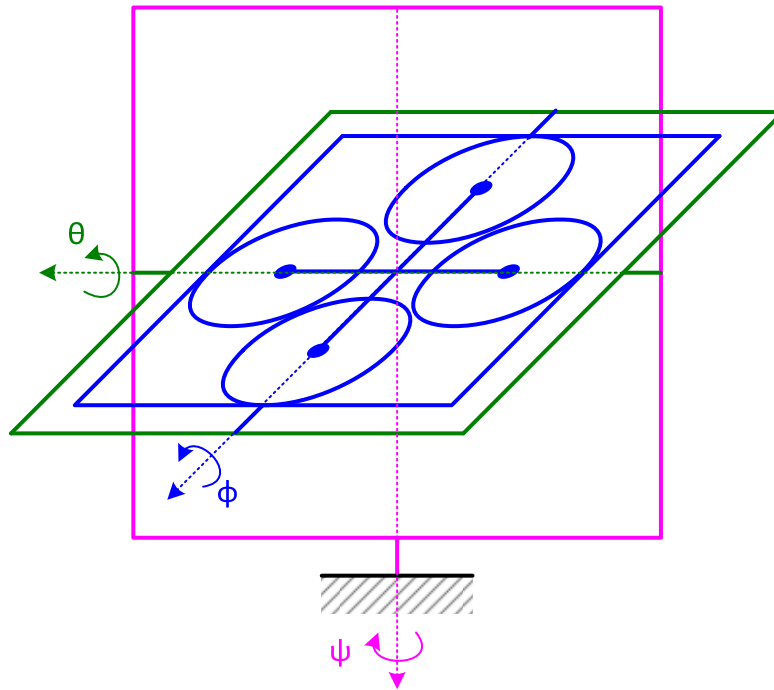


Figura 2-4 Representación de los ángulos de Euler mediante una suspensión cardán compuesta por tres marcos. Los ejes de giro están asociados a cada ángulo de Euler ( $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ ). La situación mostrada en la figura es la de referencia y se emplea como origen de ángulos.

A partir de los ángulos de Euler es sencillo obtener la matriz de rotación para pasar del sistema del vehículo al sistema de ejes cuerpo. La matriz resultante se construye a partir de la composición de las rotaciones elementales y siguiendo el mismo orden:

$$R_{BV} = T_{\phi}T_{\theta}T_{\psi} \quad (2.1)$$

donde las matrices para cada rotación elemental son:

$$T_{\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$T_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$T_{\psi} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es importante remarcar que para obtener la matriz de transformación inversa, es decir, para pasar del sistema de ejes cuerpo al sistema del vehículo, simplemente es necesario trasponer la matriz anterior:  $R_{VB} = R_{BV}^t$ .

Las ecuaciones dinámicas que se presentan en el apartado 2.3 permiten calcular la velocidad lineal ( $v_B = [u \ v \ w]^t$ ) y angular ( $w_B = [p \ q \ r]^t$ ) del helicóptero en ejes cuerpo. A partir de estas variables es posible calcular la posición y orientación del vehículo con respecto al sistema de referencia fijo.

Para calcular la posición simplemente es necesario expresar la velocidad en ejes fijos y a continuación, integrarla:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_N \\ \dot{p}_E \\ \dot{p}_D \end{bmatrix} = R_{VB} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

De forma similar, para calcular su orientación es necesario descomponer la velocidad angular en los ejes de giro asociados a cada ángulo de Euler, y a continuación integrar cada componente.

La descomposición en los ejes de giro se puede obtener a partir de la siguiente relación:

$$w = p \mathbf{1}_{X_B} + q \mathbf{1}_{Y_B} + r \mathbf{1}_{Z_B} = \dot{\psi} \mathbf{1}_{Z_V} + \dot{\theta} \mathbf{1}_{Y'} + \dot{\phi} \mathbf{1}_{X_B} \quad (2.4)$$

donde  $\{\mathbf{1}_{X_B}, \mathbf{1}_{Y_B}, \mathbf{1}_{Z_B}, \mathbf{1}_{Z_V}, \mathbf{1}_{Y'}, \mathbf{1}_{X_B}\}$  representan los vectores unitarios de cada uno de los ejes. Esta relación se puede expresar mediante las matrices de rotación elementales de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = T_\phi T_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + T_\phi \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Invirtiendo la matriz anterior se obtiene finalmente:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi / \cos \theta & \cos \phi / \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Se puede ver que en la última fila de la matriz aparece el coseno de theta dividiendo, lo que puede dar lugar a una división por cero. Esta situación se da por ejemplo cuando  $\theta = \pi/2$ .

El origen de esta singularidad está en la formulación, y no en el problema físico tal como se ilustra en la siguiente figura. A la derecha se puede ver una orientación del vehículo con  $\theta = \pi/2$ . En esta situación los ejes de giro asociados a  $\psi$  y a  $\phi$  se alinean, lo que impide girar en torno a  $Z_B$  (que en la situación representada coincide con  $X_V$ ). Se podría decir que la suspensión cardán está "bloqueada". Para poder realizar este giro sería necesario que tanto  $\psi$  como  $\phi$  dieran un salto brusco de 0 a  $\pi/2$  rad, lo que explica que la velocidad en esos ejes no esté determinada. Estos saltos representan una singularidad en los ángulos, ya que estos se consideran variables de estado, y como tales no deberían presentar discontinuidades. Naturalmente, el helicóptero no

posee tal restricción, y puede realizar este giro sin problemas. Existen otras representaciones, como por ejemplo los cuaterniones, que no presentan este problema. Sin embargo, esta singularidad en los ángulos de Euler solo ocurre para orientaciones muy alejadas de la nominal. En la práctica, dichas orientaciones no forman parte de las condiciones de operación, y por tanto este problema no aparece. Por este motivo, y al ser una representación bastante intuitiva, es la que se ha empleado a lo largo de este trabajo.

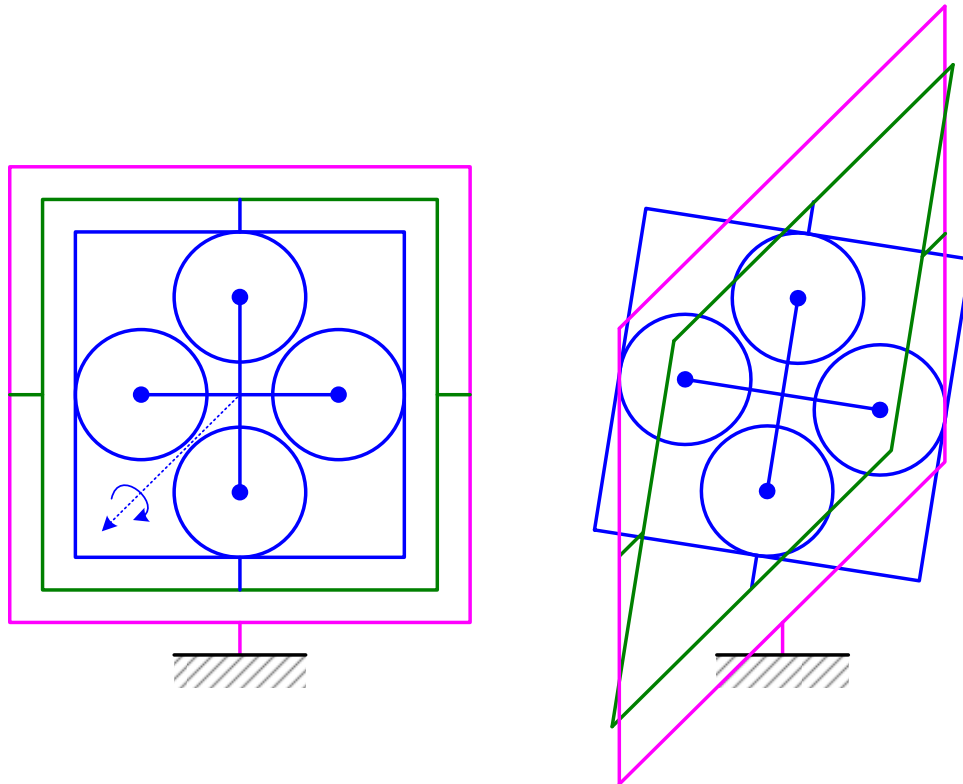


Figura 2-5 Singularidad en la representación de los ángulos de Euler cuando se alinean dos ejes de rotación ( $\theta=\pi/2$ ). Para poder realizar la rotación en torno a  $Z_B$  (coincidente con  $X_V$ ) los ángulos  $\psi$  y  $\phi$  dan un salto brusco de 0 a  $\pi/2$ rad.

## 2.2 Fuerzas y pares aerodinámicos

En esta sección se describe la generación de fuerzas y pares aerodinámicos sobre los elementos que componen el helicóptero, es decir, los propulsores y el cuerpo. El objetivo es obtener un conjunto de ecuaciones matemáticas que permitan modelar de forma simplificada los fenómenos aerodinámicos que actúan sobre el helicóptero.

Este subcapítulo se ha dividido en cuatro apartados. Los tres primeros apartados estudian los efectos aerodinámicos que aparecen en los propulsores, y el cuarto apartado explica la resistencia aerodinámica que aparece sobre el cuerpo del helicóptero. Para el estudio de los propulsores es necesario considerar la teoría de cantidad de movimiento (TCM), que se explica en el primer apartado, y la teoría del elemento de pala (TEP), que se explica en el segundo apartado. La combinación de ambas teorías, en el tercer apartado, permite calcular finalmente las fuerzas y pares aerodinámicos que aparecen sobre el propulsor.

### 2.2.1 Teoría de cantidad de movimiento (TCM). Modelo de Glauert

Ante la complejidad del problema aerodinámico asociado al rotor es necesario acudir a modelos simplificados que permitan describir su comportamiento. El más sencillo de estos modelos es el de cantidad de movimiento, en el que el rotor se idealiza como un disco que produce un salto de presión en el fluido. Este modelo también asume que el rotor únicamente induce velocidades verticales, que el flujo es unidimensional, es decir que las magnitudes fluidas son constantes en secciones perpendiculares al flujo, que el fluido es incompresible (densidad constante), que el número de Reynolds es suficientemente elevado como para despreciar los efectos viscosos, y que el problema es cuasi-estacionario, aunque el tiempo se podría usar como parámetro para resolver una sucesión de casos estacionarios.

En la siguiente figura se muestra el esquema empleado para desarrollar la teoría de cantidad de movimiento. El rotor del helicóptero se representa como un disco horizontal de radio  $R$  horizontal y superficie  $S = \pi \cdot R^2$  en el centro de la figura. El fluido que atraviesa el disco experimenta un incremento vertical en su cantidad de movimiento, lo que genera una fuerza aerodinámica sobre el disco en dirección contraria ( $F^a$ ). Se selecciona un sistema de referencia  $\{X_D, Y_D, Z_D\}$  centrado en el disco, con el eje  $Z_D$  perpendicular al disco y apuntando hacia abajo, y con el eje  $X_D$  orientado en la dirección del viento. La sección de control tiene las mismas dimensiones que el disco actuador, pero está inclinada con respecto al disco de tal forma que es perpendicular al flujo.

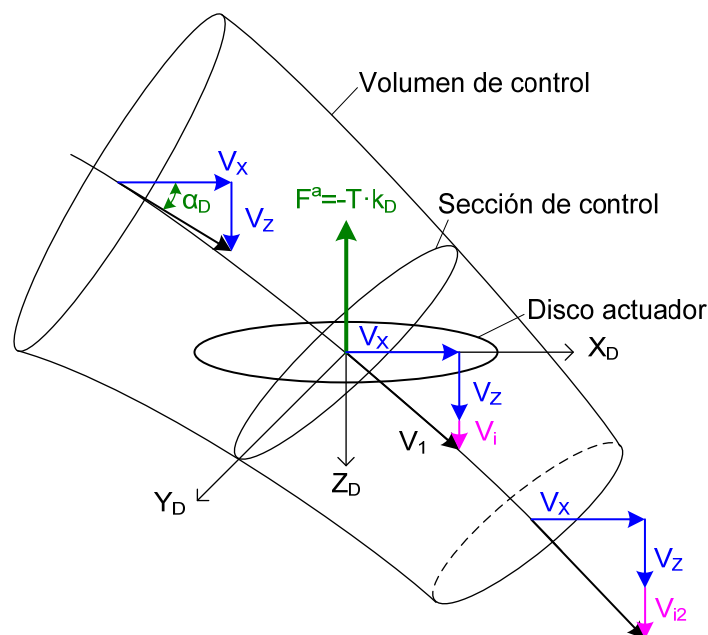


Figura 2-6 Volumen de control en el modelo de Glauert. El disco actuador se representa en posición horizontal, mientras que la sección equivalente está inclinada y es perpendicular al flujo.

El gasto másico ( $\dot{m}$ ) según esta aproximación se puede calcular en la sección de control donde la velocidad del fluido es  $V_1$  según la siguiente expresión:

$$\dot{m} = \rho \cdot S \cdot V_1 \quad (2.7)$$

$$V_1 = \sqrt{V_X^2 + (V_Z + v_i)^2} \quad (2.8)$$

siendo  $\rho$  la densidad del aire y  $S$  la superficie del disco actuador.

La tracción ( $T$ ) se puede calcular como el incremento en la cantidad de movimiento del fluido:

$$T = \dot{m} \cdot v_{i2} \quad (2.9)$$

donde  $v_{i2}$  representa la velocidad inducida (incremento de velocidad) del fluido en la estela lejana.

Por otro lado, la ecuación de la energía permite calcular la potencia a partir del incremento de la energía cinética del fluido.

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{1}{2} \dot{m} [V_X^2 + (V_Z + v_{i2})^2] - \frac{1}{2} \dot{m} [V_X^2 + V_Z^2] = \dot{m} v_{i2} \left( V_Z + \frac{1}{2} v_{i2} \right) = \\ &= T \left( V_Z + \frac{1}{2} v_{i2} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

La potencia también se puede expresar como el trabajo que ejerce la tracción ( $T$ ) sobre el fluido:

$$P_i = T \cdot (V_Z + v_i) \quad (2.11)$$

donde  $v_i$  representa la velocidad inducida (incremento de velocidad) del fluido a nivel del disco.

Igualando las dos ecuaciones anteriores se obtiene la relación fundamental entre las velocidades inducidas a nivel rotor ( $v_i$ ) y estela lejana ( $v_{i2}$ ):

$$v_{i2} = 2v_i \quad (2.12)$$

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores, la tracción del disco ( $T$ ) se puede expresar en función de la velocidad inducida a nivel de rotor ( $v_i$ ), de la velocidad del aire ( $V_X, V_Z$ ) y su densidad ( $\rho$ ), y de la superficie del disco ( $S$ ):

$$T = 2 \cdot \dot{m} \cdot v_i = 2 \cdot \rho \cdot S \cdot v_i \cdot \sqrt{V_X^2 + (V_Z + v_i)^2} \quad (2.13)$$

Las expresiones anteriores para la tracción ( $T$ ) y potencia inducida ( $P_i$ ) se suelen adimensionalizar para darles mayor generalidad y reducir el número de incógnitas. Para ello se emplea la velocidad en punta de pala  $\Omega R$ , donde  $\Omega$  es la velocidad angular del rotor y  $R$  es el radio de la pala. De esta forma, se pueden definir las siguientes magnitudes características para la tracción, par y potencia unitarios:

$$\begin{aligned} \text{Tracción unitaria: } T_u &= \rho \cdot S \cdot (\Omega \cdot R)^2 \\ \text{Par unitario: } Q_u &= \rho \cdot S \cdot R \cdot (\Omega \cdot R)^2 \\ \text{Potencia unitaria: } P_u &= \rho \cdot S \cdot (\Omega \cdot R)^3 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Los coeficientes de tracción, potencia y par se pueden definir a partir de estas magnitudes unitarias de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Coeficiente de tracción: } C_T &= \frac{T}{T_u} \\ \text{Coeficiente de par: } C_Q &= \frac{Q}{Q_u} \\ \text{Coeficiente de potencia: } C_P &= \frac{P}{P_u} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Es importante observar que el coeficiente de par ( $C_Q$ ) y el de potencia ( $C_P$ ) tienen el mismo valor, ya que se verifica que  $P = Q \cdot \Omega$  y  $P_u = Q_u \cdot \Omega$ , y por tanto se cumple que  $C_Q = C_P$ .

Combinando las ecuaciones (2.13), (2.14) y (2.15) se obtiene la siguiente expresión para el coeficiente de tracción:

$$C_T = \frac{T}{T_u} = 2 \cdot \frac{v_i}{\Omega \cdot R} \cdot \sqrt{\left(\frac{V_X}{\Omega \cdot R}\right)^2 + \left(\frac{V_Z}{\Omega \cdot R} + \frac{v_i}{\Omega \cdot R}\right)^2} \quad (2.16)$$

Tomando como velocidades adimensionales:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= -\frac{v_i}{\Omega \cdot R} \\ \mu_X &= \frac{V_X}{\Omega \cdot R} \\ \mu_Y &= \frac{V_Y}{\Omega \cdot R} \\ \mu_Z &= -\frac{V_Z}{\Omega \cdot R} \end{aligned} \quad (2.17)$$

y sustituyendo en la ecuación anterior, se obtiene que:

$$C_T = -2 \cdot \lambda_i \cdot \sqrt{\mu_X^2 + (\mu_Z + \lambda_i)^2} \quad (2.18)$$

Si se considera componente de viento en el eje Y, esta componente actuaría de forma análoga a la componente en X, por lo que la ecuación queda finalmente como:

$$C_T = -2 \cdot \lambda_i \cdot \sqrt{\mu_X^2 + \mu_Y^2 + (\mu_Z + \lambda_i)^2} \quad (2.19)$$

Hasta el momento se ha considerado que la componente vertical del viento apunta hacia abajo (helicóptero en ascenso); sin embargo, si la velocidad del viento cambia de sentido, el estado de operación del rotor cambia significativamente y la expresión (2.19) pierde validez. Para poder resolver el problema con velocidad de viento ascendente (helicóptero en descenso) es necesario recurrir a resultados experimentales. El trabajo de Cuerva [9] presenta una solución válida para todo el rango de velocidades, es decir, independiente del signo de la velocidad del viento.

$$C_T = -2 \cdot A \cdot \lambda_i \cdot \sqrt{\mu_X^2 + \mu_Y^2 + B^2 \cdot \mu_Z^2 + (\mu_Z + \lambda_i)^2} \quad (2.20)$$

con  $A = 0.745$  y  $B = 0.447$ . Esta expresión es la que finalmente se ha empleado en la implementación del simulador.

## 2.2.2 Teoría del elemento de pala (TEP)

La teoría del elemento de pala permite considerar las propiedades geométricas de la pala, como por ejemplo el tipo de perfil aerodinámico, la torsión de las palas, o el número de palas, de forma sencilla y potente.

Las fuerzas y pares que actúan sobre el propulsor se calculan a partir de las fuerzas que aparecen en cada una de las palas que configuran el rotor (ver Figura 2-7). Por otro lado, la fuerza que aparece en la pala es una fuerza distribuida a lo largo de la misma. El elemento de pala permite calcular la fuerza que aparece en cada sección de la pala en función de su perfil aerodinámico y del aire incidente. Una vez obtenidas las fuerzas en cada sección es posible integrarlas a lo largo de la longitud de la pala para calcular los pares y fuerzas que ejercen sobre el eje del árbol. Finalmente el promedio de los pares y las fuerzas en cada vuelta permite obtener las fuerzas y los pares que actúan sobre el propulsor.

El primer paso consiste, por tanto, en calcular las fuerzas que aparecen en cada elemento de pala. Para ello es necesario, por un lado, conocer el perfil aerodinámico del elemento, y por otro, conocer la velocidad incidente del viento.

En la siguiente figura se definen los elementos principales que se necesitan para el cálculo. Se ha representado una única pala, la cual puede girar en torno al eje  $Z_A$ . Además se ha representado un elemento de pala genérico, a distancia  $r$  del eje de giro, sobre el que actúa un diferencial de fuerza aerodinámica  $dF_b^a$ , donde el subíndice  $b$  indica que se aplica a una única pala.

Aunque la pala que se ha representado en la figura presenta un perfil constante, en la práctica el perfil varía en función de la distancia al eje ( $r$ ). En particular es habitual que la pala se torsione a medida que se aproxima a la punta de la pala (ver palas en el anexo). En este trabajo se considera una torsión lineal con la distancia al eje ( $r$ ). Esta relación se presenta más adelante (ver ecuación (2.26))

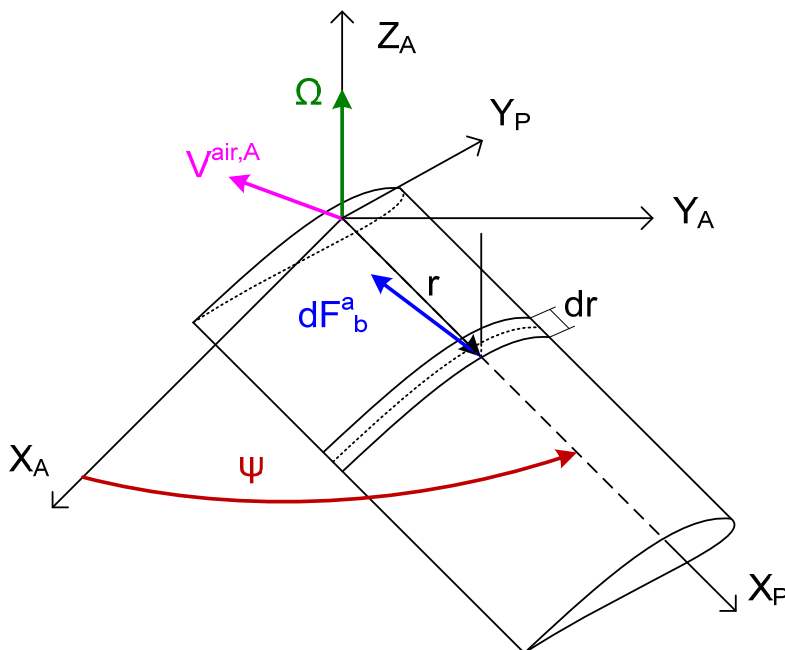


Figura 2-7 Sistema de ejes árbol  $[X_A, Y_A, Z_A]$ , y ejes ligados a la pala  $[X_P, Y_P, Z_P]$ . Sobre el elemento diferencial de la pala aparece una fuerza aerodinámica ( $dF_b^a$ ) debido a la intensidad del viento ( $V^{air,A}$ ) y a la velocidad de giro de la pala ( $\Omega$ ).

En la figura anterior se definen los sistemas de referencia del árbol ( $[X_A, Y_A, Z_A]$ ) y de la pala ( $[X_P, Y_P, Z_P]$ ). El sistema del árbol es fijo al helicóptero, mientras que el de la pala es fijo a la pala y puede girar de forma relativa al primero en torno al eje Z (eje coincidente en ambos sistemas). De acuerdo a esta definición es fácil derivar las matrices de rotación que permiten pasar de un sistema de referencia a otro en función del giro de la pala ( $\psi$ ):

$$\text{Del sistema de la pala (P) al árbol (A): } [T_{AP}] = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Del sistema del árbol (A) a la pala (P): } [T_{PA}] = [T_{AP}]^t = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es importante observar que el eje Z empleado en la teoría de cantidad de movimiento ( $Z_D$ ) y en la teoría del elemento de pala ( $Z_A$ ) poseen sentidos contrarios.

En la siguiente figura se estudia la generación del diferencial de fuerza aerodinámica en el elemento de pala ( $dF_b^a$ ). La incidencia del viento ( $U_R$ ) sobre el perfil aerodinámico genera una fuerza resistiva ( $dD$ ) en la dirección del viento, y una fuerza de sustentación ( $dL$ ) en dirección perpendicular al mismo. La composición de ambas fuerzas genera la fuerza aerodinámica resultante ( $dF_b^a$ ).

$$dL = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_R^2 \cdot c \cdot c_l \cdot dr \quad (2.21)$$

$$dD = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot U_R^2 \cdot c \cdot c_d \cdot dr \quad (2.22)$$

donde

$U_R$  representa la proyección del viento en el plano del perfil

$c$  representa la cuerda del perfil

$c_l$  representa el coeficiente de sustentación

$c_d$  representa el coeficiente de resistencia aerodinámico

En este trabajo el coeficiente de resistencia se aproxima por medio de una constante:

$$c_d = c_{d0} \quad (2.23)$$

Por otro lado, el coeficiente de sustentación se considera que varía linealmente con el ángulo de ataque ( $\alpha$ ):

$$c_l = a \cdot \alpha \quad (2.24)$$

donde  $a$  representa la pendiente de la curva de sustentación del perfil ( $a = \partial c_l / \partial \alpha$ ).

El ángulo de ataque ( $\alpha$ ) se define como el ángulo entre la incidencia del viento y la línea de sustentación nula (LSN) del perfil, como se muestra en la Figura 2-8. De acuerdo con el esquema de la figura, el ángulo de ataque ( $\alpha$ ) es directamente la suma del ángulo de incidencia ( $\varphi$ ) y del ángulo de paso ( $\vartheta$ ):

$$\alpha = \varphi + \vartheta \quad (2.25)$$

El ángulo de paso ( $\vartheta$ ) en un rotor rígido es un factor constructivo; en este trabajo se ha considerado una variación lineal con el radio adimensional ( $x = r/R$ ), caracterizada por medio de los parámetros  $\vartheta_0$  y  $\vartheta_1$ :

$$\vartheta = \vartheta_0 + x \cdot \vartheta_1 \quad (2.26)$$

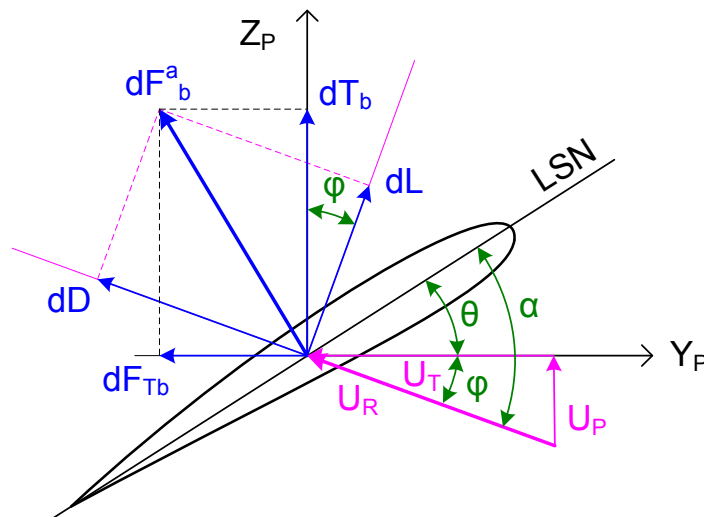


Figura 2-8 Esquema de las velocidades relativas al perfil y de las fuerzas que actúan sobre el mismo en el sistema de la pala [ $X_P$ ,  $Y_P$ ,  $Z_P$ ].

Para calcular las fuerzas de sustentación ( $dL$ ) y de resistencia aerodinámica ( $dD$ ) en el elemento de pala, es por tanto necesario caracterizar el viento que incide sobre el perfil, el cual es función del viento incidente aguas arriba ( $V^{air,A}$ ), la velocidad inducida en el plano del propulsor ( $v_i$ ) y la velocidad de rotación ( $\Omega$ ).

La velocidad del viento con respecto al sistema de referencia del árbol (A), expresada en componentes adimensionales, es (ver Figura 2-7):

$$V^{air,A} = \Omega \cdot R \cdot (\mu_x \cdot i_A + \mu_z \cdot k_A) \quad (2.27)$$

Por otro lado, la velocidad en el elemento de pala se expresa en la Figura 2-8 como:

$$V^{air,P} = U_L \cdot i_P - U_T \cdot j_P + U_P \cdot k_A \quad (2.28)$$

Esta velocidad se relaciona directamente con la velocidad del viento con respecto al árbol ( $V^{air,A}$ ), la velocidad inducida ( $v_i$ ), la velocidad de giro de la pala ( $\Omega$ ) y la distancia del elemento de pala al eje de rotación ( $r$ ) mediante la siguiente expresión:

$$V^{air,P} = [T_{PA}] \cdot V^{air,A} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -v_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\Omega \cdot r \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Sustituyendo en esta expresión las ecuaciones (2.27) y (2.28) es posible obtener las componentes de la velocidad en el elemento de pala:

$$\begin{aligned} U_L &= \Omega \cdot R \cdot \mu_x \cdot \cos \psi \\ U_T &= \Omega \cdot R \cdot (x + \mu_x \cdot \sin \psi) \\ U_P &= \Omega \cdot R \cdot (\lambda_i + \mu_z) \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde la variable adimensional  $x$  se conoce como radio adimensional y representa la distancia del elemento de pala al eje de rotación, es decir:

$$x = \frac{r}{R} \quad (2.31)$$

A partir de las ecuaciones anteriores es sencillo obtener tanto el módulo ( $U_R$ ) como el ángulo de incidencia ( $\varphi$ ) del viento en el plano del perfil:

$$U_R^2 = U_T^2 + U_P^2 \quad (2.32)$$

$$\varphi = \text{atan}(U_P/U_T) \quad (2.33)$$

Una vez conocidas las fuerzas de sustentación ( $dL$ ) y de resistencia ( $dD$ ), para poder contabilizar su contribución a nivel de rotor, es necesario descomponerlas en los ejes vertical, fuerza de tracción ( $dT_b$ ), y horizontal, fuerza tangencial ( $dF_{Tb}$ ):

$$dT_b = \cos \varphi \, dL + \sin \varphi \, dD \quad (2.34)$$

$$dF_{Tb} = -\sin \varphi \, dL + \cos \varphi \, dD = dF_{Tbi} + dF_{Tb0} \quad (2.35)$$

En la segunda ecuación, la fuerza tangencial ( $dF_{Tb}$ ) ha sido descompuesta en dos términos, la fuerza tangencial inducida ( $dF_{Tbi}$ ) asociada a la sustentación, y la fuerza tangencial parásita ( $dF_{Tb0}$ ) asociada a la resistencia aerodinámica. Esta distinción es

importante a la hora de comparar la potencia consumida por el rotor según esta teoría y la teoría de cantidad de movimiento. En la teoría de cantidad de movimiento no se considera el término de resistencia aerodinámica, por tanto sólo se puede igualar con la componente inducida.

A la hora de continuar con los cálculos es habitual considerar que la componente debida a la rotación del rotor ( $U_T$ ) es muy superior a la componente vertical ( $U_P$ ), por lo que el ángulo de incidencia ( $\varphi$ ) es pequeño y se puede asumir que  $\sin \varphi \approx \varphi$  y  $\cos \varphi \approx 1$ . También se suele aceptar que la componente de sustentación es bastante superior a la de resistencia ( $dL \gg dD$ ). De acuerdo con estas consideraciones, las expresiones anteriores se simplifican notablemente:

$$dT_b \approx dL \quad (2.36)$$

$$dF_{Tb} \approx -\varphi dL + dD = dF_{Tbi} + dF_{Tbo} \quad (2.37)$$

Una vez conocidas las fuerzas a nivel de elemento de pala es posible contabilizar su contribución a las fuerzas ( $dF_b^a|_A$ ) y pares ( $dM_b^a|_A$ ) a nivel de rotor mediante las siguientes expresiones. En cuanto a la fuerza ( $dF_b^a|_A$ ), ésta únicamente requiere un cambio de referencia del sistema de la pala (P) al sistema del árbol (A). Por otro lado, el momento ( $dM_b^a|_A$ ) se obtiene multiplicando la fuerza por su brazo ( $r$ ).

$$dF_b^a|_A = \begin{bmatrix} dH_b \\ dY_b \\ dT_b \end{bmatrix}_A = [T_{AP}] \begin{bmatrix} 0 \\ -dF_{Tb} \\ dL \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\varphi dL + dD) \sin \psi \\ (+\varphi dL - dD) \cos \psi \\ dL \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$dM_b^a|_A = \begin{bmatrix} dM_{b,XA}^a \\ dM_{b,YA}^a \\ dM_{b,ZA}^a \end{bmatrix}_A = [T_{AP}] \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -dF_{Tb} \\ dT_b \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} r \cdot dL \cdot \sin \psi \\ -r \cdot dL \cdot \cos \psi \\ -r(-\varphi dL + dD) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Para obtener el valor final de fuerzas y pares a nivel de rotor basta integrar las expresiones anteriores a lo largo de la pala, desde la raíz ( $r = 0$ ) a la punta de pala ( $r = R$ ), y promediar su valor en una vuelta completa:

$$F^a|_A = \begin{bmatrix} H \\ Y \\ T \end{bmatrix}_A = \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \begin{bmatrix} \left( -\varphi \frac{dL}{dr} + \frac{dD}{dr} \right) \sin \psi \\ \left( +\varphi \frac{dL}{dr} - \frac{dD}{dr} \right) \cos \psi \\ \frac{dL}{dr} \end{bmatrix} dr d\psi \quad (2.40)$$

$$M^a|_A = \begin{bmatrix} M_{XA}^a \\ M_{YA}^a \\ M_{ZA}^a \end{bmatrix}_A = \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \begin{bmatrix} r \cdot \frac{dL}{dr} \cdot \sin \psi \\ -r \cdot \frac{dL}{dr} \cdot \cos \psi \\ -r \left( -\varphi \frac{dL}{dr} + \frac{dD}{dr} \right) \end{bmatrix} dr d\psi \quad (2.41)$$

donde se ha multiplicado el resultado por el número de palas ( $b$ ) que posee el rotor, que en este trabajo es igual a 2.

Si se emplean las definiciones de fuerza y par aerodinámicos y de velocidades adimensionales que se presentaron en el apartado anterior, el resultado de estas integrales se puede expresar mediante los siguientes coeficientes adimensionales:

$$C_T = \frac{\sigma \cdot a}{4} \cdot \left[ \theta_0 \left( \frac{2}{3} + \mu_{XA}^2 + \mu_{YA}^2 \right) + \frac{\theta_1}{2} (1 + \mu_{XA}^2 + \mu_{YA}^2) + (\mu_{ZA} + \lambda_i) \right] \quad (2.42)$$

$$C_H = \frac{\sigma}{4} \cdot \left[ -a(\mu_{ZA} + \lambda_i) \left( \theta_0 + \frac{\theta_1}{2} \right) + c_{d0} \right] \mu_{XA} \quad (2.43)$$

$$C_Y = \frac{\sigma}{4} \cdot \left[ -a(\mu_{ZA} + \lambda_i) \left( \theta_0 + \frac{\theta_1}{2} \right) + c_{d0} \right] \mu_{YA} \quad (2.44)$$

$$C_{M_{XA}}^a = \frac{\sigma \cdot a}{4} \cdot \left[ \frac{2}{3} \theta_0 + \frac{\theta_1}{2} + \frac{\mu_{ZA} + \lambda_i}{2} \right] \mu_{XA} \quad (2.45)$$

$$C_{M_{YA}}^a = \frac{\sigma \cdot a}{4} \cdot \left[ \frac{2}{3} \theta_0 + \frac{\theta_1}{2} + \frac{\mu_{ZA} + \lambda_i}{2} \right] \mu_{YA} \quad (2.46)$$

$$C_{M_{ZA}}^a = \frac{\sigma}{4} \cdot \left[ a(\mu_{ZA} + \lambda_i) \left( \frac{2}{3} \theta_0 + \frac{\theta_1}{2} + \mu_{ZA} + \lambda_i \right) - \frac{c_{d0}}{2} (1 + \mu_{XA}^2 + \mu_{YA}^2) \right] \quad (2.47)$$

donde:

$\sigma$  es la solidez local de la pala y representa la proporción del área del disco que es ocupada por las palas:  $\sigma = b \cdot c / (\pi \cdot R)$ .

$a$  es la pendiente de la curva de sustentación del perfil:  $a = \partial c_l / \partial \alpha$ .

$c_{d0}$  es el coeficiente de resistencia parásita del perfil.

$\theta_0, \theta_1$  son los parámetros que definen la torsión del perfil:  $\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_1 \cdot r/R$ .

$\mu_{XA}$  es la velocidad adimensional del aire con respecto al eje X del árbol:  $\mu_{XA} = \frac{V_{XA}}{\Omega \cdot R}$

$\mu_{YA}$  es la velocidad adimensional del aire con respecto al eje Y del árbol:  $\mu_{YA} = \frac{V_{YA}}{\Omega \cdot R}$

$\mu_{ZA}$  es la velocidad adimensional del aire con respecto al eje Z del árbol:  $\mu_{ZA} = \frac{V_{ZA}}{\Omega \cdot R}$

$\lambda_i$  es la velocidad inducida adimensional con respecto al eje Z del árbol:  $\lambda_i = \frac{-v_i}{\Omega \cdot R}$

Aunque el planteamiento inicial consideraba que la componente horizontal del viento se limitaba al eje X ( $V_{YA} = 0$ ), en estas ecuaciones se ha considerado también una componente en Y ( $V_{YA} \neq 0$ ), para dotar al resultado de mayor generalidad. No obstante, el planteamiento inicial está justificado, ya que la dirección horizontal del viento no es relevante a la hora de estudiar el fenómeno físico, sólo afecta a la formulación.

Como se puede observar en las ecuaciones anteriores, aparece un par en la dirección horizontal del viento ( $C_{M_{XA}}^a$  y  $C_{M_{YA}}^a$ ). Este par se debe a la descompensación de fuerzas que aparece entre la pala de avance y la pala de retroceso con respecto a la dirección del viento. En la siguiente figura se ha esquematizado este efecto. Se ha supuesto una velocidad del viento en la dirección X del sistema del árbol. Se puede ver que la pala

de avance, a la derecha, presenta una velocidad de viento relativa mayor que la pala de retroceso, a la izquierda. Esto hace que la sustentación sea mayor en la pala de avance que en la de retroceso, lo que finalmente genera un par en la dirección del viento. Para compensar este efecto los helicópteros suelen incorporar un mecanismo que permite cambiar el ángulo de paso ( $\vartheta$ ) de la pala a medida que esta realiza un giro completo. Con ello se consigue variar el ángulo de ataque ( $\alpha$ ) y compensar este efecto. Sin embargo el rotor considerado es rígido, y no posee este grado de libertad.

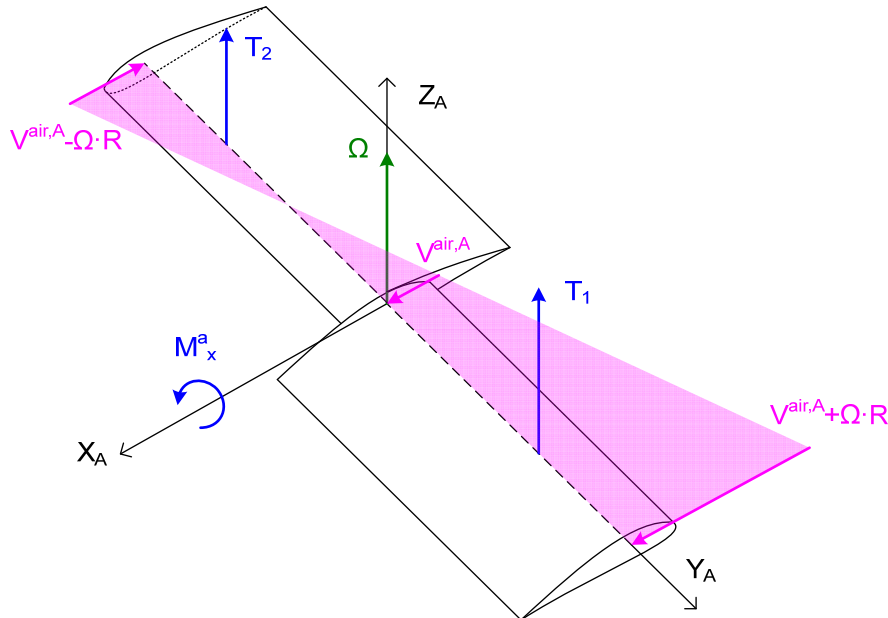


Figura 2-9 Par en la dirección horizontal del viento debido a la descompensación en la fuerza de sustentación entre la pala de avance y la pala de retroceso.

### 2.2.3 Combinación de las teorías TCM y TEP

La idea de combinar las teorías de cantidad de movimiento y del elemento de pala fue introducida por Gustafson y Gessow [10].

Al examinar las ecuaciones que se derivan de la teoría del elemento de pala (2.42-47), se observa que a pesar de conocer la velocidad del viento ( $\mu_x, \mu_y, \mu_z$ ), al no conocer la velocidad inducida ( $\lambda_i$ ), el sistema de ecuaciones es incompleto. La teoría de la cantidad de movimiento añade la ecuación necesaria (2.20) para completar este sistema. De las ecuaciones (2.20) y (2.42) se puede obtener el coeficiente de tracción ( $C_T$ ) y el parámetro de velocidad inducida ( $\lambda_i$ ), y a continuación se pueden evaluar el resto de coeficientes (2.43-47). De esta forma se ha implementado también en el simulador (ver §2.5.1), que por tanto debe resolver un lazo algebraico en cada paso de simulación.

Antes de avanzar en la resolución de este sistema de ecuaciones, es importante tener en cuenta la relación entre la velocidad del viento y la del helicóptero. Si se considera que la velocidad del viento con respecto a tierra es nula, el viento que se observa con respecto al sistema de referencia del árbol (A) se debe únicamente al movimiento del helicóptero, es decir:

$$V^{air,A} = -V^A \tag{2.48}$$

que se puede expresar mediante sus componentes adimensionales ( $\mu_x, \mu_y, \mu_z$ ) definidas en (2.17) y teniendo en cuenta la velocidad en el extremo de pala ( $\Omega \cdot R$ ):

$$V^{air,A} = (\Omega \cdot R) \cdot (\mu_x i_A + \mu_y j_A + \mu_z k_A) \tag{2.49}$$

Por tanto, una velocidad  $\mu_z < 0$  significa que el viento va de arriba a abajo, lo que es equivalente a que el helicóptero está en ascenso. De forma equivalente,  $\mu_z > 0$  significa que el helicóptero está en descenso.

En la Figura 2-10 se muestra gráficamente el cálculo de los coeficientes de tracción ( $C_T$ ) y de velocidad inducida ( $\lambda_i$ ) combinando las teorías de cantidad de movimiento (TCM) y elemento de pala (TEP). Se ha tomado el caso de vuelo en descenso ( $\mu_z > 0$ ), en la que el viento va de abajo a arriba. Al final del apartado sobre la teoría de cantidad de movimiento (§2.2.1) se explicaba que para considerar el caso de vuelo en descenso era necesario modificar la expresión teórica resultante (2.19); así se dio un paso adicional para obtener la ecuación (2.20). En la gráfica de la izquierda se ha dibujado la curva correspondiente a la ecuación (2.19) de la TCM y la (2.42) de la TEP, mientras que a la derecha se ha dibujado la (2.20) y de nuevo la (2.42). Los puntos de cruce entre las dos curvas representan las posibles soluciones. Se puede ver que al combinar las ecuaciones (2.19) y (2.42) se obtienen tres soluciones. Esto no tiene ninguna explicación física, el motivo de la multiplicidad de soluciones es precisamente el hecho de que la ecuación (2.19) no es válida para el caso de vuelo en descenso ( $\mu_z > 0$ ). Sin embargo, la gráfica de la derecha no presenta tal problema, ya que posee un único cruce y por tanto sólo una solución.

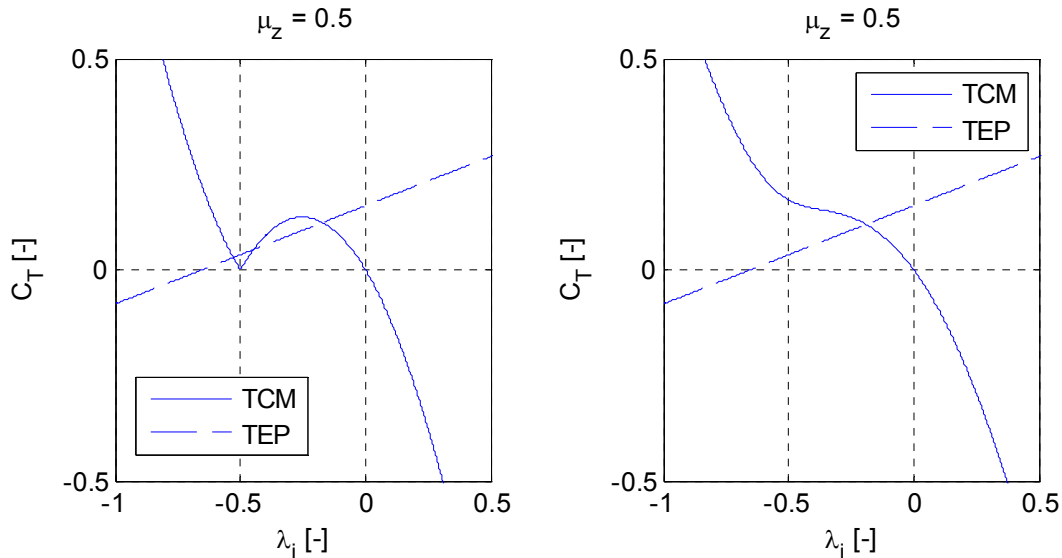


Figura 2-10 Cálculo de la velocidad inducida en condiciones de descenso axial ( $\mu_x=0, \mu_y=0, \mu_z=0.5$ ) al combinar las teorías de cantidad de movimiento (TCM) y de elemento de pala (TEP). Izquierda: ecuación original (2.19) y (2.42), derecha: ecuación modificada (2.20) y (2.42) (parámetros en Anexo I).

En la Figura 2-11 se muestra, para el caso de vuelo axial ( $\mu_x=0, \mu_y=0$ ), la variación del parámetro de velocidad inducida ( $\lambda_i = -v_i / (\Omega \cdot R)$ ), del coeficiente de empuje ( $C_T$ ), y del coeficiente de par ( $C_Q = C_{Qi} + C_{Q0}$ ) en función del parámetro de velocidad vertical ( $\mu_z$ ). El

coeficiente de par se ha separado en sus dos componentes, inducida ( $C_{Qi}$ ) y parásita ( $C_{Q0}$ ); la primera es debida a la sustentación y la segunda, a la resistencia aerodinámica en la pala (ver (2.35)).

Para el caso de vuelo axial ascendente ( $\mu_z < 0$ ) se puede ver que a medida que la velocidad aumenta en módulo, el coeficiente de par ( $C_T$ ) se reduce. A partir de  $\mu_z = -0.15$ , el coeficiente de par pasa a ser negativo, lo cual indica que para valores  $\mu_z < -0.15$  el propulsor frena el avance del helicóptero.

Para el caso de vuelo axial descendente ( $\mu_z > 0$ ) la velocidad inducida ( $\lambda_i$ ) y del viento ( $\mu_z$ ) tienen sentidos contrarios. En la gráfica superior se ha representado la recta de pendiente unidad negativa. El cruce de esta recta con la curva de velocidad inducida ( $\lambda_i$ ) representa el estado de operación en el que la velocidad de ascenso ( $\mu_z$ ) iguala a la inducida, con mismo módulo y sentidos contrarios, es decir, se anulan. A este punto se le conoce como estado de autorrotación ideal, y presenta la particularidad de que el coeficiente de par inducido es nulo ( $C_{Qi} = 0$ ).

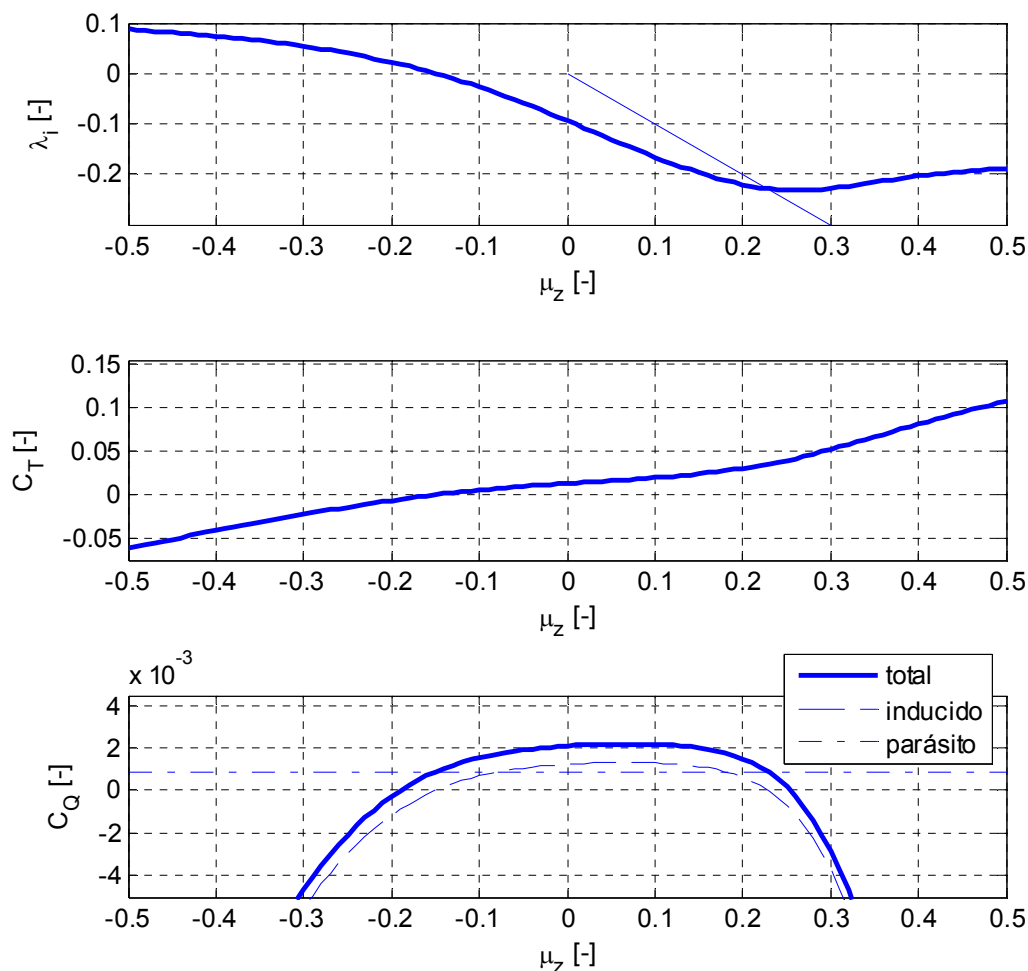


Figura 2-11 Vuelo axial. Variación del parámetro de velocidad inducida ( $\lambda_i = -v_i / (\Omega \cdot R)$ ), del coef. de empuje ( $C_T$ ), y del coef. de par ( $C_Q = C_{Qi} + C_{Q0}$ ) en función del parámetro de velocidad vertical ( $\mu_z$ ), y velocidad horizontal nula ( $\mu_x = 0, \mu_y = 0$ ) (parámetros en Anexo I)

De forma similar, la Figura 2-12 muestra las mismas magnitudes para el caso de vuelo en avance puro en X, es decir, con velocidad ascensional nula ( $\mu_z = 0, \mu_y = 0$ ). Se puede apreciar la simetría del problema, es decir, que el comportamiento es igual en ambos

sentidos, lo cual era de esperar. Por otro lado, a medida que la velocidad de avance aumenta en módulo se produce un aumento tanto de la sustentación ( $C_T$ ) como del par parásito ( $C_Q$ ); esto es debido al aumento de la velocidad relativa del viento en las palas.

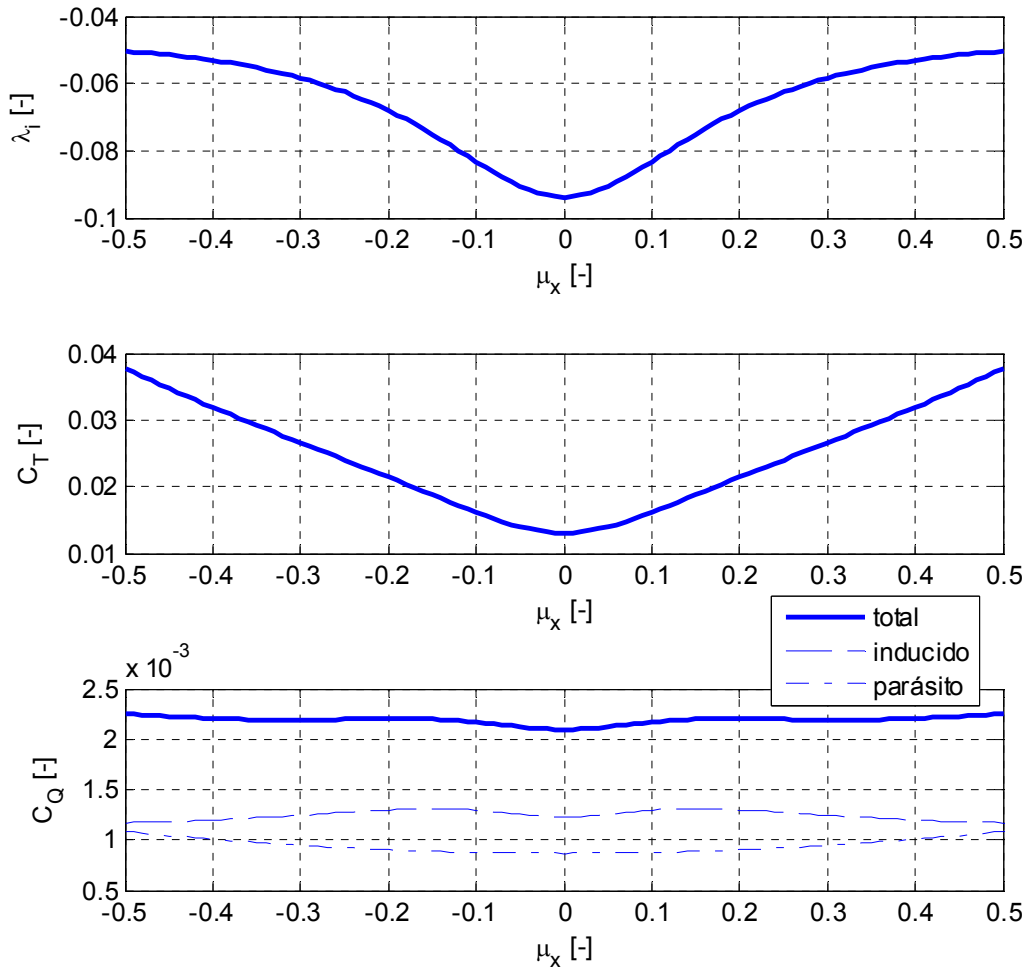


Figura 2-12 Vuelo horizontal. Variación del parámetro de velocidad inducida ( $\lambda_i = -v_i/(\Omega \cdot R)$ ), del coeficiente de empuje ( $C_T$ ), y del coeficiente de par ( $C_Q = C_{Qi} + C_{Q0}$ ) en función del parámetro de velocidad horizontal en X ( $\mu_x$ ) con velocidades vertical y perpendicular nulas ( $\mu_y = 0, \mu_z = 0$ ) (parámetros en Anexo I)

En la siguiente figura se muestra la variación de los coeficientes de fuerza y par (2.42-47) en función de la velocidad de avance horizontal, y con velocidad de ascenso nula ( $\mu_y = 0, \mu_z = 0$ ). Las dos figuras inferiores se corresponden con las de la Figura 2-12, teniendo en cuenta que el par en el eje Z está cambiado de signo ( $C_Q = |M_Z|$ ). Por otro lado, las componentes en el eje Y son nulas ( $C_Y = 0, M_Y = 0$ ), pues no se ha considerado velocidad en ese eje ( $\mu_y = 0$ ). Naturalmente, el efecto de una componente en el eje Y sería análogo al del eje X. Finalmente la componente en X genera una fuerza resistiva en contra del viento ( $C_H$ ) y un par de rotación ( $M_X$ ), tal como se explicó en la Figura 2-9 al final del apartado §2.2.2.

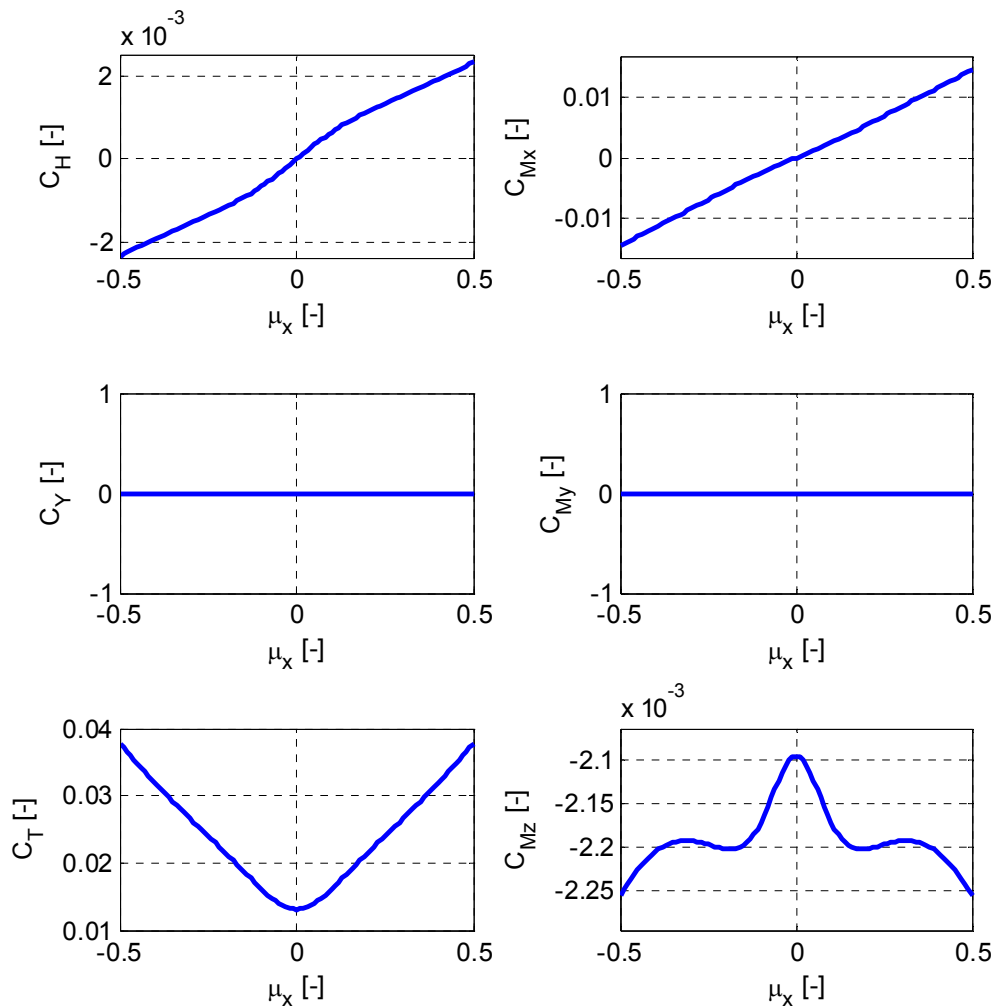


Figura 2-13 Vuelo horizontal. Variación de los coeficientes de fuerza ( $C_H$ ,  $C_Y$ ,  $C_T$ ), y de par aerodinámicos ( $C_{Mx}$ ,  $C_{My}$ ,  $C_{Mz}$ ) en función del parámetro de velocidad horizontal en X ( $\mu_x$ ) con velocidades vertical y perpendicular nulas ( $\mu_y=0$ ,  $\mu_z=0$ )

Para estudiar el efecto combinado de velocidad de avance y ascenso/descenso ( $\mu_x \neq 0$ ,  $\mu_z \neq 0$ ) se ha recurrido al diagrama tridimensional que se muestra en la siguiente figura. El corte con el plano ( $\mu_x=0$ ) daría como resultado la Figura 2-11, mientras que el corte con el plano ( $\mu_z=0$ ) daría como resultado la Figura 2-12. De nuevo, cabe señalar la simetría con respecto a la componente en X ( $\mu_x$ ). Por otro lado, la componente vertical ( $\mu_z$ ) tiene una mayor influencia que la componente horizontal ( $\mu_x$ ) tanto en la tracción ( $C_T$ ) como en el par ( $C_Q$ ). En general, para el caso de velocidad de descenso elevada ( $\mu_z > 0$ ), el propulsor actúa de freno, generando una tracción positiva ( $C_T > 0$ ). Para el caso de velocidad de ascenso elevada ( $\mu_z < 0$ ), el disco también actúa de freno pero en sentido contrario; en este caso la tracción sería negativa ( $C_T < 0$ ). Para velocidades moderadas cercanas al punto fijo ( $\mu_z = 0$ ), la tracción es positiva ( $C_T > 0$ ) y el propulsor tiene que dar energía al fluido ( $C_Q > 0$ ).

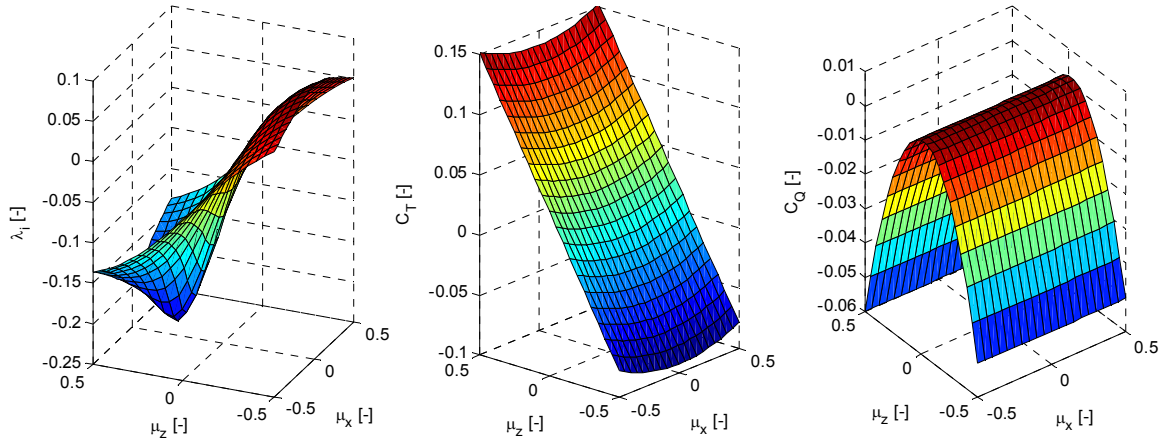


Figura 2-14 Variación del parámetro de velocidad inducida ( $\lambda_i = -v_i / (\Omega \cdot R)$ ), del coeficiente de empuje ( $C_T$ ), y del coeficiente de par ( $C_Q$ ) en función del parámetro de velocidad horizontal en X ( $\mu_x$ ) y velocidad vertical ( $\mu_z$ )

### 2.2.4 Resistencia aerodinámica del cuerpo

En este apartado se describe la resistencia que experimenta el cuerpo del helicóptero por el hecho de desplazarse en un entorno fluido, en este caso el aire. Para ello se emplea la magnitud adimensional conocida como coeficiente de resistencia ( $c_d$ ), que se define como:

$$c_{dc} = \frac{2F_c}{\rho v^2 S_c} \quad (2.50)$$

donde:

$F_c$  es la fuerza resistiva que posee igual dirección y sentido que el flujo del aire.

$\rho$  es la densidad del aire.

$v$  es la velocidad relativa del fluido.

$S_c$  es la superficie de referencia.

La superficie de referencia ( $S_b$ ) depende de la geometría bajo análisis. En este trabajo se asume un cuerpo esférico y se emplea como superficie de referencia su proyección frontal, que en este caso es un círculo ( $S_b = \pi R_b^2$ ).

La fuerza resistiva se obtiene directamente de la ecuación (2.50) como:

$$F_c = \frac{1}{2} \rho v^2 c_{dc} S_c \quad (2.51)$$

Por otro lado, el coeficiente de resistencia ( $c_d$ ) varía en función del número de Reynolds ( $Re$ ), que se define como:

$$Re = \frac{\rho v L}{\mu} \quad (2.52)$$

donde:

$v$  es la velocidad relativa del fluido.

$L$  es la dimensión característica; en el caso de la esfera, es su diámetro ( $L = 2R_b$ ).

$\rho$  es la densidad del fluido.

$\mu$  es la viscosidad dinámica del fluido.

En la siguiente figura se muestra la variación del coeficiente de resistencia ( $c_d$ ) para el caso de una esfera. Para valores reducidos del número de Reynolds el flujo en torno al cuerpo permanece en régimen laminar. En este régimen la fuerza resistiva ( $F_d$ ) es proporcional a la velocidad ( $v$ ) en vez de a su valor cuadrático ( $v^2$ ). Esto se aprecia a la izquierda de la gráfica, donde  $c_d$  decae con pendiente -1, es decir, que es inversamente proporcional a la velocidad. Según aumenta el valor del número de Reynolds ( $Re$ ), el comportamiento se separa del régimen laminar. Entre  $10^3$  y  $10^5$ , el flujo pasa a ser turbulento, y el valor del coeficiente de resistencia alcanza un valor constante de 0.47. Este fenómeno ocurre de forma similar para otras geometrías (ver Figura 2-16). Para la implementación del modelo de simulación (ver §2.5) se ha asumido el valor constante (0.47) en régimen turbulento, por ser éste el rango operacional de mayor interés.

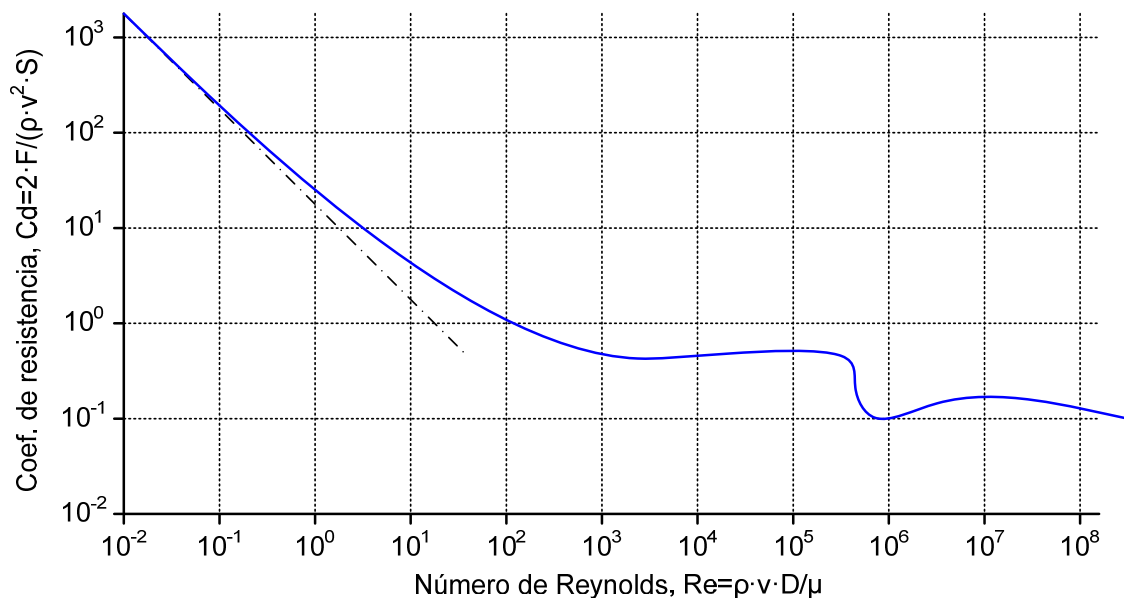


Figura 2-15 Coeficiente de resistencia ( $C_d$ ) de una esfera en función de número de Reynolds ( $Re$ ) [11]

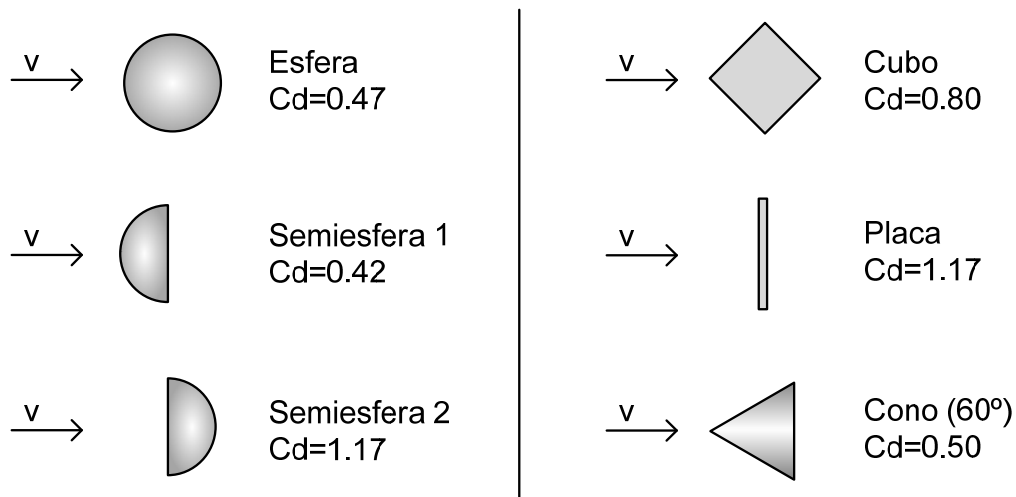


Figura 2-16 Coeficientes de resistencia ( $C_d$ ) para varios cuerpos tridimensionales para número de Reynolds ( $Re$ ) entre  $10^4$  y  $10^6$  [11]

### 2.3 Dinámica del helicóptero

En este apartado se describen las ecuaciones que definen la dinámica del helicóptero, es decir, que permiten calcular la evolución de su posición y orientación en función de las fuerzas y momentos que actúan sobre él (ver Figura 2-17).

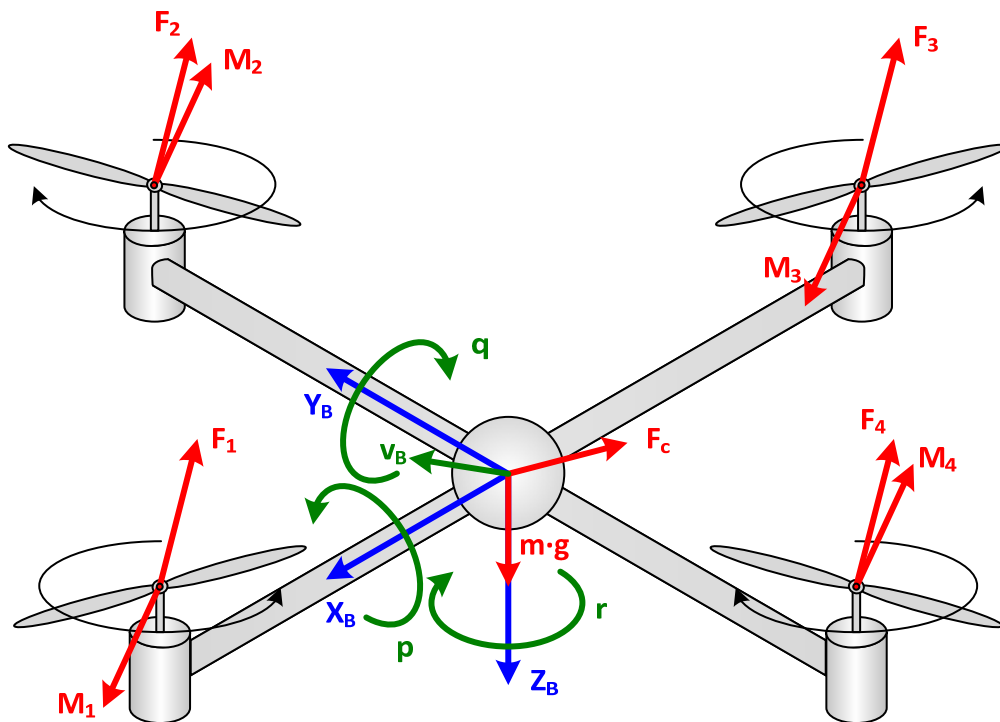


Figura 2-17 Sistema de fuerzas y momentos que actúan sobre el cuadricóptero. En cada propulsor aparece una fuerza y un momento ( $F_i$ ,  $M_i$ ), y en el cuerpo también aparece una fuerza de resistencia aerodinámica ( $F_c$ ), y la gravedad ( $m \cdot g$ ).

La primera hipótesis de modelado es considerar el helicóptero como un sólido rígido. En cuanto a los propulsores, se considera únicamente su inercia en torno a su eje de rotación ( $J_r$ ) y su efecto giroscópico sobre el vehículo, es decir, el momento que

aparece al tratar de orientar la inercia del propulsor que rota a una velocidad elevada ( $\Omega_r$ ).

Siguiendo el formalismo de Newton-Euler (mecánica clásica), las ecuaciones dinámicas se derivan directamente de las leyes de variación de cantidad de movimiento y de momento angular [12]. Se obtiene por tanto dos expresiones:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dv}{dt} \right|_I &= \left. \frac{dv_B}{dt} \right|_B + w_B \times v_B = g + \frac{F^a}{m} \\ \left. \frac{dH}{dt} \right|_I &= \left. \frac{dH_B}{dt} \right|_B + w_B \times H_B = M^a + M^g \end{aligned} \quad (2.53)$$

donde

$\left. \frac{d}{dt} \right|_I$  y  $\left. \frac{d}{dt} \right|_B$  representan las derivadas con respecto a un sistema de referencia inercial (I) y en ejes cuerpo (B), respectivamente.

$v_B = [u \ v \ w]^t$  es la velocidad del centro de masas (c.d.m.) en ejes cuerpo.

$w_B = [p \ q \ r]^t$  es la velocidad angular del helicóptero en ejes cuerpo.

$H_B = I_B \cdot w_B$  es el momento angular, donde  $I_B$  representa el tensor de inercia en el c.d.m.

$m$  es la masa del helicóptero.

$g$  es la aceleración gravitatoria.

$F^a, M^a$  son las resultantes en el c.d.m. de las fuerzas y momentos aerodinámicos que aparecen tanto en los propulsores como en el cuerpo del helicóptero. El cálculo de estas fuerzas y momentos se detalla en la §2.2.

$M^g$  es la resultante de los momentos giroscópicos debidos a elevada velocidad de giro de los propulsores.

En la literatura, algunos autores prefieren seguir el formalismo de Euler-Lagrange [28] (mecánica analítica). Naturalmente, tomando las mismas hipótesis, las ecuaciones a las que conducen ambos formalismos son equivalentes.

El estado del sistema se puede definir por medio de las siguientes variables:

$$X = [u \ v \ w \ p_N \ p_E \ p_D \ p \ q \ r \ \phi \ \theta \ \psi]^t$$

donde

$u, v, w$  son las componentes de velocidad del c.d.m. en ejes cuerpo.

$p_N, p_E, p_D$  son las coordenadas geográficas del c.d.m.: norte, este y abajo

$p, q, r$  son las componentes de la velocidad angular en ejes cuerpo.

$\phi, \theta, \psi$  son los ángulos de Euler: alabeo, cabeceo y guiñada.

Es importante observar que las coordenadas geográficas ( $p_N p_E p_D$ ) y los ángulos de Euler ( $\phi \theta \psi$ ) definen la posición y orientación del helicóptero con respecto a un sistema de referencia fijo ( $F_E$ ). La descripción detallada de los sistema de referencia se puede encontrar en §2.1.

Agrupando las fuerzas y momentos como  $F^a = [H_b Y_b T_b]^t$ , y  $M^a + M^g = [L_b M_b N_b]^t$ , la dinámica del helicóptero, descrita por las ecuaciones (2.53), se puede expresar en la forma de espacio de estados:  $\dot{X} = f(X, U)$ , donde  $U$  representa el vector de entrada:  $U = [L_b M_b N_b H_b Y_b T_b]^t$ , y  $X$  el estado del sistema:  $X = [u v w p_N p_E p_D p q r \phi \theta \psi]^t$ . Las ecuaciones resultantes se muestran a continuación. En estas expresiones se asume la se asume la hipótesis adicional de que, gracias a la simetría del helicóptero, la matriz de inercia es diagonal con valores ( $I_x, I_y, I_z$ ) (ver Tabla 2-1).

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= -g \sin \theta + v \cdot r - w \cdot q + H_b/m \\
 \dot{v} &= g \cos \theta \sin \phi + w \cdot p - u \cdot r + Y_b/m \\
 \dot{w} &= \cos \theta \cos \phi + u \cdot q - v \cdot p + T_b/m \\
 \begin{bmatrix} \dot{p}_N \\ \dot{p}_E \\ \dot{p}_D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \\
 \dot{p} &= r \cdot q \cdot (I_y - I_z)/I_x + L_b/I_x \\
 \dot{q} &= p \cdot r \cdot (I_z - I_x)/I_y + M_b/I_y \\
 \dot{r} &= q \cdot p \cdot (I_x - I_y)/I_z + N_b/I_z \\
 \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi / \cos \theta & \cos \phi / \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Es interesante notar que la posición absoluta [ $p_N p_E p_D$ ] no interviene directamente en ninguna de las ecuaciones.

## 2.4 Modelo para el diseño del control

Desde el punto de vista del control es conveniente asumir ciertas hipótesis adicionales para simplificar la formulación y el diseño del control. Primero se asume que la geometría del sistema presenta simetría, de forma que el tensor de inercias en el c.d.m. es diagonal:  $I_B = \text{diag}([I_x I_y I_z])$ .

Por otro lado, se considera únicamente la fuerza de tracción y el momento en el eje de giro, es decir, las componentes en el eje  $Z_B$ . Fuera del eje de giro, plano  $X_B$ - $Y_B$ , se asume que los momentos se anulan entre los propulsores que giran en sentidos contrarios, y se desprecia el efecto de las fuerzas.

Por último, se asumen valores constantes para los coeficientes de tracción y de par. Para ello se toman los valores de vuelo a punto fijo. De esta forma la fuerza y el momento serán proporcionales a la velocidad del rotor al cuadrado. De las ecuaciones (2.14) y (2.15) se obtienen las expresiones de tracción y momento para el propulsor  $i$ -ésimo:

Tracción:  $T_i = C_T \cdot \rho \cdot S \cdot (\Omega_i \cdot R)^2 = k_1 \cdot \Omega_i^2$

Par:  $Q_i = C_Q \cdot \rho \cdot S \cdot R \cdot (\Omega_i \cdot R)^2 = k_2 \cdot \Omega_i^2$

Si se considera que los coeficientes son constante, estos se pueden agrupar junto con los otros factores constantes en  $k_1$  y  $k_2$ :

$$k_1 = C_T \cdot \rho \cdot S \cdot R^2 \tag{2.55}$$

$$k_2 = C_Q \cdot \rho \cdot S \cdot R^3 \tag{2.56}$$

En la Figura 2-18 se muestra esquemáticamente el modelado del helicóptero para el diseño del control. En ella se puede ver la numeración de cada hélice, su sentido de giro y el criterio de signos empleado. En cada propulsor aparece una fuerza de empuje o tracción ( $T_i$ ) y un par aerodinámico ( $Q_i$ ) en sentido contrario al giro de la hélice ( $\Omega_i$ ).

De acuerdo con la geometría y el criterio de signos definido en la Figura 2-18, las fuerzas y los momentos netos que afectan al helicóptero en su c.d.m serían:

$$\begin{aligned} \text{Empuje:} \quad & T = k_1(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \\ \text{Momento de alabeo:} \quad & L = k_1 d_p (\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \\ \text{Momento de cabeceo:} \quad & M = k_1 d_p (\Omega_1^2 - \Omega_3^2) \\ \text{Momento de guiñada:} \quad & N = k_2 (\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) \end{aligned} \tag{2.57}$$

donde  $d_p$  representa la distancia horizontal entre el propulsor y el c.d.m.

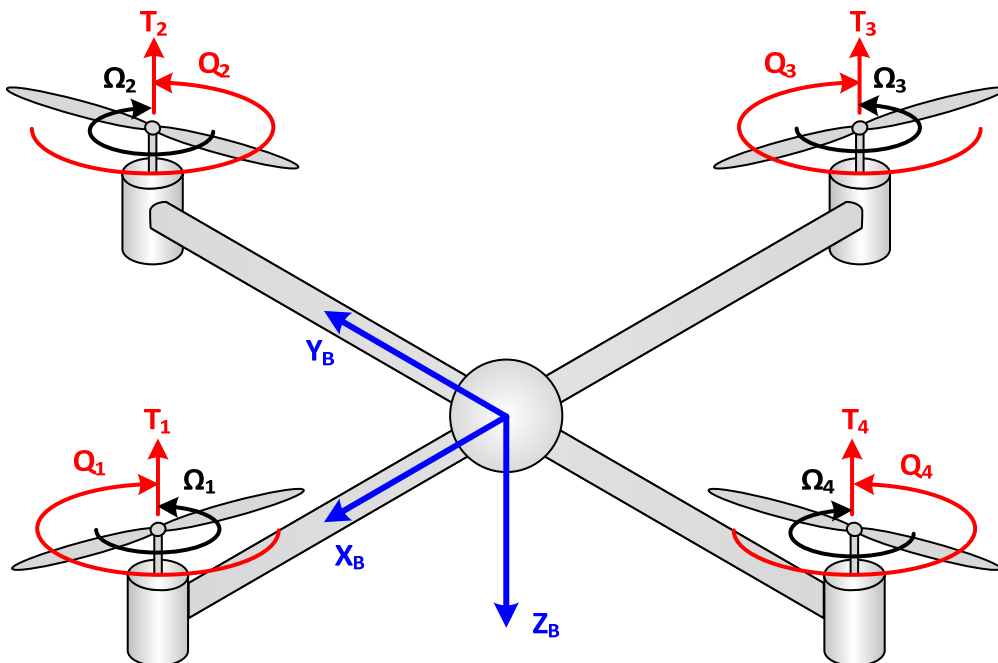


Figura 2-18 Modelo del helicóptero para el control. En cada propulsor aparece una fuerza de empuje o tracción ( $T_i$ ), y un par aerodinámico ( $Q_i$ ) que va en sentido contrario a la velocidad de la hélice ( $\Omega_i$ ).

En la Tabla 2-1 se presentan los valores considerados para este sistema.

Símbolo	Valor	Unidades	Descripción
$k_1$	$2.5 \cdot 10^{-5}$	$N/(\text{rad/s})^2$	Constante de empuje del motor
$k_2$	$6.0 \cdot 10^{-7}$	$N \cdot m/(\text{rad/s})^2$	Constante de par del motor
$d_p$	0.2	m	Distancia horizontal entre del propulsor al c.d.m.
$I_x$	0.007	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Momento de inercia con respecto al eje X
$I_y$	0.007	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Momento de inercia con respecto al eje Y
$I_z$	0.010	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Momento de inercia con respecto al eje Z
$m$	0.6	kg	Masa total del helicóptero
$g$	9.81	$\text{m/s}^2$	Aceleración gravitacional

Tabla 2-1 Parámetros del modelo del helicóptero para el diseño del control

La dinámica del helicóptero descrita por las ecuaciones (2.54) se puede simplificar al reducir el número de variables del vector de entrada:  $U = [L M N T]^t$ . Las ecuaciones resultantes se muestran a continuación. Son prácticamente iguales a las anteriores, aunque cabe señalar que el empuje ( $T$ ) aparece con signo cambiado para mantener la coherencia con el criterio de signos definido en la Figura 2-18.

$$\dot{u} = -g \sin \theta + v \cdot r - w \cdot q$$

$$\dot{v} = g \cos \theta \sin \phi + w \cdot p - u \cdot r$$

$$\dot{w} = \cos \theta \cos \phi + u \cdot q - v \cdot p - T/m$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_N \\ \dot{p}_E \\ \dot{p}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$\dot{p} = r \cdot q \cdot (I_y - I_z)/I_x + L/I_x \quad (2.58)$$

$$\dot{q} = p \cdot r \cdot (I_z - I_x)/I_y + M/I_y$$

$$\dot{r} = q \cdot p \cdot (I_x - I_y)/I_z + N/I_z$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi / \cos \theta & \cos \phi / \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones (2.58) presentan una naturaleza marcadamente no lineal. Sin embargo, es posible linealizar estas ecuaciones en torno al punto de equilibrio:

$$X_0 = [u_0 \ v_0 \ w_0 \ p_{N0} \ p_{E0} \ p_{D0} \ p_0 \ q_0 \ r_0 \ \phi_0 \ \theta_0 \ \psi_0]^t = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^t$$

$$U_0 = [L_0 \ M_0 \ N_0 \ T_0]^t = [0 \ 0 \ 0 \ mg]$$

que se corresponde con el vuelo en punto fijo y donde se cumple que:

$$\dot{X}_0 = f(X_0, U_0) = 0$$

El sistema de ecuaciones (2.57) toma la siguiente forma una vez linealizado:

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= -g\theta \\
 \dot{v} &= g\phi \\
 \dot{w} &= -\Delta T/m \\
 \begin{bmatrix} \dot{p}_N \\ \dot{p}_E \\ \dot{p}_D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \\
 \dot{p} &= L/I_x \\
 \dot{q} &= M/I_y \\
 \dot{r} &= N/I_z \\
 \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

donde las variables de entrada y de estado pasan a ser incrementales con respecto al punto de equilibrio. En este caso, sólo el empuje,  $T_0$ , es distinto de cero en el punto de equilibrio; por tanto, es la única variable que se han indicado explícitamente como incremental:  $\Delta T_0 = T - T_0$ .

Las ecuaciones (2.58) se pueden agrupar mediante la siguiente expresión matricial:

$$\begin{aligned}
 X &= [u \ v \ w \ p_N \ p_E \ p_D \ p \ q \ r \ \phi \ \theta \ \psi]^t \\
 U &= [L \ M \ N \ \Delta T]^t \\
 \dot{X} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} U
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

## 2.5 Modelo para simulación

En este apartado se presenta el modelado del helicóptero en Matlab/Simulink. En la siguiente figura se muestra la vista a alto nivel del modelo. Básicamente, está compuesto por cuatro bloques:

- La aerodinámica, a la izquierda, que calcula las fuerzas y los momentos aerodinámicos que actúan sobre el helicóptero. Este bloque incluye tanto el modelado de los propulsores como la resistencia aerodinámica del cuerpo. Las entradas incluyen los comandos de velocidad a cada uno de los propulsores.
- La dinámica del helicóptero, en el centro (h4h), integra los pares y fuerzas que actúan sobre el helicóptero para calcular su velocidad, posición y orientación.
- Los sensores, a la derecha, devuelven la medida ruidosa de la velocidad, posición y orientación de la planta para cerrar el lazo de control.
- El viento, abajo, genera la velocidad del viento, que actúa como una perturbación externa sobre el helicóptero.

En los siguiente sub-apartados se explica en detalle el modelado de los tres primeros bloques: aerodinámica, h4h y sensores. El cuarto bloque “viento” se ha modelado mediante un entrada tipo “escalón”, que representa un tipo de perturbación constante.

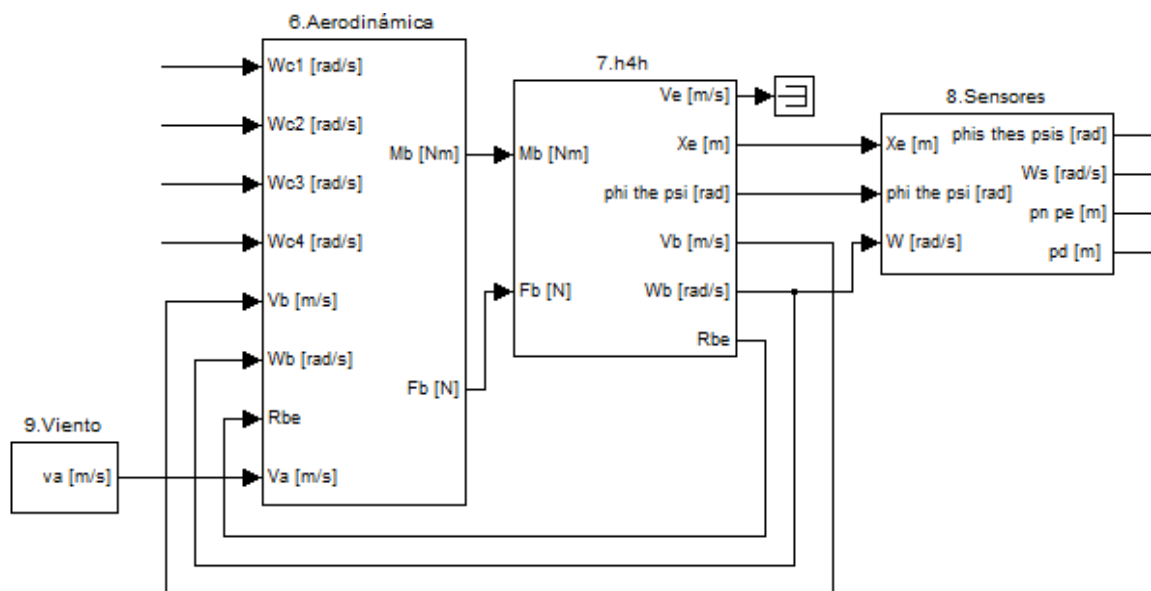


Figura 2-19 Modelado de la planta en Simulink

### 2.5.1 Modelo aerodinámico

Este bloque permite calcular las fuerzas y los momentos aerodinámicos que actúan por un lado en los propulsores, y por otro en el propio cuerpo del helicóptero. En la Figura 2-20 se muestra la estructura interna del bloque. Es importante observar que a la hora de considerar la velocidad del viento, es necesario expresarla en ejes cuerpo.

Cada uno de los cuatro propulsores se ha dividido en dos módulos: “Dinámica del propulsor” y “Fuerza-Momento propulsor”. El primer módulo, “Dinámica del propulsor”, implementa las ecuaciones dinámicas del propulsor en torno a su eje de rotación. Este módulo tiene en cuenta la inercia del propulsor, las características del motor, el par aerodinámico y el control de velocidad. El interior de este bloque se puede ver en la Figura 2-21. La velocidad comandada se compara con la velocidad real del propulsor para calcular la tensión aplicada en el motor. El controlador implementa un PID con

“antiwindup” para evitar los problemas asociados a la saturación del voltaje (ver Figura 7-7 en Anexo III). El motor transforma la potencia eléctrica en mecánica para generar el par necesario para compensar el par aerodinámico, y acelerar la inercia del propulsor a la velocidad deseada. Los valores característicos de este bloque se presentan en la Tabla 2-2.

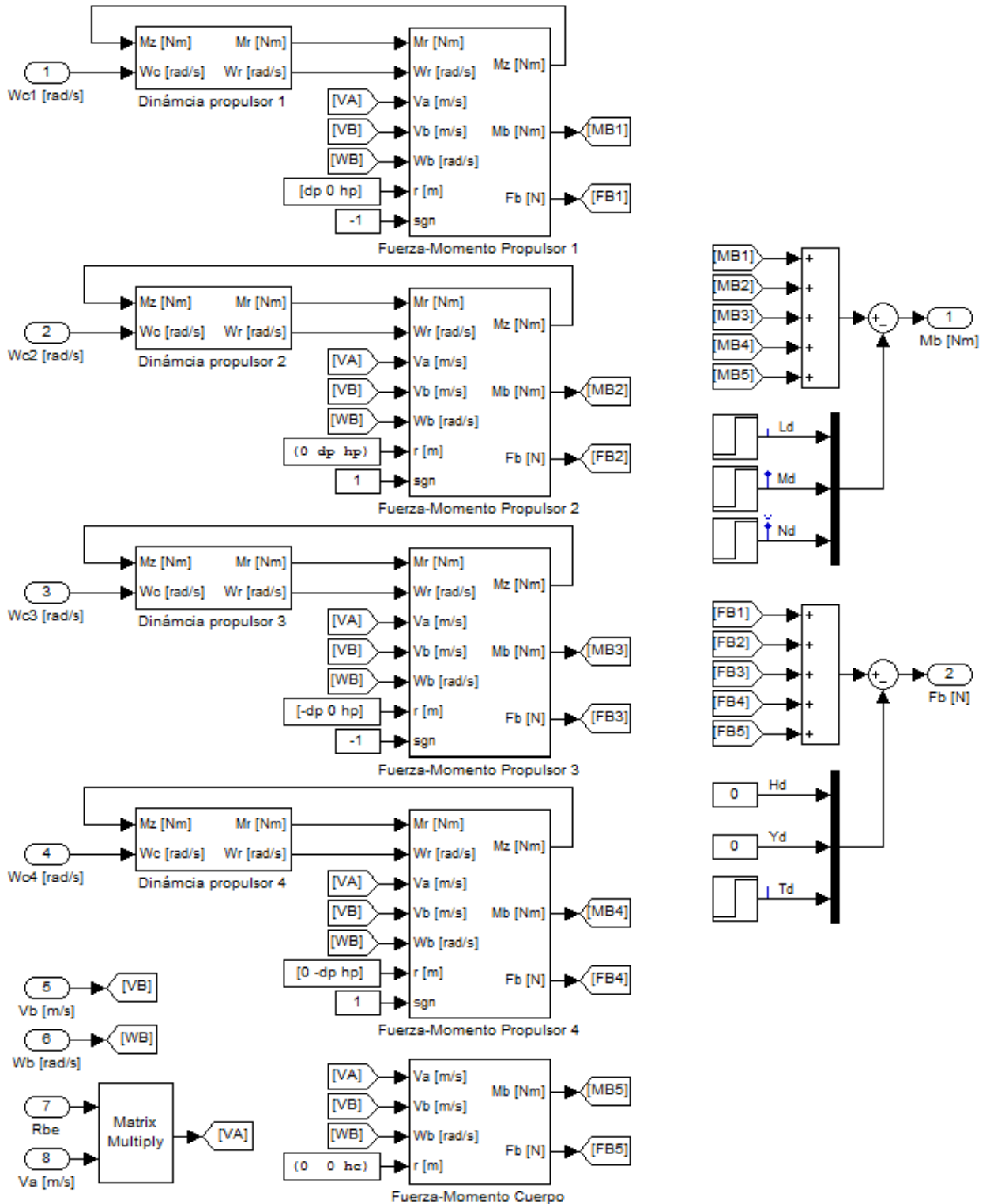


Figura 2-20 Modelo aerodinámico del helicóptero

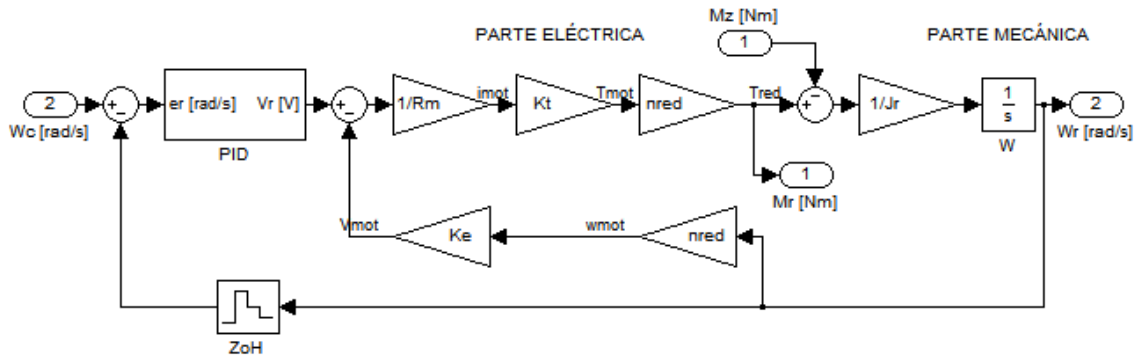


Figura 2-21 Modelado de la dinámica del propulsor

Símbolo	Valor	Unidades	Descripción
$J_r$	$6.0 \cdot 10^{-5}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Momento de inercia del propulsor
$n_{red}$	5.0	-	Índice de reducción
$K_t$	$3.38 \cdot 10^{-3}$	$\text{N} \cdot \text{m}/\text{A}$	Constante de par del motor
$K_e$	$3.38 \cdot 10^{-3}$	$\text{V}/(\text{rad}/\text{s})$	Constante de fuerza contra electromotriz
$R_m$	0.56	Ohm	Resistencia óhmica del bobinado del motor
$V_{max}$	11,1	V	Tensión de alimentación máxima
$V_{min}$	0	V	Tensión de alimentación mínima

Tabla 2-2 Parámetros del modelo de la Dinámica del propulsor

El controlador de velocidad se ajusta mediante los cuatro parámetros que se presentan en la siguiente tabla. El ancho de banda, el tiempo de respuesta a un escalón y los márgenes de estabilidad se muestran la Figura 2-22.

Símbolo	Valor	Unidades	Descripción
$K_{Pr}$	0.03659	$\text{V}/(\text{rad}/\text{s})$	Parámetro proporcional
$K_{Ir}$	0.00285	$\text{V}/(\text{rad}/\text{s})$	Parámetro integral
$K_{Dr}$	0.02918	$\text{V}/(\text{rad}/\text{s})$	Parámetro derivativo
$K_{ar}$	0.6569	-	Parámetro de filtrado
$T_s$	0.01	s	Periodo de muestreo

Tabla 2-3 Parámetros del control de velocidad del propulsor

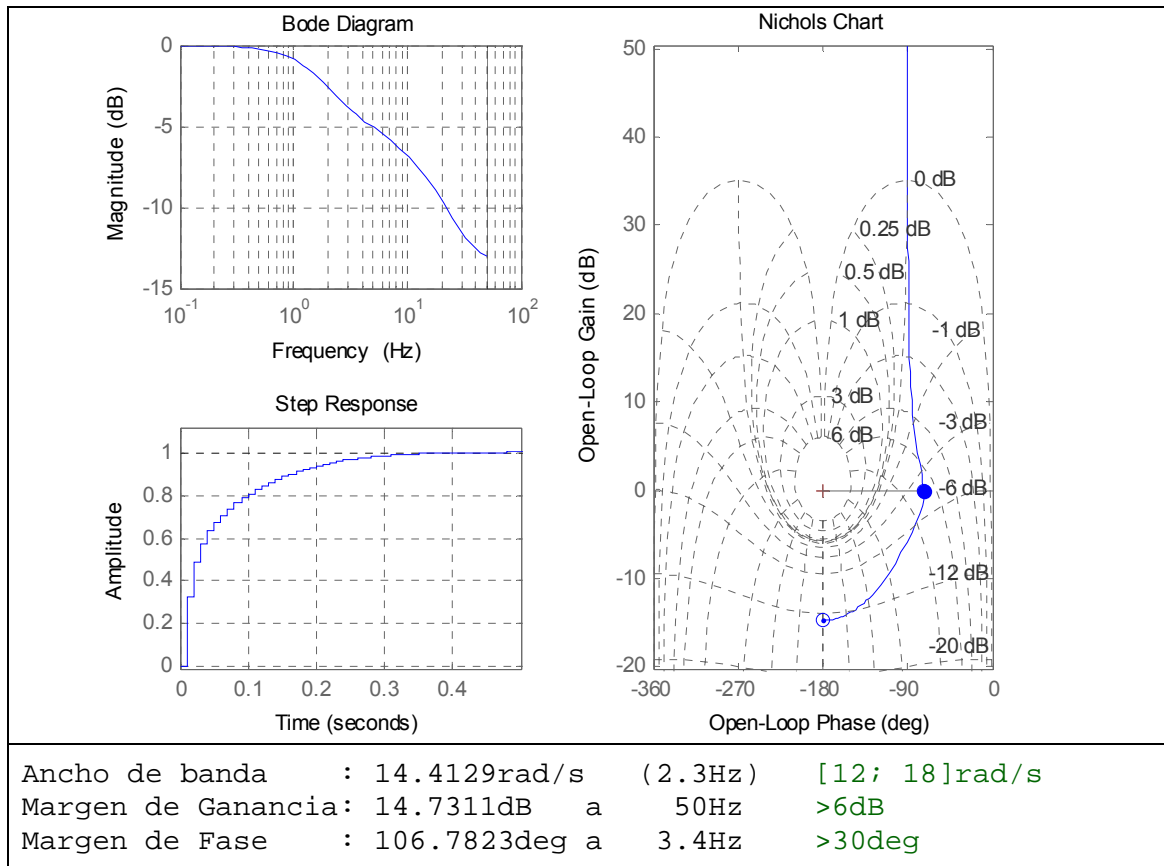


Figura 2-22 Prestaciones del control de velocidad del propulsor

El ajuste del control lineal se ha realizado por métodos clásicos y empleando los siguientes criterios de diseño:

- Margen de fase  $> 30^\circ$  (valor típico de la industria [8]).
- Margen de ganancia  $> 6\text{dB}$  (valor típico de la industria [8]).
- Ancho de banda entre  $12\text{rad/s}$  y  $18\text{rad/s}$  (respuesta dinámica).

Es importante observar que los cuatro propulsores se ajustan con los mismos parámetros.

El segundo módulo, “Fuerza-Momento propulsor”, calcula las fuerzas y los momentos aerodinámicos que actúan sobre las hélices al girar de acuerdo con la teoría desarrollada en §2.2. La estructura interna de este bloque se muestra en la Figura 2-23 y es común a los cuatro propulsores. Las diferencias en los propulsores se definen en el interfaz, es decir, en las entradas. En particular, se emplea la variable “r” para definir la posición del propulsor con respecto al c.d.m. del helicóptero, y la variable “sgn” para definir su sentido de giro: +1 para el sentido horario y -1 para el sentido anti-horario. Dentro del módulo primero se calcula la velocidad del aire con respecto al sistema de referencia del árbol asociado al propulsor. Para ello es necesario considerar la velocidad del aire ( $V_a$ ), la velocidad lineal del cuerpo ( $V_b$ ), la velocidad angular del cuerpo ( $W_b$ ) y la matriz de rotación que permita pasar del ejes cuerpo a ejes árbol ( $R_{AB}$ ):

$$R_{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} (= R_{AB}^t = R_{BA}) \quad (2.60)$$

que al ser simétrica coincide con la transformación inversa ( $R_{BA}$ ). El cambio de sistema se puede interpretar como un giro de  $\pi$  rad en torno al eje  $X_B$ , naturalmente, un segundo giro de  $\pi$  rad lo devolvería al sistema original.

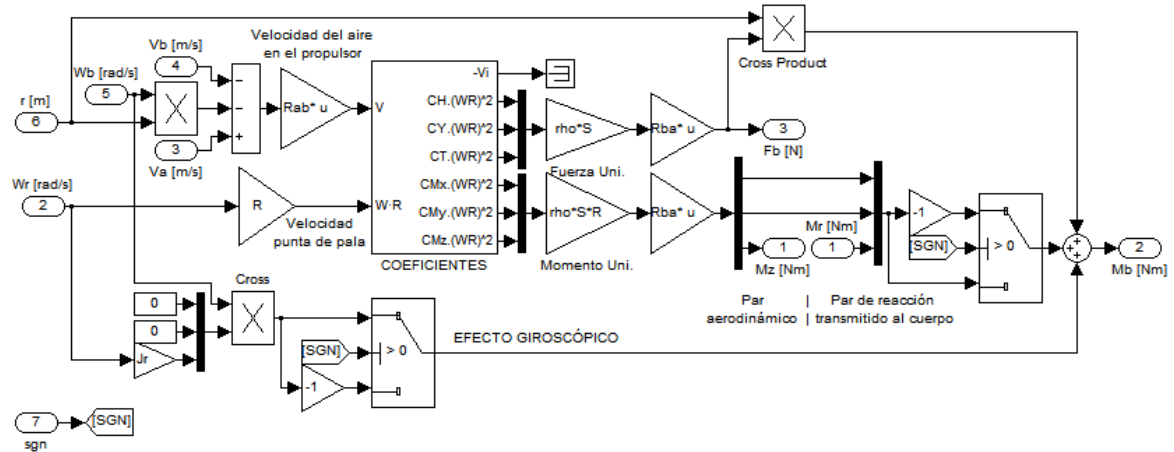


Figura 2-23 Modelado de la Fuerza-Momento del propulsor

Una vez conocidas la velocidad del aire que incide en el propulsor y la velocidad de punta de pala (velocidad de rotación multiplicada por el radio de la pala:  $Wr \cdot R$ ) es posible calcular los coeficientes aerodinámicos que se definieron en las ecuaciones (2.20) y (2.42-47) (ver §2.2). Para ello, primero es necesario resolver el sistema de dos ecuaciones (2.20) y (2.42) con dos incógnitas: la velocidad inducida ( $V_i$ ) y la constante de tracción ( $C_T$ ). La forma de resolver este sistema de ecuaciones en Simulink es a través de un lazo algebraico tal como se muestra en la Figura 2-24. La salida de la “restricción algebraica” es la velocidad inducida, la cual se realimenta a ambas ecuaciones: “CT TCM” (2.20) y “CT TEP” (2.42). Este sistema de ecuaciones se resuelve en tiempo de simulación y el resultado, la velocidad inducida ( $V_i$ ), se emplea para calcular el resto de los coeficientes.

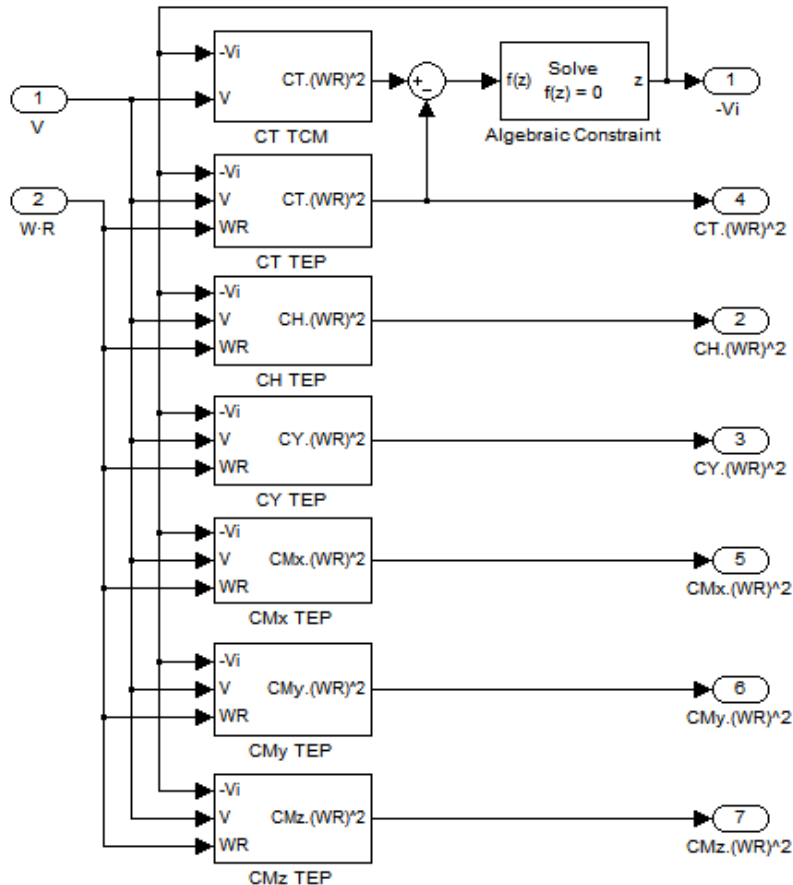


Figura 2-24 Cálculo de los coeficientes aerodinámicos a partir de un lazo algebraico que calcula la velocidad inducida.

Una vez obtenidos los coeficientes, éstos se multiplican por la fuerza y el momento unitario para obtener los valores netos en el propulsor. El resultado hay que trasladarlo al c.d.m. del helicóptero; para ello es necesario multiplicar vectorialmente (“cross product”) las fuerzas por su brazo. Finalmente se debe sumar el momento giroscópico de los propulsores, que se calcula multiplicando vectorialmente la velocidad angular del helicóptero ( $W_b$ ) por el momento angular del propulsor con respecto al cuerpo.

En la siguiente figura se muestra el cálculo de la fuerza aerodinámica que se genera en el cuerpo del helicóptero. Básicamente se implementa la ecuación (2.51), donde los parámetros asumidos se resumen en la siguiente tabla. De la misma forma que en el caso del propulsor, hay que trasladar la fuerza al c.d.m. del helicóptero; para ello es necesario multiplicar vectorialmente (“cross product”) las fuerzas por su brazo para extraer el momento que se genera.

Símbolo	Valor	Unidades	Descripción
$R_c$	0.05	m	Radio equivalente del cuerpo
$S_c$	0.0079	m <sup>2</sup>	Superficie proyectada equivalente del cuerpo ( $S_c = \pi.R_c^2$ )
$c_{dc}$	0.47	-	Coefficiente de resistencia aerodinámica (esfera)

Tabla 2-4 Parámetros del modelo de la resistencia aerodinámica del cuerpo.

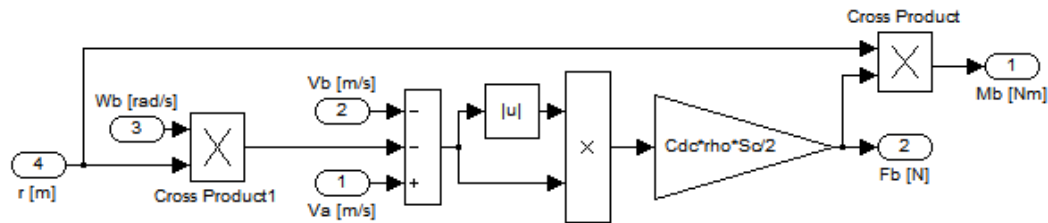


Figura 2-25 Modelado de la Fuerza-Momento en el cuerpo debido a la resistencia aerodinámica.

Las fuerzas y momentos resultantes se obtienen al sumar cada uno de los contribuyentes, como se muestra a la derecha de la Figura 2-21. También se han añadido unas perturbaciones de tipo escalón que se pueden activar o no durante las simulaciones.

### 2.5.2 Modelo del helicóptero h4h

Se han desarrollado cuatro modelos alternativos para simular la dinámica del helicóptero. En la Figura 2-26 se muestra el interior de este bloque donde se pueden ver los cuatro modelos en paralelo. Todos ellos emplean como entradas la resultante de las fuerzas ( $F_b$ ) y momentos ( $M_b$ ) que se aplican en el centro de masas del vehículo. A su vez, las salidas representan: la velocidad lineal y posición en ejes tierra ( $V_e$  y  $X_e$ ), los ángulos de Euler ( $\phi$  the  $\psi$ ), la velocidad lineal y angular en ejes cuerpo ( $V_b$  y  $W_b$ ) y la matriz de rotación que pasa de ejes tierra a ejes cuerpo. Los cuatro modelos considerados son los siguientes:

1. h4h (Lineal): Incluye el modelo lineal del helicóptero (2.59) (ver Figura 7-3).
2. h4h (Ecuación): Incluye el modelo no lineal del helicóptero (2.54) (ver Figura 7-4).
3. h4h (6DoF): Emplea el módulo de Simulink “6DoF (Euler Angles)” (Aerospace Blockset>Equations of Motion>6DoF) (ver Figura 7-5).
4. h4h (SimMech): Emplea la librería de modelado físico “SimMechanics” (ver Figura 7-6).

El primero consiste en el modelo lineal, mientras que los tres últimos son formas alternativas de implementar el modelo no lineal. El modelado mediante “SimMechanics” (modelo 4) es conceptualmente diferente en cuanto a su definición con respecto a los anteriores, ya que emplea el paradigma de modelado físico [1]. El sistema se define mediante un conjunto de sólidos rígidos sobre los que se definen un número de restricciones cinemáticas, y fuerzas y momentos. Esta forma de modelar los sistemas mecánicos es más sencilla, ya que no requiere que el diseñador desarrolle las ecuaciones del modelo a mano, sino que esta tarea se delega a la computadora. Además incluye herramientas, como las de visualización, que facilitan la comprensión de los modelos. En este caso, el helicóptero se representa mediante un sólido rígido (“body”, ver Figura 7-6) que se puede mover con seis grados de libertad con respecto al entorno. Las fuerzas y momentos se aplican directamente en el c.d.m. En la Figura 2-27 se muestra la representación gráfica mediante SimMechanics,

Aparecen cinco sistemas de referencia, uno en el c.d.m. y otros cuatro en cada uno de los propulsores.

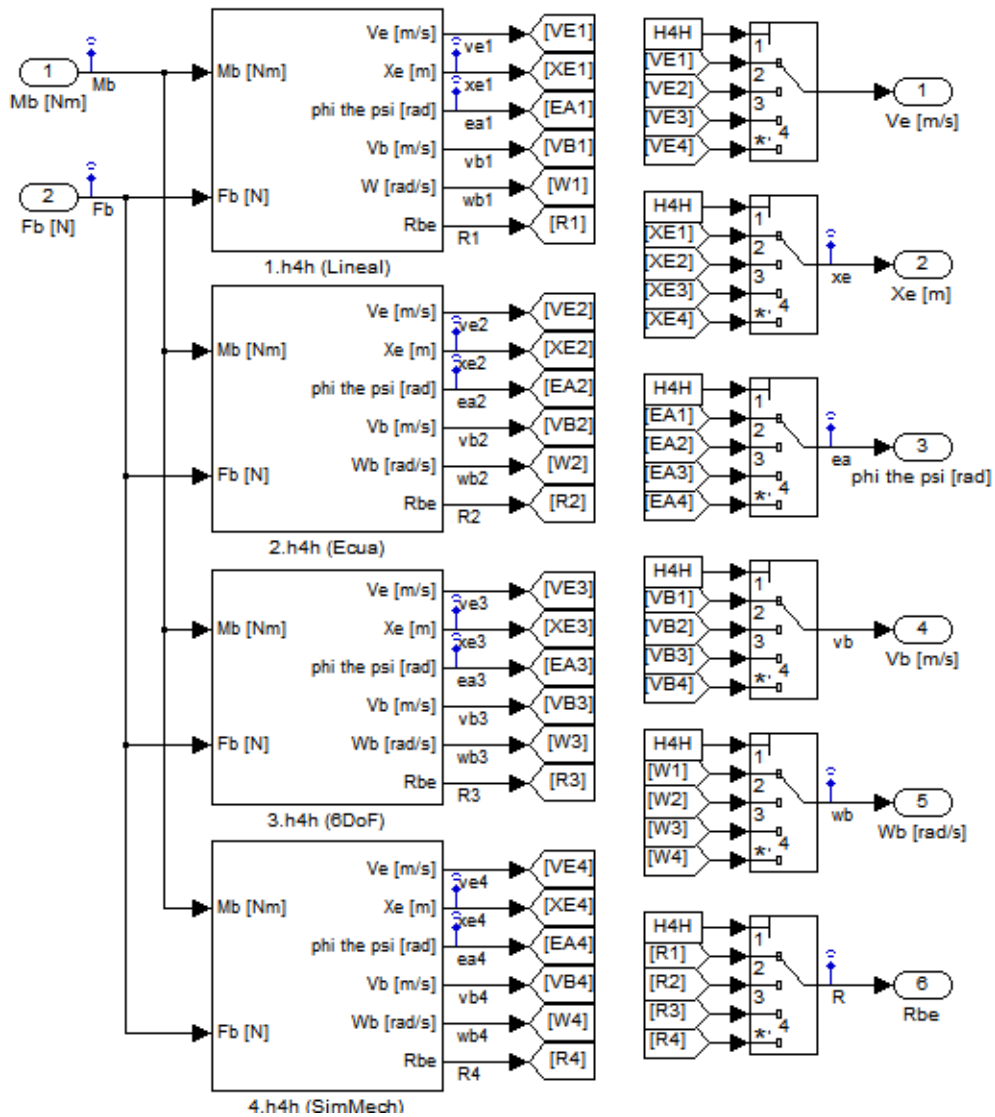


Figura 2-26 Modelo del helicóptero

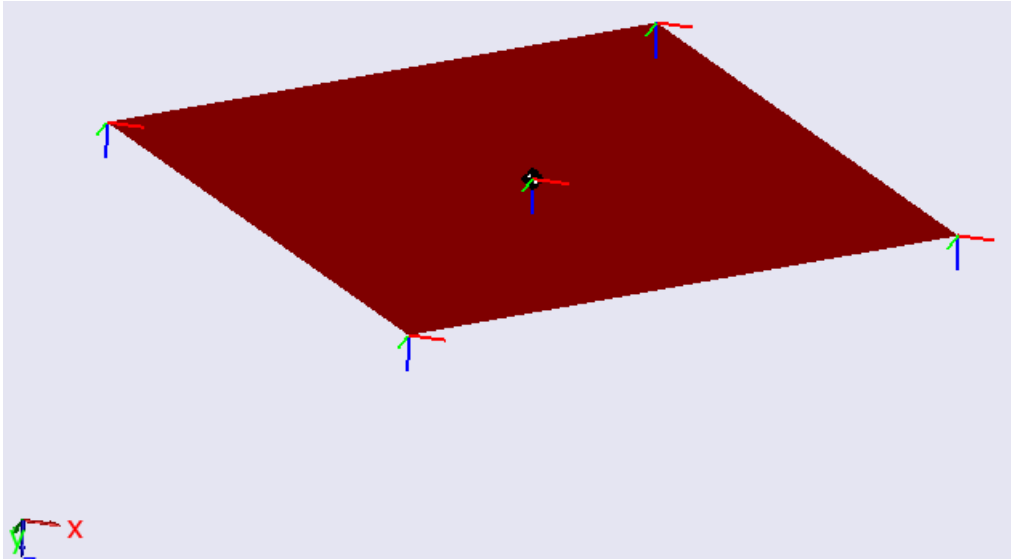


Figura 2-27 Visualización de helicóptero en SimMechanics

Para poder evaluar y comparar los modelos presentados se ha diseñado un caso de simulación sencillo en el que se inyecta el mismo perfil de par a todos los modelos y se comparan las posiciones y orientaciones resultantes de cada uno. Las figuras Figura 2-28 y Figura 2-29, muestran respectivamente los perfiles de entrada y las posiciones y orientaciones de los distintos modelos. En cuanto a los perfiles de entrada (Figura 2-28), se observa que los comandos rectangulares, en magenta (CMD), son suavizados por la dinámica de primer orden de los motores, en azul (REAL). En cuanto a la respuesta de los sistemas (Figura 2-29), se han representado simultáneamente los cuatro sistemas:

1. h4h Lineal: "LIN" en azul.
2. h4h Ecuaciones: "EQU" en verde.
3. h4h 6DoF: "EoM" en rojo.
4. h4h SimMechanics: "MEC" en cian.

Las respuestas de los tres últimos (EQU, EoM y MEC) están superpuestas, con lo que sólo se puede ver el color cian que corresponde al último de los tres (MEC). La respuesta del sistema lineal (LIN, azul) inicialmente da una respuesta similar, pero diverge a medida que avanza la simulación y el modelo se separa del punto de equilibrio. La conclusión es doble: por un lado el modelo lineal aproxima correctamente el comportamiento no lineal del sistema, y por otro, las distintas opciones de modelado no lineal (EQU, EoM, MEC) dan soluciones equivalentes.

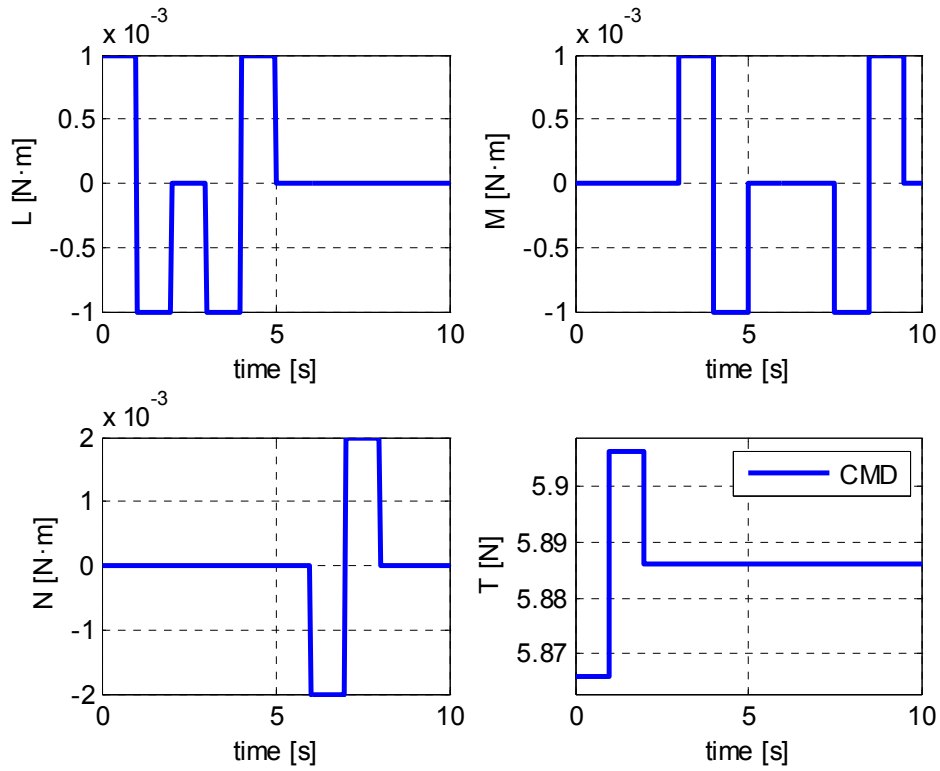


Figura 2-28 Perfiles de par y empuje para comparar los modelos

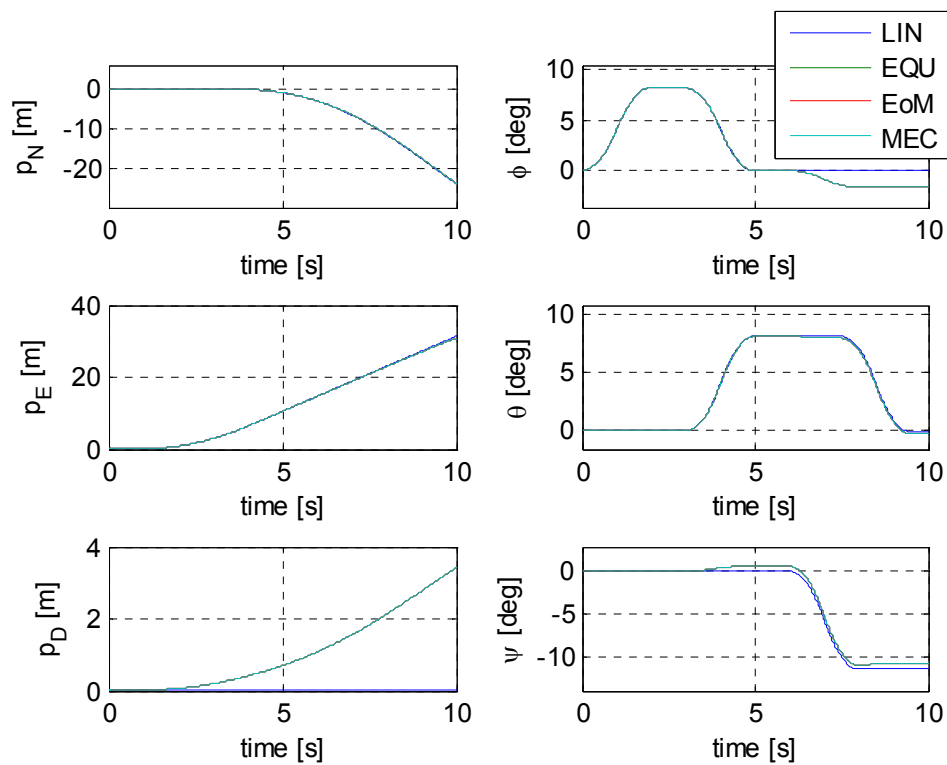


Figura 2-29 Evolución de la posición y orientación de los distintos modelos

### 2.5.3 Modelo de los sensores

La posición y orientación del helicóptero y sus derivadas se miden a través de sensores. En la práctica se suelen emplear IMUs (“Inertial Measurement Units”) que contienen componentes que combinan la medida de acelerómetros, giróscopos e incluso señal GPS, para dar estas medidas. También se puede hacer uso de cámaras u otro tipo de elementos que mejoran el posicionamiento absoluto del helicóptero. La oferta de sensores es extensa y las prestaciones de los mismos varían en un amplio rango.

El modelo que aquí se presenta considera únicamente tres aspectos fundamentales de los sensores: la dinámica, el muestreo y el ruido. Para la dinámica se ha empleado un segundo orden con frecuencia natural  $w_s = 251.3 \text{ rad/s}$  y factor de amortiguamiento  $x_s = 0.7$ . El muestreo seleccionado es de 100Hz y se modela con un bloqueador de orden cero. El ruido se ha modelado mediante una fuente de ruido blanco y se han asignado valores  $3\sigma$  de 0.01m para las medidas de posición,  $3^\circ$  para las medidas angulares y  $5^\circ/\text{s}$  para las medidas de velocidad angular. Los parámetros del sensor se resumen en la Tabla 2-5.

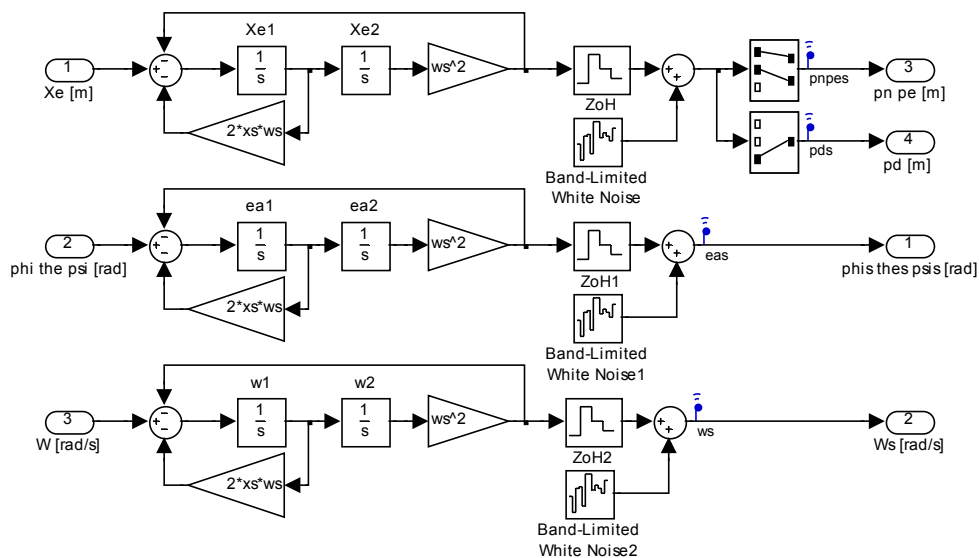


Figura 2-30 Modelo dinámico de los sensores.

Parámetro	Valor	Unidades	Descripción
$w_s$	251.3	rad/s	Frecuencia natural
$x_s$	0.7	-	Factor de amortiguamiento
$T_s$	0.001	s	Tiempo de muestreo
$3 \cdot \sigma_x$	0.01	m	$3\sigma$ de la medida de posición
$3 \cdot \sigma_a$	3	$^\circ$	$3\sigma$ de la medida de orientación
$3 \cdot \sigma_w$	5	$^\circ/\text{s}$	$3\sigma$ de la medida de velocidad angular

Tabla 2-5 Parámetros del sensor

### 3 DISEÑO DE LA LEY DE CONTROL

En la sección anterior se han presentado las ecuaciones que gobiernan la dinámica del sistema, y su modelado mediante Simulink. En esta sección se desarrolla el control del sistema. Primero se presenta la estructura general del control, y a continuación se explican las distintas partes que lo componen.

#### 3.1 Estructura general del control

En la siguiente figura se muestra el sistema completo en lazo cerrado, el cual incluye tanto el control (módulos del 1 al 5) como la planta (módulos del 6 al 9, ver también Figura 2-19):

1. Generador de trayectorias: genera la referencia de posición  $[p_{Nd} \ p_{Ed} \ p_{Dd}]$ .
2. Control de altitud: controla la altitud del helicóptero ( $p_D$ ) por medio del empuje ( $T_c$ ).
3. Control de posición: controla la posición horizontal del helicóptero ( $p_N, p_E$ ) generando referencias de orientación  $[\phi_d \ \theta_d \ \psi_d]$ . El comando de guiñada se fija al valor:  $\psi_d = 0$ , de forma que el  $\phi_d$  se asocia a los movimientos en la dirección este/oeste, y  $\theta_d$  se asocia a los movimientos en la dirección norte/sur.
4. Control de actitud: controla la orientación del helicóptero ( $\phi \ \theta \ \psi$ ) por medio de los pares comandados  $[L_c \ M_c \ N_c]$ .
5. Transformación a voltajes: Los pares comandados ( $L_c \ M_c \ N_c$ ) junto con el empuje ( $T_c$ ) se transforman en comandos de velocidad para los motores ( $\Omega_1 \ \Omega_2 \ \Omega_3 \ \Omega_4$ ). Esta transformación consiste en calcular la inversa de las ecuaciones (2.57). Su implementación en Simulink se presenta en la Figura 3-2. El efecto de esta transformación se puede ver en la Figura 3-3, donde se muestra el efecto que tiene sobre las velocidades de los propulsores cada incremento individual de las salidas del control ( $L_c \ M_c \ N_c \ T_c$ ).
6. Aerodinámica: incluye la dinámica de los motores y la generación de fuerzas y momentos aerodinámicos (ver §2.5.1).
7. h4h: incluye la dinámica del helicóptero (ver §2.5.2).
8. Sensores: incluye la dinámica de los sensores (ver §2.5.3).

En los siguientes apartados se describen en detalle los tres módulos del control: control de actitud, control de posición y control de altitud. De estos tres módulos, el control de actitud constituye el corazón del sistema de control. Por este motivo, se presentan cuatro alternativas de control para este módulo: control lineal (PID), control PID difuso, control por “integral backstepping” y control por “integral backstepping” difuso. Para los otros dos módulos (control de posición y control de altitud) se han desarrollado controladores lineales PID con saturación, y se les ha añadido un simple mecanismo “anti-windup” para evitar problemas con la saturación.

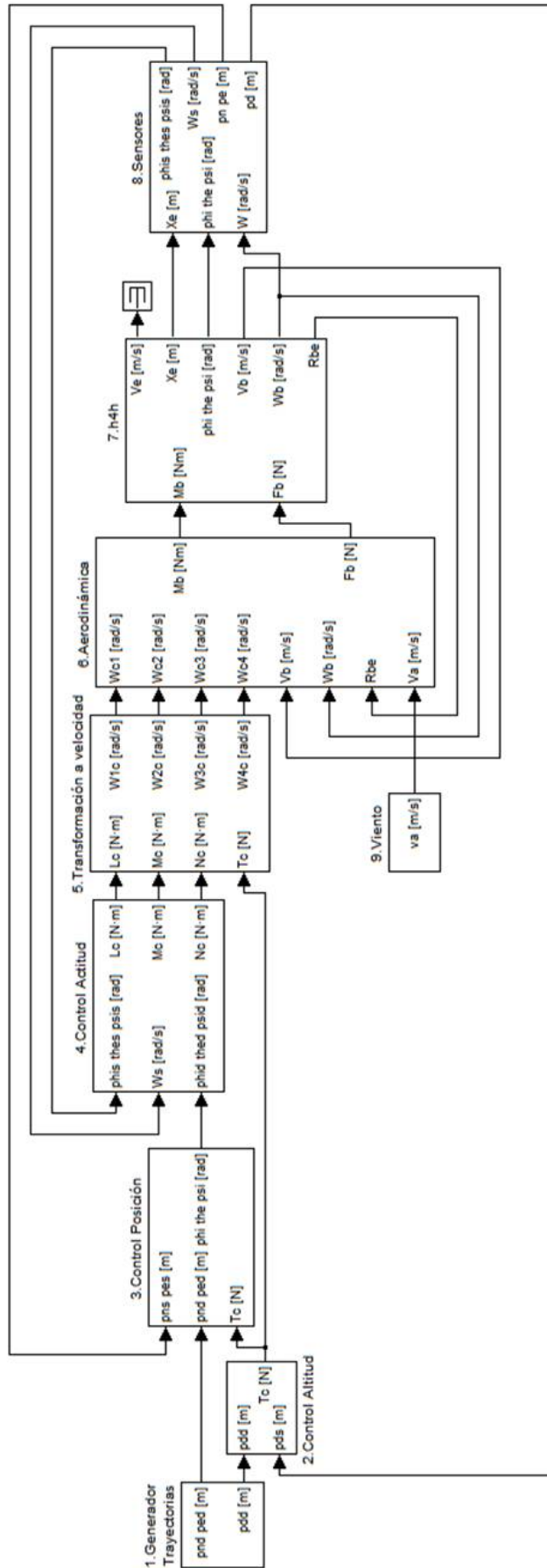


Figura 3-1 Modelo del sistema completo y arquitectura del sistema de control

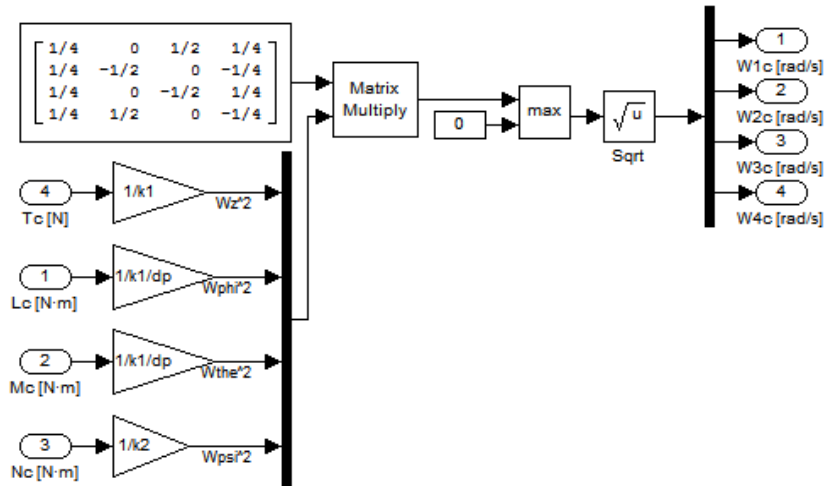


Figura 3-2 Implementación en Simulink de la transformación de los comandos de momento  $[L_c M_c N_c]$ . y empuje  $(T_c)$  a los comandos de velocidad en los motores  $(\Omega_{c1} \Omega_{c2} \Omega_{c3} \Omega_{c4})$ .

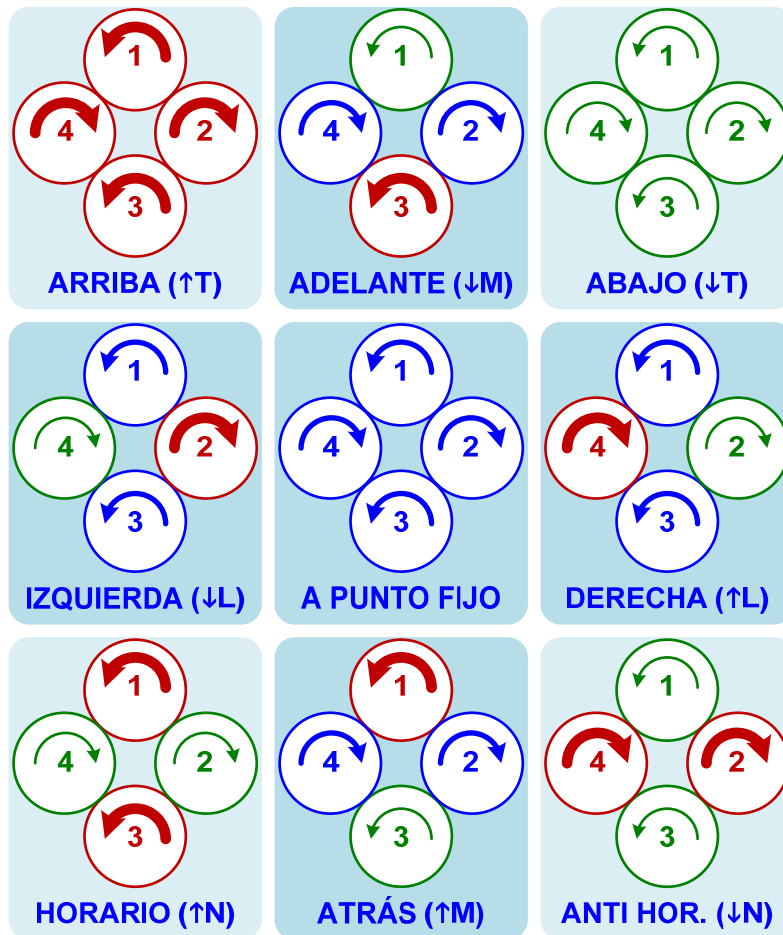


Figura 3-3 Representación gráfica de la transformación de los comandos de momento  $[L_c M_c N_c]$ . y empuje  $(T_c)$  a los comandos de velocidad en los motores  $(\Omega_{c1} \Omega_{c2} \Omega_{c3} \Omega_{c4})$ .

### 3.2 Control de actitud

El control de actitud es el encargado de alcanzar la orientación del helicóptero ( $\phi \theta \psi$ ) deseadas por en el control de posición ( $\phi_d \theta_d \psi_d$ ), y representa el corazón del sistema de control. En este trabajo se presentan cuatro alternativas de control para este módulo:

1. Control lineal (PID)
2. Control PID difuso
3. Control “integral backstepping”
4. Control “Integral backstepping” difuso

donde los tres últimos controladores son no lineales. El último controlador, “integral backstepping” difuso, es una fusión de los dos anteriores.

En la Figura 3-4 se muestra la implementación en Simulink del control de actitud. Se han creado varios módulos de control en paralelo, y la selección del controlador que cierra el lazo se realiza por medio de la variable CTR. Aparte de los cuatro controles explicados anteriormente, se ha añadido un control en lazo abierto que permite inyectar perfiles predeterminados de par como los que se emplearon para la verificación del modelo de la planta (ver Figura 2-28). En los siguientes apartados se detalla la aplicación de los controladores al control de actitud. El ajuste de los controles se realiza mediante algoritmos evolutivos.

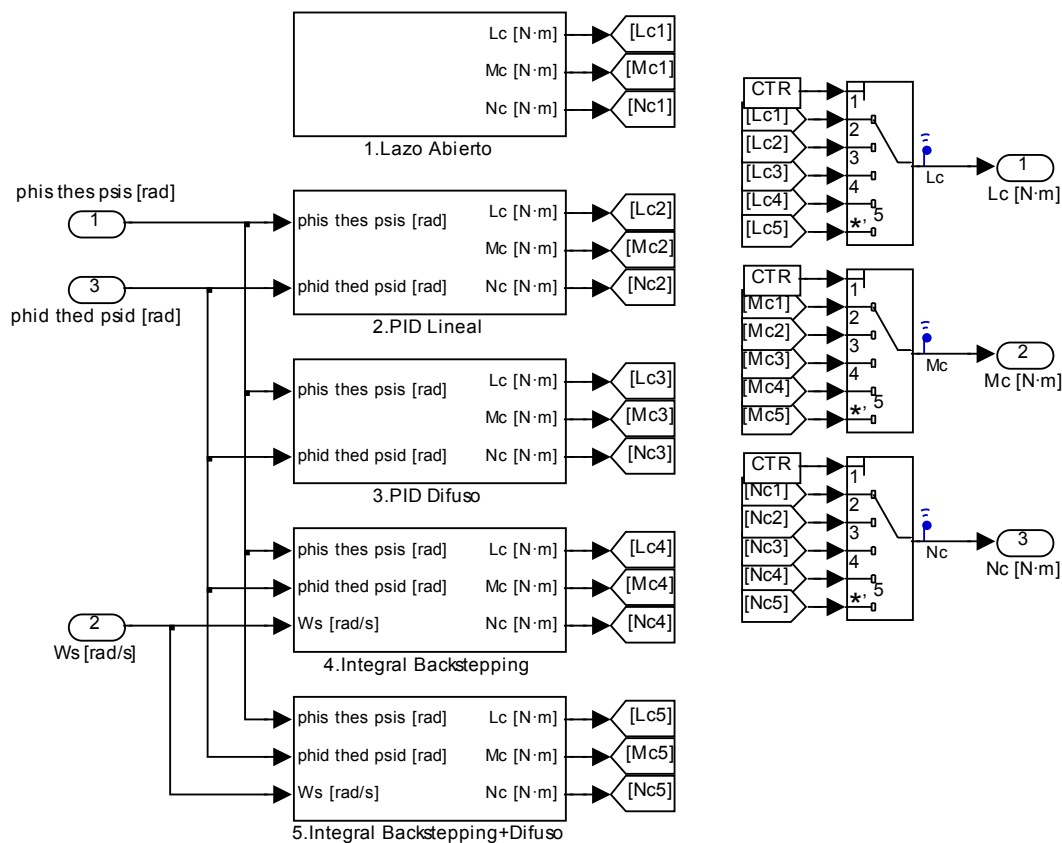


Figura 3-4 Alternativas para el control de actitud

### 3.2.1 Control lineal (PID)

El control lineal implementa un PID discreto con tiempo de muestreo 0.01s:

$$PID(z) = K_P + K_I \cdot \frac{z}{z-1} + K_D \cdot \frac{z-1}{z-K_a}$$

El controlador se ajusta mediante los cuatro parámetros que aparecen en la ecuación:  $(K_P, K_I, K_D, K_a)$ . En la Figura 3-5 se muestra la implementación de este controlador en Simulink; cada eje tiene su propio controlador y cada controlador repite la estructura que aparece a la derecha, pero con sus propios parámetros.

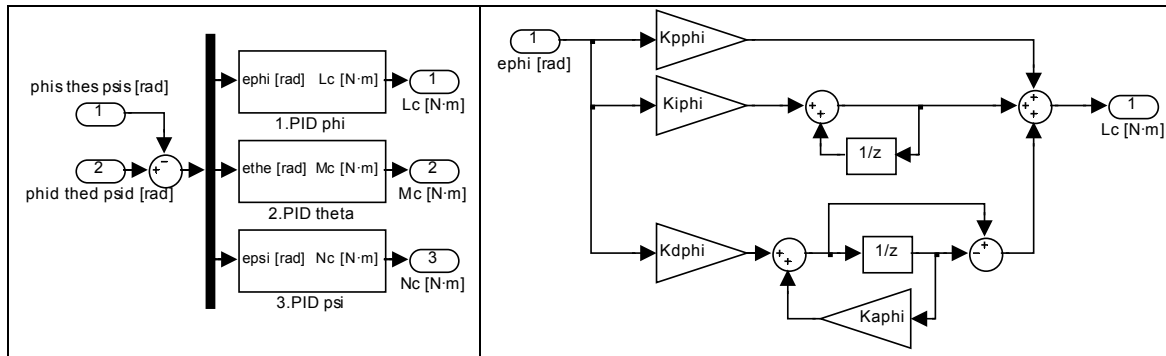


Figura 3-5 Control lineal (PID)

Los valores de ajuste se presentan en la siguiente tabla. El método de ajuste empleado está basado en algoritmos evolutivos y se presenta en la §3.2.5.

Es importante observar que, debido a la simetría, la dinámica del helicóptero en  $\phi$  y en  $\theta$  es equivalente, por lo que sólo es necesario ajustar uno de los ejes, y emplear el mismo ajuste en el otro. Los valores de ajuste se presentan en la siguiente tabla. El método de ajuste empleado está basado en algoritmos evolutivos y se presenta en la §3.2.5.

Parámetro	Valor	Unidades	Descripción
$K_{P\phi} = K_{P\theta}$	0.232	Nm/rad	Parámetro proporcional, ejes $\phi$ y $\theta$
$K_{I\phi} = K_{I\theta}$	$3.57 \cdot 10^{-3}$	Nm/rad	Parámetro integral, ejes $\phi$ y $\theta$
$K_{D\phi} = K_{D\theta}$	0.871	Nm/rad	Parámetro derivativo, ejes $\phi$ y $\theta$
$K_{a\phi} = K_{a\theta}$	0.8	-	Parámetro de filtrado, ejes $\phi$ y $\theta$
$K_{P\psi}$	0.439	Nm/rad	Parámetro proporcional, eje $\psi$
$K_{I\psi}$	$4.67 \cdot 10^{-3}$	Nm/rad	Parámetro integral, eje $\psi$
$K_{D\psi}$	0.205	Nm/rad	Parámetro derivativo, eje $\psi$
$K_{a\psi}$	0.8	-	Parámetro de filtrado, eje $\psi$

Tabla 3-1 Parámetros ajuste control lineal (PID)

### 3.2.2 Control PID difuso

El control basado en lógica difusa permite desarrollar controladores que emulan el razonamiento humano. Estas técnicas se han empleado con éxito en multitud de aplicaciones industriales [6]. En este trabajo se presenta una alternativa no lineal basada en el PID difuso presentado en [5]. Este control presenta ciertas ventajas. Por un lado, es un control de propósito general sencillo y versátil con una entrada, tres

reglas y como máximo seis parámetros de configuración. Por otro lado, presenta una forma cerrada que facilita su optimización y análisis.

La estructura del control se muestra en la Figura 3-6. El cálculo de la acción del control se descompone en cinco fases: (1) *Normalización*: el error “e” se normaliza en el intervalo [-1, 1] dividiendo su valor por el tamaño del escalón comandado, y saturando el resultado. (2) *Acción proporcional difusa*: el error normalizado pasa al bloque “PID difuso” el cual genera la acción proporcional difusa a la salida. (3) *Ganancias PID*: calcula las acciones PID y las suma. Las ganancias PID están normalizadas en el rango [0, 1]. Se ha añadido un filtro en la rama derivativa para reducir la sensibilidad del control al ruido. Este filtro se configura con el parámetro  $K_a$ . (4) *De-normalización*: la salida de-normalizada se calcula multiplicando por el parámetro “ $S_u$ ”. (5) *Saturación*: la salida del control se obtiene saturando la salida de-normalizada entre los valores máximo y mínimo admisibles por la planta. En este caso la saturación se realiza fuera de este bloque, en el módulo de motores (ver Figura 2-20).

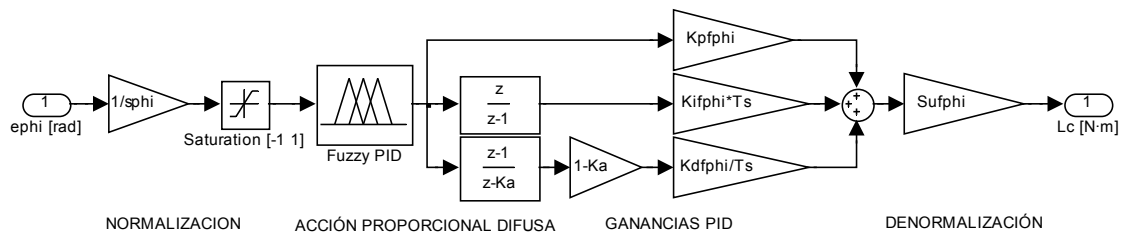


Figura 3-6 Estructura del control PID difuso

Las tres reglas difusas son:

- R1: Si (*error* es *NB*) entonces (*salida* es *NB*)
- R2: Si (*error* es *PB*) entonces (*salida* es *PB*)
- R3: Si (*error* es *AZ*) entonces (*salida* es *AZ*)

donde *NB* significa *negativo grande* (*Negative Big*), *PB* significa *positivo grande* (*Positive Big*), y *AZ* significa *aproximadamente cero* (*Approximate Zero*).

Las funciones miembro se presentan en la Figura 3-7. Mientras que las funciones de los antecedentes son fijas, las funciones de los consecuentes se pueden ajustar por medio de los parámetros  $x_1$  y  $x_2$ .

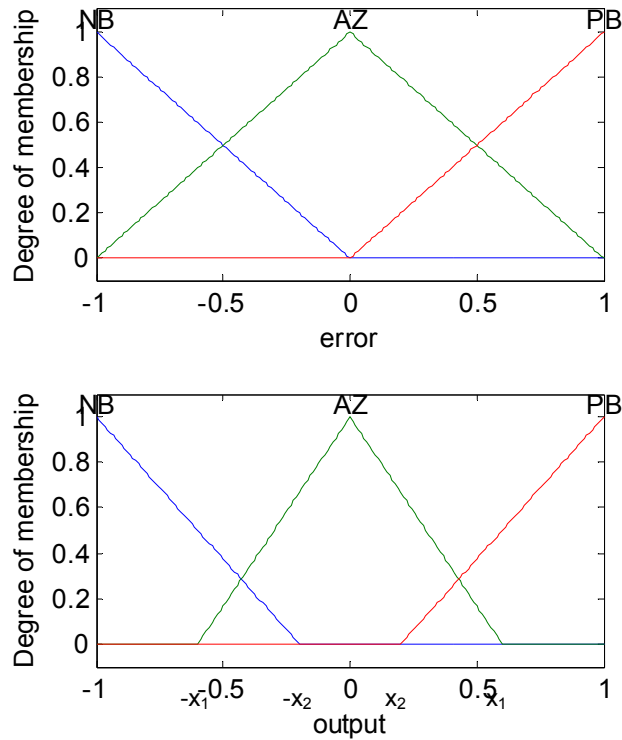


Figura 3-7 Funciones miembro

El método de razonamiento difuso empleado es el de *gravedad max-min*, conocido como el *método de Zadeh-Mamdani*. Este método consiste en calcular el centro de gravedad de la agregación de los consecuentes de cada regla. Una vez definido el método, se obtiene una solución cerrada para la acción proporcional difusa. En la Figura 3-8 se muestra el cálculo detallado para el caso:  $x_1=0.6$ ,  $x_2=0.2$ ,  $error=0.3$ ; y en la Figura 3-9, la *curva error-salida*.

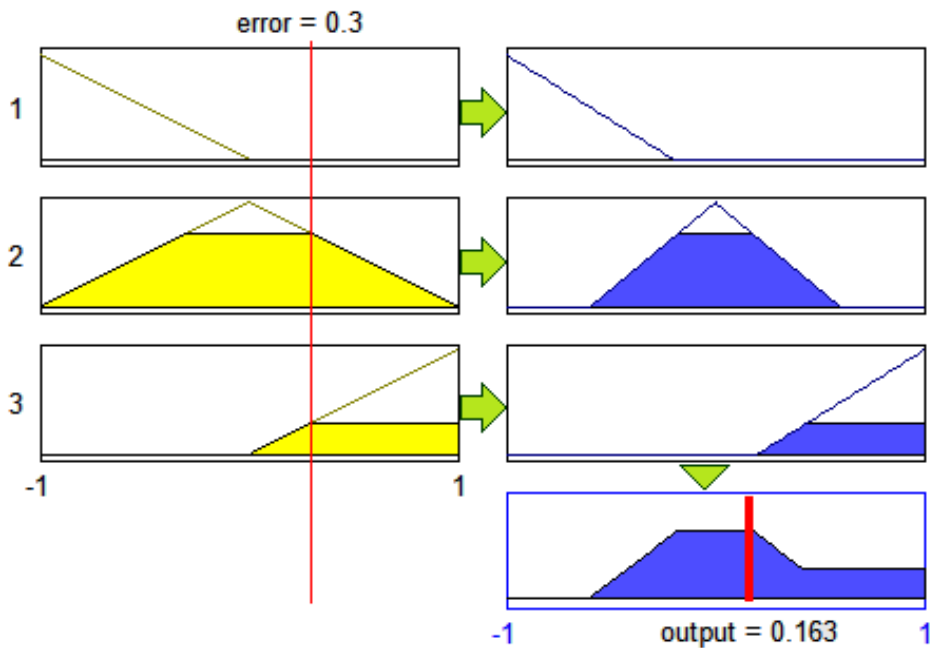


Figura 3-8 Método de razonamiento difuso

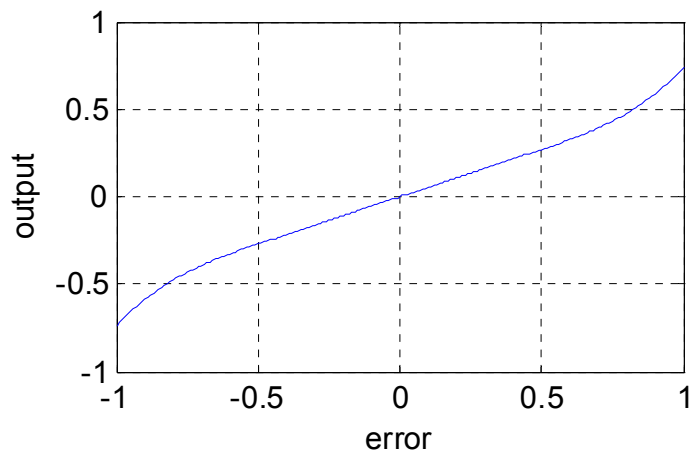


Figura 3-9 Curva error-salida para  $x_1=0.6$ ,  $x_2=0.2$ .

De esta forma, el ajuste del control se realiza a través de seis parámetros acotados:

- Tres ganancias del control:  $0 \leq (\hat{K}_P, \hat{K}_I, \hat{K}_D) \leq 1$
- Una ganancia de de-normalización:  $0 < s_u \leq \max(|L_{max}|, |L_{min}|)$
- Dos parámetros que determinan el ancho de las funciones miembro de los conjuntos difusos consecuentes:  $0 < x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 < 1$ .

Los valores de ajuste se presentan en la siguiente tabla. El método de ajuste empleado está basado en algoritmos evolutivos y se presenta en la §3.2.5.

Parámetro	Valor	Unidades	Descripción
$s_\phi = s_\theta$	30	deg	Escalón para la normalización, ejes $\phi$ y $\theta$
$s_{u\phi} = s_{u\theta}$	0.471	Nm	Ganancia de de-normalización, ejes $\phi$ y $\theta$
$x_{1\phi} = x_{1\theta}$	0.348	-	Parámetro 1 de las funciones miembro, ejes $\phi$ y $\theta$
$x_{2\phi} = x_{2\theta}$	0	-	Parámetro 2 de las funciones miembro, ejes $\phi$ y $\theta$
$K_{P\phi} = K_{P\theta}$	0.364	-	Parámetro proporcional, ejes $\phi$ y $\theta$
$K_{I\phi} = K_{I\theta}$	0.422	-	Parámetro integral, ejes $\phi$ y $\theta$
$K_{D\phi} = K_{D\theta}$	0.0589	-	Parámetro derivativo, ejes $\phi$ y $\theta$
$K_{a\phi} = K_{a\theta}$	0.8	-	Parámetro de filtrado, ejes $\phi$ y $\theta$
$s_\psi$	45	deg	Escalón para la normalización, eje $\psi$
$s_{u\psi}$	0.683	Nm	Ganancia de de-normalización, eje $\psi$
$x_{1\psi}$	0.270	-	Parámetro 1 de las funciones miembro, eje $\psi$
$x_{2\psi}$	0	-	Parámetro 2 de las funciones miembro, eje $\psi$
$K_{P\psi}$	0.458	Nm/rad	Parámetro proporcional, eje $\psi$
$K_{I\psi}$	0.403	Nm/rad	Parámetro integral, eje $\psi$
$K_{D\psi}$	0.0121	Nm/rad	Parámetro derivativo, eje $\psi$
$K_{a\psi}$	0.8	-	Parámetro de filtrado, eje $\psi$

Tabla 3-2 Parámetros ajuste control PID difuso

### 3.2.3 Control “integral backstepping”

En esta sección se presenta el control “integral backstepping” el cual se basa en el trabajo presentado por Samir Bouabdallah y Rolan Siegwart en [4].

A continuación se desarrollan las ecuaciones que conducen a las leyes de control. Este desarrollo se ilustra para el control del ángulo de alabeo ( $\phi$ ). El procedimiento es equivalente para los otros dos ejes.

Primero se realiza la siguiente aproximación para las velocidades angulares:

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= p \\ \dot{\theta} &= q \\ \dot{\psi} &= r\end{aligned}$$

Al aplicar esta simplificación a las ecuaciones (2.58), la dinámica del ángulo de alabeo ( $\phi$ ) queda determinada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{\phi} = \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{1}{I_x} \cdot L \quad (3.1)$$

Se define el error como:

$$e_1 = \phi_d - \phi \quad (3.2)$$

donde  $\phi_d$  es la orientación deseada.

También se añade la variable de error integral,  $e_0$ , que tiene por definición la siguiente dinámica:

$$\dot{e}_0 = e_1$$

Al unir las expresiones anteriores se obtiene el sistema de ecuaciones que define la dinámica del sistema:

$$\dot{e}_0 = e_1 (= \phi_d - \phi) \quad (3.3)$$

$$\dot{e}_1 = \dot{\phi}_d - \dot{\phi} \quad (3.4)$$

$$\ddot{\phi} = u \left( = \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{1}{I_x} \cdot L \right) \quad (3.5)$$

Notar que en la última ecuación se le añade la entrada equivalente  $u$ .

Para aplicar la técnica de “backstepping” se consideran primero las ecuaciones (3.3) y (3.4), y se emplea la variable  $\dot{\phi}$  como entrada virtual de control. Por tanto, se debe encontrar una función  $p_d(e_0, e_1)$  que estabilice el sistema reducido. Para ello se toma la siguiente función de Lyapunov:

$$V = c_0 \frac{e_0^2}{2} + \frac{e_1^2}{2} \quad \text{con } c_0 > 0$$

entonces:

$$\dot{V} = c_0 \cdot e_0 \cdot e_1 + e_1(\dot{\phi}_d - p_d)$$

Si se elige:

$$p_d = \dot{\phi}_d + c_0 \cdot e_0 + c_1 \cdot e_1 \quad \text{con } c_1 > 0 \quad (3.6)$$

se obtiene:

$$\dot{V} = -c_1 \cdot e_1^2$$

que es semidefinida negativa, ya que no depende de  $e_0$ . Sin embargo, se puede afirmar por el teorema de La Salle [3] que el sistema es asintóticamente estable. Esto se puede comprobar al sustituir  $p_d$  en el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{e}_0 &= e_1 \\ \dot{e}_1 &= \dot{\phi}_d - p_d = \dot{\phi}_d - (\dot{\phi}_d + c_0 \cdot e_0 + c_1 \cdot e_1) = -c_0 \cdot e_0 - c_1 \cdot e_1 \end{aligned}$$

con lo que se obtiene un sistema cuyo único punto de equilibrio es  $[e_0 = 0; e_1 = 0]$ . Este punto también constituye el mayor conjunto invariante en la región donde  $\dot{V} = 0$  (es decir,  $e_1 = 0$ ). Por tanto, toda solución debe tender al punto de equilibrio, y el sistema es asintóticamente estable.

Alternativamente, como el sistema es lineal invariante en el tiempo, la estabilidad se puede analizar mirando si los polos del sistema pertenecen al semiplano izquierdo. Para ello se obtiene el polinomio característico y se analizan sus coeficientes:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \end{bmatrix} \\ \det \left( \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ c_0 & \lambda + c_1 \end{bmatrix} \right) &= \lambda(\lambda + c_1) + c_0 = \lambda^2 + c_1\lambda + c_0 \\ \text{Estable} &\Leftrightarrow c_0 > 0 \wedge c_1 > 0 \end{aligned}$$

El siguiente paso consiste en realizar el cambio de variable:

$$e_2 = p_d - \dot{\phi} \quad (3.7)$$

La dinámica de esta nueva variable sería:

$$\dot{e}_2 = \dot{p}_d - \ddot{\phi} = v \quad (3.8)$$

donde  $v$  sería la nueva entrada virtual. De esta forma, el sistema de ecuaciones resultante sería:

$$\dot{e}_0 = e_1 \quad (3.9)$$

$$\dot{e}_1 = \dot{\phi}_d - p_d + e_2 (= -c_0 \cdot e_0 - c_1 \cdot e_1 + e_2) \quad (3.10)$$

$$\dot{e}_2 = v$$

Seleccionando la función de Lyapunov del sistema completo:

$$V_C = V + \frac{e_2^2}{2} = c_0 \frac{e_0^2}{2} + \frac{e_1^2}{2} + \frac{e_2^2}{2}$$

se obtiene que:

$$\dot{V}_C = -c_1 \cdot e_1^2 - e_1 \cdot e_2 + e_2 \cdot v$$

Si se elige:

$$v = -e_1 - c_2 \cdot e_2 \text{ con } c_2 > 0 \quad (3.11)$$

entonces:

$$\dot{V}_C = -c_1 \cdot e_1^2 - c_2 \cdot e_2^2$$

que, a pesar de ser semidefinida negativa, es asintóticamente estable, como se explicó anteriormente.

Ahora se deben deshacer los cambios de variable para obtener la ley de control. Para ello se parte de la ecuación (3.6):

$$\dot{p}_d = \ddot{\phi}_d + c_0 \cdot \dot{e}_0 + c_1 \cdot \dot{e}_1$$

donde se sustituyen las ecuaciones (3.3) y (3.10) para dar:

$$\dot{p}_d = \ddot{\phi}_d + c_0 \cdot e_1 + c_1 \cdot (-c_0 \cdot e_0 - c_1 \cdot e_1 + e_2) \quad (3.12)$$

Al sustituir las ecuaciones (3.1), (3.11) y (3.12) en la ecuación (3.8) se obtiene:

$$-e_1 - c_2 \cdot e_2 = \ddot{\phi}_d + c_0 \cdot e_1 - c_0 \cdot c_1 \cdot e_0 - c_1^2 \cdot e_1 + c_1 \cdot e_2 - \left( \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{1}{I_x} \cdot L \right)$$

de donde se puede despejar  $L$  para obtener:

$$L = I_x \left[ (1 + c_0 - c_1^2) e_1 + (c_1 + c_2) e_2 - c_0 \cdot c_1 \cdot e_0 + \ddot{\phi}_d - \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\theta} \dot{\psi} \right] \quad (3.13)$$

Para la implementación de la ley de control en el modelo es preferible sustituir la variable  $e_2$ . Para ello se sustituye la ecuación (3.6) en (3.7):

$$e_2 = (\dot{\phi}_d + c_0 \cdot e_0 + c_1 \cdot e_1) - \dot{\phi} \quad (3.14)$$

Finalmente, al introducir 3.14 en 3.13 se obtiene:

$$L = I_x \left[ (1 + c_0 - c_1^2) e_1 + (c_1 + c_2) (\dot{\phi}_d - \dot{\phi} + c_0 \cdot e_0 + c_1 \cdot e_1) - c_0 \cdot c_1 \cdot e_0 + \ddot{\phi}_d - \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\theta} \dot{\psi} \right]$$

que después de ordenar toma la forma final:

$$L = I_x \left[ (1 + c_0 + c_1 \cdot c_2) e_1 + c_0 \cdot c_2 \cdot e_0 + (c_1 + c_2) (\dot{\phi}_d - \dot{\phi}) + \ddot{\phi}_d - \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\theta} \dot{\psi} \right]$$

Se puede observar que la ecuación anterior presenta una forma similar a un PID, donde se podrían identificar los siguientes parámetros equivalentes:

$$K_{p,eq} = 1 + c_0 + c_1 \cdot c_2 \quad \text{parámetro proporcional equivalente}$$

$$K_{i,eq} = c_0 \cdot c_2 \quad \text{parámetro integral equivalente}$$

$$K_{d,eq} = c_1 + c_2 \quad \text{parámetro derivativo equivalente}$$

Esta similitud se explota en la siguiente propuesta de controlador, donde se combina este control, “integral backstepping”, con el anterior, PID difuso.

Las expresiones equivalentes para los otros ejes son las siguientes:

$$M = I_y \left[ (1 + c_0 + c_1 \cdot c_2) e_1 + c_0 \cdot c_2 \cdot e_0 + (c_1 + c_2)(\dot{\theta}_d - \dot{\theta}) + \ddot{\theta}_d - \frac{I_z - I_x}{I_y} \dot{\phi} \dot{\psi} \right]$$

$$N = I_z \left[ (1 + c_0 + c_1 \cdot c_2) e_1 + c_0 \cdot c_2 \cdot e_0 + (c_1 + c_2)(\dot{\psi}_d - \dot{\psi}) + \ddot{\psi}_d \right]$$

Cada eje emplea sus propios parámetros ( $c_0, c_1, c_2$ ) y errores correspondientes. Se puede ver el caso de eje de guiñada ( $\psi$ ) se ha omitido el término de velocidades cruzadas,  $\frac{I_x - I_y}{I_z} \dot{\phi} \dot{\theta}$ , ya que por la simetría del problema  $I_x = I_y$ .

En la Figura 3-10 se muestra la implementación de este controlador en Simulink.

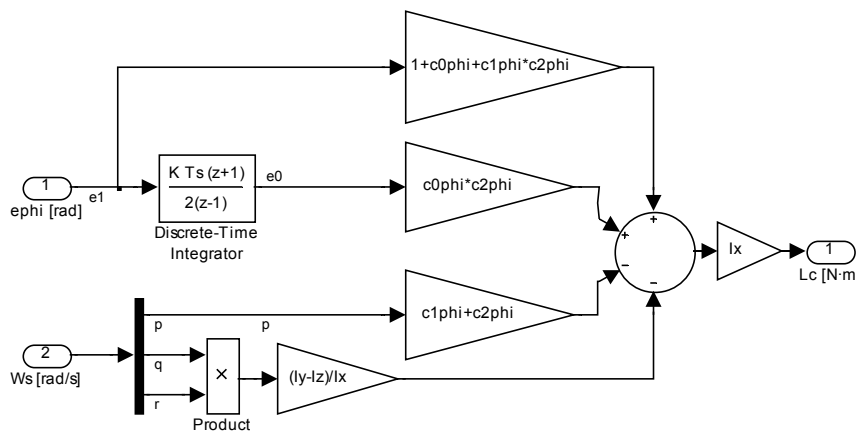


Figura 3-10 Implementación del control “integral backstepping” en Simulink

Los valores de ajuste se presentan en la siguiente tabla. El método de ajuste empleado está basado en algoritmos evolutivos que se presentan en la §3.2.5.

Parámetro	Valor	Unidades	Descripción
$c_{0\phi} = c_{0\theta}$	51.1	$1/s^2$	Parámetro control 0, ejes $\phi$ y $\theta$
$c_{1\phi} = c_{1\theta}$	17.2	$1/s$	Parámetro control 1, ejes $\phi$ y $\theta$
$c_{2\phi} = c_{2\theta}$	1.90	$1/s$	Parámetro control 2, ejes $\phi$ y $\theta$
$c_{0\psi}$	47.2	$1/s^2$	Parámetro control 0, eje $\psi$
$c_{1\psi}$	4.66	$1/s$	Parámetro control 1, eje $\psi$
$c_{2\psi}$	1.51	$1/s$	Parámetro control 2, eje $\psi$

Tabla 3-3 Parámetros ajuste “integral backstepping”

### 3.2.4 Control “integral backstepping” difuso

A continuación se presenta una estrategia de control que combina las ideas de los dos controles anteriores: PID difuso e “integral backstepping”. La idea es añadir el efecto no lineal del PID difuso antes de aplicar las acciones proporcional e integral. Las ganancias y los términos no lineales del control “integral backstepping” se mantienen. El resultado es el control presentado en la Figura 3-11. En total es necesario ajustar seis parámetros (igual que el caso del PID difuso): ( $s, x_1, x_1, c_0, c_1, c_2$ ).

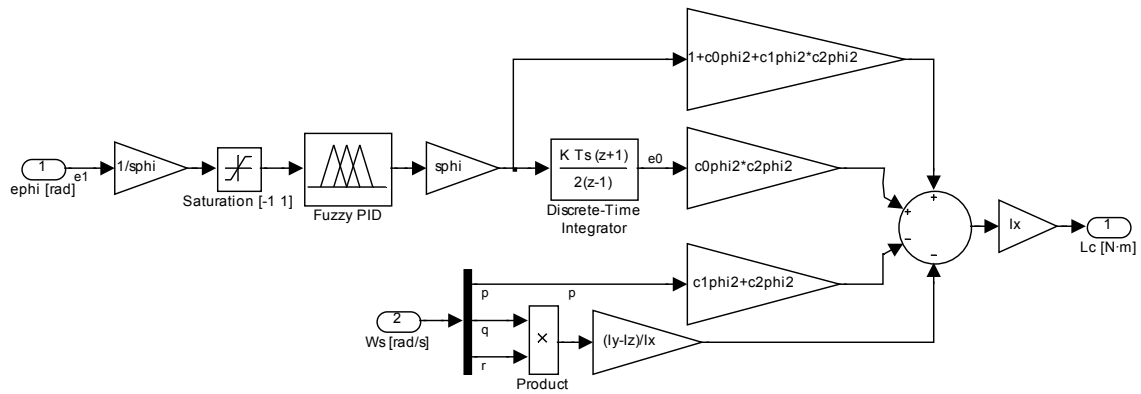


Figura 3-11 Implementación del control “integral backstepping” difuso en Simulink

Los valores de ajuste se presentan en la siguiente tabla. El método de ajuste empleado está basado en algoritmos evolutivos que se presentan en la §3.2.5.

Parámetro	Valor	Unidades	Descripción
$s_\phi = s_\theta$	30	deg	Escalón para la normalización, ejes $\phi$ y $\theta$
$x_{1\phi} = x_{1\theta}$	0.321	-	Parámetro 1 de las funciones miembro, ejes $\phi$ y $\theta$
$x_{2\phi} = x_{2\theta}$	0.420	-	Parámetro 2 de las funciones miembro, ejes $\phi$ y $\theta$
$c_{0\phi} = c_{0\theta}$	68.0	$1/s^2$	Parámetro control 0, ejes $\phi$ y $\theta$
$c_{1\phi} = c_{1\theta}$	15.1	$1/s$	Parámetro control 1, ejes $\phi$ y $\theta$
$c_{2\phi} = c_{2\theta}$	1.50	$1/s$	Parámetro control 2, ejes $\phi$ y $\theta$
$s_\psi$	45	deg	Escalón para la normalización, eje $\psi$
$x_{1\psi}$	0.463	-	Parámetro 1 de las funciones miembro, eje $\psi$
$x_{2\psi}$	0.375	-	Parámetro 2 de las funciones miembro, eje $\psi$
$c_{0\psi}$	72.8	$1/s^2$	Parámetro control 0, eje $\psi$
$c_{1\psi}$	3.99	$1/s$	Parámetro control 1, eje $\psi$
$c_{2\psi}$	1.25	$1/s$	Parámetro control 2, eje $\psi$

Tabla 3-4 Parámetros ajuste “integral backstepping” difuso

### 3.2.5 Ajuste mediante algoritmos evolutivos

El ajuste óptimo del control consiste en la búsqueda de los parámetros que mejoran las prestaciones del sistema de acuerdo a unos criterios deseados. Si se denomina  $J_T$  al índice de prestaciones globales, su valor tendrá típicamente una dependencia no lineal con respecto a los parámetros de ajuste. La descripción matemática del problema de optimización es la siguiente:

Minimizar la función:

$$J_T(\text{parametros}) = \sum_{i=1}^m w_i \cdot J_i(\text{parametros})$$

sujeta a las restricciones:

$$G(\text{parametros}) \leq 0$$

Es decir, el índice de prestaciones globales ( $J_T$ ) se define como una suma ponderada ( $w_i$ ) de las  $m$ -prestaciones individuales ( $J_i$ ). En este trabajo se han empleado  $m=4$  prestaciones individuales:

$$J_T = w_{e1} \cdot ISE_1 + w_{t1} \cdot IST_1 + w_{e2} \cdot ISE_2 + w_{t2} \cdot IST_2,$$

que se calculan en una simulación de 10 segundos separada en dos fases. La primera fase se corresponde con la corrección de un error inicial durante los primeros 5 segundos y la segunda fase se corresponde con el rechazo a una perturbación tipo escalón a partir del segundo 5.

Los índices empleados son:

$ISE_1$  es la integral del error cuadrático en la fase 1, de 0 a 5 segundos

$IST_1$  es la integral del par comandado en la fase 1, de 0 a 5 segundos

$ISE_2$  es la integral del error cuadrático en las fase 2, de 5 a 10 segundos

$IST_2$  es la integral del par comandado en la fase 2, de 5 a 10 segundos

y los pesos empleados son:

$$w_{e1} = 1; w_{t1} = 10; w_{e2} = 2; w_{t2} = 20$$

El error inicial en la fase 1 es:

$$\phi_0 = 30^\circ$$

$$\theta_0 = 30^\circ$$

$$\psi_0 = 30^\circ$$

Y la perturbación introducida en la segunda fase tiene el siguiente valor:

$$L_d = 0.05Nm$$

$$M_d = 0.05Nm$$

$$N_d = 0.05Nm$$

De tal forma que el mismo caso de simulación permite evaluar la respuesta a un escalón (fase 1), y el rechazo de perturbaciones (fase 2).

La optimización del problema se ha resuelto mediante la función *patternsearch()* de Matlab, pues ofrece buenos resultados con un bajo coste computacional. Este algoritmo se enmarca dentro de las *estrategias de evolución*, en particular del tipo  $(\mu+\lambda)$ -ES [7], donde  $\mu$  representa el tamaño de la población y  $\lambda$ , el tamaño de la descendencia antes de la selección. En este tipo de algoritmos la selección se realiza entre padres y descendencia. Métodos muy similares se pueden encontrar en la literatura de control clásica, por ejemplo en [30].

La función *patternsearch()* emplea una población que contiene un solo individuo ( $\mu=1$ ) y una descendencia de tamaño igual al doble del número de parámetros ( $\lambda=2N$ ). El algoritmo comienza con un punto inicial  $x_0$  introducido por el usuario. En la primera iteración realiza una búsqueda en el entorno del punto a una distancia igual a 1 (*mesh*). El algoritmo evalúa los  $2N$  nuevos puntos uno a uno en la fase *poll*. Si detecta

un valor menor al del punto actual, coge el punto correspondiente como nuevo punto de búsqueda, y a continuación multiplica por dos la distancia de búsqueda para la siguiente iteración. En cambio, si no detecta ningún valor menor al actual, mantiene el punto actual de búsqueda y divide la distancia por 2. El algoritmo se detiene cuando la distancia de búsqueda se reduce por debajo de un cierto valor de tolerancia. En la Figura 3-12 se muestra el flujograma del algoritmo.

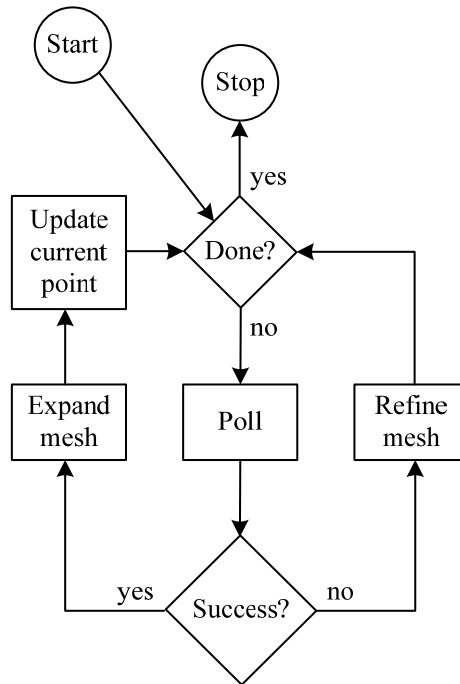


Figura 3-12 Algoritmo de optimización *patternsearch()*

En las siguientes figuras se ilustra el funcionamiento del algoritmo para el caso del PID lineal. Como se puede ver en la Figura 3-13, a medida que van avanzando las iteraciones, se va reduciendo el valor de la función de ajuste. En el caso del PID lineal el control posee únicamente tres parámetros ( $K_P$ ,  $K_I$ ,  $K_D$ ), por tanto la evolución de los parámetros se puede visualizar en el diagrama tridimensional de la figura Figura 3-14. Se puede ver que los parámetros evolucionan dando saltos en las direcciones paralelas a los ejes. A medida que algoritmo avanza el tamaño de la rejilla, en este caso tridimensional, se va reduciendo. La Figura 3-15 muestra la evolución de los cuatro índices individuales [ $IST_1$ ,  $IST_2$ ,  $ISE_1$ ,  $ISE_2$ ] en los que se descompone la función de ajuste tras multiplicarlos por sus respectivos pesos [ $w_{t1}$ ,  $w_{t2}$ ,  $w_{e1}$ ,  $w_{e2}$ ].

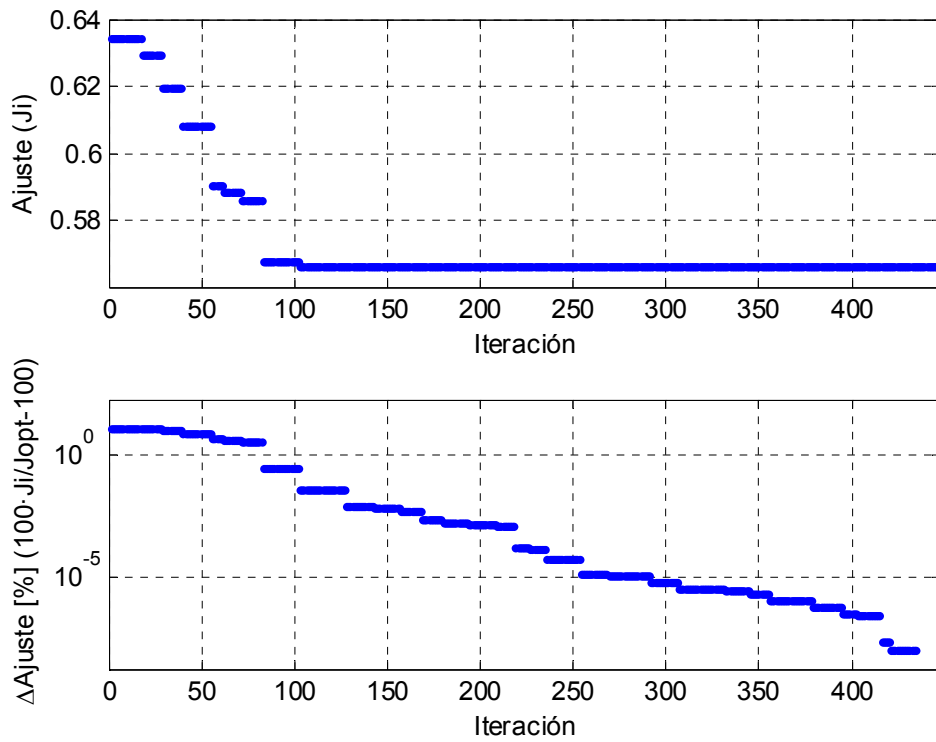


Figura 3-13 En la gráfica superior, evolución del índice de ajuste en cada iteración para el caso del control PID lineal. En la gráfica inferior, incremento del índice de ajuste con respecto al valor óptimo (final) en porcentaje:  $100 \cdot J_i / J_{opt} - 100$ . A partir de la iteración 82 el incremento está por debajo del 1%.

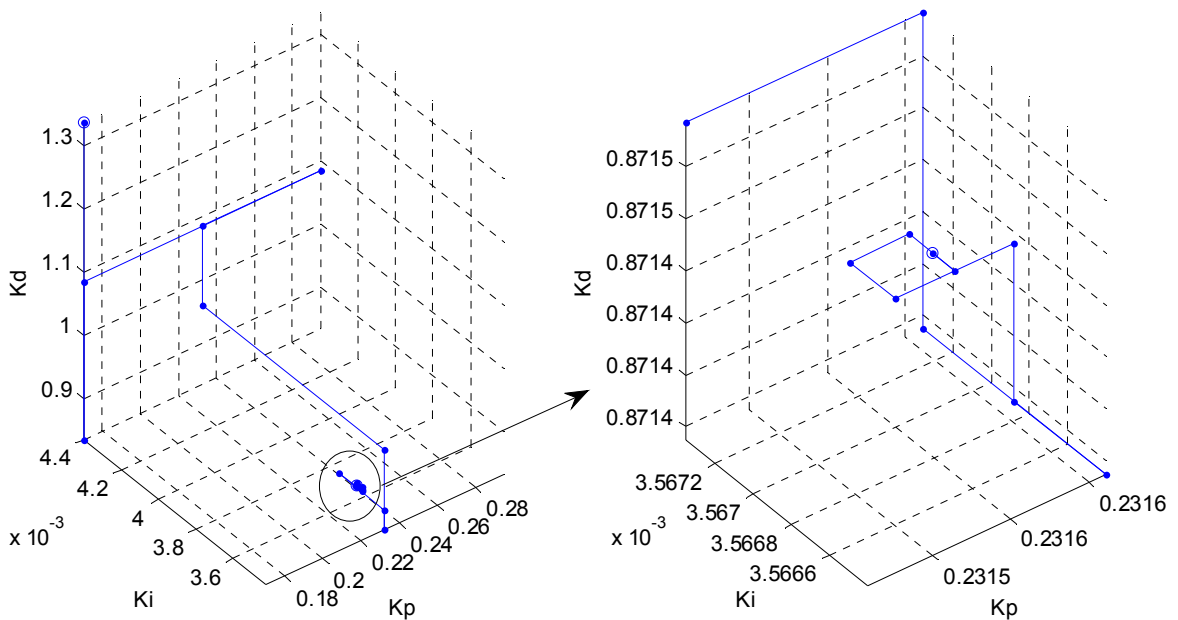


Figura 3-14 Trayectoria de optimización de los parámetros del control PID lineal. A la izquierda, vista general de la trayectoria que comienza arriba a la izquierda y finaliza en el abajo centrado. A la derecha, zoom del final de la trayectoria.

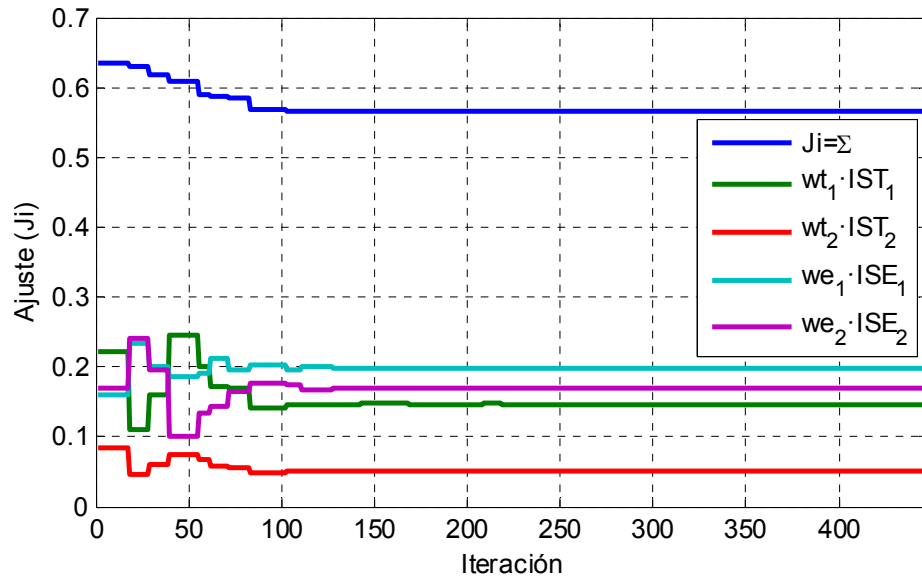
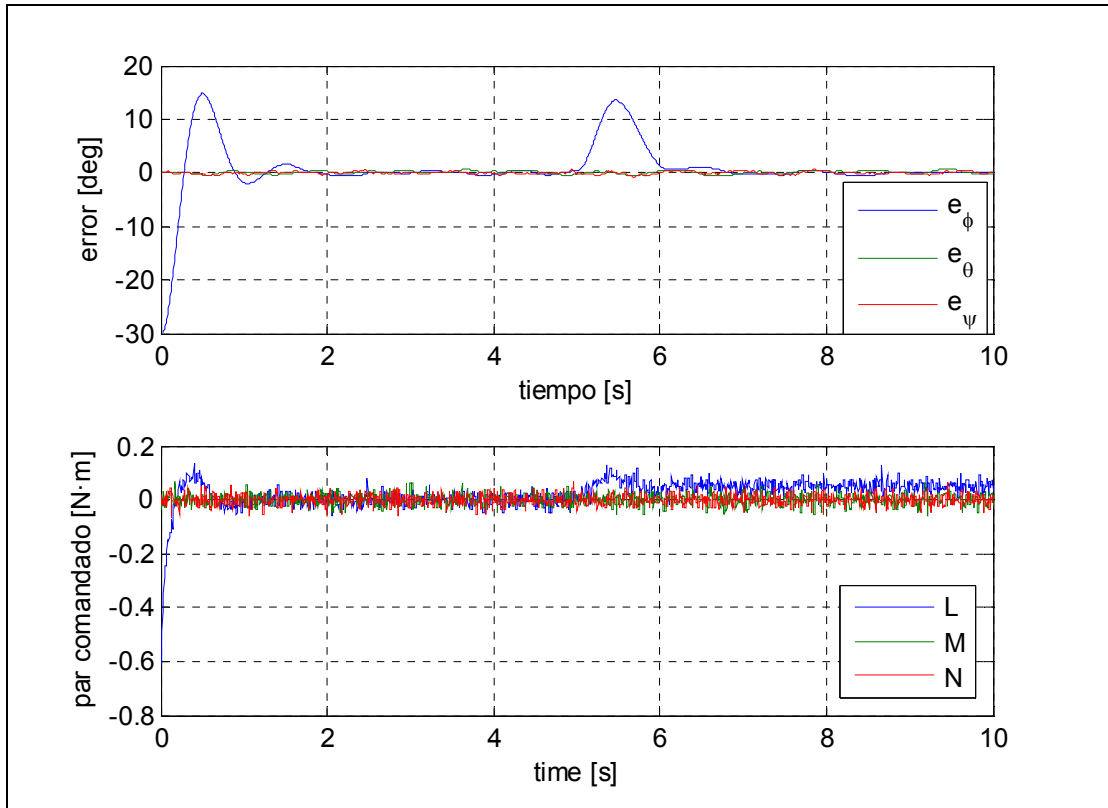


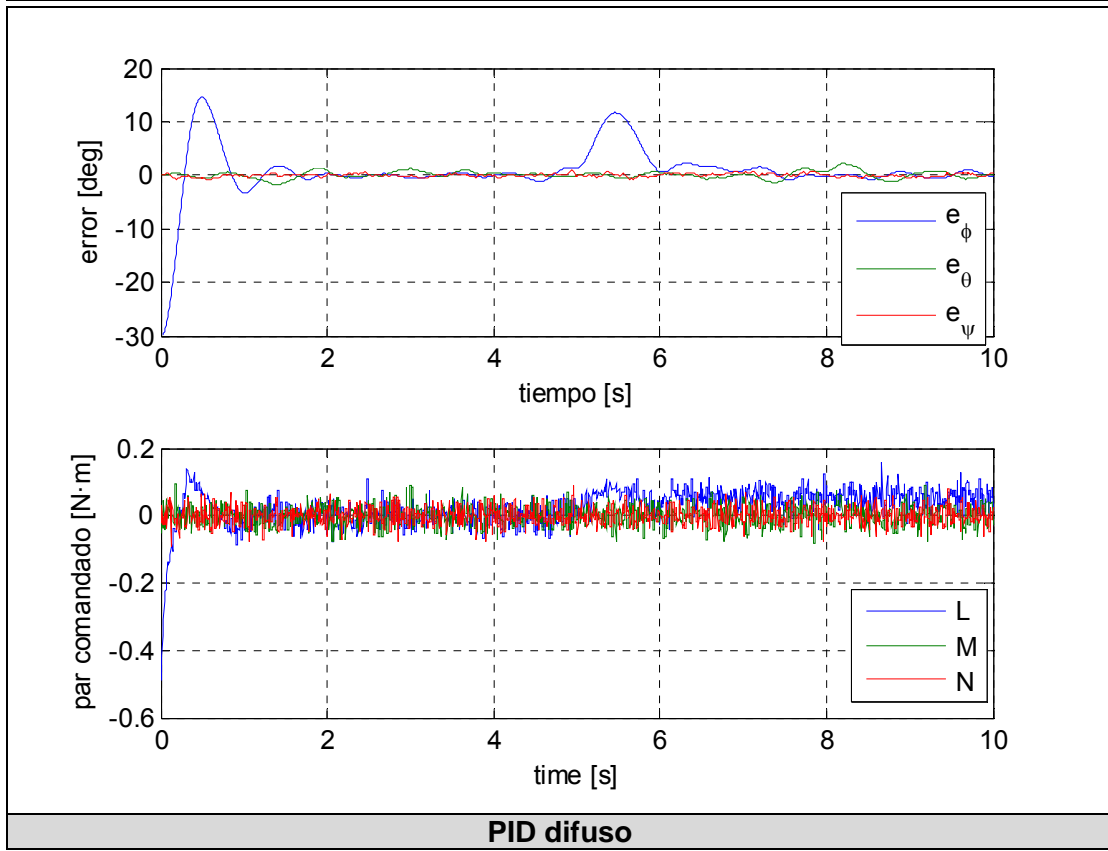
Figura 3-15 Evolución del índice de ajuste en cada iteración y su descomposición en los cuatro subíndices, los cuales se calculan por medio de los índices [IST1, IST2, ISE1 ISE2] multiplicados por sus respectivos pesos [wt1 wt2 we1 we2]

A continuación se muestran los resultados del ajuste para los distintos controles no lineales. Primero se presentan los resultados para el ajuste en los ejes de alabeo y cabeceo, y posteriormente en el eje de guiñada.

La Tabla 3-5 compara gráficamente las prestaciones de los cuatro controladores. Arriba se muestra el error de apuntamiento, y abajo el comando de par para cada uno de los ejes. Se puede ver que inicialmente hay un error de 30 grados que se corrige, y posteriormente, en el segundo cinco, se introduce una perturbación de 0.05Nm que también corrige el control. A simple vista se ve que el control “integral backstepping” da mejores prestaciones que el PID difuso. También se observa que la combinación de ambos, “integral backstepping” difuso, da las mejores prestaciones. Los resultados numéricos, presentados en la Tabla 3-6 y la Figura 3-16, confirman la conclusión anterior.



**PID lineal**



**PID difuso**

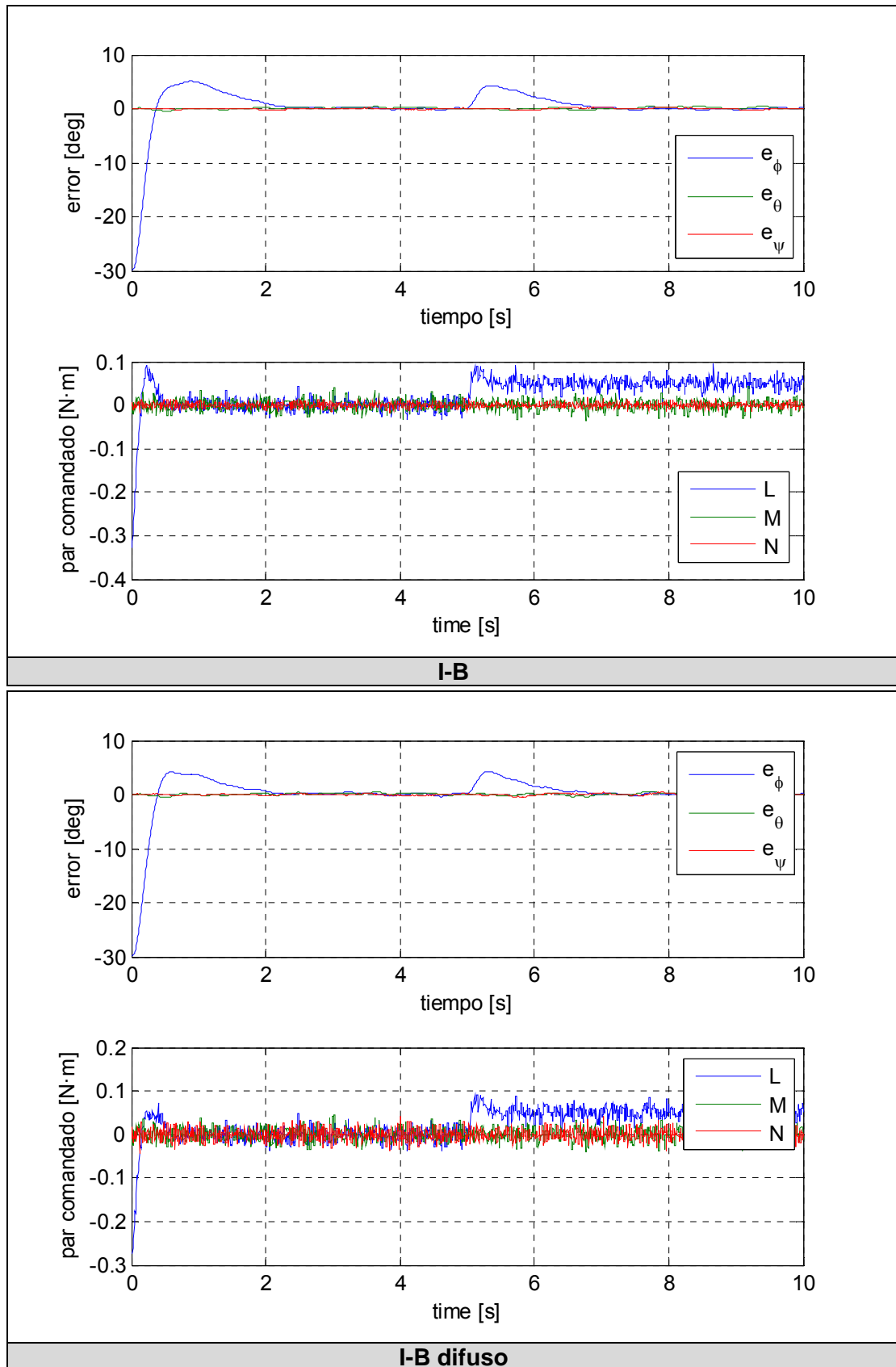


Tabla 3-5 Comparación grafica de las prestaciones para el eje de alabeo

Función	PID lineal	PID difuso	I-B	I-B difuso
$w_{t1} \cdot IST_1$	0.1467	0.1492	0.0654	0.0541
$w_{t2} \cdot IST_2$	0.0507	0.0876	0.0175	0.0238
$w_{e1} \cdot ISE_1$	0.1986	0.2002	0.1637	0.1664
$w_{e2} \cdot ISE_2$	0.1701	0.1373	0.0277	0.0215
$J_T = \sum J_i$	0.5661	0.5742	0.2743	0.2658
$J_T/J_{T,MIN}$	213%	216%	103%	100%

Tabla 3-6 Comparación numérica para el eje de alabeo y cabeceo

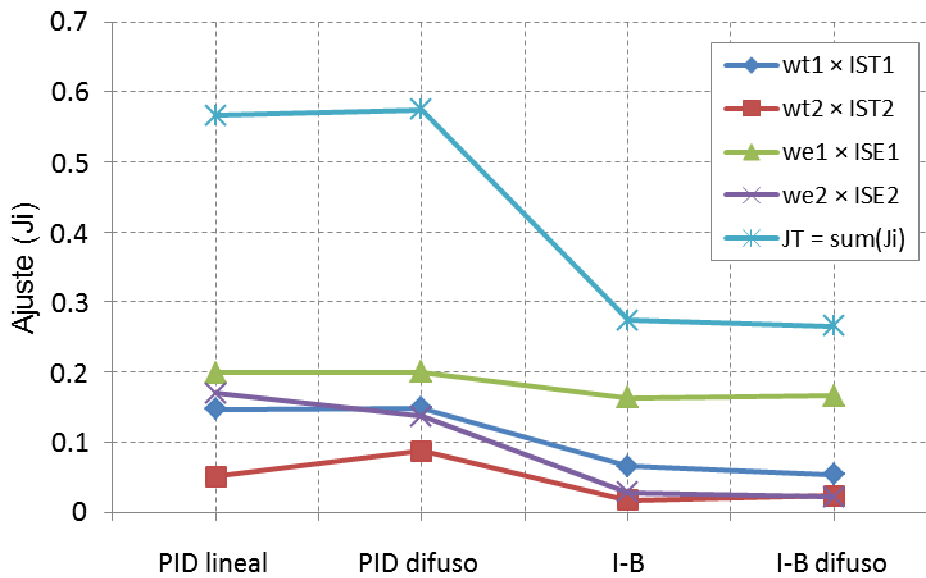
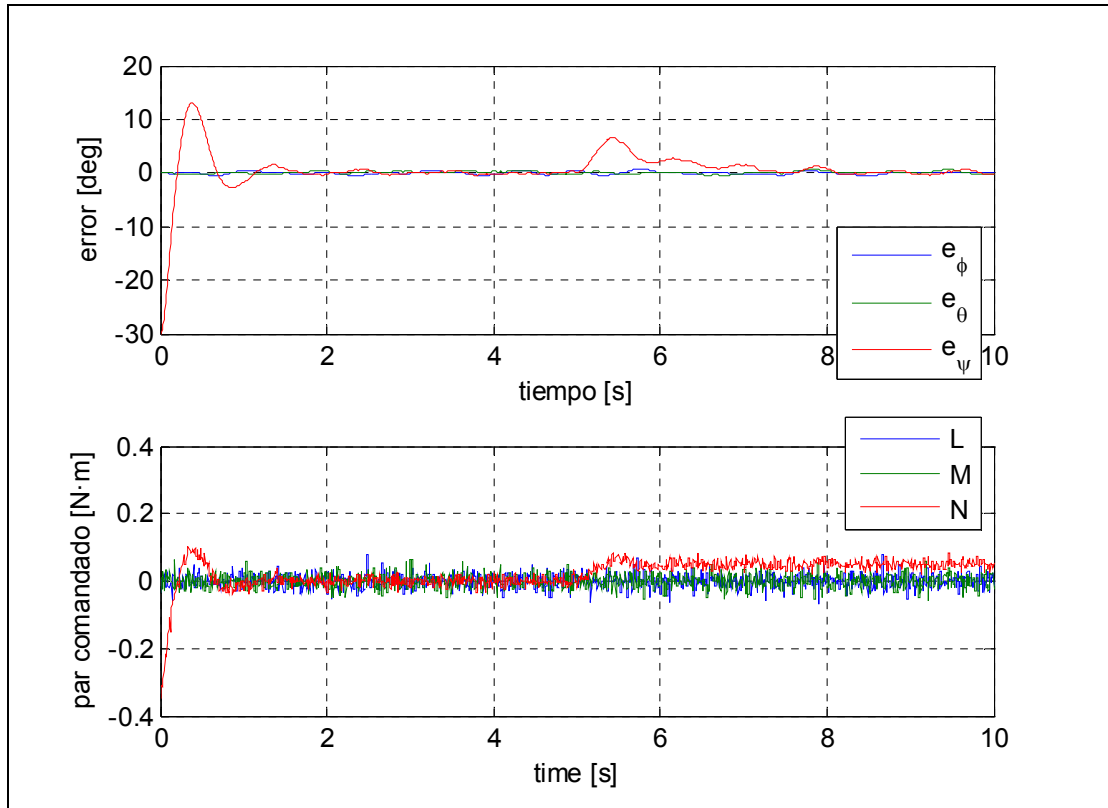
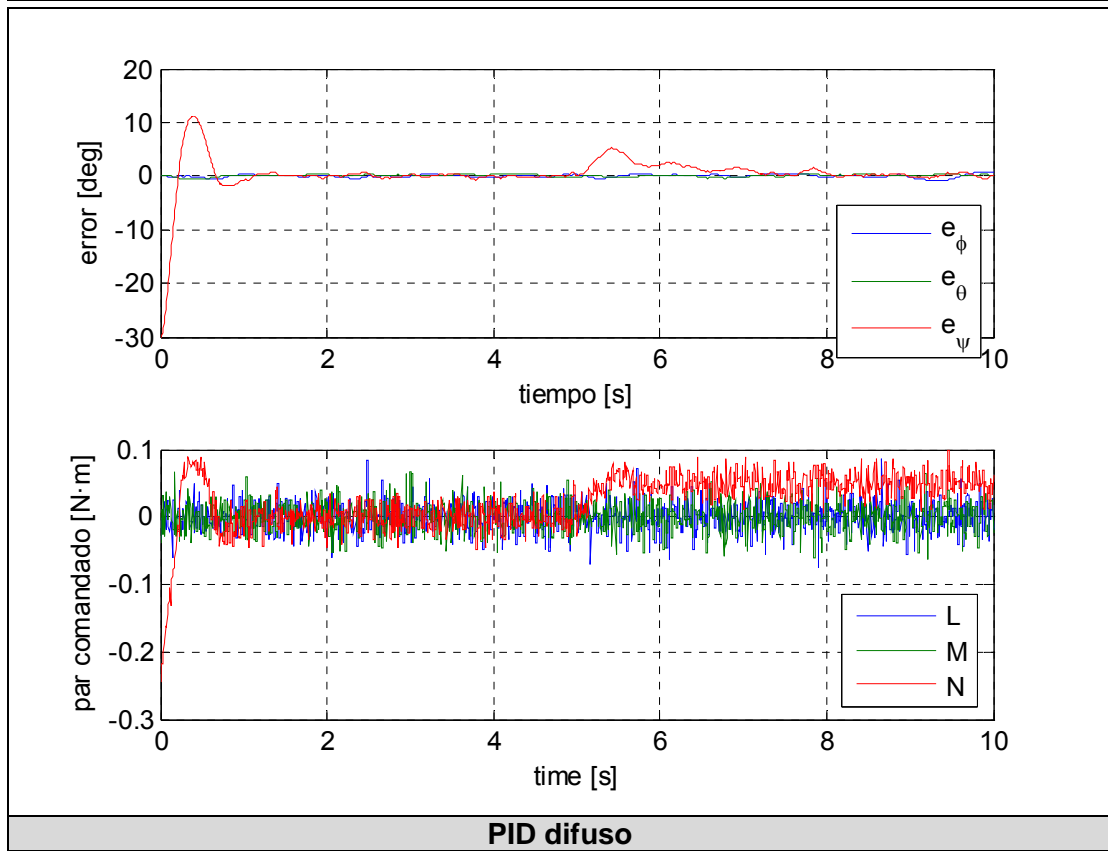


Figura 3-16 Comparación numérica para el eje de alabeo y cabeceo

De forma equivalente, la Tabla 3-7, la Tabla 3-8 y la Figura 3-17 muestran los resultados para el eje de guiñada ( $\psi$ ) de forma gráfica y numérica respectivamente. El resultado cualitativo es semejante al caso anterior: el control “integral backstepping” difuso da las mejores prestaciones.



**PID lineal**



**PID difuso**

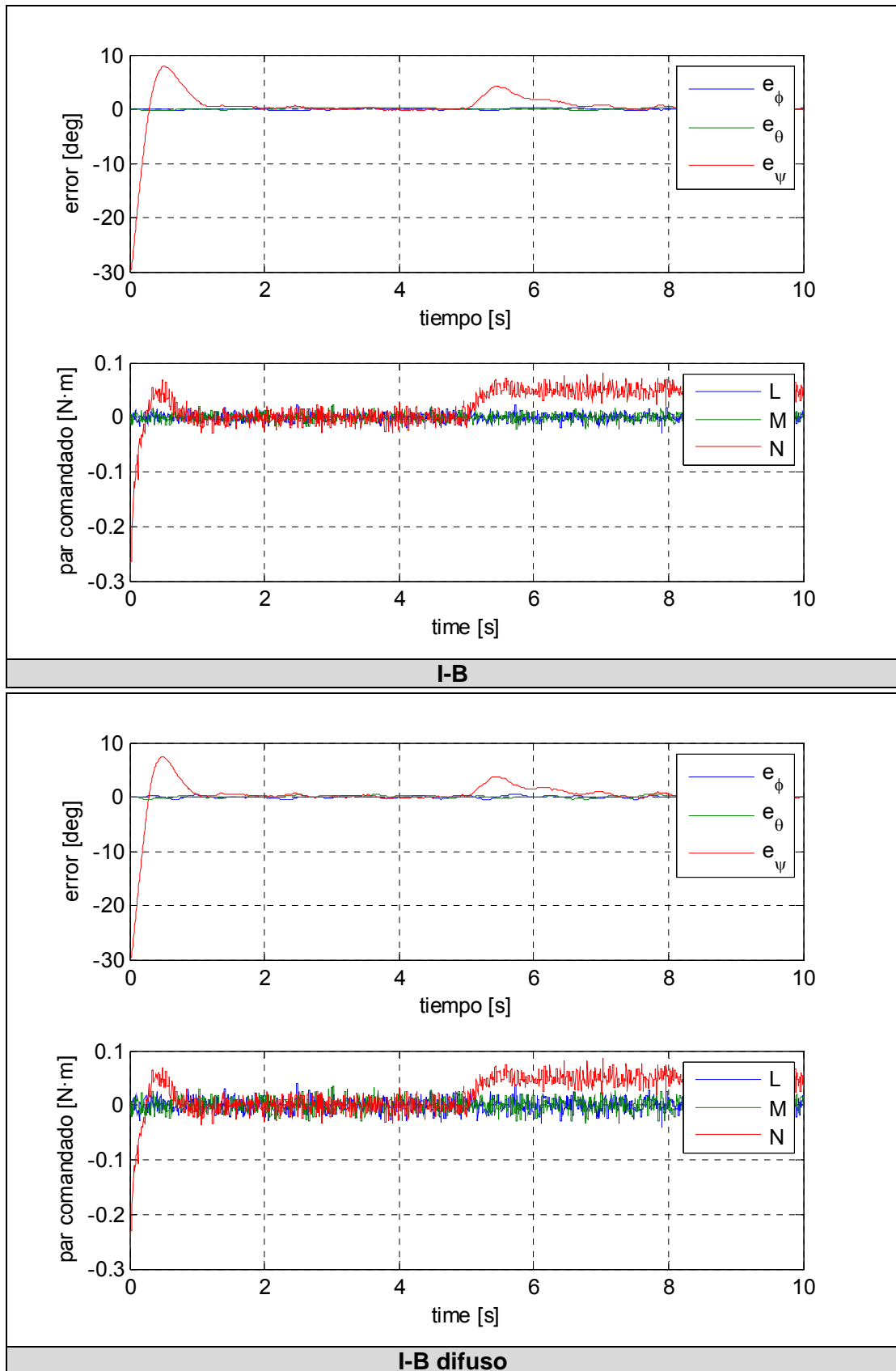


Tabla 3-7 Comparación grafica de las prestaciones para el eje de guiñada

Función	PID lineal	PID difuso	I-B	I-B difuso
$w_{t1} \cdot IST_1$	0.0969	0.0732	0.0474	0.0448
$w_{t2} \cdot IST_2$	0.0187	0.0308	0.0141	0.0177
$w_{e1} \cdot ISE_1$	0.1278	0.1193	0.1227	0.1186
$w_{e2} \cdot ISE_2$	0.0452	0.0309	0.0215	0.0176
$J_T = \sum J_i$	0.2886	0.2541	0.2057	0.1988
$J_T/J_{T,MIN}$	145%	128%	103%	100%

Tabla 3-8 Comparación numérica para el eje de guiñada

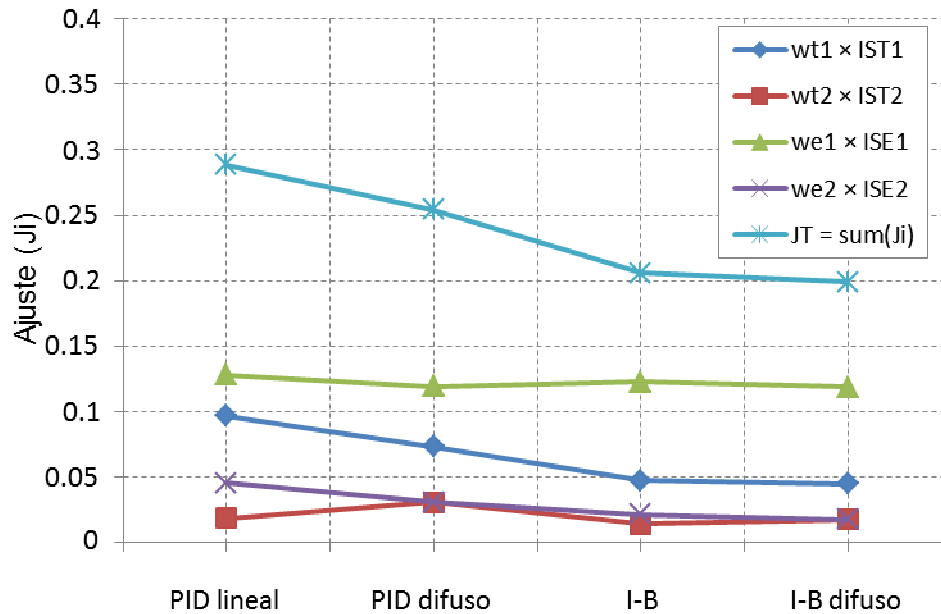


Figura 3-17 Comparación numérica para el eje de guiñada

### 3.3 Control de altitud y posición

En esta subsección se describen los controles de altitud y posición. El control de altitud controla la altura del helicóptero por medio del empuje (T), mientras que el control de posición controla la posición del helicóptero en el plano horizontal por medio de comandos de alabeo y cabeceo, los cuales se envían al control de actitud. Por tanto el control de actitud está anidado dentro del control de posición.

El control de altitud y de posición se ha resuelto mediante un control lineal tipo PID con tiempo de muestreo a 0.01s. Estos controladores poseen una estructura similar al control lineal presentado en §3.2.1, con la diferencia de que los controles de altitud/posición incluyen una saturación y un mecanismo “anti-windup” sencillo. La saturación tiene como objeto limitar la variación de empuje (control de altitud), y los comando de alabeo y cabeceo. La estructura del control se muestra en la Figura 3-18.

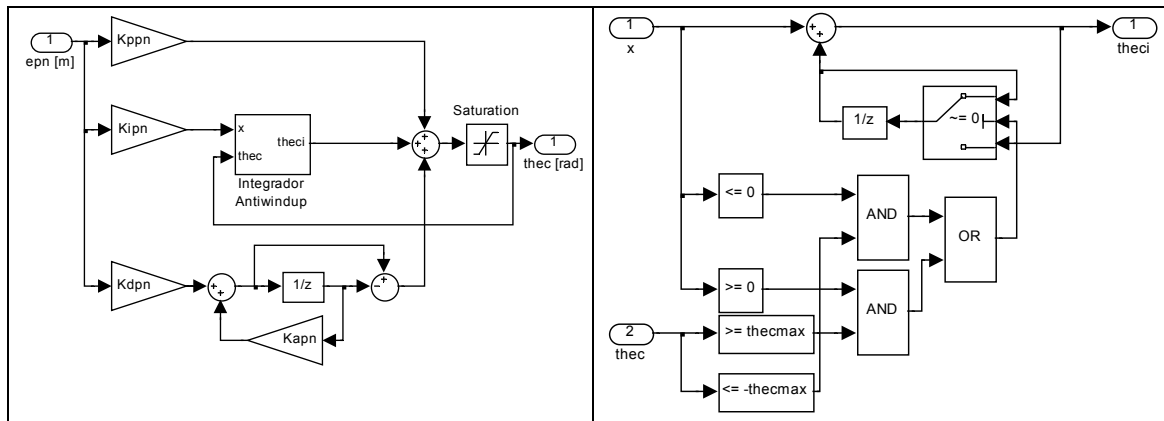


Figura 3-18 Control lineal (PID) con anti-windup

El ajuste del control lineal se realiza por métodos clásicos y empleando las ecuaciones de la planta lineal descrita en la §2.4. Los criterios de diseño han sido:

- Margen de fase > 30° (valor típico de la industria [8]).
- Margen de ganancia > 6dB (valor típico de la industria [8]).
- Ancho de banda > 1rad/s (respuesta dinámica).

El controlador se ajusta mediante los cuatro parámetros: ( $K_p K_I K_D K_a$ ). Es importante observar que, debido a la simetría, el control en la dirección este/oeste y norte/sur es equivalente, por lo que sólo es necesario ajustar una de las dos direcciones, y emplear el mismo ajuste para la otra dirección. Los valores de ajuste se presentan en la siguiente tabla, y las prestaciones para cada eje se presentan en las figuras: Figura 3-19 y Figura 3-20. Se puede ver que se cumplen los requisitos de diseño.

Parámetro	Valor	Unidades	Descripción
$K_{ppe} = K_{ppn}$	0.024	Nm/rad	Parámetro proporcional, ejes $\phi$ y $\theta$
$K_{ipe} = K_{ipn}$	$3.31 \cdot 10^{-5}$	Nm/rad	Parámetro integral, ejes $\phi$ y $\theta$
$K_{dpe} = K_{dpn}$	1.59	Nm/rad	Parámetro derivativo, ejes $\phi$ y $\theta$
$K_{ape} = K_{apn}$	0.8	-	Parámetro de filtrado, ejes $\phi$ y $\theta$
$\phi_{c,sat} = \theta_{c,sat}$	30	deg	Saturación comando actitud
$K_{ppd}$	3.86	Nm/rad	Parámetro proporcional, eje $\psi$
$K_{ipd}$	0.0214	Nm/rad	Parámetro integral, eje $\psi$
$K_{dpd}$	67.5	Nm/rad	Parámetro derivativo, eje $\psi$
$K_{apd}$	0.8	-	Parámetro de filtrado, eje $\psi$
$T_{sat}$	2.94	N	Saturación empuje

Tabla 3-9 Parámetros ajuste control posición y altitud

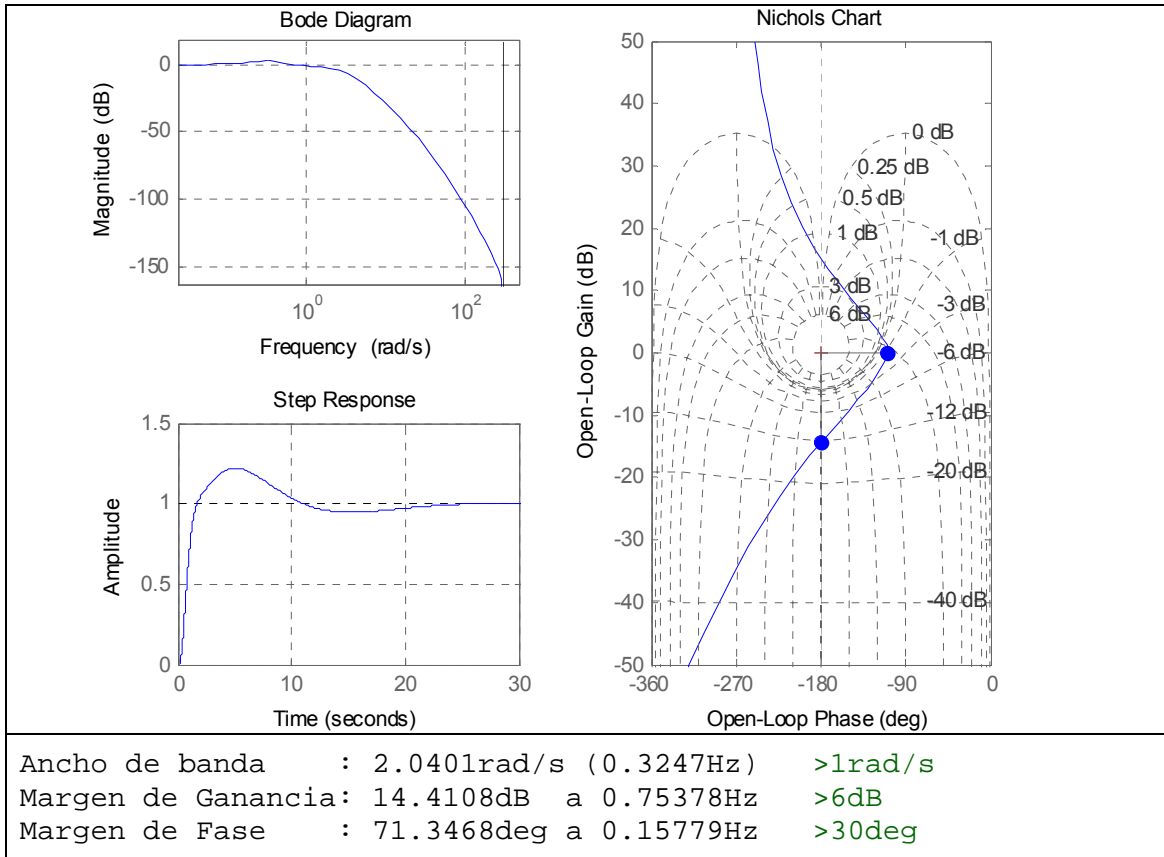


Figura 3-19 Prestaciones del control de posición este (o norte)

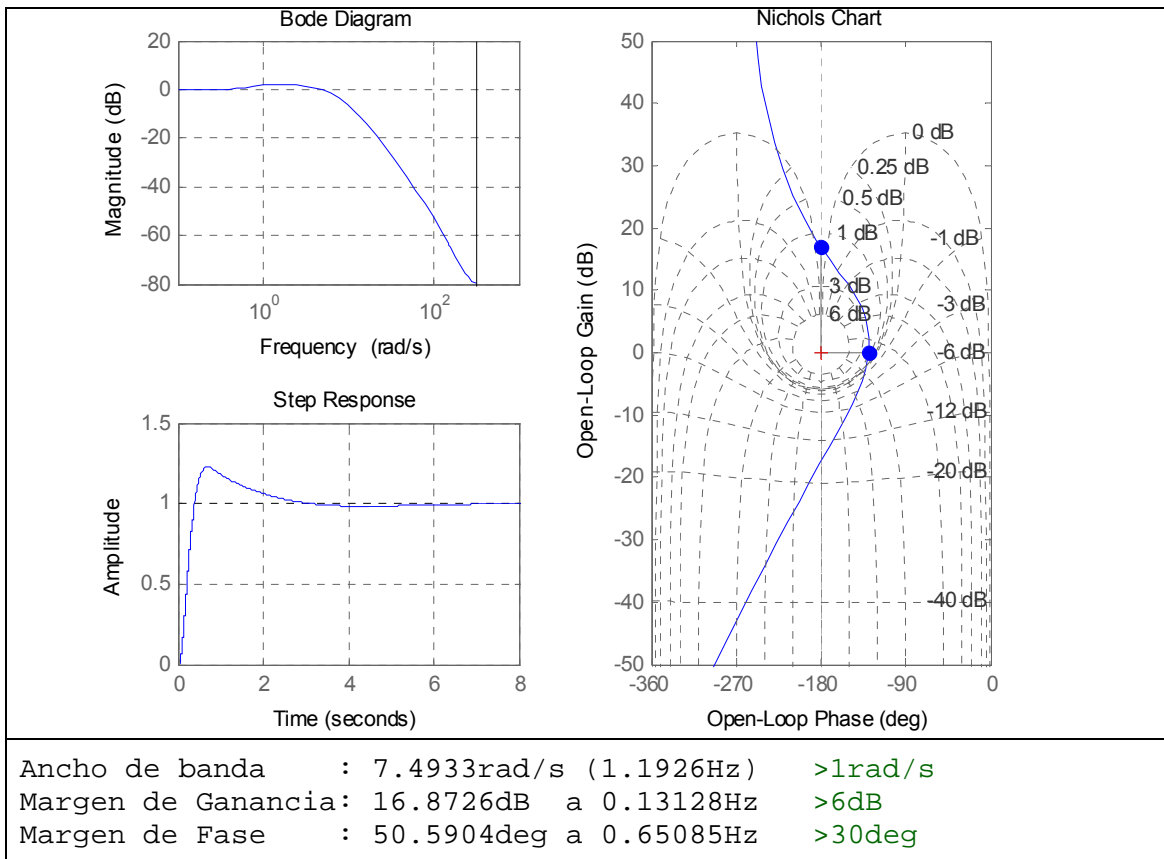


Figura 3-20 Prestaciones del control de altura

## 4 RESULTADOS DE SIMULACIÓN

En esta sección se comparan las prestaciones de los controladores para los modelos lineal y no lineal. Para reducir el número de simulaciones a los casos de interés, se va a comparar el control lineal (PID) con el control “integral backstepping” difuso (que presenta las mejores prestaciones, ver §3.2.5) en tres situaciones: rechazo a perturbaciones, seguimiento de trayectorias y saltos de posición.

### 4.1 Rechazo a perturbaciones

En este caso de simulación el helicóptero realiza un vuelo estático, es decir, recibe el comando de mantener la posición geográfica (0,0,0). En esta situación el helicóptero se somete pares y fuerzas de perturbación en cada uno de los ejes. En las siguientes figuras se muestra como el control es capaz de rechazar estas perturbaciones. Se analizan los siguientes casos:

- Figura 4-1: Control lineal - Modelo lineal
- Figura 4-2: Control lineal - Modelo no lineal
- Figura 4-3: Control no lineal - Modelo lineal
- Figura 4-4: Control no lineal - Modelo no lineal

Las figuras están divididas en 4 subfiguras y muestran la siguiente información:

Posición ESTE en metros: - SENS: medida sensor. - CMD : comando de posición - REAL: posición real Angulo de ALABEO en grados: - SENS: medida sensor. - CMD : comando del control - REAL: ángulo real Momento de ALABEO en Nm: - CMD : comando del control - PERT: perturbación. - REAL: momento motor real	Posición NORTE en metros: - SENS: medida sensor. - CMD : comando de posición - REAL: posición real Angulo de CABECEO en grados: - SENS: medida sensor. - CMD : comando del control - REAL: ángulo real Momento de CABECEO en Nm: - CMD : comando del control - PERT: perturbación. - REAL: momento motor real
Angulo de GUIÑADA en grados: - SENS: medida sensor. - CMD : comando del control - REAL: ángulo real Momento de GUIÑADA en Nm: - CMD : comando del control - PERT: perturbación. - REAL: momento motor real	Posición DESCENSO en metros: > SENS: medida sensor. > CMD : comando de posición > REAL: posición real EMPUJE en N: > CMD : comando del control > PERT: perturbación. > REAL: empuje motor real

Los resultados muestran que todos los controladores son estables y corrigen la perturbación. En el caso del control lineal y modelo no lineal, se puede ver que las perturbaciones de par producen giros elevados que afectan a la altura del helicóptero. Por otro lado, el control no lineal “integral backstepping” difuso presenta mejor rechazo a las perturbación que afectan a la actitud.

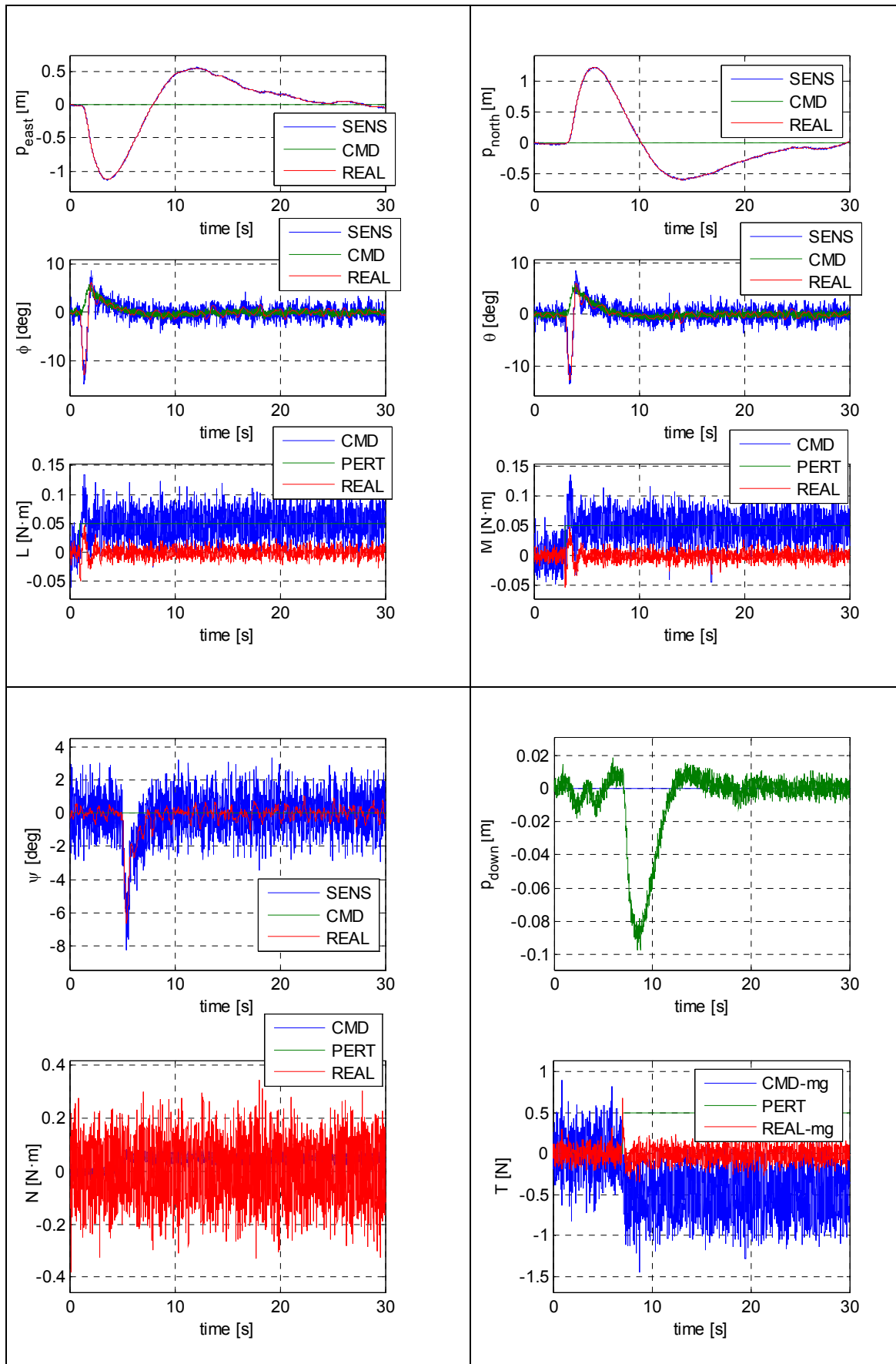


Figura 4-1 Perturbaciones: control lineal con modelo lineal

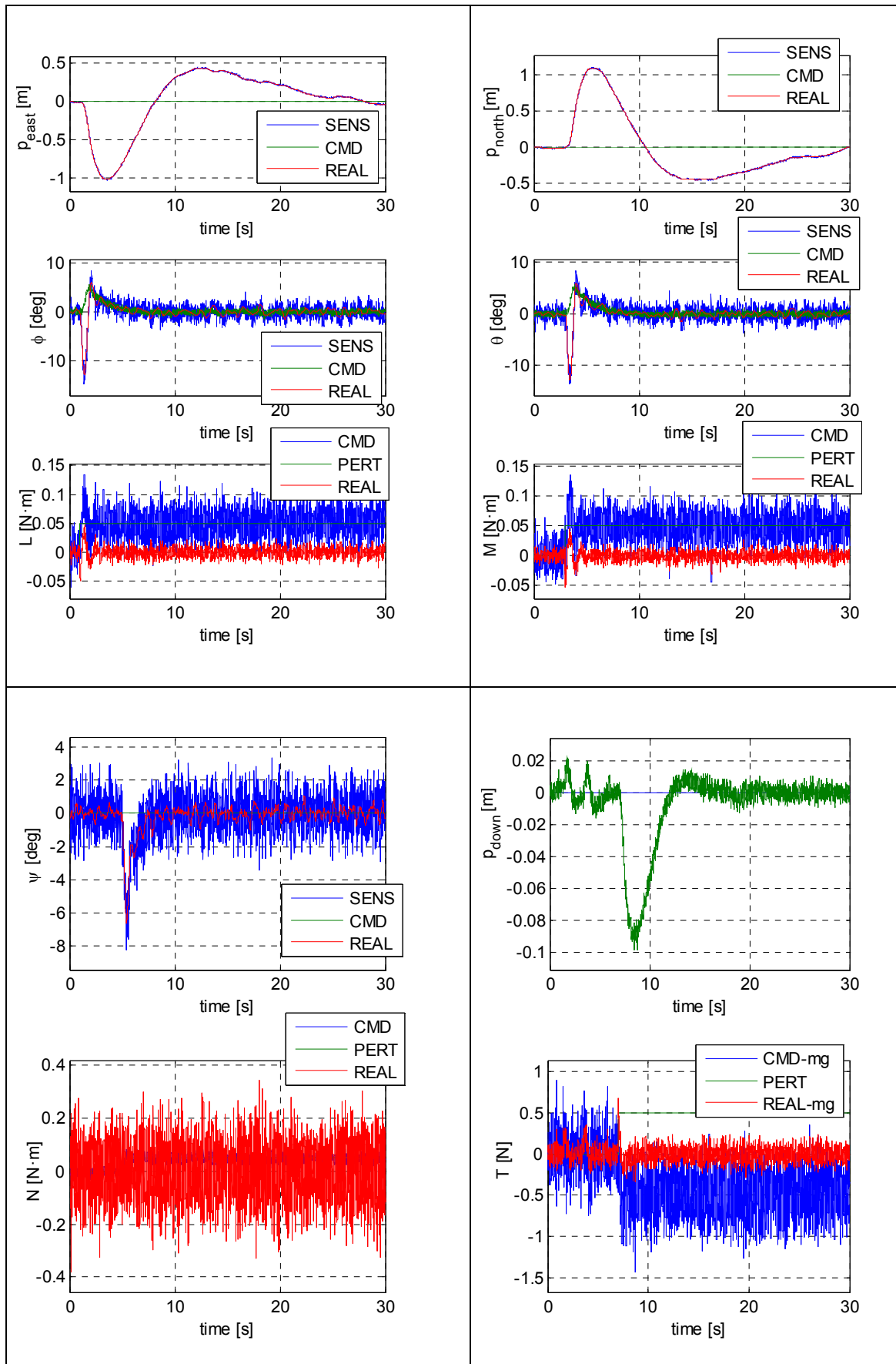


Figura 4-2 Perturbaciones: control lineal con modelo no lineal

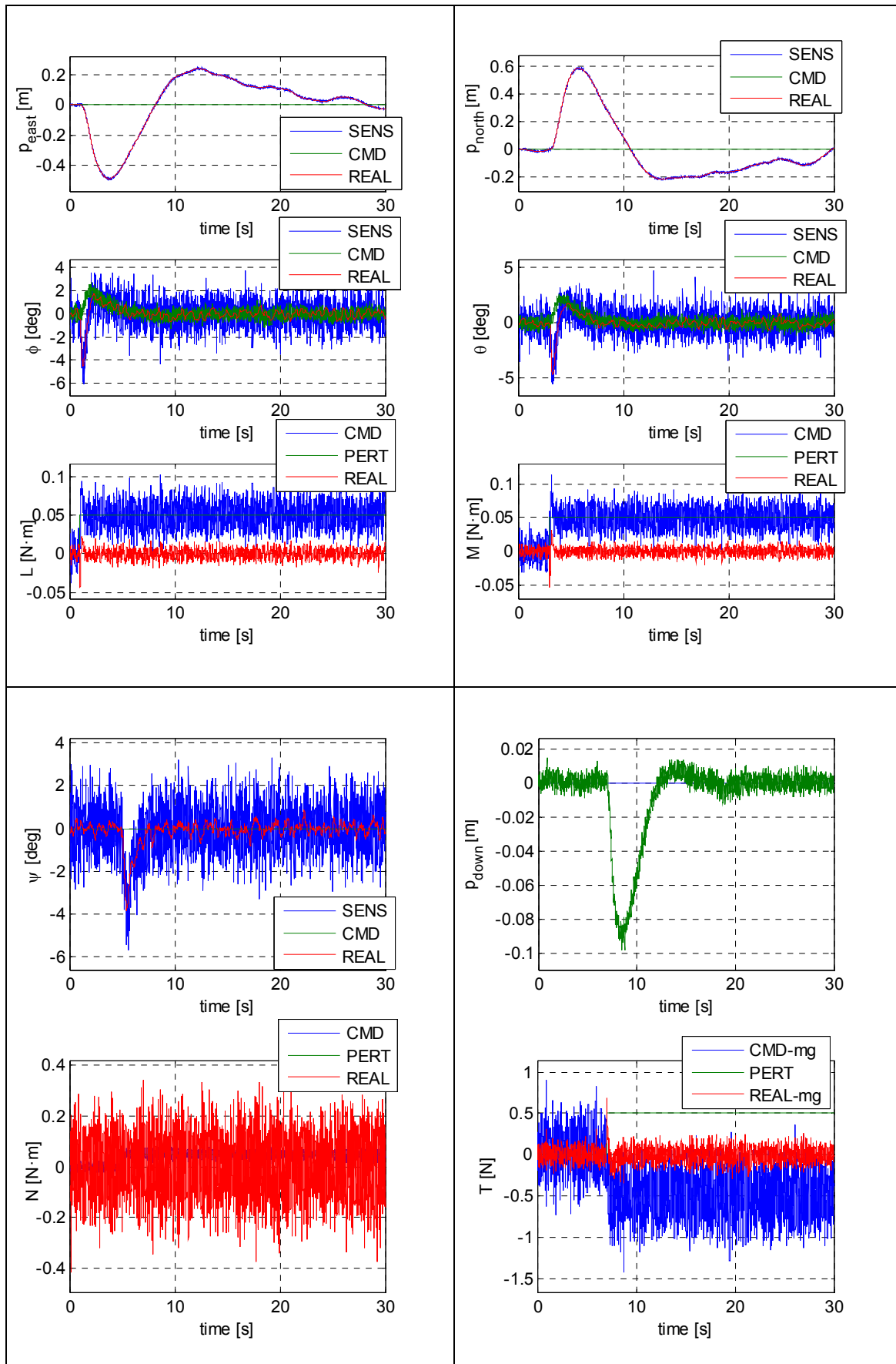


Figura 4-3 Perturbaciones: control no lineal con modelo lineal

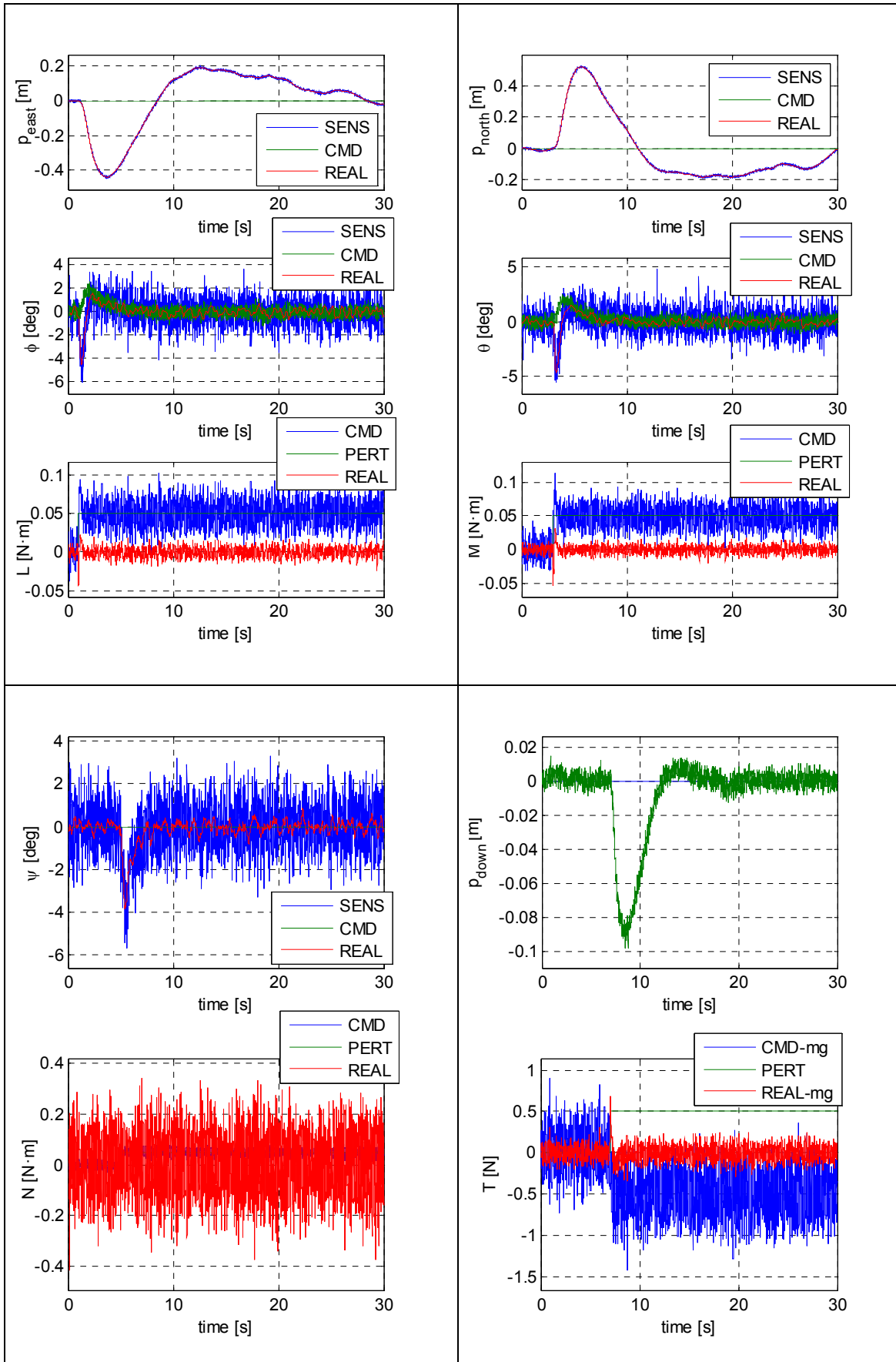


Figura 4-4 Perturbaciones: control no lineal con modelo no lineal

## 4.2 Seguimiento de trayectorias

En este caso de simulación el helicóptero realiza el seguimiento de una trayectoria sencilla: un movimiento a velocidad constante. En este caso el helicóptero no se somete a perturbación, el interés se centra en las prestaciones de seguimiento. Se analizan los siguientes casos:

- Figura 4-5: Control lineal - Modelo lineal
- Figura 4-6: Control lineal - Modelo no lineal
- Figura 4-7: Control no lineal - Modelo lineal
- Figura 4-8: Control no lineal - Modelo no lineal

Las figuras están divididas en 4 subfiguras y muestran la siguiente información:

Posición ESTE en metros: - SENS: medida sensor. - CMD : comando de posición - REAL: posición real Angulo de ALABEO en grados: - SENS: medida sensor. - CMD : comando del control - REAL: ángulo real Momento de ALABEO en Nm: - CMD : comando del control - PERT: perturbación. - REAL: momento motor real	Posición NORTE en metros: - SENS: medida sensor. - CMD : comando de posición - REAL: posición real Angulo de CABECEO en grados: - SENS: medida sensor. - CMD : comando del control - REAL: ángulo real Momento de CABECEO en Nm: - CMD : comando del control - PERT: perturbación. - REAL: momento motor real
Angulo de GUIÑADA en grados: - SENS: medida sensor. - CMD : comando del control - REAL: ángulo real Momento de GUIÑADA en Nm: - CMD : comando del control - PERT: perturbación. - REAL: momento motor real	Posición DESCENSO en metros: > SENS: medida sensor. > CMD : comando de posición > REAL: posición real EMPUJE en N: > CMD : comando del control > PERT: perturbación. > REAL: empuje motor real

Los resultados muestran que todos los casos presentan prestaciones parecidas. Esto se debe fundamentalmente a que el control de posición y de altitud es el mismo para ambos controladores. Notar que la diferencia entre el control lineal y no lineal se localiza únicamente en el control de actitud. La dinámica del control de posición/altitud es lenta, y es la que domina el seguimiento de trayectorias.

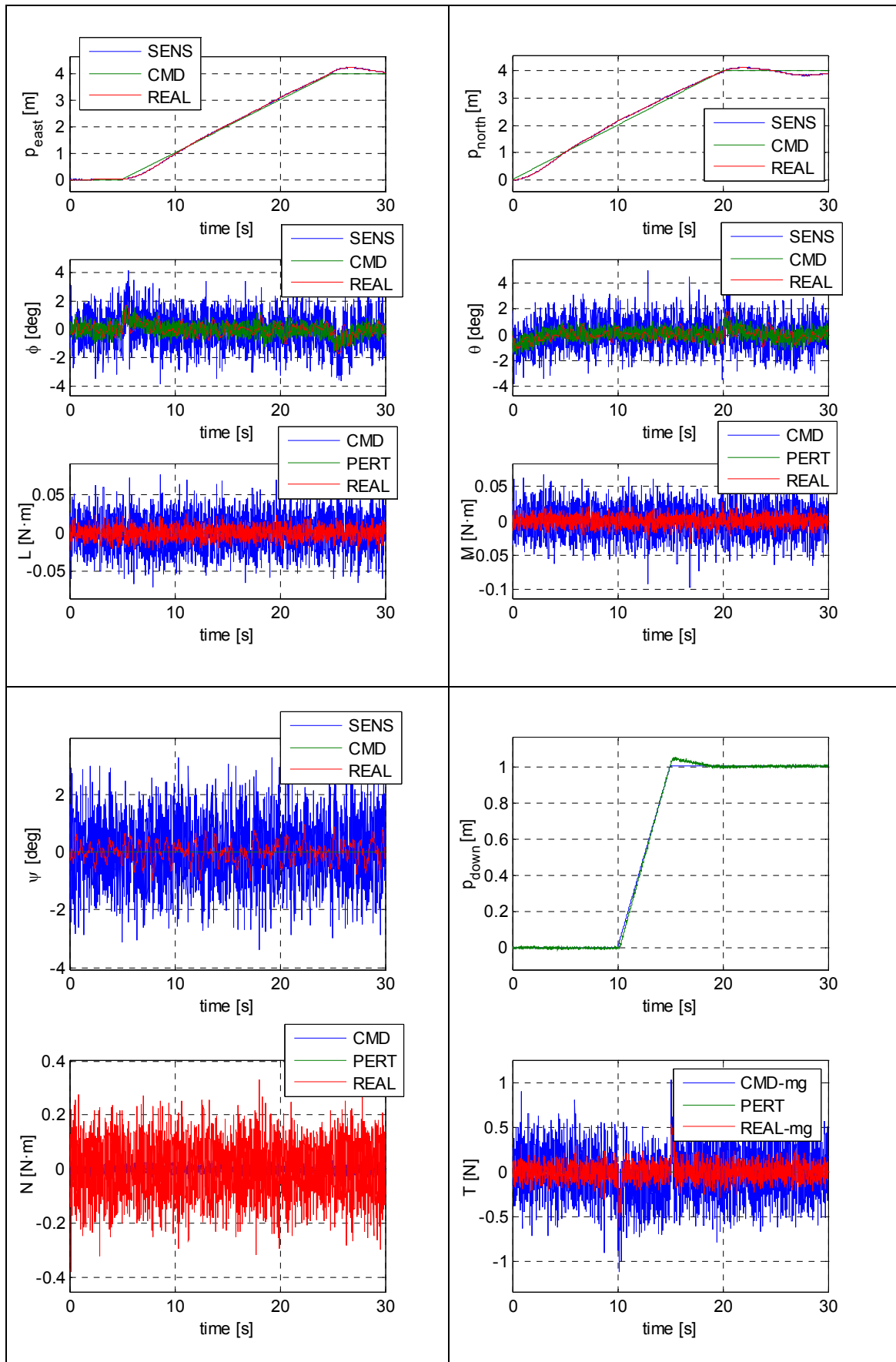


Figura 4-5 Seguimiento trayectorias: control lineal con modelo lineal

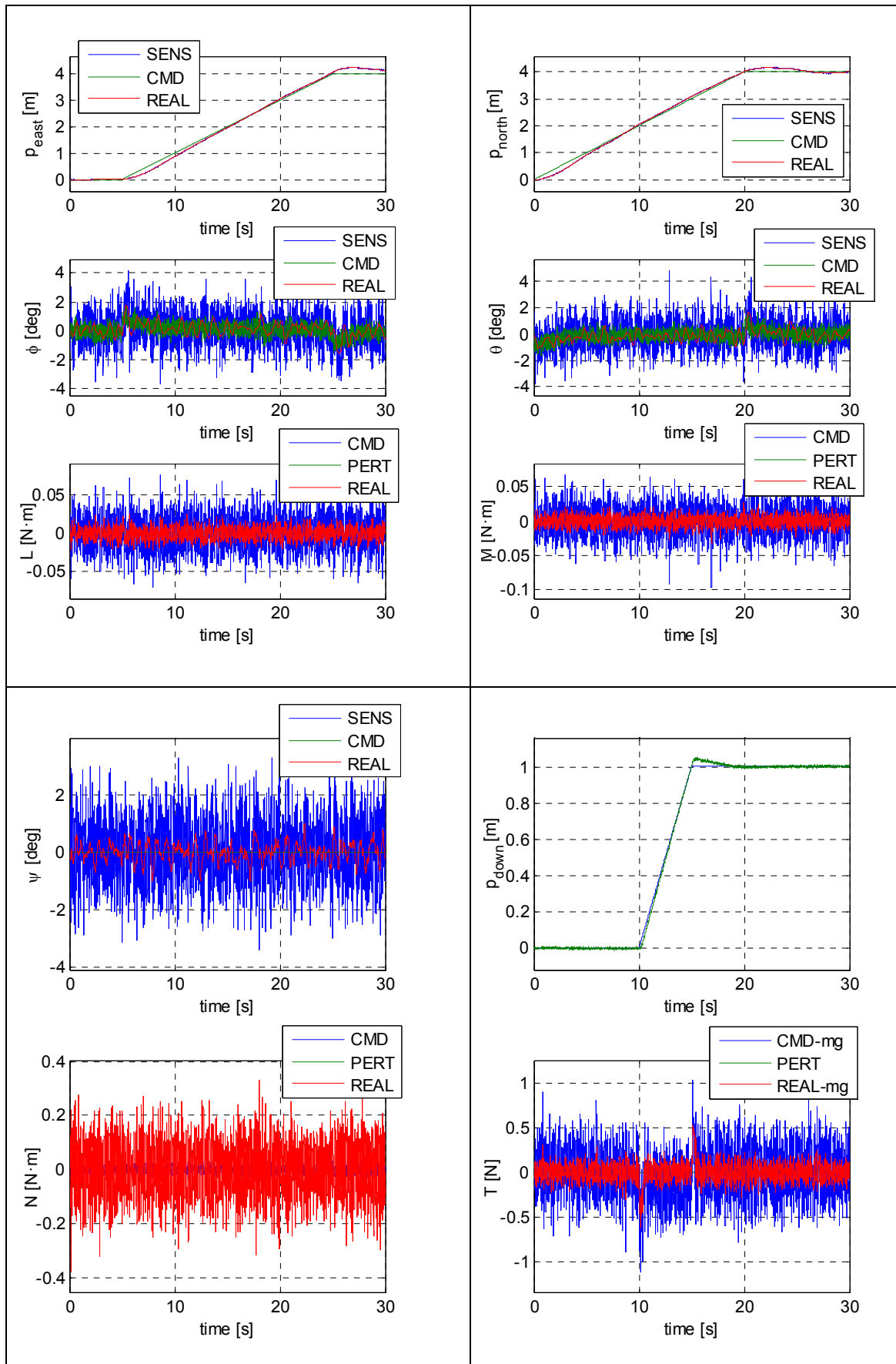


Figura 4-6 Seguimiento trayectorias: control lineal con modelo no lineal

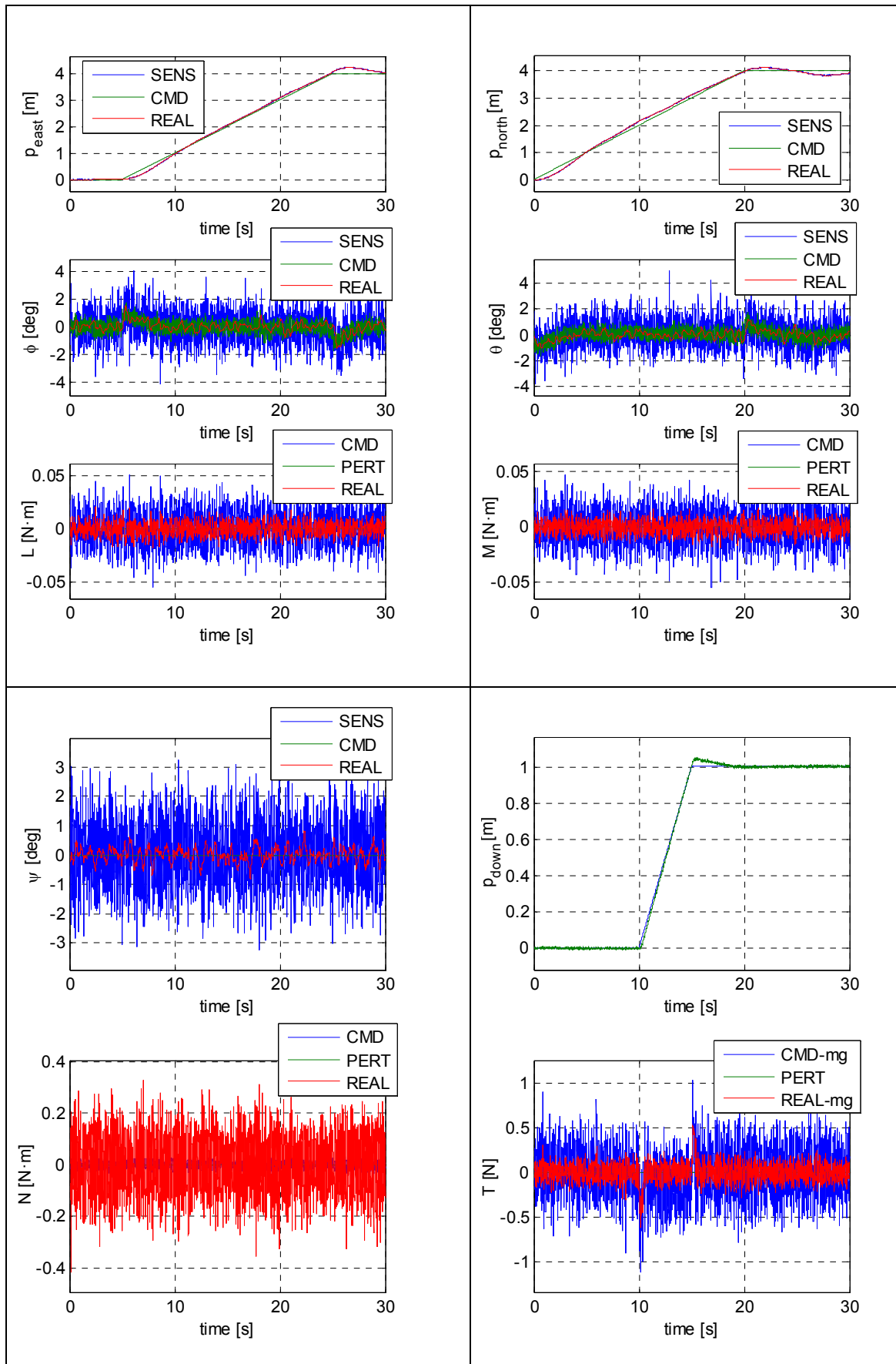


Figura 4-7 Seguimiento trayectorias: control no lineal con modelo lineal

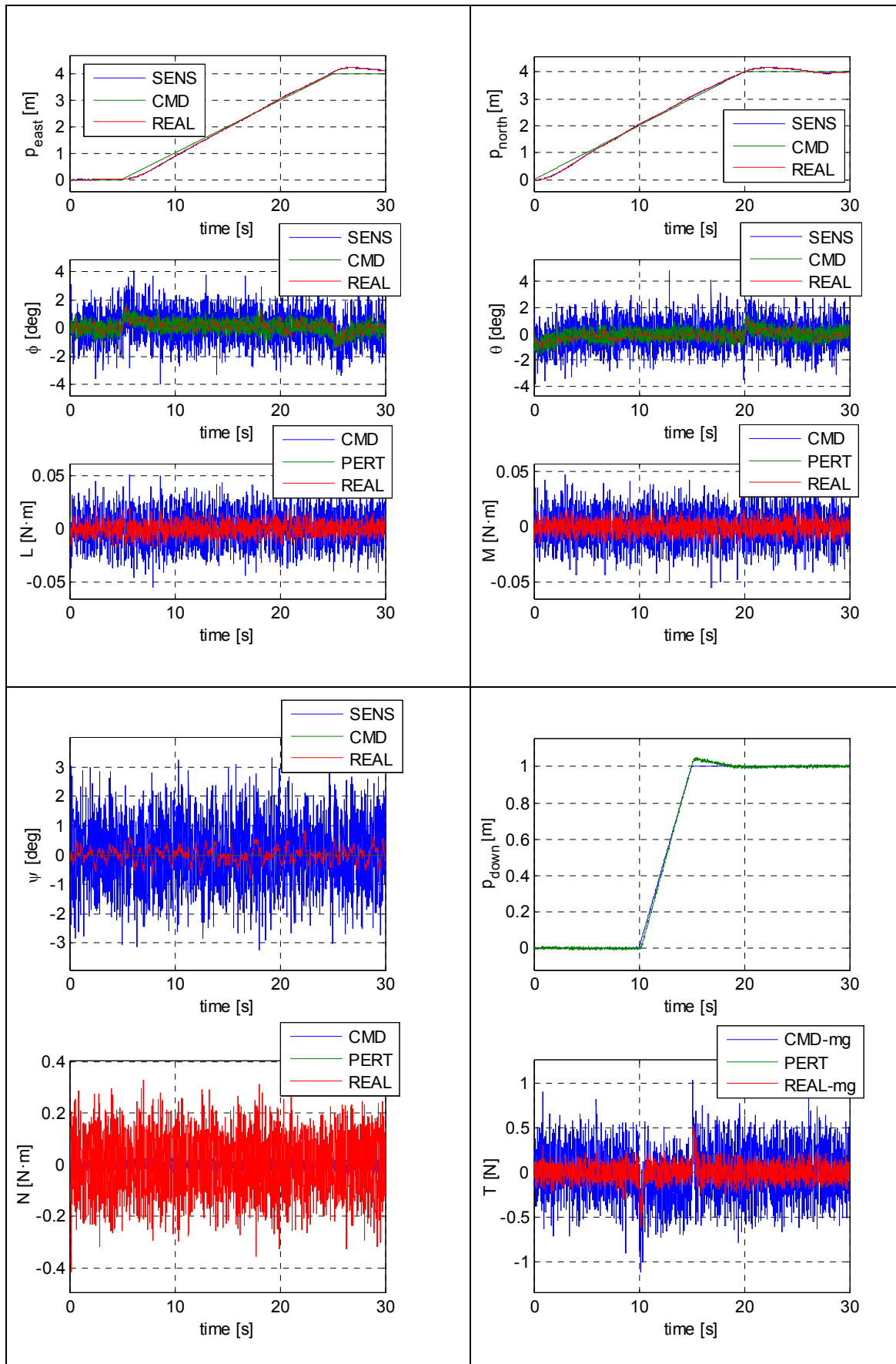


Figura 4-8 Seguimiento trayectorias: control no lineal con modelo no lineal

### 4.3 Saltos de posición

En este caso de simulación el helicóptero realiza un vuelo estático, y recibe en un determinado instante de tiempo una nueva posición de referencia. En este caso el helicóptero no se somete a perturbación, el interés se centra en la dinámica que sigue para alcanzar el nuevo comando de posición:

- Figura 4-9: Control lineal - Modelo lineal
- Figura 4-10: Control lineal - Modelo no lineal
- Figura 4-11: Control no lineal - Modelo lineal
- Figura 4-12: Control no lineal - Modelo no lineal

Las figuras están divididas en 4 subfiguras y muestran la siguiente información:

Posición ESTE en metros: - SENS: medida sensor. - CMD : comando de posición - REAL: posición real Angulo de ALABEO en grados: - SENS: medida sensor. - CMD : comando del control - REAL: ángulo real Momento de ALABEO en Nm: - CMD : comando del control - PERT: perturbación. - REAL: momento motor real	Posición NORTE en metros: - SENS: medida sensor. - CMD : comando de posición - REAL: posición real Angulo de CABECEO en grados: - SENS: medida sensor. - CMD : comando del control - REAL: ángulo real Momento de CABECEO en Nm: - CMD : comando del control - PERT: perturbación. - REAL: momento motor real
Angulo de GUIÑADA en grados: - SENS: medida sensor. - CMD : comando del control - REAL: ángulo real Momento de GUIÑADA en Nm: - CMD : comando del control - PERT: perturbación. - REAL: momento motor real	Posición DESCENSO en metros: > SENS: medida sensor. > CMD : comando de posición > REAL: posición real EMPUJE en N: > CMD : comando del control > PERT: perturbación. > REAL: empuje motor real

Los resultados muestran que todos los casos presentan prestaciones parecidas. Esto se debe fundamentalmente a que el control de posición y de altitud es el mismo para ambos controladores. Notar que la diferencia entre ambos controladores se localiza únicamente en el control de actitud. La dinámica del control de posición/altitud es lenta, y es la que domina los saltos de posición.

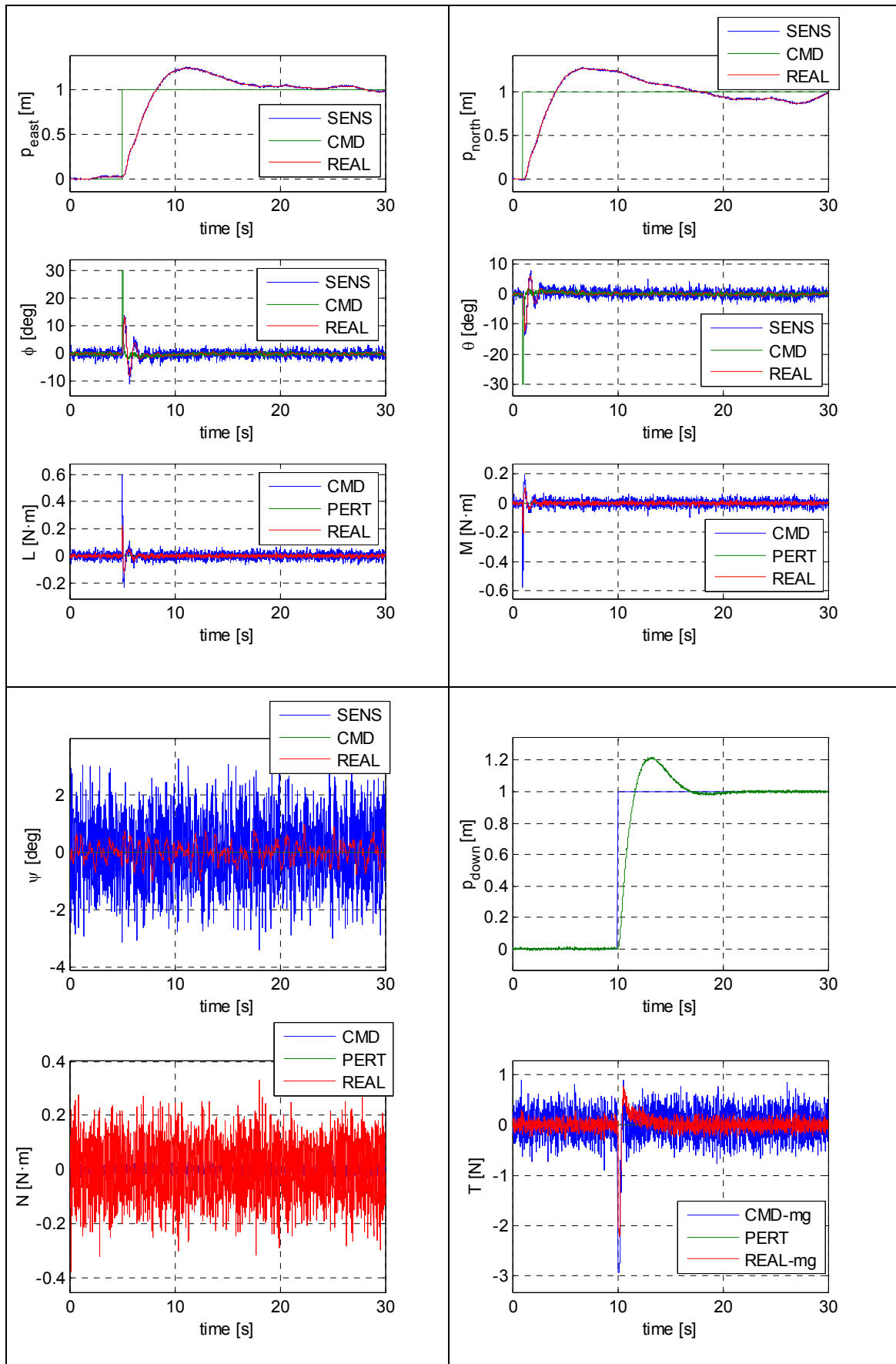


Figura 4-9 Salto de posición: control lineal con modelo lineal

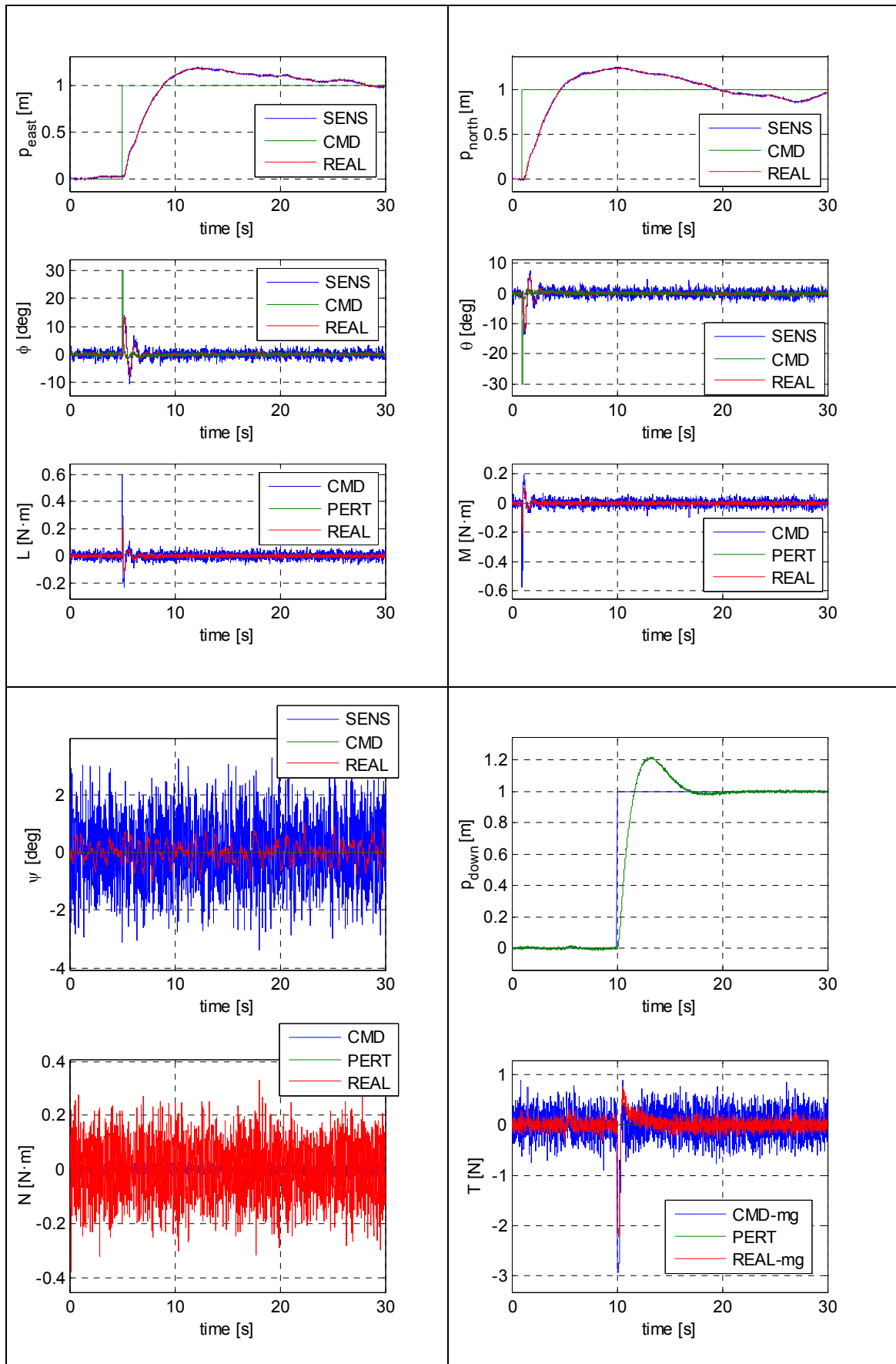


Figura 4-10 Salto de posición: control lineal con modelo no lineal

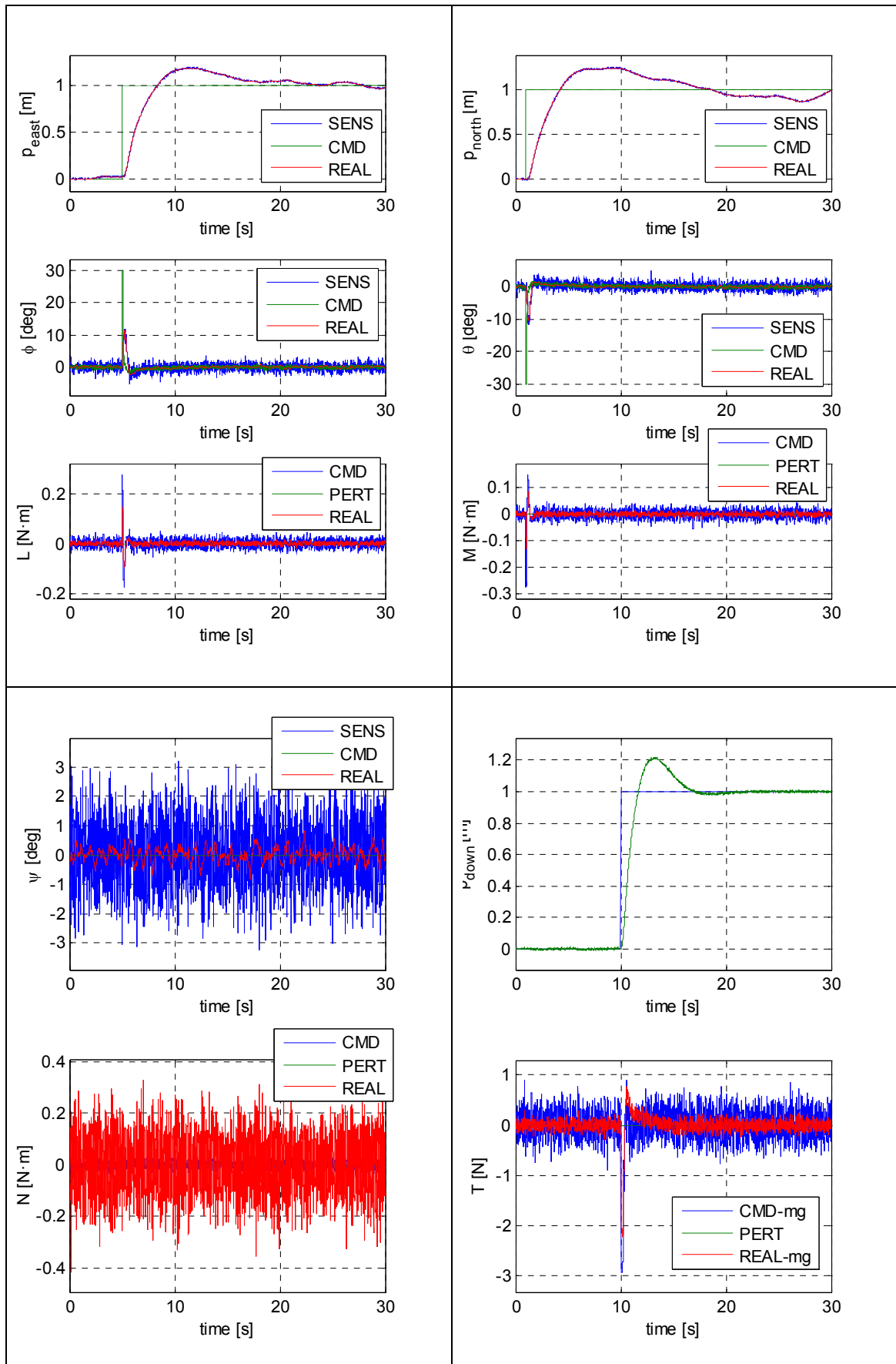


Figura 4-11 Salto de posición: control no lineal con modelo lineal

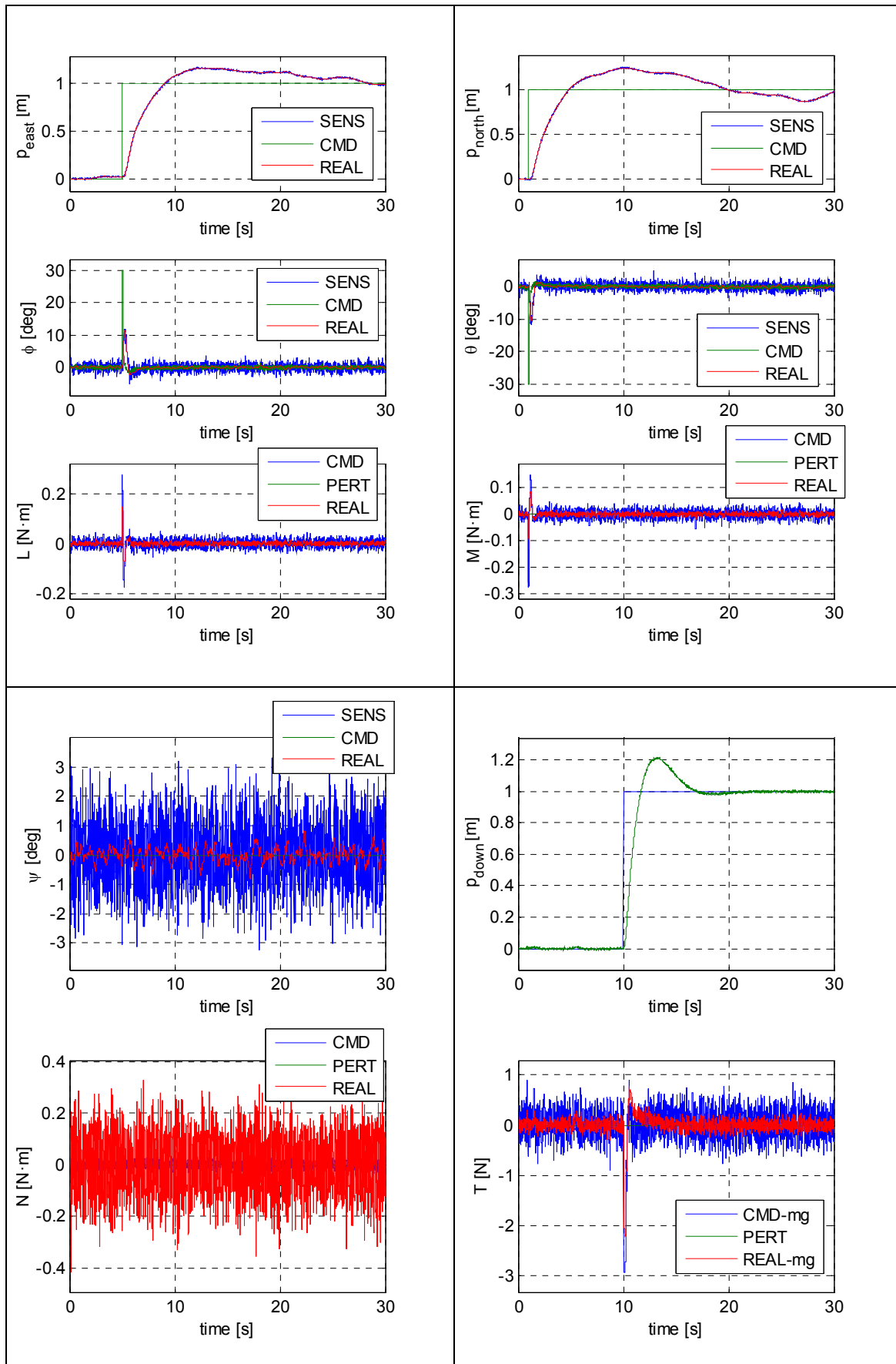


Figura 4-12 Salto de posición: control no lineal con modelo no lineal

## 5 CONCLUSIONES

A continuación se resumen las principales conclusiones que se pueden extraer de este trabajo:

- Se ha desarrollado un modelo completo de la aerodinámica de los propulsores. Este modelo se apoya en la teoría de helicópteros y permite calcular las fuerzas y los momentos que aparecen en las hélices en función del giro y la velocidad del viento incidente.
- Se ha desarrollado con éxito el modelo lineal y no lineal para la dinámica del helicóptero en Simulink. El modelo no lineal se ha implementado por tres vías alternativas: ecuaciones dinámicas, módulo de librería “6DoF (Euler Angles)” y mediante SimMechanics. Esta última vía, SimMechanics, tiene especial interés pues obedece al paradigma de modelado físico.
- La comparación de los modelos lineales y no lineales muestra que, para pequeñas perturbaciones, el modelo lineal se aproxima al modelo no lineal.
- El modelo del helicóptero contiene un modelo para los sensores que incluye tres aspectos fundamentales de los mismos: dinámica, ruido y muestreo.
- La estructura del control se ha dividido en dos partes fundamentales: control de actitud y control de posición/altitud. Es importante observar que el control de actitud está anidado dentro del lazo de posición.
- El control de actitud es el “corazón” del sistema de control y por ello se han propuesto cuatro controladores para implementarlo:
  - Control lineal (PID)
  - Control PID difuso (no lineal)
  - Control “integral backstepping” (no lineal)
  - Control “integral backstepping” difuso (no lineal)
- El ajuste de los controladores se ha realizado mediante algoritmos evolutivos. En particular se ha empleado la función *patternsearch()* de Matlab, pues ofrece buenos resultados con un bajo coste computacional.
- La comparación de los controladores muestra que el control “integral backstepping” difuso presenta las mejores prestaciones y por tanto es el que se emplea en la simulaciones de la sección 4.
- El control de posición y altura se ha resuelto mediante control lineal, que incluye una saturación del comando y un mecanismo “anti-windup” para evitar problemas derivados de la saturación.
- Los resultados de simulación muestran que tanto el control lineal como el no lineal (“integral backstepping” difuso) son capaces de controlar el sistema lineal y no lineal para los siguientes casos:
  - Rechazo a perturbaciones
  - Seguimiento de trayectorias
  - Saltos de un punto geográfico a otro

- En presencia de perturbaciones, el control no lineal (“integral backstepping” difuso) presenta prestaciones significativamente superiores al control lineal.
- En ausencia de perturbaciones, el control lineal y no lineal presentan prestaciones parecidas. Esto se debe fundamentalmente a que el control de posición y de altitud es común para ambos controladores. Debe observarse que la diferencia entre ambos sistemas se localiza únicamente en el control de actitud. La dinámica del control de posición/altitud es lenta y domina la respuesta del sistema.

### 5.1 Cumplimiento de los objetivos

En este apartado se discute el cumplimiento de los objetivos del trabajo presentados en la introducción. A continuación se indican estos objetivos y la sección donde se justifica su consecución:

ID	OBJETIVO	REFERENCIA
1	Desarrollar un modelo de simulación considerando los siguientes aspectos:	
1.a	Que permita comparar las siguientes opciones de modelado del helicóptero: <ul style="list-style-type: none"> <li>i) Modelo linealizado en torno a la operación de vuelo a punto fijo.</li> <li>ii) Modelo no lineal mediante paradigma de simulación analógica.</li> <li>iii) Modelo no lineal mediante paradigma de modelado físico.</li> </ul>	Dinámica del helicóptero (§2.3 y §2.4), modelo de simulación (§2.5.2) y resultados simulación (§4)
1.b	Que incluya un modelo aerodinámico de los propulsores: <ul style="list-style-type: none"> <li>i) Que calcule las fuerzas y los momentos que actúan sobre el propulsor en función de las características de las palas (p. ej. longitud, perfil), del aire (p. ej. densidad, velocidad).</li> <li>ii) Que incluya el control y la dinámica de los actuadores.</li> </ul>	Aerodinámica del propulsor (§2.2) y modelo de simulación (§2.5.1)
1.c	Que permita simular y comparar los distintos tipos de controles propuestos.	Simulación con modelo lineal y no lineal (§4)
1.d	Que permita generar las siguientes trayectorias: <ul style="list-style-type: none"> <li>i) Movimientos a velocidad lineal constante en ejes geográficos.</li> <li>ii) Movimientos de un punto a otro expresados en ejes geográficos.</li> </ul>	Simulación con modelo lineal y no lineal (§4)

2	Diseñar, analizar y comparar distintas propuestas para el control del helicóptero considerando los siguientes aspectos:	
2.a	Que el método de ajuste y la medida de prestaciones permitan una comparación justa entre los controladores propuestos.	Diseño del control (§3) y método de ajuste (§3.2.5)
2.b	Que los controladores propuestos tengan las siguientes capacidades: i) Estabilizar la actitud (orientación) y altura del vehículo tanto para el modelo lineal como para el no lineal. ii) Seguir las trayectorias deseadas en presencia de perturbaciones.	Diseño del control (§3) y simulación (§4)

Tabla 5-1 Consecución de los objetivos del trabajo

## 5.2 Líneas de trabajo futuro

En este apartado se describen las posibles líneas de trabajo futuro. Estas líneas de trabajo pueden avanzar en dos sentidos, por un lado para mejorar el modelado del helicóptero y por otro para mejorar las leyes de control. En relación al modelado del helicóptero:

- Ajustar el modelo con datos experimentales del cuadricóptero que se desea controlar. Hasta el momento, el modelo de simulación se ha desarrollado a partir de modelos teóricos y su ajuste paramétrico se ha derivado de hojas de datos y cálculos preliminares. En caso de querer emplear este modelo para el diseño del control, es importante realizar una correlación entre el modelo y los datos reales. El objetivo es conseguir que el modelo de simulación sea capaz de reproducir con fidelidad el comportamiento real del vehículo.
- Aumentar los grados de libertad del modelo mecánico del helicóptero. El modelo actual considera el helicóptero como un sólido rígido con seis grados de libertad, tres de posición y tres de orientación. El modelo del helicóptero se puede extender para poder considerar efectos dinámicos más complejos como vibraciones, modos mecánicos resonantes y deformaciones, como por ejemplo el batimiento de las palas (“rotor flapping”) [21]. En este sentido, el paradigma de modelado físico [1] puede simplificar significativamente la construcción del modelo. La extensión del modelo incluiría al menos estos aspectos:
  - El modelo independiente de cada hélice. Esto permitiría estudiar las vibraciones que se transmiten al helicóptero y también el batimiento de las palas.
  - Las rigideces mecánicas más relevantes, por ejemplo, la rigidez de los brazos que unen los propulsores con el cuerpo del helicóptero. Esto añadiría los modos mecánicos resonantes más importantes del sistema.

- Ampliar el modelo aerodinámico para considerar el efecto suelo. Tal como se desarrolla en §2.2.1, la teoría de cantidad de movimiento asume que el propulsor se encuentra en un entorno fluido. En el caso de tener el suelo suficientemente cerca del propulsor, la hipótesis de estela lejana deja de ser válida y el modelo actual se separa del comportamiento real. Es importante considerar el efecto suelo para estudiar las maniobras de aterrizaje y despegue, que en algunos casos podrían ser críticas. Existen modelos sencillos [4] [9] que permiten modificar el modelo actual para considerar el efecto suelo.

En relación al control del helicóptero, se proponen las siguientes líneas de trabajo futuro:

- Desarrollar los módulos de guiado y navegación. La gestión del movimiento de un vehículo autónomo se puede dividir en tres partes: guiado, navegación y control. La navegación estima el estado del vehículo (posición, orientación y velocidad) a partir de las medidas de los sensores. El guiado genera la trayectoria para alcanzar la posición comandada. Por último, el control calcula los comandos a los actuadores a partir de la trayectoria (guiado) y del estado actual del vehículo (navegación). En este trabajo se ha incidido fundamentalmente en el control; para los módulos de guiado y navegación se han empleado modelos simplificados.

En cuanto al guiado, la generación de trayectorias depende de las restricciones propias del entorno. Por ejemplo, en [32] se propone un guiado optimizado para vuelos en interior donde el cuadricóptero puede encontrar espacios estrechos como pasillos o puertas. También se puede gestionar a este nivel la detección de obstáculos y la generación de maniobras de evasión [33].

En cuanto a la navegación, en muchos casos el sistema incluye unidades inerciales (IMU: "Inertial Measurement Unit") que incluyen filtros EKF ("Extended Kalman Filter") que dan directamente la estimación del estado (posición, orientación, y velocidad). Sin embargo, esta estimación se puede realizar también dentro del microcontrolador y por tanto se podría añadir al modelo. Además, la estimación del estado se puede mejorar al añadir la información de otros sensores disponibles (p. ej. altímetros, GPS, radares, brújulas, infrarrojos, cámaras) o información exterior (p. ej. "laser trackers", balizas). La gestión y fusión de sensores abre un amplio campo de investigación donde se puede extender este trabajo.

- Desarrollar funciones de detección, aislamiento y recuperación frente a fallos ("FDIR: Failure Detection Isolation and Recovery") [34]. Esta funcionalidad estaría a un nivel superior que las funciones de guiado, navegación y control, y permitiría detectar y gestionar fallos en los sensores o actuadores. En algunos casos el sistema posee redundancia a ciertos fallos y se puede recuperar tras aislar el fallo. En otros casos no es posible conseguir una recuperación completa y el sistema tendrá una operación degradada. En caso de fallos graves, p. ej. el fallo de un propulsor, el sistema puede intentar reducir los posibles daños al entorno y a la integridad del propio vehículo.

## 6 REFERENCIAS

- [1] Åström, K.J., Elmqvist, H., Mattsson, S.E., “Evolution of continuous-time modeling and simulation”, 12<sup>th</sup> European Simulation Multiconference, ESM’98, June 16-19, 1998, Manchester, UK
- [2] de la Cruz, J.M., “Control de un helicóptero de cuatro hélices”, Dpto. Arquitectura de Computadores y Automática, Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Complutense de Madrid
- [3] Khalil, H.K., “Nonlinear Systems”, Third Edition, Prentice Hall, 2002
- [4] Bouabdallah, S., Siegwart, R., “Full Control of a Quadrotor”, Proceedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, San Diego, CA, USA, Oct 29 – Nov 2, 2007
- [5] Hu, B., Man, G. K. I, and Gosine, R. G., “New methodology for analytical and optimal design of fuzzy PID controllers”, 10.1109/91.797977, IEEE Transactions on Fuzzy Systems.
- [6] de Silva, C. W., “Intelligent Control, Fuzzy Logic Applications”. Boca Raton, FL: CRC, 1995.
- [7] Whitley, D., “An Overview of Evolutionary Algorithms: Practical Issues and Common Pitfalls”, Computer Science Department, Colorado University.
- [8] “ECSS-E-60-10A ECSS Spacecraft Engineering – Control Performance Standard”, 2008
- [9] Cuerva, A., Sanz-Andres, A., Meseguer, J., & Espino, J.L. “An engineering modification of the blade element momentum equation for vertical descent: fundamentals and validation”. Journal of the American Helicopter Society, 51: 341-348, 2006a.
- [10] Gustafson, F.G, Gessow, A., “Effect of Rotor-Tip Speed on Helicopter Hovering Performance and Maximum Forward Speed”. NACA WR L-97 (Formerly ARR LGA 16), 1946.
- [11] Sighard F. Hoerner, “Fluid-Dynamic Drag” 1965, publicado por el autor.
- [12] Sears, F.W., Zemansky, M.W., “Física Universitaria”, Decimosegunda Edición, Pearson Educación, 2009
- [13] Cuerva, A., Espino, J.L., López, O., Meseguer, J., Sanz, A., “Teoría de los Helicópteros”, Segunda Edición, Ibergarceta Publicaciones, 2013.
- [14] Leishman, J.G. (2000). “Principles of Helicopter Aerodynamics”. New York, NY: Cambridge University Press.
- [15] Stafford, Jesse (2014-Spring). "How a Quadcopter works | Clay Allen". University of Alaska, Fairbanks. Retrieved 2015-01-20.

- [16] M. Cutler, "Design and Control of an Autonomous Variable-Pitch Quadrotor Helicopter", S.M. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, August 2012.
- [17] Ollero, A., Maza, I., "Multiple Heterogeneous Unmanned Aerial Vehicles". Vol. 37/2007. Springer Berlin / Heidelberg.
- [18] "TU Delft's ambulance drone drastically increases chances of survival of cardiac arrest patients", Article, <http://www.tudelft.nl/en/current/latest-news/article/detail/ambulance-drone-tu-delft-vergroot-overlevingskans-bij-hartstilstand-drastisch/>, October 2014.
- [19] Infinium Robotics URL: <http://www.infiniumrobotics.com/>
- [20] Real Decreto-ley 8/2014, de 4 de julio, de aprobación de medidas urgentes para el crecimiento, la competitividad y la eficiencia. BOE del sábado 5 de julio de 2014, páginas 52544 a 52715, Sección V.
- [21] Erginer, B., y Altug, E. (2007). Modeling and PD Control of a Quadrotor VTOL Vehicle. 2007 IEEE Intelligent Vehicles Symposium, (pp. 894–899).
- [22] Bouabdallah, S., Noth, A., Siegwart, R., "PID versus LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor," in Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robots Syst., 2004, vol. 3, pp. 2451–2456.
- [23] Li, J., Li, Y., "Dynamic analysis and pid control for a quadrotor," in Proc. IEEE Int. Conf. Mechatronics Autom. Conf., 2011, pp. 573–578.
- [24] Åström, K.J., Hägglund, T. PID Controllers: Theory, Design and Tuning. 2nd Edition. Research Triangle Park, NC: Instrument Society of America.
- [25] H. Voos, "Nonlinear control of a quadrotor micro-uav using feedback-linearization," in Proc. IEEE Int. Conf. Mechatronics., 2009, pp. 1–6.
- [26] R. Xu and U. Ozguner, "Sliding mode control of a quadrotor helicopter," in Proc. 45th IEEE Decision Control Conf., 2006, pp. 4957–4962.
- [27] T. Madani and A. Benallegue, "Backstepping control for a quadrotor helicopter," in Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intell. Robots Syst., 2006, pp. 3255–3260.
- [28] Young-Cheol Choi, Hyo-Sung Ahn, "Nonlinear control of quadrotor for point tracking: Actual implementation and experimental tests," IEEE/ASME Trans. on Mechatronics, Vol., No, pp. 2015 (TMECH2015-1).
- [29] Petrushevski, I. Rakic, R.: "Simple Fuzzy Solution for Attitude Quadrotor Control". Proceedings of the 12th IEEE Symposium on Neural Network Applications in Electrical Engineering – Neurel 2014, Belgrade, pp.93-98.
- [30] G.F. Franklin, J.D. Powell, M. Workman., "Digital control of dynamic systems", Third Edition, Addison-Wesley, 1997.
- [31] P. Pounds, R. Mahony, P. Corke, "Modelling and Control of a Quad-Rotor Robot", Australian National University, Canberra, Australia CSIRO ICT Centre.

- [32] Mellinger, D., Kumar, V., “Minimum snap trajectory generation and control for quadrotors”. IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 2011, pp. 2520 – 2525.
- [33] Gageik, N., Benz, P., Montenegro, S., “Obstacle Detection and Collision Avoidance for a UAV with Complementary Low-Cost Sensors”, IEEE Access, Vol. 3, pp. 599 – 609, 2015.
- [34] Drak, A., Noura, H., Hejase, M., Al Younes, Y., “Sensor fault diagnostic and Fault-Tolerant Control for the altitude control of a quadrotor UAV”, IEEE 8th GCC Conference and Exhibition (GCCCE), pp. 1 – 5, 2015.

## 7 ANEXOS

### 7.1 Anexo I: Resumen características del helicóptero

<b>CARACTERÍSTICAS FÍSICAS</b>			
<b>Símbolo</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidades</b>	<b>Descripción</b>
g	9,81	m.s <sup>2</sup>	Aceleración gravitacional
μ	1,84E-05	Pa.s	Viscosidad aire
ρ	1,20	kg/m <sup>3</sup>	Densidad del aire
<b>CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DEL CUERPO DEL HELICÓPTERO</b>			
<b>Símbolo</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidades</b>	<b>Descripción</b>
M	0,6	kg	Masa total del helicóptero
I <sub>x</sub>	0,007	kg.m <sup>2</sup>	Momento de inercia con respecto al eje x
I <sub>y</sub>	0,007	kg.m <sup>2</sup>	Momento de inercia con respecto al eje y
I <sub>z</sub>	0,010	kg.m <sup>2</sup>	Momento de inercia con respecto al eje z
d <sub>p</sub>	0,20	m	Distancia horizontal del propulsor al c.d.m.
h <sub>p</sub>	-0,01	m	Distancia vertical del propulsor al c.d.m.
d <sub>c</sub>	0	m	Distancia horizontal del cuerpo al c.d.m.
h <sub>c</sub>	0,01	m	Distancia vertical del cuerpo al c.d.m.
<b>CARACTERÍSTICAS AERODINÁMICAS DEL CUERPO DEL HELICÓPTERO</b>			
<b>Símbolo</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidades</b>	<b>Descripción</b>
R <sub>c</sub>	0,05	m	Radio equivalente del cuerpo
S <sub>c</sub>	0,0079	m <sup>2</sup>	Superficie proyectada equivalente del cuerpo (S <sub>c</sub> = π.R <sub>c</sub> <sup>2</sup> )
C <sub>dc</sub>	0,47	-	Coefficiente de resistencia aerodinámica (esfera)
<b>CARACTERÍSTICAS AERODINÁMICAS DEL PROPULSOR</b>			
<b>Símbolo</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidades</b>	<b>Descripción</b>
b	2	palas	Número de palas
R	0,15	m	Radio de la pala
c	0,04	m	Coefficiente de resistencia aerodinámica (esfera)
S	0,071	m <sup>2</sup>	Superficie del disco sustentador (S = π.R <sup>2</sup> )
σ	0,17	-	Solidez local de la pala (σ = b.c/(π.R))
θ <sub>0</sub>	0,3	rad	Paso inicial del perfil
θ <sub>1</sub>	-0,1	rad	Torsión lineal del perfil
a	5,49	-	Pendiente de la curva de sustentación del perfil
C <sub>d0</sub>	0,0409	-	Coefficiente de resistencia aerodinámica del perfil
A	0,745	-	Coefficiente A de la ecuación de la TCM de Cuerva
B	0,447	-	Coefficiente B de la ecuación de la TCM de Cuerva
<b>(coeficientes para el caso de vuelo a punto fijo)</b>			
Ω <sub>0</sub>	242,61	rad/s	Velocidad del propulsor en vuelo a punto fijo
R.Ω <sub>0</sub>	36,39	m/s	Velocidad de punta de pala en vuelo a punto fijo
λ <sub>i0</sub>	-0,09	-	Parámetro velocidad inducida en vuelo a punto fijo
CT	1,31E-02	-	Coefficiente de tracción (empuje) en vuelo a punto fijo

CQi	1,23E-03	-	Coeficiente de par inducido en vuelo a punto fijo
CQ0	8,68E-04	-	Coeficiente de par parásito en vuelo a punto fijo
CQ	2,10E-03	-	Coeficiente de par en vuelo a punto fijo (CQ = CQi+CQ0)
k1	2,5E-05	N/(rad/s) <sup>2</sup>	Constante de empuje en vuelo a punto fijo
k2	6,0E-07	N.m/(rad/s) <sup>2</sup>	Constante de par en vuelo a punto fijo

<b>CARACTERÍSTICAS ELECTROMECÁNICAS DEL PROPULSOR</b>			
<b>Símbolo</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidades</b>	<b>Descripción</b>
Jr	6,0E-05	kg.m <sup>2</sup>	Inercia del propulsor
nred	5,00	-	Índice de reducción
Kt	3,38E-03	N.m/A	Constante de par del motor
Ke	3,38E-03	V/(rad/s)	Constante de fuerza contra electromotriz
Rm	0,56	Ohm	Resistencia del motor
Vmax	11,1	V	Tensión de alimentación máxima del motor
Vmin	0	V	Tensión de alimentación mínima del motor

Tabla 7-1 Resumen de características del helicóptero

## 7.2 Anexo II: Componentes

### 7.2.1 Hoja característica de los motores



## RC-280SA

OUTPUT: 0.5W-24W (APPROX)

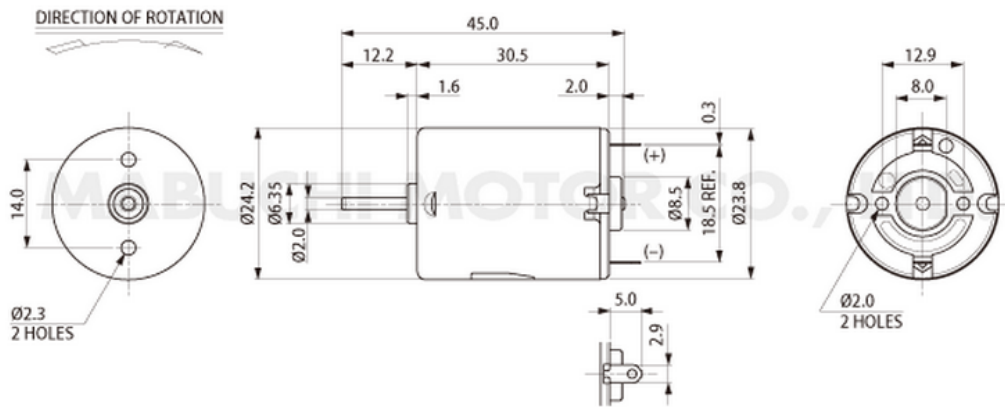


WEIGHT: 42g (APPROX)

Typical Applications : Home Appliances > Hair Clipper / Massager / Vibrator  
Toys and Models > Radio Control Model

\*By clicking the "MODEL", you can display the Performance Chart Simulation.

MODEL	VOLTAGE		NO LOAD			AT MAXIMUM EFFICIENCY					STALL		
	OPERATING RANGE	NOMINAL V	SPEED r/min	CURRENT A	SPEED r/min	CURRENT A	TORQUE mN·m	TORQUE g·cm	OUTPUT W	TORQUE mN·m	TORQUE g·cm	CURRENT A	
RC-280 SA	2865	4.5 - 9.0	6	14000	0.28	11910	1.60	4.46	45.5	5.56	29.9	305	9.10
	20120	4.5 - 12.0	9	11300	0.14	9540	0.76	4.06	41.3	4.04	26.0	265	4.10
	2485	4.5 - 9.6	6	10800	0.18	9130	0.99	3.71	37.8	3.54	24.0	245	5.40



UNIT: MILLIMETERS

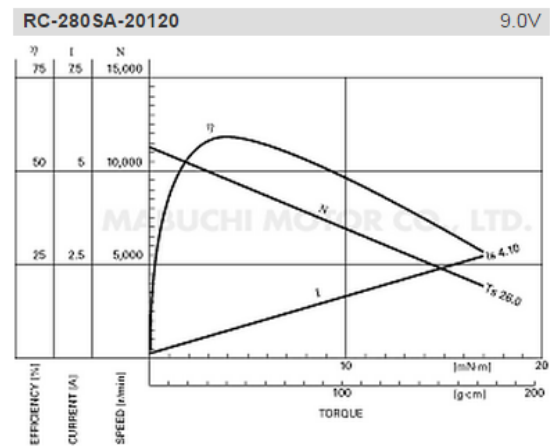
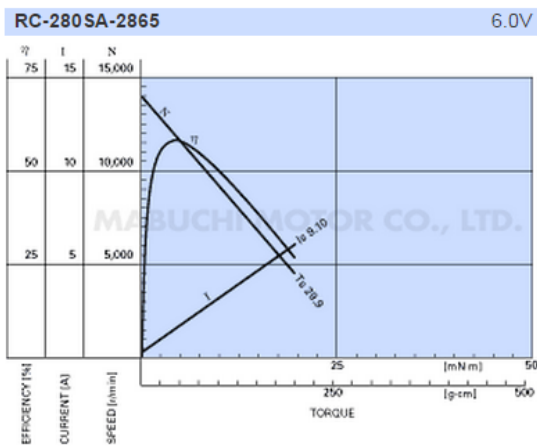


Tabla 7-2 Características del motor del propulsor

## 7.2.2 Hoja característica de las baterías



Fabricante SKU/ Número de componente: DF-BATT1350-BALANCE
Pro Lite V2 1350 mAh
3 cells (11.1V)
Capacidad de descarga continua de 33.7A
Dimensiones: 20 x 34 x 66mm
Peso: 94g
Ciclo de vida con mantenimiento adecuado: 100 - 150 cargas.

Tabla 7-3 Características de la batería

### 7.2.3 Descripción de las palas



Figura 7-1 Palas de los propulsores

La figura muestra un set completo de palas para helicópteros Dragancflyer RC. Estas palas de rotor Dragancflyer de estilo SAVS (una única pieza) e inyectadas con nylon. Son compatibles con Dragancflyer 3, 4, 5 y SAVS.

Estas palas de alta duración proporcionan no sólo una gran resistencia sino también un comportamiento en vuelo excepcional. Su diseño especial y construcción con nylon inyectado hace a estas palas resistentes a los daños, incluyendo grietas. Incluso en los límites de operación, las palas apenas se flexionan con lo que se evita el contacto con el chasis. Estas palas Dragancflyer presentan un nuevo perfil aerodinámico y una mayor área superficial para proporcionar mayor tracción y eficiencia. También tienen una menor flexibilidad, lo que se traduce en una respuesta dinámica mejorada.

Especificaciones:

- Un set completo de palas para Helicópteros Dragancflyer RC
- 2 palas “B” de sentido horario
- 2 palas “A” de sentido antihorario
- Tornillos y tuercas para montaje de las palas
- Compatible con: Helicóptero Dragancflyer RC modelos III, IV, V, V Ti y SAVS.
- Diámetro del rotor: 12 3/8 pulgadas (314 mm)

7.3 Anexo III: Figuras complementarias del modelo de simulación

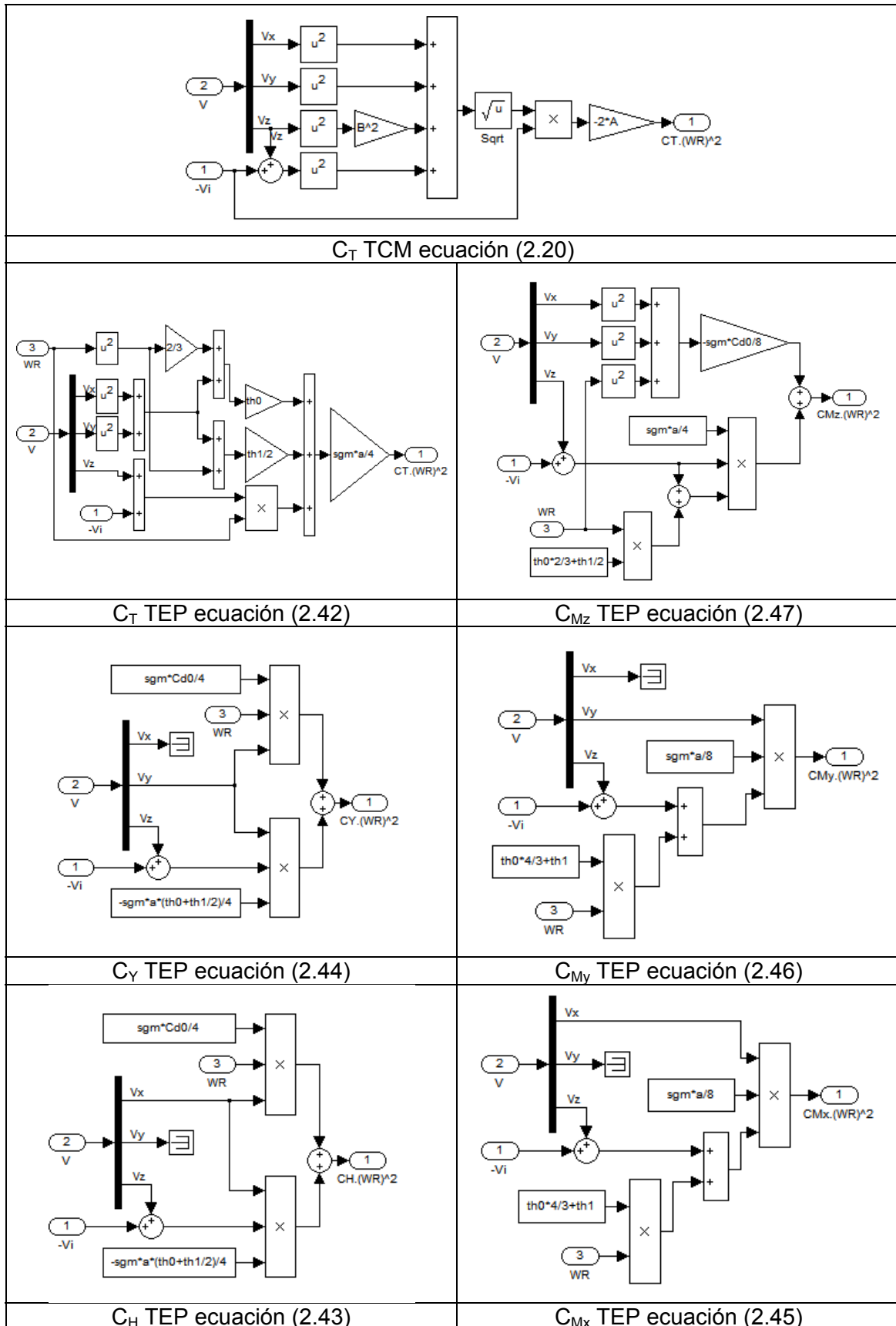


Figura 7-2 Cálculo de los coeficientes aerodinámicos.

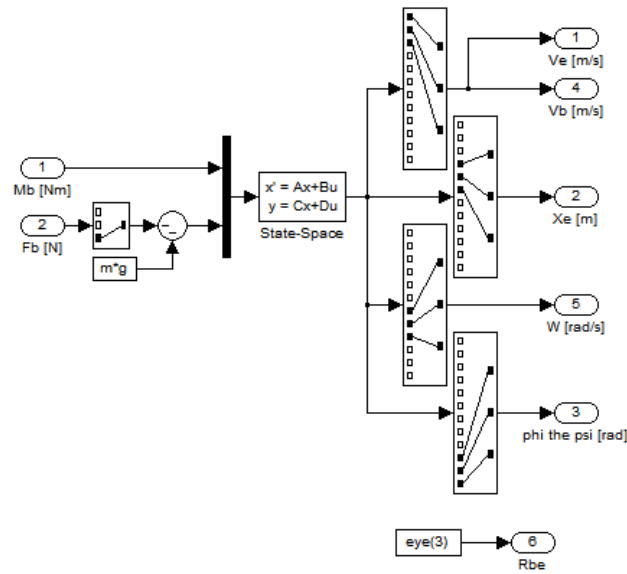


Figura 7-3 Modelo lineal del helicóptero; ecuación (2.59)

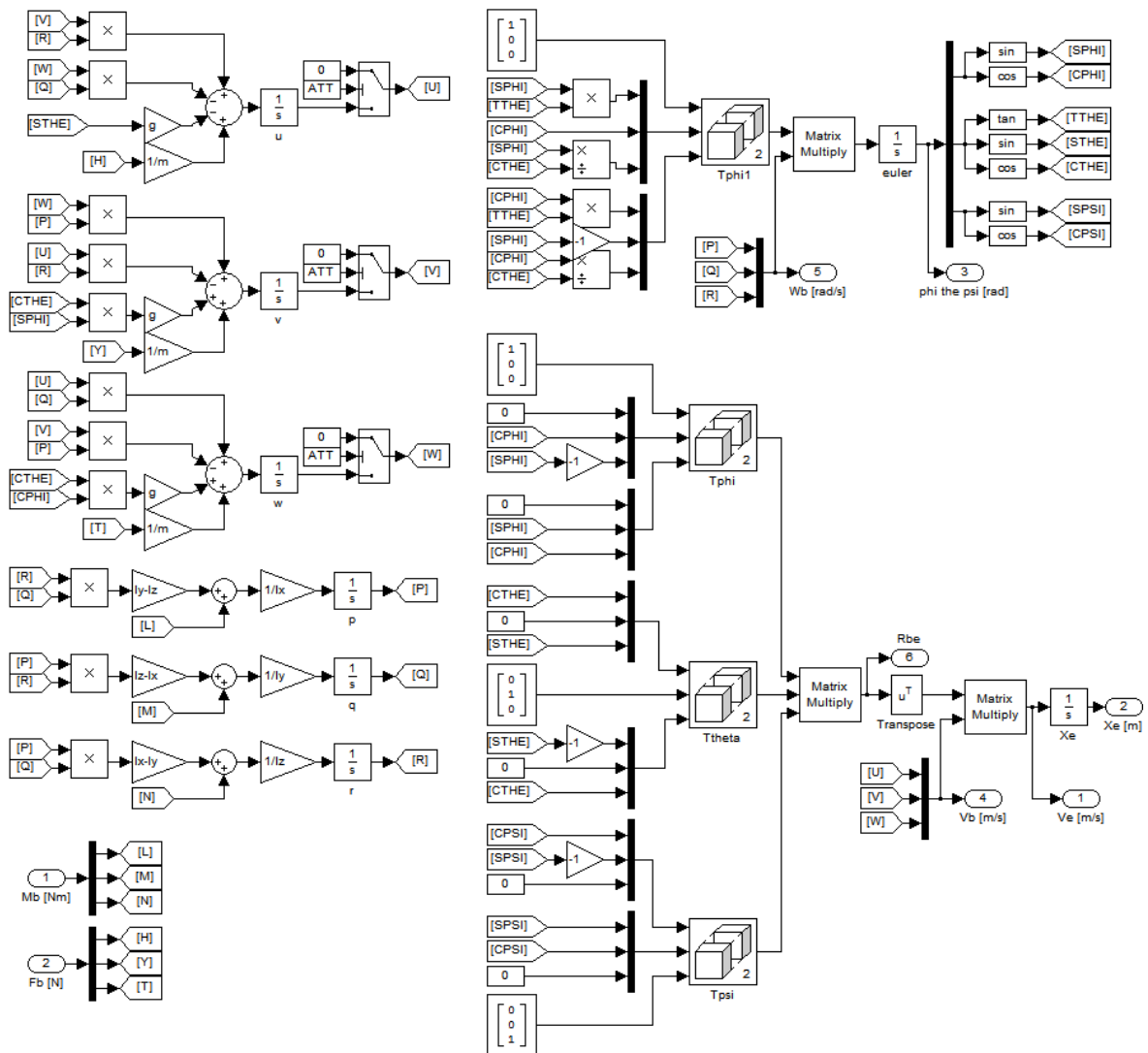


Figura 7-4 Modelo no lineal del helicóptero suponiendo matriz diagonal de inercia; ecuación (2.53)

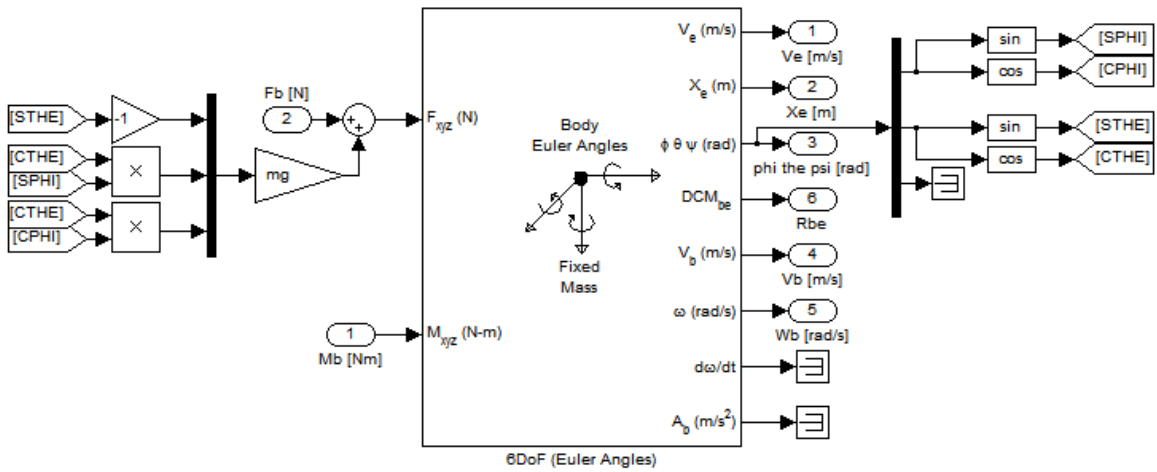


Figura 7-5 Modelo no lineal del helicóptero mediante el bloque predefinido de Simulink "6DoF (Euler Angles)"

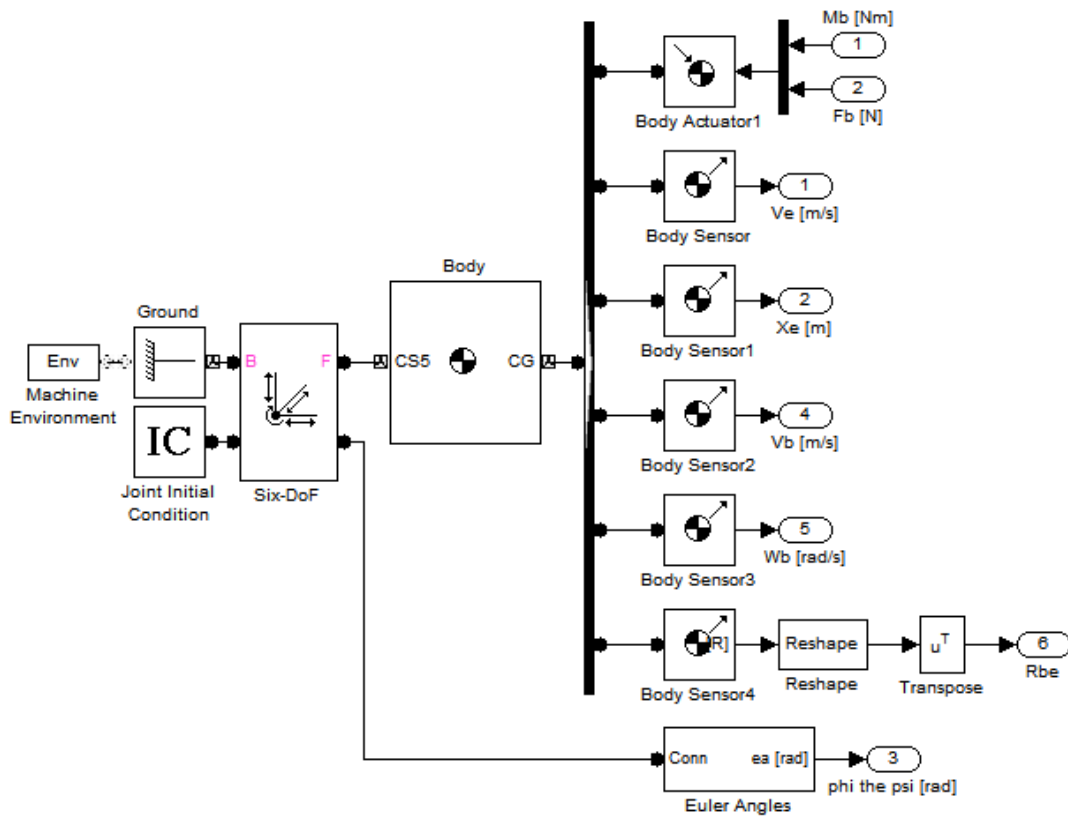


Figura 7-6 Modelo no lineal del helicóptero mediante SimMechanics

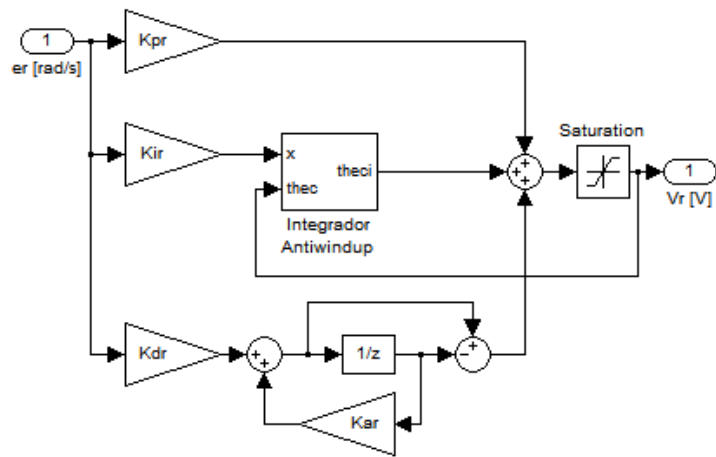


Figura 7-7 Control de velocidad de los propulsores con saturación de tensión.