



# Máster en Ingeniería de Sistemas y de Control

## Modelado y control de un quadrotor

**Autor:** Adolfo Lerín y de la Santísima Trinidad

**Director:** José Manuel Díaz Martínez

**Curso:** 2015-2015

**Convocatoria:** Febrero 2016

# Máster en Ingeniería de Sistemas y de Control

## Modelado y control de un quadrotor

**Tipo de proyecto:** Específico propuesto por el alumno

**Autor:** Adolfo Lerín y de la Santísima Trinidad

**Director:** José Manuel Díaz Martínez

**Convocatoria:** Febrero 2016

# Autorización

Autorizamos a la Universidad Complutense y a la UNED a difundir y utilizar con fines académicos, no comerciales y mencionando expresamente a sus autores, tanto la memoria de este Trabajo Fin de Máster, como el código, la documentación y/o el prototipo desarrollado.

Firmado: Adolfo Lerín y de la Santísima Trinidad

Firma del alumno



## Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecer al director de este trabajo final de máster, José Manuel Díaz, por darme la oportunidad de desarrollar este trabajo, así como por su paciencia y guía durante el desarrollo del mismo.

También quiero agradecer a la Universidad Nacional de Educación a Distancia la oportunidad de desarrollar estos estudios en una etapa de mi vida donde el tiempo es escaso.

De igual forma agradecer este trabajo a todos los compañeros y amigos que durante los últimos meses me han escuchado y asesorado.

Por último, no puedo olvidar a mi familia que siempre estuvo ayudándome y mostrándome el camino que ha hecho posible llegar hasta aquí, suyo es el mérito. A todos muchas gracias.

## Resumen

El presente trabajo final de máster ha tenido como objetivo el estudio de las diferentes problemáticas relativas al control de la estabilidad en vuelo de vehículos no tripulados de tipo quadrotor.

Para poder abordar el problema global que supone el desarrollo de un vehículo autónomo de tipo quadrotor el trabajo de final de máster se ha estructurado en varias partes que se pueden resumir como estudio teórico y modelado matemático del quadrotor, implementación de un simulador del vehículo, estudio teórico y diseño de las diferentes soluciones de control aplicables al caso, construcción del vehículo y validación experimental. Tomando esta estructura de trabajo ha sido posible trabajar de forma que cada bloque desarrollado se basase en los bloques previos, de esta forma los apartados posteriores han servido como validación de los anteriores. Con esta forma de proceder se ha querido avanzar en el desarrollo del trabajo de forma robusta e intentando minimizar los errores.

Este trabajo ha presentado un reto a la hora de aunar diferentes disciplinas de la ciencia y de la ingeniería, esto se debe a que ha sido necesaria la aplicación transversal de conceptos como los propios de la física y la dinámica de vuelo, la ingeniería de control, la electrónica, la computación y la programación. Todo esto ha permitido un aprendizaje profundo en todo lo relativo a la caracterización y control de aeronaves, en particular en las de tipo quadrotor, así como en lo referente a la elección y caracterización de los diferentes dispositivos necesarios para su construcción. Además, la realización de este trabajo ha servido para enfrentar las diferentes dificultades derivadas de la programación de los sistemas embarcados que constituyen la unidad de control del vehículo.

Además de todo lo anterior, en este trabajo final de máster se demuestra como en los últimos años el desarrollo de los vehículos no tripulados se ha ido acercando a la sociedad. Este acercamiento, así como el desarrollo de sistemas de altas prestaciones y bajo coste, ha permitido crear diferentes variantes del concepto de quadrotor, esto último ha permitido un diseño especializado en base a la aplicación. Además, en este trabajo se muestra como el desarrollo de estos vehículos presenta ciertas dificultades que pueden abordarse de forma satisfactoria con recursos limitados, posibilitando a su vez plataformas abiertas útiles para el desarrollo y prueba de aplicaciones mucho más complejas.

## Lista de símbolos

$a$	Pendiente de elevación
$b$	Fuerza vertical total
$C$	Paso de la hélice
$C_H$	Coefficiente de horizontalidad
$C_Q$	Coefficiente de arrastre
$C_T$	Coefficiente de empuje
$C_{R_m}$	Coefficiente de rotación
$d$	Factor del arrastre
$g$	gravedad
$i$	Corriente del motor
$I$	Matriz de inercia
$I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$	Momentos de inercia en torno a x, y, z
$J_r$	Momento de inercia del motor
$k$	Constante eléctrica del motor
$L$	Inductancia
$l$	Distancia de la hélice al centro de masas
$m$	Masa del vehículo
$M_{em}$	Par del motor
$M_{fr}$	Fricción del motor
$R$	Matriz de rotación
$R_{rad}$	Radio de la hélice
$R_m$	Momento de rotación
$R_{mot}$	Resistencia del motor
$u$	Voltaje aplicado al motor
$U$	Salida de control
$v$	Velocidad
$\rho$	Densidad del aire
$\mu$	Avance del rotor
$\sigma$	Relación de solidez
$\lambda$	Relación de entrada
$\tau$	Momento de inercia total
$\omega$	Velocidad angular del cuerpo
$\Omega$	Velocidad angular del motor
$\Gamma$	Fuerzas en el modelo de Euler-Lagrange
$\phi$	Ángulo de Pitch
$\theta$	Ángulo de Roll
$\psi$	Ángulo de Yaw

## Lista de acrónimos

ACS:	Aircraft Control Station
ADC:	Analog to Digital Converter
BDC:	Brushed DC motor
BLDC:	Brushless DC motor
ESC:	Electronic Speed Controller
FEC:	Forward Error Correction
GCS:	Ground Control Station
GPIO:	General Purpose Input Output
GPS:	Global Positioning System
HALE:	High Altitude Long Endurance
I2C:	Inter-Integrated Circuit
LiPo:	Litio-Polímero
MALE:	Medium Altitude Long Endurance
MAV:	micro Aerial Vehicle
MOSFET:	Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor
MUAV:	Mini Unmanned Aircraft Vehicle
NAV:	Nano Aircraft Vehicle
PCB:	Printed Circuit Board
PD:	Proporcional Derivativo
PID:	Proporcional Integral Derivativo
PWM:	Pulse Width Modulation
QFT:	Quantitative feedback theory
RF:	Radio Frequency
SAR:	Synthetic Aperture Radar
SCS:	Ship Control Station
SoC:	System on Chip
SPI:	Serial Peripheral Interface
TUAV:	Tactical Unmanned aircraft vehicle
UART:	Universal Asynchronous Receiver-Transmitter
UAS:	Unmanned Aircraft System
UAV:	Unmanned Aircraft Vehicle

# Índice

<b>1.- Introducción</b>	<b>12</b>
1.1.- Motivación y objetivos	12
1.2.- Vehículos Aéreos No Tripulados	14
1.2.1.- Definición y conceptos básicos	14
1.2.2.- Sistemas básicos de un UAV	16
1.2.2.1.- Estación de control	16
1.2.2.2.- Carga útil	17
1.2.2.3. Vehículo aéreo	17
1.2.2.4.- Navegación	17
1.2.2.5.- Sistemas de lanzamiento y recuperación	18
1.3.2.6.- Comunicaciones	18
1.3.2.7.- Interfaces	19
1.3.- Quadrotores	19
1.4.- Estructura de la memoria	23
1.5.- Planificación temporal del proyecto	24
<b>2.- Modelo matemático de un quadrotor</b>	<b>25</b>
2.1.-Conceptos básicos sobre quadrotor	25
2.2.- Modelado del sistema	27
2.2.1.- Matriz de rotación	27
2.2.2.- Modelo matemático de Euler-Lagrange	28
2.2.3.- Modelo matemático basado en Newton-Euler	32
2.2.4.- Fuerzas y momentos implicadas en el movimiento	34
2.2.5.- Modelo matemático del motor DC	36
2.3.- Modelo reducido para aplicaciones de control en tiempo real	38
<b>3.- Simulador de un quadrotor</b>	<b>43</b>
3.1.- Introducción	43
3.2.- Estructura del sistema	43
3.2.1.- Estructura del bloque quadrotor	44
<b>4.- Control de la estabilidad de un quadrotor</b>	<b>47</b>
4.1.- Estabilidad del quadrotor como problema de control	47
4.2.- Desacoplo del sistema	49
4.3.- Arquitectura de control	50
<b>5.- Diseño de controladores PID para el control de la estabilidad de un quadrotor</b>	<b>52</b>
5.1.- Introducción a los controladores clásicos PID	52
5.1.1.- Características principales	52
5.1.2.- Sintonía de los controladores PID	56
5.1.2.1.- Método de oscilación de Ziegler-Nichols (ZN)	56
5.1.2.2.- Método de la curva de reacción de Ziegler-Nichols	56
5.3.- Diseños realizados	58
5.3.1.- Control PD	58

5.3.2. Control PID	64
6.- Diseño de un control no lineal de Lyapunov para el control de la estabilidad de un quadrotor	71
6.1.- Introducción al control no lineal de Lyapunov	71
6.2.- Diseño de un control no lineal de Lyapunov	71
6.3.- Simulación de un control mediante la teoría de Lyapunov	74
7.- Diseño de un control robusto QFT para el control de la estabilidad de un quadrotor	78
7.1.- Introducción a la metodología de control QFT	78
7.2.- Diseño QFT realizado	79
7.3.- Simulación del control QFT diseñado	86
8.- Diseño y construcción de un quadrotor	91
8.1.- Introducción	91
8.2.- Propulsión	91
8.2.1.- Motores	91
8.2.2.- Control electrónico de velocidad	92
8.2.3.- Hélices	94
8.2.4.- Determinación de la fuerza del sistema de propulsión	94
8.3.- Sensores	96
8.3.1.- Acelerómetro triaxial digital ADXL345	97
8.3.2.- Giróscopo triaxial digital L3G4200D	98
8.3.3.- Magnetómetro digital HMC5883L	98
8.3.4.- Altímetro digital BMP085	99
8.4.- Procesador central	99
8.4.1.- Micro computador BeagleBoneBlack	100
8.5.- Arquitectura física y lógica del vehículo	102
8.6.- Modelo construido	108
9.- Validación experimental	112
9.1.- Consideraciones previas al ajuste de los motores	112
9.2.- Pruebas y procedimientos experimentales a realizar	114
9.3.- Pruebas experimentales realizadas	115
10.- Estudio económico	119
11.- Conclusiones y trabajo futuro	121
Anexo A	125
Anexo B	127
Anexo C	128
Referencias	129

## Índice de figuras

Fig. 1.1. Diagrama de bloques de un sistema UAV	16
Fig.1.2. Quadrotor desarrollado para investigación	19
Fig. 1.3. Planificación temporal del proyecto	24
Fig. 2.1. Esquema conceptual del quadrotor	25
Fig. 2.2. Rotación en torno al eje X	27
Fig. 2.3. Rotación en torno al eje Y	27
Fig. 2.4. Rotación en torno al eje Y	28
Fig. 2.5. Sistema de coordenadas usado en el modelo de Newton-Euler	32
Fig. 2.6. Esquema simplificado de un motor	37
Fig. 3.1. Esquema general del modelo	43
Fig. 3.2. Dinámica del quadrotor	44
Fig. 3.3. Bloque de normalización de la señales de control	45
Fig. 3.4. Modelo rotacional del quadrotor	45
Fig. 3.5. Modelo translacional del quadrotor	46
Fig. 4.1. Subsistema de ángulos	49
Fig. 4.2. Arquitectura de control propuesta para el quadrotor	51
Fig. 5.1. Estructura clásica de un PID	52
Fig. 5.2. Esquema básico de un PID modificado	54
Fig. 5.3. Respuesta al escalón en lazo abierto	57
Fig. 5.4. Modelo de Simulink de un control PD	59
Fig. 5.5. Respuestas al escalón en lazo cerrado con control PD	60
Fig. 5.6. Respuestas al escalón en lazo cerrado con control PD modificado	61
Fig. 5.7. Diagrama de bode (a) control PD de Roll, (b) control PD de Pitch, (c) control PD de Yaw	62
Fig. 5.8. Respuestas al escalón en lazo cerrado con control PD modificado	64
Fig. 5.9. Modelo de Simulink de un control PID	64
Fig. 5.10. Respuestas al escalón en lazo cerrado con control PID	65
Fig. 5.11. Control PID con saturación en el término derivativo	66
Fig. 5.12. Diagrama de bode (a) control PD de Roll, (b) control PD de Pitch, (c) control PD de Yaw	68
Fig. 5.13. Respuestas al escalón en lazo cerrado con control PID	69
Fig. 6.1. Modelo de Matlab-Simulink del control de Lyapunov propuesto	74

Fig. 6.2. Respuestas al escalón en lazo cerrado con control Lyapunov	75
Fig. 6.3. Control de Z en el punto de equilibrio	76
Fig. 7.1. Definición de la planta y de las incertidumbres	82
Fig. 7.2. Estabilidad robusta (a), seguimiento robusto de la referencia (b) y rechazo a las perturbaciones a la salida	83
Fig. 7.3. Diagrama de Nichols con curvas de restricción finales $B(j\omega)$ y la representación de la función de transferencia en lazo abierto	83
Fig. 7.4. Diagrama de Nichols tras la inclusión de un primer cero (a) y con la inclusión de un segundo	84
Fig. 7.5. Diagrama de Nichols tras incluir 3 polos en la función de transferencia del control	85
Fig. 7.6 Ajuste de la función del prefiltro	85
Fig. 7.7. Validación para (a) estabilidad robusta y (b) rechazo a las perturbaciones	86
Fig.7.8. Modelo de control diseñado mediante la técnica QFT	87
Fig. 7.9. Respuestas al escalón para cada variable	88
Fig. 7.10. Respuesta temporal para Z con ángulos estabilizados a cero	88
Fig. 8.1. Motor usado en la construcción del quadrotor.	92
Fig. 8.2. Esquema genérico de un ESC	93
Fig. 8.3. ESC usado en el modelo construido	93
Fig. 8.4. Experimento para determinar la fuerza producida por el propulsor	94
Fig. 8.5. Característica Fuerza-Señal PWM	95
Fig. 8.6. Sensores integrados	97
Fig. 8.7. BeagleBoneBlack	100
Fig. 8.8. Arquitectura hardware del vehículo	102
Fig. 8.9. Arquitectura del software implementado	103
Fig. 8.10. Propuesta de arquitectura de software con navegación autónoma	105
Fig. 8.11. Algoritmo implementado para la adquisición y procesado de datos	106
Fig. 8.12. Algoritmo del código implementado	107
Fig. 8.13. Base del quadrotor	108
Fig. 8.14. Base del prototipo del quadrotor	109
Fig. 8.15. Distribución de los elementos sobre la base del quadrotor	110
Fig. 8.16. Quadrotor construido	111
Fig. 8.17. Vehículo diseñado en vuelo	111
Fig. 9.1 Convenio de nomenclatura y giro de los motores	112

Fig. 9.2. Respuesta experimental para el control PID  
Fig. 9.3. Respuesta experimental para el control PD

115  
117

## Índice de tablas

Tabla 1.1. Ejemplos de prototipos desarrollados para I+D o comerciales.	21
Tabla. 2.1. Parámetros físicos del modelo.	42
Tabla 5.1. Diseño controlador método de oscilación Ziegler-Nichols	56
Tabla 5.2. Diseño controlador método curva Ziegler-Nichols	57
Tabla 5.3. Diseño controlador método curva Cohen-Coon	58
Tabla 5.4. Parámetros de los controladores PD.	59
Tabla 5.5. Parámetros de los controladores PD modificado.	62
Tabla 5.6. Parámetros de los controladores PID.	65
Tabla 5.7. Parámetros de los controladores PID.	67
Tabla 5.8. Comparativa entre los controladores clásicos implementados.	70
Tabla 6.1. Valores de ajuste de las constantes del control.	75
Tabla 6.2. Comparativa entre los controladores clásicos implementados.	77
Tabla 7.1. Márgenes de trabajo.	80
Tabla. 7.2. Velocidad del viento racheado.	81
Tabla. 7.3. Especificación tabulada de seguimiento robusto.	83
Tabla. 7.4. Tabla comparativa de los controles estudiados.	89
Tabla. 8.1. Resultados del experimento.	95
Tabla 8.2. Periféricos E/S de la BeagleBoneBlack.	101
Tabla 9.1. Parámetros del control PID implementado.	116
Tabla 9.2. Parámetros de la respuesta del control PID implementado.	116
Tabla 9.3. Parámetros del controlador PD.	116
Tabla 9.4. Parámetros de la respuesta del control PD implementado.	117
Tabla 10.1. Lista de material y coste.	119
Tabla 10.2. Instrumentación de laboratorio necesaria.	120
Tabla 10.3. Coste total de desarrollo.	120

# 1.- Introducción

## 1.1.- Motivación y objetivos

El desarrollo de vehículos aéreos ha representado uno de los hitos de la humanidad. En los últimos años la comunidad científica ha venido demostrando un especial interés en el desarrollo de vehículos aéreos autónomos, siendo una constante en las líneas de investigación y desarrollo la integración de mayor inteligencia y autonomía, a la vez que se reducían los costes de operación, desarrollo y mantenimiento, en particular en aquellos de pequeño tamaño (MAV, Micro Aerial Vehicle [1-3]). El reto que supone el desarrollo de vehículos de bajo coste orientados a automatizar acciones de control y supervisión cotidianas, así como la implementación del control de los mismos resulta interesante y motivador. Por otro lado, la posibilidad de la aplicación de estas tecnologías al ámbito civil crea una oportunidad de negocio que justifica la inversión de recursos y capital humano en este tipo de investigaciones. Además de los motivos comerciales, el desarrollo de un vehículo aéreo con un arquitectura totalmente propia (conocida, reconfigurable y reprogramable) permite utilizarlo en el ámbito de la investigación y la docencia, en campos como la navegación autónoma o el diseño de algoritmos de procesado de datos, entre otros. Otro factor que justifica el desarrollo de este tipo de tecnologías es el hecho que los sistemas terrestres, que a priori presentan un coste de operación mucho menor, presentan una limitación importante cuando se trata de terrenos abruptos. Este factor limitador, que se presenta de forma objetiva, hace necesario abrir nuevas vías de investigación que incluyen sistemas aéreos.

A pesar de las ventajas mostradas, el control de sistemas autónomos implica el procesado de la información relativa a un gran número de sensores, esto complica el gran medida el diseño de dichos vehículos. Por tanto el estudio y modelado matemático de los vehículos aéreos, así como el desarrollo de herramientas de simulación previas a la aplicación real, posibilitan el avance de la técnica de una forma más segura.

En este proyecto final de máster se fijan como objetivos el estudio y control de los vehículos aéreos basados en cuatro rotores. Para lograr esto se realizará un estudio de los sistemas existentes, además de un modelado matemático de los mismos que permita el desarrollo de un simulador sobre el cual realizar un primer estudio sobre diferentes controladores aplicables a este tipo de problemas. Además de lo anterior, se realizará un estudio de los diferentes sensores comerciales aplicables al vehículo, teniendo esto como objetivo el desarrollo de un prototipo de quadrotor sobre el que aplicar los conceptos estudiados previamente. A continuación se presentan un resumen esquematizado de los objetivos y el plan de trabajo propuesto para este proyecto.

- i. Estudio de los sistemas UAV basados en cuatro rotores:* En este punto se propone estudiar el estado del arte en los sistemas aéreos no tripulados basados en cuatro rotores.
- ii. Modelado y simulación de quadrotores:* Una vez presentado un esbozo de los sistemas en investigación, se desarrollará un modelo matemático completo del caso de estudio.
- iii. Diseño de controladores mediante diferentes metodologías para la estabilización de un quadrotor:* A partir del modelo matemático desarrollado en el punto anterior, se llevarán a cabo la implementación del modelo en MATLAB, con el fin de poder evaluar todas las alternativas de control contempladas.
- iv. Implementación de un quadrotor:* Con todo el conocimiento adquirido en los apartados previos se procederá a la implementación de un prototipo de quadrotor siguiendo los siguientes pasos.
  - a. Estudio del caso de control del quadrotor en un punto de vuelo estable.*
  - b. Definición de los márgenes de operación.*
  - c. Elección de los componentes.*
  - d. Adquisición de datos de los sensores.*
  - e. Comunicación Sensores-Unidad de control-Actuadores.*
- v. Validación experimental de los controladores diseñados:* El objetivo de este punto se presenta como la validación experimental de todo el trabajo desarrollado previamente.

## 1.2.- Vehículos Aéreos No Tripulados

### 1.2.1.- Definición y conceptos básicos

Un vehículo aéreo no tripulado se puede definir, de forma simplista, como un vehículo aéreo en el que se ha sustituido al piloto por un computador y un enlace de radio. La realidad es mucho más compleja ya que el vehículo aéreo debe ser diseñado desde un principio bajo los requerimientos y limitaciones inherentes al carecer de piloto.

Un sistema UAV (Unmanned Aircraft Vehicle), conocido como UAS (Unmanned Aircraft System) está formado por diferentes subsistemas (incluido la propia estructura), las cargas, el control local (y en ocasiones remoto), subsistemas de despegue, comunicaciones, entre otros. Todos estos subsistemas que conforman el sistema principal son los equivalentes que se encontrarían en un vehículo aéreo convencional, sólo que diseñados para el caso particular no tripulado.

Es importante no confundir nunca un vehículo aéreo no tripulado con un vehículo de modelismo, ya que la función de unos y de otros está claramente definida, por ejemplo los modelos de radio control están orientados a actividades de ocio, y siempre dispondrán de un operador remoto en todo momento, donde el operador controlará la trayectoria del vehículo, de manera que este modelo aéreo no requerirá de ningún sistema que lo dote de inteligencia, siendo ésta la otra gran diferencia, ya que un vehículo no tripulado tendrá siempre sistemas que lo doten de una cierta inteligencia y adaptabilidad a los cambios del entorno y a los requisitos de operación. El caso intermedio entre un vehículo de control remoto y un vehículo no tripulado es el caso del "drone", ya que el drone, que puede volar de forma autónoma sin intervención humana puede carecer o no de sistemas que lo doten de inteligencia. En cualquier caso, la frontera entre un drone y un UAV es difusa y muchas veces se habla de uno haciendo referencia al otro. A partir de este punto, se considerará que un UAV es un vehículo no tripulado que incluye sistemas de navegación, posicionamiento, sensores, sistemas de control y de computación que lo dotan de la capacidad de decidir y adaptarse a las variaciones del entorno.

Normalmente los vehículos no tripulados se clasifican en función de parámetros como el tamaño, o la capacidad para desempeñar funciones. También es cierto que en algunos casos es difícil clasificar un vehículo no tripulado en una única categoría ya que suelen presentar cierta flexibilidad que les permite desempeñar diferentes funciones aun manteniendo una misma configuración estructural. Una posible forma de clasificar este tipo de vehículos es en función de su autonomía, a continuación se muestra una posible clasificación en base a esto:

**HALE** - High Altitude Long Endurance. Este tipo de vehículos están diseñados para alcanzar altitudes de 15000 metros y presentan una autonomía superior a 24 horas. Este tipo de UAV desempeñan funciones de reconocimiento,

vigilancia y de combate, y son operados de forma exclusiva por las fuerzas armadas de los países.

**MALE** - Medium Altitude Long Endurance. Diseñados para volar a cotas situadas entre 5000 y 15000 metros de altitud y con autonomía no superior a 24 horas o 500 km. Las labores que desarrollan son muy parecidas al caso de los HALE. Son operados de forma exclusiva por las fuerzas armadas de los países.

**TUAV** - Medium Range or Tactical UAV. Este tipo de vehículos es menor que el MALE y se diseñan para misiones que requieran autonomía de entre 100 km y 300 km. El operador es el mismo que en los dos casos anteriores.

**UAV de corto alcance** (Close-Range UAV). Vehículo que opera en rangos inferiores a 100 km en misiones de reconocimiento. Suelen ser operados por las fuerzas armadas y por los cuerpos de seguridad y protección civil.

**MUAV** - Mini UAV. Vehículo no tripulado con un peso inferior a los 20 kg y autonomía inferior a los 30 km. Diseñados para operar en entornos urbanos, presentan velocidades de vuelo reducidas. Según la normativa legal de cada país pueden ser operados por todo el mundo o no.

**MAV** - Micro UAV. Son vehículos con envergadura inferior a 150 mm y rangos de operación de decenas o algunos centenares de metros. Orientados principalmente a operar en entornos urbanos e inclusive en interiores. Este tipo de vehículo puede ser operado por cualquier persona (sujeto a las regulaciones de los países). Esta alternativa es muy usada en centros de investigación y universidades para desarrollar proyectos de investigación y de docencia.

**NAV** - Nano Air Vehicle. Este tipo de vehículos presenta tamaños de unos pocos centímetros. Están orientados a investigación, en particular para el desarrollo de algoritmos de inteligencia distribuida y labores cooperativas entre vehículos. Su rango de operación es de unos pocos metros.

Como se ha mostrado en la anterior clasificación, el diseño UAV presenta una gran flexibilidad a la hora de enfrentar cada tipo de misión. Esto muestra que tomando la idea genérica de UAV es posible adaptar su diseño a unos requisitos previos definidos en función del rol que desempeñara.

Como se ha presentado hasta ahora, los UAV son de menor tamaño que los vehículos tripulados, ya que no es necesario el espacio reservado al piloto, esta disminución del tamaño reduce el coste de operación del vehículo al reducirse el peso de la aeronave. Además, los UAV diseñados bajo unas premisas determinadas permiten reducir los costes de mantenimiento y de almacenaje. Además de lo anterior, al reducirse el tamaño del vehículo, las labores de mantenimiento pueden ser llevadas a cabo por equipos de trabajo reducidos. Teniendo en cuenta todo esto se puede determinar que el coste de un UAV especializado para una tarea concreta puede ser de entre el 40 y el 80% del coste de un vehículo aéreo tripulado, visto desde el lado del coste de operación del UAV representa un 40% del coste de operación de un vehículo tripulado [8].

## 1.2.2.- Sistemas básicos de un UAV

Evaluado de forma técnica, un UAV comprende un gran número de elementos y subsistemas. Cada uno de estos elementos y subsistemas tiene que verse como un elemento fundamental del UAV, presentando todos ellos una funcionalidad crítica, constituyendo entre todos una estructura horizontal y en algunos casos cooperativa. En la figura 1.1 puede verse un esquema simplificado de los bloques fundamentales de un sistema UAV. A continuación se describen los bloques principales presentes en un sistema UAV convencional.

### 1.2.2.1.- Estación de control

La estación de control es el centro que controla las operaciones del UAV y sirve de interfaz hombre-máquina. La estación de control puede considerarse de tres formas, la primera como remota y situada en tierra (GCS, Ground Control Station), la segunda forma como embarcadas (SCS, Ship Control Station), la última posibilidad es que la estación de control esté embarcada en otro vehículo aéreo (ACS, Aircraft Control Station).

Desde el centro de control el usuario interactúa con el vehículo, ya sea de forma pasiva recibiendo datos o de forma activa reconfigurando el perfil de la misión. Además en algunos casos el proceso de aterrizaje está asistido desde el centro de control.

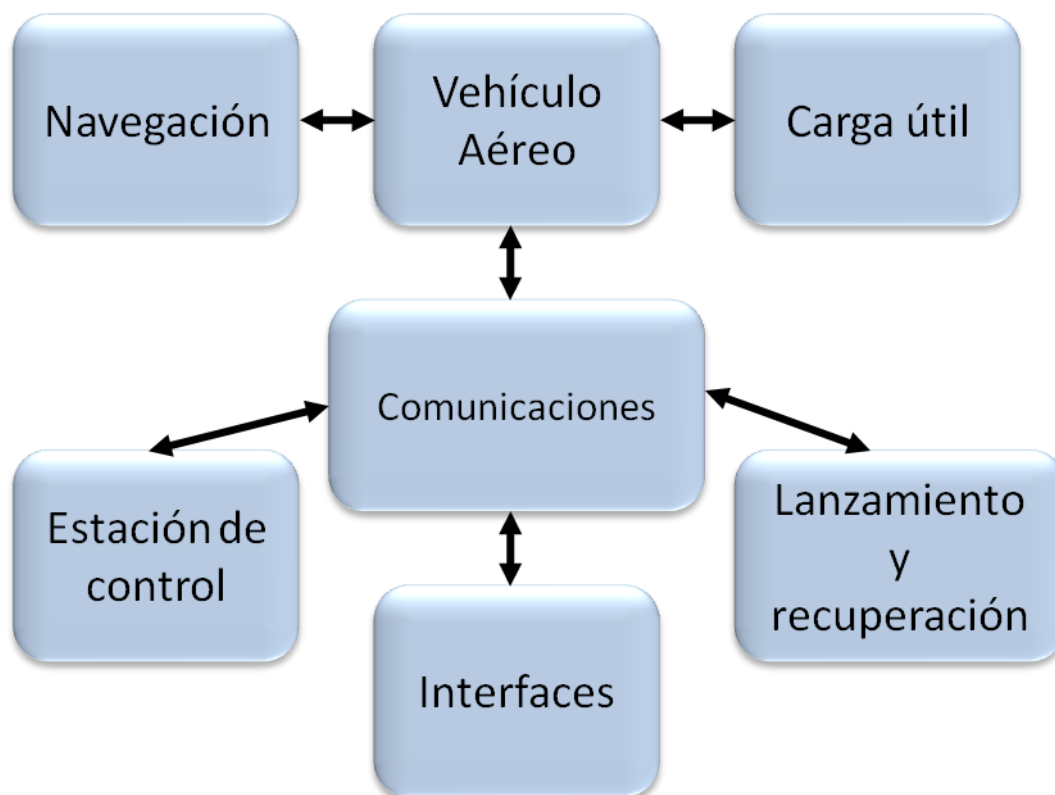


Fig. 1.1. Diagrama de bloques de un sistema UAV.

### **1.2.2.2.- Carga útil**

Los requisitos de carga vienen marcados por el perfil del rol que debe desempeñar. Por ejemplo, un UAV destinado al rodaje de tomas panorámicas deberá diseñarse de manera que sea capaz de embarcar una cámara de video y el sistema de estabilización de la misma. Esto podría requerir una capacidad de carga de unos 4 kg. Por otro lado, si el UAV debiera embarcar un sistema de radar de alta potencia, los requisitos de carga para el transporte de las antenas, la electrónica inherente y el sistema de alimentación podría implicar una capacidad de carga cercana a los 1000 kg. Además de todo esto, se debe considerar que el propio UAV tiene que ser capaz de transportar la electrónica y los sistemas de comunicación que permiten su operación.

### **1.2.2.3. Vehículo aéreo**

El tipo y las capacidades del vehículo aéreo vienen fijadas por los requisitos de la misión que debe desempeñar. Entre estos requisitos se incluiría la capacidad de carga, la instrumentación embarcada, la autonomía o las condiciones climáticas de operación. Contra más complejo sea el perfil de la misión a la que se destinará el vehículo, más sofisticado deberá ser.

Dependiendo del entorno y la velocidad que deba alcanzar el UAV, este deberá definirse una estructura entre dos posibilidades, la estructura de avión o la estructura de vehículo basado en rotores. Es dentro de esta segunda categoría donde se centra este proyecto final de máster. Normalmente cuando la velocidad tiene que ser baja o se requiere una estabilidad alta y poder quedar en vuelo estacionario se opta por la fórmula de helicóptero o UAV de rotores. Además, a nivel de diseño de la estructura, el modelo de rotores es mucho más sencillo, aunque también son más limitadas sus capacidades.

Las líneas de investigación más avanzadas contemplan la opción de vehículos híbridos o convertibles, con esto se hace referencia a vehículos no tripulados que pueden cambiar de forma dinámica su forma de vuelo, pasando de un sistema de hélices similar a un helicóptero a un sistema de avance horizontal como el de un avión.

### **1.2.2.4.- Navegación**

El sistema de navegación y de posicionamiento permite conocer la posición del vehículo en cada momento, permitiendo trazar y seguir la trayectoria correcta para la misión pre-programada. Para situaciones donde existe comunicación desde la estación de control, esto es importante, pero aún lo es más cuando el UAV es totalmente autónomo y por tanto tiene que hacer frente a las situaciones imprevistas en base a su propia inteligencia.

Tiempo atrás el sistema de navegación era costoso, pesado y poco preciso, y estaba basado en sistemas de navegación inercial y en protocolos de posicionamiento radio desde la estación de control. Sin embargo, en la actualidad los sistemas de navegación se basan en sistemas satelitales, principalmente en GPS (Global Positioning System), esto permite simplificar y

abaratarse el sistema de navegación embarcado en el UAV, además lo dota de alta precisión.

En los UAV no autónomos, la comunicación entre la estación de control y el vehículo es continua. Además, la comunicación o seguimiento desde la estación de control es una buena práctica (redundante) para dotar al sistema de robustez frente a fallos de la navegación GPS. Este seguimiento puede llevarse a cabo mediante:

1. Seguimiento Radar: El UAV es monitorizado mediante radar, de manera que se tiene una idea de donde está situado en cada momento.
2. Seguimiento Radio: Se establece un enlace continuo entre el UAV y el centro de control. Mediante el uso del tiempo de propagación es posible determinar la posición de vehículo.
3. Cálculo directo: Mediante la integración de los vectores de velocidad y del tiempo de propagación puede calcularse la posición del UAV.
4. Reconocimiento del entorno: Mediante una cámara embarcada en el UAV, este puede realizar un reconocimiento del terreno y cotejarlo con una base de datos, pudiendo determinar en cada momento su posición.

#### **1.2.2.5.- Sistemas de lanzamiento y recuperación**

Como es lógico los UAV requieren sistemas mecánicos para su despegue y su aterrizaje. Estos sistemas dependen en gran medida del tipo de UAV, por ejemplo un UAV de tipo avión de gran tamaño y gran capacidad de carga requerirá de una pista de despegue y aterrizaje y de ruedas y sistemas de frenado. Por otro lado, un pequeño vehículo basado en rotores podrá despegar y aterrizar de forma vertical siendo sólo necesario unos soportes a modo de pata para que la electrónica no haga contacto con el suelo.

#### **1.2.2.6.- Comunicaciones**

En un UAV el sistema de comunicaciones presenta una demanda y una criticidad particular, ya que debe ser capaz de mantener todos los enlaces de datos en tiempo real entre los elementos internos del UAV y entre el propio UAV y la estación de control o de recepción de datos. Estos sistemas deberán estar ajustados al alcance del vehículo, y dependiendo del rango de vuelo deberán ser de un tipo u de otro. Por ejemplo para distancias de cientos o miles de km el enlace deberá ser satelital ya que las limitaciones de las dimensiones de las antenas transmisoras impedirían otro tipo de comunicación. Por otro lado, para distancias de decenas o algunos cientos de km se podría plantear un sistema de radioenlaces de alta frecuencia, si bien es cierto, para que esto fuera viable se deberá garantizar cierta visibilidad directa entre la antena del UAV y la antena del centro de control.

En muchos casos la seguridad será un requisito en la transmisión, de manera que se deberán aplicar algoritmos criptográficos para el envío cifrado de los datos. De igual forma, dada la sensibilidad de los datos, los protocolos de comunicaciones deberán implementar soluciones de corrección de errores por ejemplo FEC (Forward Error Correction) además de códigos matemáticos que doten de robustez a los datos transmitidos (suponiendo que la transmisión de datos es digital ya que en analógico siempre presentará limitaciones a este respecto).

### 1.2.2.7.- Interfaces

En este conjunto de sub-sistemas se engloban todos los elementos que permiten de forma total o parcial la interacción entre los operadores/supervisores remotos y el UAV o entre los elementos del UAV. Aquí se pueden presentar diferentes criterios de diseño, como usabilidad o simplicidad en la presentación de la información. Para el operador esto será capital, ya que en una situación comprometida deberá ser capaz de procesar todos los datos ofrecidos por el UAV en el menor tiempo posible, minimizando de esta forma el tiempo de respuesta.

### 1.3.- Quadrotores

Un Quadcopter o Quadrotor es un UAV. Estos vehículos se caracterizan por tener cuatro rotores, en contraposición al caso convencional de helicópteros de dos rotores. La gran ventaja de este tipo de configuración, es la mejora en términos de estabilidad y precisión de vuelo mediante el balanceo de las fuerzas producidas por los cuatro motores [4].



*Fig.1.2. Quadrotor desarrollado para investigación [5].*

Esto posibilita que este tipo de vehículos tengan una mayor capacidad de carga. Otra ventaja significativa se da en el proceso de aterrizaje y despegue, ya que se dispone de una mayor estabilidad. Unido a esto, el hecho de operar con cuatro rotores permite al vehículo desempeñar sus funciones bajo condiciones de viento o lluvia. En la figura 1.2 se muestra un quadrotor es una estructura en aspa, donde su centroide coincide con el centro de masas del sistema. En cada extremo de la estructura se sitúa un rotor con su hélice. En el centro de la estructura, se sitúa el procesador que implementa el control, así como las baterías y la instrumentación necesaria para la navegación del vehículo.

El estado del arte de los quadrotores ha cambiado drásticamente en los últimos años debido al gran número de proyectos de investigación e iniciativas privadas que ha surgido en torno a su estudio. Muchos de estos proyectos están desarrollados en torno a vehículos comerciales, orientados al entretenimiento, un ejemplo de esto es el del Draganfly [6]. Es típico que en este tipo de iniciativas de investigación, estas plataformas comerciales sean modificadas para aumentar sus capacidades en lo referente a cómputo, navegación y comunicación, dando lugar a soluciones híbridas mucho más potentes y versátiles que las originales. Otras tendencias han venido relacionadas con la miniaturización del vehículo orientado al desarrollo de "enjambres" o formaciones de robots aéreos cooperativos.

Si bien muchos de los ejemplos de quadrotores que se pueden encontrar actualmente en la bibliografía han sido orientados a aplicaciones de laboratorio, otras propuestas se han desarrollado dentro de marcos de trabajo mucho más amplios, inclusive en escenarios reales. Algunos de los campos de aplicación han sido los referentes a la localización y rescate de personas en entornos hostiles, típicamente en alta montaña, donde los drones son los vehículos que pueden acceder a zonas remotas de forma fácil y sin poner en peligro la vida de los rescatadores. Por otro lado, la prevención y control de incendios es un campo que se ha empezado a explotar en los últimos años, ya que los vehículos no tripulados permiten la supervisión constante de zonas boscosas sin poner el peligro la vida de pilotos, además de estas aplicaciones, los UAV se usan cada vez más en rescate en el mar o para el control de fronteras. Su implantación depende en gran medida de la capacidad de los desarrolladores y empresas para minimizar los costes de los equipos, además de seguir mejorando en el control de estos vehículos, así como en el desarrollo de los algoritmos de navegación y detección.

A modo de resumen, en la tabla 1.1 se muestran algunos modelos de quadrotor, incluyendo modelos desarrollados por grupos de investigación en diferentes variantes y adaptados a diferentes perfiles de operación, así como

modelos comerciales orientados tanto a profesionales como a aficionados al aeromodelismo.

Título	Centro de I+D	Foto
<b>Variable-Pitch Quadrotor</b>	MIT	
<b>Mesicopter</b>	Stanford	
<b>Quadrotor</b>	Atilim	
<b>MD4-1000</b>	Microdrones	
<b>Phantom 2</b>	dji	

Tabla 1.1. Ejemplos de prototipos desarrollados para I+D o comerciales.

Normalmente, los vehículos autónomos disponen de sistemas de comunicación avanzados, siendo los más destacados los referentes a navegación vía satélite, tanto en su variante estadounidense GPS (Global Positioning System) o en su variante europea (Galileo). Este tipo de navegación permiten al vehículo volar de forma autónoma, sabiendo en cada momento donde está por medio de la comunicación que recibe de los satélites operados para tal fin. Además de esto, en algunos casos es necesaria la comunicación continua con la central de control de vehículo no tripulado, para este fin se dispone de sistemas de comunicación. Dependiendo del rango de distancias con las que tenga que operar el vehículo, la comunicación podrá hacerse mediante un enlace punto a punto entre la estación de control y el vehículo, o por contra deberá hacerse mediante un enlace satelital. Para el primer caso, el rango frecuencial podría ser un problema, ya que para largo alcance, es interesante trabajar en ondas medias o cortas, pero esto implica un problema con el tamaño de la antena transmisora (para garantizar suficiente eficiencia de transmisión la antena tiene que ser grande). Esto no se aplica en recepción, de manera que la antena puede ser mucho más pequeña. A medida que se aumenta la frecuencia de transmisión, el tamaño de la antena se reduce, si bien la propagación de las ondas electromagnéticas también cambian, volviéndose condición indispensable la visibilidad directa entre la antena transmisora y la receptora (salvando lo que pueda pasar a frecuencias intermedias con las zonas de Fresnel). Para comunicación satelital, en transmisión se deberá elegir una frecuencia lo suficientemente elevada (en el rango de las microondas) dentro de las bandas habilitadas para este tipo de servicios. Aquí el problema de cobertura queda limitado a la del propio satélite, siendo esta, de un modo u otro bastante universal, ya sea con satélites de uso civil o con satélites dedicados a otros usos.

La instrumentación embarcada en los sistemas actuales se basa principalmente en sensores que permitan estabilizar el vehículo (giróscopos, acelerómetros, altímetros), además de sistemas de monitorización de las condiciones ambientales (sensores de temperatura y humedad), de forma paralela pueden embarcar sistemas de percepción del entorno como cámaras digitales, sistemas de radar convencional o SAR (Synthetic Aperture Radar).

Uno de los puntos críticos en este tipo de sistemas es el de la gestión energética, dado que los recursos son limitados (baterías o combustible), el número de sistemas embarcados será limitado, así como lo será la autonomía. Todo esto limita de forma estricta las técnicas de diseño de estos sistemas, siendo capital la aplicación de técnicas de muy bajo consumo energético. Esto a su vez limita la capacidad de cómputo (relacionada con los requerimientos energéticos de forma exponencial), de manera que las tareas de procesamiento de señal que podrán ser realizadas in situ serán en gran medida limitadas. Algunas aeronaves integran sistemas de células solares para alargar la

autonomía del vehículo [7], si bien es cierto que este tipo de soluciones se orientan a sistemas de mayor envergadura.

## 1.4.- Estructura de la memoria

La presente memoria se ha estructurado en once capítulos. Cada capítulo puede resumirse como se muestra a continuación:

**Capítulo 1:** En este capítulo es donde se presenta el proyecto, se justifica y se pone en contexto. Además se realiza un repaso a las arquitecturas actuales en quadrotores.

**Capítulo 2:** Este capítulo se centra en tratar el problema del modelado matemático del quadrotor como vehículo aéreo. El objetivo del capítulo dos es dar un modelo matemático del quadrotor útil para simulación.

**Capítulo 3:** En el capítulo 3 se implementa el simulador del vehículo quadrotor sobre Matlab-Simulink. Este modelo de simulación se desarrolla en base al trabajo presentado en el capítulo 2.

**Capítulo 4:** El estudio del quadrotor como problema de control se realiza en este capítulo. En este capítulo se realiza un estudio de la dependencia de las variables y se presenta una propuesta de arquitectura de control.

**Capítulo 5:** En el capítulo 5 se estudian las técnicas de control clásicas así como su aplicación al problema del quadrotor. El ajuste y validación de los controles se realiza sobre el simulador desarrollado en el capítulo 3.

**Capítulo 6:** De igual forma que en el anterior, en el capítulo 6 se estudia la solución de control no lineal de Lyapunov aplicada al quadrotor. De igual forma que en el capítulo 5, el control se valida mediante simulación.

**Capítulo 7:** Este capítulo presenta el diseño de una solución de control para el quadrotor basada en la técnica QFT. El diseño se realiza mediante una herramienta gráfica y el resultado se valida mediante simulación y se compara con los obtenidos en los capítulos previos.

**Capítulo 8:** El capítulo 8 muestra el diseño, construcción y programación del quadrotor. Para ello se presenta de forma justificada la elección de los materiales, dispositivos y sistemas.

**Capítulo 9:** El capítulo 9 presenta la validación experimental del vehículo.

**Capítulo 10:** El capítulo 10 se centra en los costes económicos del trabajo.

**Capítulo 11:** En el capítulo 11 se presentan las conclusiones derivadas de los puntos anteriores así como las líneas futuras de trabajo.

## 1.5.- Planificación temporal del proyecto

Como estudio previo se ha realizado una distribución del tiempo dedicado a cada fase del trabajo de final de máster. En total se estima un tiempo de dedicación próximo a los 6 meses de duración. En la figura 1.3 se muestra el diagrama de planificación temporal del proyecto.

Semanas invertidas	Marco de trabajo, modelado, simulación y diseño	Estudio y diseño de las estrategias de control	Construcción y Validación experimental
1	Definición del problema y objetivos		
1	Estudio del arte	Documentación de las estrategias usuales	
4	Modelo matemático de quadrotores		
4	Implementación de un simulador para quadrotores		
1	Redefinición del problema	Diseño de las soluciones de control sobre el simulador	
2			Diseño del vehículo y búsqueda de los componentes
1			Construcción del vehículo
5			Programación del sistema de control
4			Validación experimental

Fig. 1.3. Planificación temporal del proyecto.

## 2.- Modelo matemático de un quadrotor

### 2.1.-Conceptos básicos sobre quadrotores

Un quadrotor se define como un vehículo aéreo de cuatro rotores situados en los extremos de una estructura en forma de aspa. Esta estructura debe ser ligera y robusta con el fin de minimizar la fuerza de empuje proporcionada por los motores, y así poder reducir sus dimensiones. Con el objetivo de desarrollar un modelo matemático realista pero con una complejidad razonable se han realizado las siguientes hipótesis de trabajo, estas se muestran a continuación:

- La estructura es rígida.
- La estructura se supone simétrica.
- El centro de gravedad y el origen del cuerpo fijo se asumen coincidentes.
- Las hélices se suponen rígidas.
- El empuje y el arrastre se toman proporcionales al cuadrado de la velocidad de las hélices.

Cada motor dispone de una hélice, de forma que los ejes de rotación son fijos y paralelos entre los motores. Además las hélices se diseñan de manera que la fuerza de empuje sea hacia abajo. La forma de variar el desplazamiento de quadrotor es la variación de la velocidad de giro de los motores. En la figura 2.1. se muestra el esquema conceptual del quadrotor.

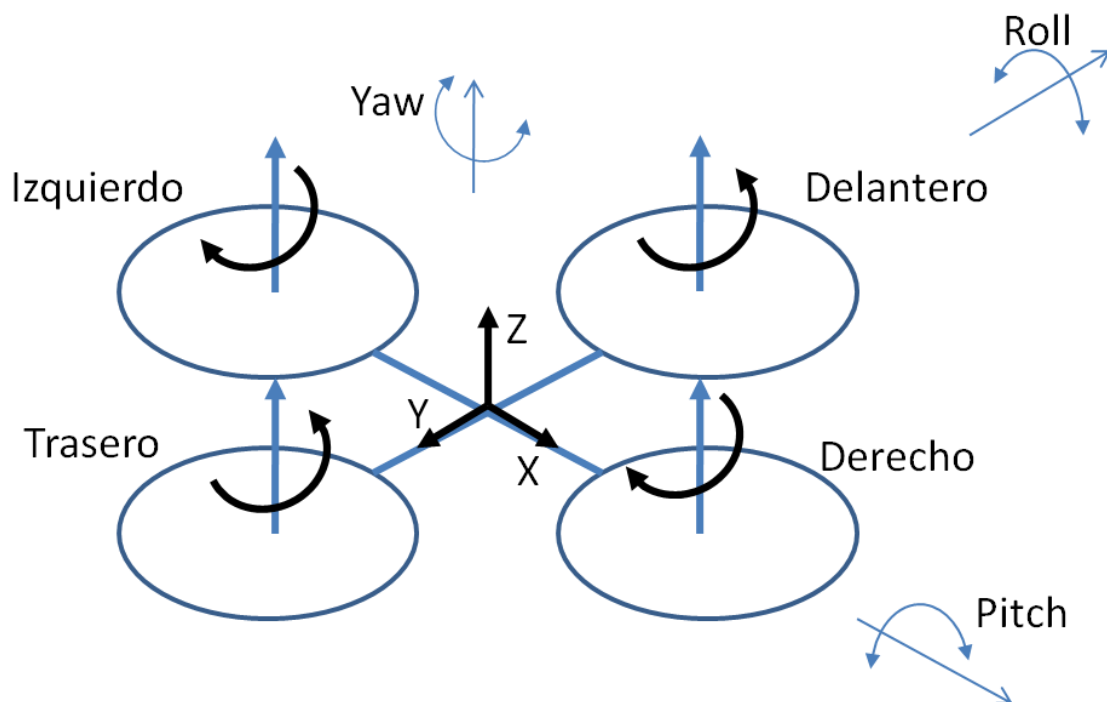


Fig. 2.1. Esquema conceptual del quadrotor.

Como se muestra en la figura 2.1. los rotores derecho e izquierdo rotan en sentido horario, mientras que el rotor delantero y el trasero lo hace en sentido anti horario. Esta configuración de giro hace posible omitir un rotor de cola [4]. En la configuración de estabilidad las velocidades angulares de los cuatro rotores serían la misma.

El movimiento de un quadrotor se puede describir a partir de la combinación de diferentes movimientos básicos en torno a los ejes y en base a la aceleración del cuerpo. Esto se muestra a continuación:

- **Aceleración:** Hace referencia al incremento o decremento de la velocidad de las hélices. Permite hacer que la altura de vuelo del quadrotor aumente o disminuya.
- **Roll:** El movimiento de Roll o de alabeo se define como el movimiento angular sobre el eje Y. Este movimiento se consigue mediante el aumento o disminución de la velocidad de uno de los motores (derecho o izquierdo) mientras que se hace lo opuesto en el motor complementario. Los motores delantero y trasero mantienen constante la velocidad.
- **Pitch:** El movimiento de Pitch o de cabeceo es similar al de roll, sólo que se define como el movimiento angular sobre el eje X. Este movimiento se consigue aumentando o disminuyendo la velocidad de los motores delanteros o traseros actuando sobre uno y llevando a cabo la acción complementaria sobre el opuesto. Los motores derecho e izquierdo deben mantener la velocidad constante.
- **Yaw:** El movimiento de Yaw o de guiñada se define como el movimiento angular sobre el eje Z. Se consigue mediante la variación de velocidad de forma pareada de los motores delantero-trasero y de los derecho-izquierdo. Este movimiento es posible ya que unos motores giran en sentido horario y los otros lo hacen de forma antihoraria.

Además de lo anterior, en la figura 2.1. se muestra cada uno de los movimientos en torno a cada eje. Para los capítulos siguientes se considerarán los giros que se muestran en la figura 2.1.

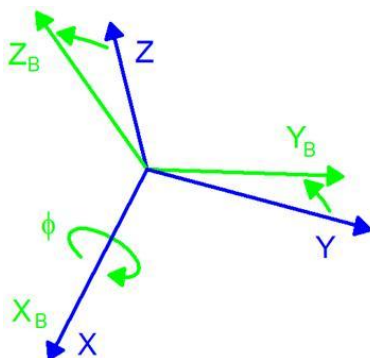
## 2.2.- Modelado del sistema

En este apartado se va a modelar el quadrotor mediante la técnica de Euler-Lagrange [4, 9, 12, 13, 14]. En primer lugar se hará una presentación de las herramientas matemáticas necesarias para tratar el problema, a continuación se deducirán las expresiones del modelo cinemático. El objetivo final es deducir un modelo útil para simulación.

### 2.2.1.- Matriz de rotación

La rotación de un cuerpo rígido en el espacio puede ser parametrizada usando el método de Euler o de ángulos de Euler. Aquí se tomará el criterio de giro típicamente usado en ingeniería aeronáutica [9], de manera que se considera que la dirección de movimiento sobre el eje X es positiva cuando lo hace hacia la derecha, y el movimiento ascendente del vehículo se produce en la dirección positiva del eje. Suponiendo un sistema de coordenadas orientado hacia la derecha, las tres matrices de rotación pueden ser expresadas como sigue:

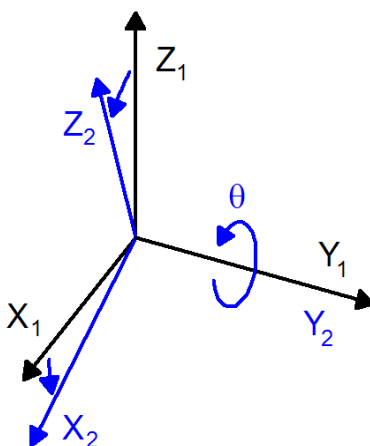
- Matriz de giro en torno al eje X. En la figura 2.2 se muestra el giro en torno al eje X así como la matriz del giro correspondiente (2.1).



$$R(x, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\text{sen}(\phi) \\ 0 & \text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Fig. 2.2. Rotación en torno al eje X.

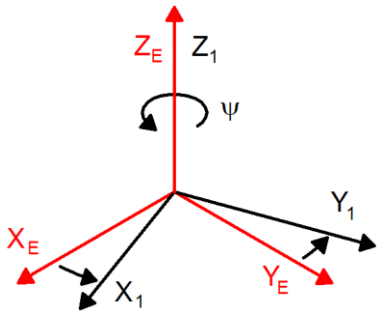
- Matriz de giro en torno al eje Y. En la figura 2.3 se muestra el giro en torno al eje X así como la matriz del giro correspondiente (2.2).



$$R(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Fig. 2.3. Rotación en torno al eje Y.

- Matriz de giro en torno al eje Z. En la figura 2.4 se muestra el giro en torno al eje X así como la matriz del giro correspondiente (2.3).



$$R(z, \psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\text{sen}(\psi) & 0 \\ \text{sen}(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Fig. 2.4. Rotación en torno al eje Y.

La matriz de rotación total (incluye la rotación en torno a cada eje) puede obtenerse como la combinación de las tres anteriores de la forma que sigue:

$$R(\phi, \theta, \psi) = R(x, \phi)R(y, \theta)R(z, \psi)$$

$$R(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) \cos(\theta) & \cos(\psi) \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) - \text{sen}(\psi) \cos(\phi) & \cos(\psi) \text{sen}(\theta) \cos(\phi) + \text{sen}(\psi) \text{sen}(\phi) \\ \text{sen}(\psi) \cos(\theta) & \text{sen}(\psi) \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) + \cos(\psi) \cos(\phi) & \text{sen}(\psi) \text{sen}(\theta) \cos(\phi) + \text{sen}(\phi) \cos(\psi) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \text{sen}(\phi) & \cos(\theta) \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

### 2.2.2.- Modelo matemático de Euler-Lagrange

El modelo dinámico se deriva mediante el uso del método de Euler-Lagrange [9]. El Lagrangiano planteado es  $L=T-V$ , donde T es la energía cinética y V la energía potencial. Planteando la forma general de las ecuaciones de movimiento mediante el método de Lagrange [9] se tiene:

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \right) - \frac{\delta L}{\delta q_i} \quad (2.5)$$

Donde  $\Gamma_i$  son las fuerzas y  $\delta q_i$  las coordenadas generalizadas.

Aplicando la matriz general de rotación al sistema de coordenadas del cuerpo rígido, se puede expresar cualquier punto del cuerpo como se muestra a continuación:

$$r_x(x, y, z) = (\cos(\psi) \cos(\theta))x + (\cos(\psi) \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) - \text{sen}(\psi) \cos(\phi))y + (\cos(\psi) \text{sen}(\theta) \cos(\phi) + \text{sen}(\psi) \text{sen}(\phi))z$$

$$r_y(x, y, z) = (\text{sen}(\psi) \cos(\theta))x + (\text{sen}(\psi) \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) - \cos(\psi) \cos(\phi))y + (\text{sen}(\psi) \text{sen}(\theta) \cos(\phi) + \text{sen}(\phi) \cos(\psi))z \quad (2.6)$$

$$r_z(x, y, z) = (-\text{sen}(\theta))x + (\cos(\theta) \text{sen}(\phi))y + (\cos(\theta) \cos(\phi))z$$

Las velocidades pueden obtenerse mediante la derivada de estas expresiones anteriores:

$$\begin{aligned}
 v_x(x, y, z) &= (-\text{sen}(\psi)\cos(\theta)\dot{\theta} - \cos(\theta)\text{sen}(\psi)\dot{\psi})x + (-\cos(\psi)\cos(\phi)\dot{\psi} \\
 &\quad + \text{sen}(\psi)\text{sen}(\phi)\dot{\phi} - \text{sen}(\psi)\text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta)\dot{\psi} \\
 &\quad + \cos(\psi)\cos(\phi)\text{sen}(\theta)\dot{\phi} + \cos(\psi)\text{sen}(\phi)\cos(\theta)\dot{\theta})y \\
 &\quad + (\cos(\psi)\text{sen}(\phi)\dot{\psi} + \text{sen}(\psi)\cos(\phi)\dot{\phi} \\
 &\quad - \text{sen}(\psi)\cos(\phi)\text{sen}(\theta)\dot{\psi} - \cos(\psi)\text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta)\dot{\phi} \\
 &\quad + \cos(\psi)\cos(\phi)\cos(\theta)\dot{\theta})z \\
 v_y(x, y, z) &= (-\text{sen}(\theta)\text{sen}(\psi)\dot{\theta} + \cos(\theta)\cos(\psi)\dot{\psi})x \\
 &\quad + (-\text{sen}(\psi)\cos(\phi)\dot{\psi} - \cos(\psi)\text{sen}(\phi)\dot{\phi} \\
 &\quad + \cos(\psi)\text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta)\dot{\psi} + \text{sen}(\psi)\cos(\phi)\text{sen}(\theta)\dot{\phi} \\
 &\quad + \text{sen}(\psi)\text{sen}(\phi)\cos(\theta)\dot{\theta})y \\
 &\quad + (\text{sen}(\psi)\text{sen}(\phi)\dot{\psi} - \cos(\psi)\cos(\phi)\dot{\phi} + \cos(\psi)\cos(\phi)\text{sen}(\theta)\dot{\psi} \\
 &\quad - \text{sen}(\psi)\text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta)\dot{\phi} + \text{sen}(\psi)\cos(\phi)\cos(\theta)\dot{\theta})z \\
 v_z(x, y, z) &= (-\cos(\theta)\dot{\theta})x + (\cos(\phi)\cos(\theta)\dot{\phi} - \text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta)\dot{\theta})y \\
 &\quad + (-\text{sen}(\phi)\cos(\theta)\dot{\phi} - \cos(\phi)\text{sen}(\theta)\dot{\theta})z
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Haciendo el cuadrado de la velocidad para cualquier punto:

$$\begin{aligned}
 v^2(x, y, z) &= x^2 \cdot (v_{Xx}^2 + v_{Yx}^2 + v_{Zx}^2) + y^2 \cdot (v_{Xy}^2 + v_{Yy}^2 + v_{Zy}^2) + z^2 \\
 &\quad \cdot (v_{Xz}^2 + v_{Yz}^2 + v_{Zz}^2) + 2xy(v_{Xx}v_{Xy} + v_{Yx}v_{Yy} + v_{Zx}v_{Zy}) \\
 &\quad + 2xz(v_{Xx}v_{Xz} + v_{Yx}v_{Yz} + v_{Zx}v_{Zz}) \\
 &\quad + 2yz(v_{Xy}v_{Xz} + v_{Yy}v_{Yz} + v_{Zy}v_{Zz})
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Sustituyendo las velocidades en cada dirección del espacio y operando la expresión anterior se consigue:

$$\begin{aligned}
 v^2(x, y, z) &= (y^2 + z^2)(\dot{\psi}^2\text{sen}^2(\theta) - 2\text{sen}(\theta)\dot{\phi}\dot{\psi} + \dot{\phi}^2) \\
 &\quad + (x^2 + z^2)(\dot{\psi}^2\text{sen}^2(\phi)\cos^2(\theta) \\
 &\quad + 2\text{sen}(\phi)\cos(\phi)\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\psi} + \cos^2(\phi)\dot{\theta}^2) \\
 &\quad + (x^2 + y^2)(\dot{\psi}^2\cos^2(\phi)\cos^2(\theta) \\
 &\quad - 2\text{sen}(\phi)\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\psi} + \text{sen}^2(\phi)\dot{\theta}^2) \\
 &\quad + 2xy(\dot{\psi}^2\text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta)\cos(\theta) \\
 &\quad + \dot{\psi}(\cos(\phi)\text{sen}(\theta)\dot{\theta} - \text{sen}(\phi)\cos(\theta)\dot{\phi}) - \cos(\phi)\dot{\phi}\dot{\theta}) \\
 &\quad + 2xz(\dot{\psi}^2\cos(\phi)\text{sen}(\theta)\cos(\theta) \\
 &\quad + \dot{\psi}(-\cos(\phi)\cos(\theta)\dot{\phi} - \text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta)\dot{\theta}) + \text{sen}(\phi)\dot{\phi}\dot{\theta}) \\
 &\quad + 2yz(-\dot{\psi}^2\text{sen}(\phi)\cos(\phi)\cos^2(\theta) \\
 &\quad + \dot{\psi}(\text{sen}^2(\phi)\cos(\theta)\dot{\theta} - \cos^2(\phi)\cos(\theta)\dot{\theta}) + \text{sen}(\phi)\cos(\phi)\dot{\theta}^2)
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Obtenido esto se puede expresar la energía cinética como se muestra a continuación en función de los momentos de inercia  $I_{ii}$  (Anexo A):

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}I_{xx}(\dot{\phi} - \dot{\psi}\text{sen}(\theta))^2 + \frac{1}{2}I_{yy}(\dot{\theta}\cos(\phi) + \dot{\psi}\text{sen}(\phi)\cos(\theta))^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}I_{zz}(\dot{\theta}\text{sen}(\phi) - \dot{\psi}\cos(\phi)\cos(\theta))^2
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

A su vez la energía potencial puede expresarse como:

$$\begin{aligned}
 V &= g \int (-\text{sen}(\theta)x + \text{sen}(\phi) \cos(\theta) y + \cos(\phi) \cos(\theta) z) dm(r) \\
 V &= \int x dm(x) (-g \text{sen}(\theta)) \\
 &\quad + \int y dm(y) (g \text{sen}(\phi) \cos(\theta)) + \int z dm(z) (g \cos(\phi) \cos(\theta))
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Considerando el lagrangiano  $L=T-V$  y la ecuación de movimiento (2.5) se puede escribir:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= \tau_{\phi} \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \tau_{\theta} \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} &= \tau_{\psi}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) \cos(\theta) \\ 0 & -\text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Donde la matriz (2.13) relaciona las velocidades y aceleraciones de los ángulos de Euler con las correspondientes instantáneas del sólido rígido.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= \ddot{\phi} I_{xx} - \ddot{\psi} \text{sen}(\theta) I_{xx} \\
 &\quad - \dot{\psi} \dot{\theta} \cos(\theta) (I_{xx} + (I_{yy} - I_{zz})(2 \cos^2(\phi) - 1)) \\
 &\quad + \dot{\theta}^2 \frac{1}{2} \text{sen}(2\phi) (I_{yy} - I_{zz}) - \dot{\psi}^2 \frac{1}{2} \text{sen}(2\phi) \cos^2(\theta) (I_{yy} - I_{zz}) \\
 &\quad + \int y dm(y) (-g \cos(\phi) \cos(\theta)) + \int z dm(z) (g \text{sen}(\phi) \cos(\theta)) \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \ddot{\theta} (I_{yy} \cos^2(\phi) + I_{zz} \text{sen}^2(\phi)) + \ddot{\psi} \frac{1}{2} \text{sen}(2\phi) \cos(\theta) (I_{yy} - I_{zz}) \\
 &\quad + \dot{\psi}^2 \frac{1}{2} \text{sen}(2\theta) (-I_{xx} + I_{yy} \text{sen}^2(\phi) + I_{zz} \cos^2(\phi)) \\
 &\quad + \dot{\theta} \dot{\psi} \text{sen}(2\phi) (I_{zz} - I_{yy}) + \dot{\psi} \dot{\phi} \cos(\theta) (\cos(2\phi) (I_{yy} - I_{zz}) + I_{xx}) \\
 &\quad + \int x dm(x) (-g \cos(\theta)) \\
 &\quad - \int y dm(y) (g \text{sen}(\phi) \text{sen}(\theta)) - \int z dm(z) (g \cos(\phi) \text{sen}(\theta)) \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} &= \ddot{\psi} (\cos^2(\theta) (I_{zz} \cos^2(\phi) + I_{yy} \text{sen}^2(\phi)) + \text{sen}^2(\theta) I_{xx}) \\
 &\quad - \ddot{\phi} \text{sen}(\theta) I_{xx} + \ddot{\theta} \frac{1}{2} \text{sen}(2\phi) \cos(\theta) (I_{yy} - I_{zz}) \\
 &\quad + \dot{\theta} \dot{\psi} \text{sen}(2\theta) (I_{xx} - I_{zz} \cos^2(\phi) + I_{yy} \text{sen}^2(\phi)) \\
 &\quad - \dot{\psi} \dot{\phi} \text{sen}(2\phi) \cos^2(\theta) (I_{yy} - I_{zz}) \\
 &\quad + \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta) (I_{xx} + (2 \cos^2(\phi) - 1) (I_{yy} - I_{zz})) \\
 &\quad - \dot{\theta}^2 \frac{1}{2} \text{sen}(2\phi) \text{sen}(\theta) (I_{yy} - I_{zz})
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Sustituyendo y expresando las velocidades y aceleraciones de los ángulos de Euler en función de las velocidades y aceleraciones instantáneas en el cuerpo fijo mediante la matriz (2.13) pueden simplificarse las ecuaciones (2.14) resultando:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= \dot{\omega}_x I_{xx} - (I_{yy} - I_{zz}) \omega_y \omega_z \\
 &\quad + \int y dm(y) (-g \cos(\phi) \cos(\theta)) + \int z dm(z) (g \sin(\phi) \cos(\theta)) \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -\sin(\phi) (\dot{\omega}_z I_{zz} - \omega_x \omega_y (I_{xx} - I_{yy})) \\
 &\quad + \cos(\phi) (\dot{\omega}_y I_{yy} - \omega_x \omega_z (I_{zz} - I_{xx})) \\
 &\quad + \int x dm(x) (-g \cos(\theta)) \\
 &\quad - \int y dm(y) (g \sin(\phi) \sin(\theta)) - \int z dm(z) (g \cos(\phi) \sin(\theta)) \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} &= -\sin(\theta) (\dot{\omega}_x I_{xx} - \omega_y \omega_z (I_{yy} - I_{zz})) \\
 &\quad + \sin(\phi) \cos(\theta) (\dot{\omega}_y I_{yy} - \omega_x \omega_z (I_{zz} - I_{xx})) \\
 &\quad + \cos(\phi) \cos(\theta) (\dot{\omega}_z I_{zz} - \omega_x \omega_y (I_{xx} - I_{yy}))
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Donde  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  son las velocidades angulares del cuerpo en cada uno de los ejes. Los momentos angulares pueden expresarse como sigue [9]:

$$bl(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) \tag{2.16}$$

$$bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \tag{2.17}$$

$$dl(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) \tag{2.18}$$

$$J_r \omega_y (\Omega_1 + \Omega_3 - \Omega_2 - \Omega_4) \tag{2.19}$$

$$J_r \omega_x (-\Omega_1 - \Omega_3 + \Omega_2 + \Omega_4) \tag{2.20}$$

Donde la ecuación (2.16) denota la diferencia de empuje vertical entre el motor 2 y el 4. La ecuación (2.17) a diferencia del empuje vertical entre el motor 1 y el 3. A su vez, la ecuación (2.18) se refiere al desequilibrio de fuerzas entre el sistema de motores 1-3 y el 2-4. (2.19) y (2.20) hacen referencia a los efectos giroscópicos debidos a la rotación de las hélices. Donde  $l$  es la distancia horizontal del eje vertical de la hélice al centro de gravedad de quadrotor,  $J_r$  es la inercia del motor y  $\Omega_i$  son los momentos angulares de las hélices. Los momentos de inercia totales en cada uno de los ejes del sistema del quadrotor pueden expresarse como:

$$\begin{aligned}
 \tau_x &= bl(\Omega_4^2 - \Omega_2^2) + J_r \omega_y (\Omega_1 + \Omega_3 - \Omega_2 - \Omega_4) \\
 \tau_y &= bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2) + J_r \omega_x (-\Omega_1 - \Omega_3 + \Omega_2 + \Omega_4) \\
 \tau_z &= dl(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2)
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Obtenido esto, y asumiendo que los ángulos son pequeños se puede obtener el modelo dinámico simplificado [4, 9, 12, 13, 14] mostrado en (2.22)

$$\begin{aligned}
 \ddot{\phi} &= \frac{J_r}{I_{xx}} (\Omega_1 + \Omega_3 - \Omega_2 - \Omega_4) \dot{\theta} + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} \dot{\psi} \dot{\theta} + \frac{bl(\Omega_2^2 - \Omega_4^2)}{I_{xx}} \\
 \ddot{\theta} &= \frac{J_r}{I_{yy}} (-\Omega_1 - \Omega_3 + \Omega_2 + \Omega_4) \dot{\theta} + \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} \dot{\psi} \dot{\phi} + \frac{bl(\Omega_3^2 - \Omega_1^2)}{I_{yy}} \\
 \ddot{\psi} &= \frac{d}{I_{zz}} (\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \dot{\theta} \dot{\phi}
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

### 2.2.3.- Modelo matemático basado en Newton-Euler

Con el objetivo de desarrollar un modelo matemático realista que permita el estudio del problema mediante simulación es necesario que este modelo refleje todos los movimientos del vehículo. En el apartado 2.2.2 se ha llegado a una expresión (2.22) que refleja los giros en torno a los ejes X, Y y Z, sin embargo estas expresiones no dan información sobre los desplazamientos en el espacio. Con el fin de mostrar un modelo completo del quadrotor a continuación se presenta otro método común en la bibliografía [10 -14] que permite obtener las expresiones de movimiento no modeladas mediante el método descrito en 2.2.2. En general, el movimiento en el espacio de un cuerpo rígido se puede expresar como la combinación de movimientos de rotación y translación. Las fuerzas que actúan en el cuerpo del vehículo están dadas por la fuerza translacional y la fuerza gravitacional. La dinámica de un cuerpo rígido sujeto a fuerzas externas aplicadas sobre su centro de masa pueden ser expresadas como se muestra a continuación [9].

$$\begin{bmatrix} mI & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega x m V \\ \omega x I \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ \tau \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

Donde  $I$  es la matriz de inercia de dimensión  $3 \times 3$ .  $V$  es la velocidad del cuerpo y  $\omega$  es la velocidad angular del cuerpo rígido.  $F$  y  $\tau$  son respectivamente la fuerza que sufre el cuerpo y el par,  $m$  hace referencia a la masa de quadrotor. Para poder llevar a cabo este análisis se usa el sistema de referencia inercial presentado en la figura 2.5.

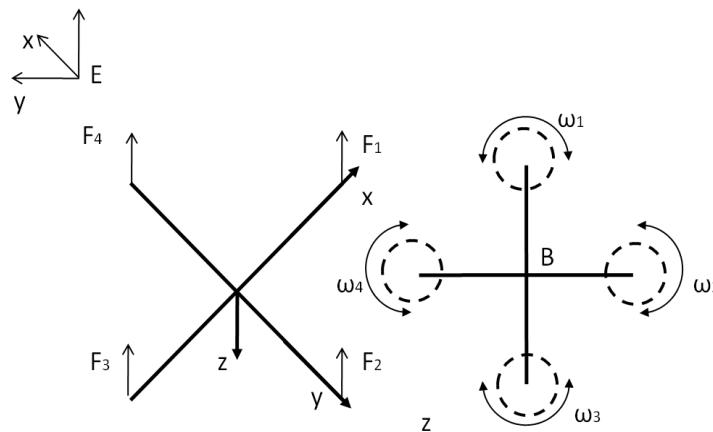


Fig. 2.5. Sistema de coordenadas usado en el modelo de Newton-Euler.

Para el análisis se ha considerado un eje de referencia fijo en la tierra llamado E, y un eje de referencia en el vehículo llamado B, se considera que el centro de masa y el origen del eje del vehículo coinciden. Usando esto y siguiendo el análisis realizado en [10-14] se pueden presentar las siguientes fuerzas y momentos:

### Fuerzas de empuje

Las fuerzas de empuje son el resultado de las fuerzas verticales que actúan sobre los rotores y pueden expresarse como sigue:

$$T = C_T \rho A (\Omega R_{rad})^2$$

$$\frac{C_T}{\sigma a} = \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \mu^2 \right) \theta_0 - (1 + \mu^2) \frac{\theta_{tw}}{8} - \frac{1}{4} \lambda \quad (2.24)$$

### Fuerzas horizontales

Las fuerzas horizontales sobre la estructura resultan en la conocida como "hub" pueden ser escritas como siguen a continuación:

$$H = C_H \rho A (\Omega R_{rad})^2$$

$$\frac{C_H}{\sigma a} = \frac{1}{4a} \mu \overline{C_d} + \frac{1}{4} \lambda \mu \left( \theta_0 - \frac{\theta_{tw}}{2} \right) \quad (2.25)$$

### Momento de arrastre

El momento de arrastre sobre el eje rotor es causado por las fuerzas aerodinámicas que actúan sobre las hélices. El momento de arrastre determina la potencia requerida para hacer girar el rotor.

$$Q = C_Q \rho A (\Omega R_{rad})^2 R_{rad}$$

$$\frac{C_Q}{\sigma a} = \left( \frac{1}{6} \right) \theta_0 - \frac{1}{8a} (1 + \mu^2) \overline{C_d} + \left( \frac{\theta_0}{6} - \frac{\theta_{tw}}{8} - \frac{1}{4} \lambda \right) \quad (2.26)$$

### Momento de rotación

Los momentos de rotación se dan en las hélices cuando el quadrotor avanza y pueden describirse como sigue:

$$R_m = C_{R_m} \rho A (\Omega R_{rad})^2 R_{rad}$$

$$\frac{C_{R_m}}{\sigma a} = -\mu \left( \frac{\theta_0}{6} - \frac{\theta_{tw}}{8} - \frac{1}{4} \lambda \right) \quad (2.27)$$

### Efectos del suelo

Cuando una aeronave de rotores se acerca al suelo (cuando la distancia de vehículo al suelo es menor que la mitad del diámetro de las aspas) la fuerza vertical de empuje aumenta. Esto se relaciona con la velocidad del flujo de aire inducida por los rotores y se conoce como efecto de suelo. Un modelo

simplificado que reescribe la fuerza de empuje cuando el suelo está cerca es la siguiente:

$$\frac{T_{IGE}}{\sigma a} = \frac{C_T^{IGE}}{\sigma a} + \frac{\rho A (\Omega R_{rad})^2 \delta v_i}{4 \Omega R_{rad}} \quad (2.28)$$

## 2.2.4.- Fuerzas y momentos implicadas en el movimiento

Hasta este momento se han presentado las diferentes fuerzas y momentos que actúan sobre el modelo del quadrotor. En este apartado se pretende hacer un resumen de todas las fuerzas y momentos que actúan en el movimiento del quadrotor [9].

### Momentos de balanceo

Efecto Giróscopo del cuerpo	$\dot{\theta} \psi (I_{yy} - I_{zz})$	(2.29)
-----------------------------	---------------------------------------	--------

Efecto de giro de las hélices	$J_r \dot{\theta} \Omega_r$	(2.30)
-------------------------------	-----------------------------	--------

Acción de balanceo	$l(-T_2 + T_4)$	(2.31)
--------------------	-----------------	--------

Momento horizontal	$h \left( \sum_{i=1}^4 H_{yi} \right)$	(2.32)
--------------------	--	--------

Momento de balanceo	$(-1)^{i+1} \sum_{i=1}^4 R_{mxi}$	(2.33)
---------------------	-----------------------------------	--------

### Momentos de Pitch

Efecto Giróscopo del cuerpo	$\dot{\theta} \psi (I_{zz} - I_{xx})$	(2.34)
-----------------------------	---------------------------------------	--------

Efecto de giro de las hélices	$J_r \dot{\phi} \Omega_r$	(2.35)
-------------------------------	---------------------------	--------

Acción de balanceo	$l(T_1 - T_3)$	(2.36)
--------------------	----------------	--------

Momento horizontal	$h \left( \sum_{i=1}^4 H_{xi} \right)$	(2.37)
--------------------	--	--------

Momento de balanceo	$(-1)^{i+1} \sum_{i=1}^4 R_{myi}$	(2.38)
---------------------	-----------------------------------	--------

### Momentos de Yaw

Efecto Giróscopo del cuerpo	$\dot{\theta} \psi (I_{xx} - I_{yy})$	(2.39)
-----------------------------	---------------------------------------	--------

Contra-par inercial	$J_r \dot{\Omega}_r$	(2.40)
---------------------	----------------------	--------

Desbalanceo del  
contra-par

$$(-1)^i \sum_{i=1}^4 Q_i \quad (2.41)$$

Fuerza horizontal  
dirección contraria  
al movimiento

$$l(H_{x2} - H_{x4}) \quad (2.42)$$

Fuerza horizontal  
dirección de  
movimiento

$$l(-H_{y1} - H_{y3}) \quad (2.43)$$

### Fuerzas sobre Z

Acción de los  
actuadores

$$\cos(\psi) \cos(\phi) \left( \sum_{i=1}^4 T_i \right) \quad (2.44)$$

Peso

$$mg \quad (2.45)$$

### Fuerzas sobre X

Acción de los  
actuadores

$$(\sin(\psi) \sin(\phi) + \cos(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi)) \left( \sum_{i=1}^4 T_i \right) \quad (2.46)$$

Fuerza horizontal  
en X

$$- \sum_{i=4}^4 H_{xi} \quad (2.47)$$

Fricción

$$\frac{1}{2} C_x A_c \rho \dot{x} |\dot{x}| \quad (2.48)$$

### Fuerzas sobre Y

Acción de los  
actuadores

$$(-\cos(\psi) \sin(\phi) + \sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi)) \left( \sum_{i=1}^4 T_i \right) \quad (2.49)$$

Fuerza horizontal  
en Y

$$- \sum_{i=4}^4 H_{yi} \quad (2.50)$$

Fricción

$$\frac{1}{2} C_y A_c \rho \dot{y} |\dot{y}| \quad (2.51)$$

Teniendo en cuenta todo lo anterior se pueden construir las ecuaciones que modelan el movimiento del quadrotor en función de todas las fuerzas que tienen lugar aplicándolo a (2.23).

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} &= \dot{\theta}\dot{\psi} \frac{(I_{yy} - I_{zz})}{I_{xx}} + \frac{J_r}{I_{xx}} \dot{\theta}\Omega_r + \frac{l(-T_2 + T_4)}{I_{xx}} - \frac{h}{I_{xx}} \left( \sum_{i=1}^4 H_{yi} \right) \\
&\quad + \frac{(-1)^{i+1}}{I_{xx}} \sum_{i=4}^4 R_{mxi} \\
\ddot{\theta} &= \dot{\phi}\dot{\psi} \frac{(I_{zz} - I_{xx})}{I_{yy}} + \frac{J_r}{I_{yy}} \dot{\phi}\Omega_r + \frac{l(T_1 - T_3)}{I_{yy}} - \frac{h}{I_{yy}} \left( \sum_{i=1}^4 H_{xi} \right) \\
&\quad + \frac{(-1)^{i+1}}{I_{yy}} \sum_{i=4}^4 R_{myi} \\
\ddot{\psi} &= \dot{\theta}\dot{\phi} \frac{(I_{xx} - I_{yy})}{I_{zz}} + \frac{J_r}{I_{zz}} \Omega_r + \frac{l(H_{x2} - H_{x4})}{I_{zz}} + \frac{l(-H_{y1} + H_{y3})}{I_{zz}} \\
&\quad + \frac{(-1)^i}{I_{zz}} \sum_{i=4}^4 Q_i \\
\ddot{z} &= g - \frac{1}{m} (\cos(\theta) \cos(\phi)) \sum_{i=1}^4 T_i \\
\ddot{x} &= \frac{1}{m} (\sin(\psi) \sin(\phi) + \cos(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi)) \sum_{i=1}^4 T_i - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^4 H_{xi} \\
&\quad - \frac{1}{2m} C_x A_c \rho \dot{x} |\dot{x}| \\
\ddot{y} &= \frac{1}{m} (-\cos(\psi) \sin(\phi) + \sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi)) \sum_{i=1}^4 T_i - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^4 H_{yi} \\
&\quad - \frac{1}{2m} C_y A_c \rho \dot{y} |\dot{y}|
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Las ecuaciones mostradas en (2.52) describen el movimiento del quadrotor en función de las fuerzas que actúan sobre él, y son dependientes de parámetros físicos del quadrotor, de los motores, de las hélices, de los momentos de inercia y de los ángulos instantáneos. El cálculo de los momentos de inercia se muestra en el anexo A.

### 2.2.5.- Modelo matemático del motor DC

Un motor es un actuador que convierte energía eléctrica en mecánica. En el caso de los motores DC, la energía aplicada es un nivel de tensión continua, o lo que es equivalente, se inyecta una corriente continua sobre el devanado de cobre que genera un campo magnético que mueve el rotor. Un motor se puede modelar como se muestra en la figura 2.6.

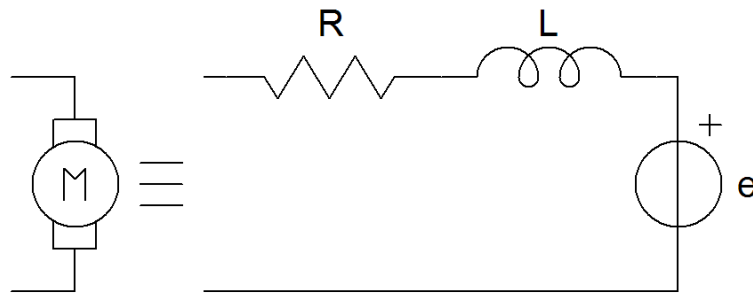


Fig. 2.6. Esquema simplificado de un motor.

El modelo simplificado se compone de una resistencia (R), esta resistencia modela las pérdidas por efecto del cable de cobre de la bobina del motor. Además se compone de una inductancia que incluye el efecto inductivo (L) del cable de cobre de la bobina y posibles elementos ferromagnéticos incluidos en el motor. También se incluye una fuente de tensión (e) que es proporcional a la tensión generada por el giro del motor.

En el caso real, este modelo incluirá una fuente de tensión conectada en bornes de R para entregar energía eléctrica al motor, además, para minimizar pérdidas, la impedancia de salida de la fuente de tensión en el caso ideal será de valor igual a la impedancia de entrada del motor, simplificando esto a nivel de resistencia, se deseará que la resistencia de salida de la fuente de tensión sea igual al valor de la resistencia de entrada del motor, esto garantizará la máxima transferencia de potencia de la fuente de tensión al motor, o lo que es lo mismo, minimizará las pérdidas.

Si sobre el modelo equivalente del motor se aplican las leyes de Kirchoff se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$L \frac{di}{dt} = u - R_{mot}i - k_e \omega_m \quad (2.53)$$

$$J_m \frac{d\omega_m}{dt} = M_{em} - M_{fr}$$

donde se tiene lo siguiente:

$L \rightarrow$  Inductancia equivalente del motor

$i \rightarrow$  Corriente del motor

$u \rightarrow$  Voltage aplicado al motor

$R_{mot} \rightarrow$  Resistencia interna del motor

$k_e \rightarrow$  Constante eléctrica del motor

$\omega_m \rightarrow$  Velocidad angular del motor

$J_m \rightarrow$  Momento de inercia del motor

$M_{em} \rightarrow$  Par motor

$M_{fr} \rightarrow$  Fricción del motor

Dado que el par motor puede expresarse como  $M_{em} = k_m \cdot i$  y la inductancia puede ser despreciada:

$$i = \frac{u - k_e \omega_m}{R_{mot}} \quad (2.54)$$

Sustituyendo (2.41) en (2.42) se llega a lo siguiente:

$$J_m \dot{\omega}_m = -\frac{k_m^2}{R_{mot}} \omega_m - M_{fr} + \frac{k_m}{R_{mot}} u \quad (2.55)$$

si se considera que el moto está conectado a un engranaje para variar la velocidad de la hélice se tiene que la velocidad angular de la hélice es:

$$\omega_{hélice} = \frac{\omega_m}{r} \quad (2.56)$$

Donde  $r$  es el factor de reducción del engranaje.

Visto esto, es interesante obtener una expresión para el momento de inercia de la hélice y el motor. Partiendo de (2.13) y de (2.14) se llega a:

$$\left( \frac{J_{hélice}}{\eta r^2} + J_m \right) \dot{\omega}_m = -\frac{k_m^2}{R_{mot}} \omega_m - \frac{d}{\eta r^3} \omega_m^2 + \frac{k_m}{R_{mot}} u \quad (2.57)$$

En (2.57)  $\eta$  se corresponde con la eficiencia del engranaje. De (2.57) se puede obtener una expresión para la aceleración angular del motor en función del momento de inercia total y de la velocidad angular.

$$\dot{\omega}_m = -\frac{k_m^2}{R_{mot} J_t} \omega_m - \frac{d}{\eta r^3 J_t} \omega_m^2 + \frac{k_m}{R_{mot} J_t} u \quad (2.58)$$

Haciendo en (2.58)  $1/\tau = k_m^2 / R_{mot} J_t$  y linealizando mediante Taylor en  $\omega_0$

(punto de trabajo) y reduciendo la expresión resultante al término de primer orden se puede obtener la ecuación que se muestra en (2.59):

$$\dot{\omega}_m = -\left( \frac{1}{\tau} + \frac{2d\omega_0}{\eta r^3 J_t} \right) \omega_m + \frac{1}{k_m \tau} u + \frac{d\omega_0^2}{\eta r^3 J_t} \quad (2.59)$$

### 2.3.- Modelo reducido para aplicaciones de control en tiempo real

Hasta ahora, en los apartados previos se ha desarrollado el modelo matemático en ecuaciones diferenciales que describe el movimiento del quadrotor. Si bien el modelo presentado en (2.52) es correcto, el coste

computacional que requiere su resolución es demasiado grande como para realizarlo en tiempo real. En tanto que se quiere optimizar el tiempo de computación es necesario realizar algunas aproximaciones que permitan su simplificación. Algunas de las aproximaciones que se pueden realizar son la siguientes:

- Las fuerzas horizontales (Hub) pueden considerarse pequeñas en comparación con otras fuerzas y despreciarse.
- Los momentos de rotación se consideran pequeños y se pueden obviar.
- Los coeficientes de empuje y arrastre se suponen constantes

Considerando los puntos anteriores se puede reescribir el sistema en forma de modelo de espacio de estados de la forma  $\dot{X} = f(X, U)$ .

$$X = [\phi \dot{\phi} \theta \dot{\theta} \psi \dot{\psi} z \dot{z} x \dot{x} y \dot{y}]^T \quad (2.60)$$

$$x_1 = \phi \quad x_7 = z$$

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\phi} \quad x_8 = \dot{x}_7 = \dot{z}$$

$$x_3 = \theta \quad x_9 = x$$

$$x_4 = \dot{x}_3 = \dot{\theta} \quad x_{10} = \dot{x}_9 = \dot{x}$$

$$x_5 = \psi \quad x_{11} = y$$

$$x_6 = \dot{x}_5 = \dot{\psi} \quad x_{12} = \dot{x}_{11} = \dot{y}$$

$$U = [U_1 U_2 U_3 U_4]^T \quad (2.62)$$

$$U_1 = b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2) \quad (2.63)$$

$$U_2 = b(\Omega_4^2 - \Omega_2^2)$$

$$U_3 = b(\Omega_1^2 - \Omega_3^2)$$

$$U_4 = d(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2)$$

$$f(X, U) = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \phi \dot{\psi} a_1 + \dot{\theta} a_2 \Omega_r + b_1 U_2 \\ \dot{\theta} \\ \phi \dot{\psi} a_3 - \dot{\phi} a_4 \Omega_r + b_2 U_3 \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \dot{\phi} a_5 + b_3 U_4 \\ \dot{z} \\ g - \left( \cos(\phi) \cos(\theta) \frac{1}{m} U_1 \right) \\ \dot{x} \\ u_x \frac{1}{m} U_1 \\ \dot{y} \\ u_y \frac{1}{m} U_1 \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{(I_{yy} - I_{zz})}{I_{xx}} \\
 a_2 &= \frac{J_r}{I_{xx}} \\
 a_3 &= \frac{(I_{zz} - I_{xx})}{I_{yy}} \\
 a_4 &= \frac{J_r}{I_{yy}} \\
 a_5 &= \frac{(I_{xx} - I_{yy})}{I_{zz}} \\
 b_1 &= \frac{l}{I_{xx}} \\
 b_2 &= \frac{l}{I_{yy}} \\
 b_3 &= \frac{1}{I_{zz}}
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

$$\begin{aligned}
 u_x &= (\cos(\phi) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\psi) + \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(\psi)) \\
 u_y &= (\cos(\phi) \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\psi) - \operatorname{sen}(\phi) \cos(\psi))
 \end{aligned}$$

De las expresiones anteriores se desprende que el cálculo de los ángulos (Roll, Pitch y Yaw) no depende de las coordenadas (x,y,z), mientras que sí que lo hace de las velocidades angulares de los motores.

Además de lo anterior y con el objetivo de trabajar con un modelo simplificado del vehículo que ayude a diseñar el control se puede realizar un desarrollo como serie de Taylor.

A continuación se presenta la linealización en torno al punto de operación mediante desarrollo en serie de Taylor, donde se ha considerado únicamente el primer término. De esta forma que si se aplica el desarrollo en serie de Taylor al sistema rotacional mostrado en (2.64) se obtiene como resultado las expresiones (2.66).

$$\ddot{\phi} = \dot{\psi}_0 a_1 (\dot{\phi} - \dot{\phi}_0) + a_2 \Omega_r^0 (\dot{\theta} - \dot{\theta}_0) + \dot{\phi}_0 a_1 (\dot{\psi} - \dot{\psi}_0) + \dot{\theta}_0 a_2 (\Omega_r - \Omega_r^0) + b_1 (U_2 - U_2^0)$$

$$\ddot{\theta} = (\dot{\psi}_0 a_3 - a_4 \Omega_r^0) (\dot{\phi} - \dot{\phi}_0) + \dot{\phi}_0 a_3 (\dot{\psi} - \dot{\psi}_0) - \dot{\phi}_0 a_4 (\Omega_r - \Omega_r^0) + b_2 (U_3 - U_3^0) \tag{2.66}$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\theta}_0 a_5 (\dot{\phi} - \dot{\phi}_0) + \dot{\phi}_0 a_5 (\dot{\theta} - \dot{\theta}_0) + b_3 (U_4 - U_4^0)$$

Obtenidas las expresiones anteriores, donde el índice 0 denota el punto de trabajo en torno al que se linealiza el sistema, se pueden asumir las siguientes hipótesis y aproximaciones:

1. Se desprecian los efectos aerodinámicos y los efectos giroscópicos.
2. Se supone que los ángulos pequeños y las perturbaciones son en torno al punto de operación.
3. Se supone que el punto de equilibrio es en torno a la posición horizontal.

Con estas hipótesis pueden simplificarse la expresiones vistas en (2.65) como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} &= a_2 \Omega_r^0 (\dot{\theta} - \dot{\theta}_0) + b_1 (U_2 - U_2^0) \\ \ddot{\theta} &= -a_4 \Omega_r^0 (\dot{\phi} - \dot{\phi}_0) + b_2 (U_3 - U_3^0) \\ \ddot{\psi} &= b_3 (U_4 - U_4^0)\end{aligned}\quad (2.67)$$

De lo anterior, y suponiendo las condiciones iniciales como nulas el sistema puede reescribirse de la siguiente forma [2,18].

$$\begin{aligned}I_{xx} \ddot{\phi} &= l U_2 \\ I_{yy} \ddot{\theta} &= l U_3 \\ I_{zz} \ddot{\psi} &= l U_4\end{aligned}\quad (2.68)$$

Si en (2.68) se incluye el modelo del motor (2.59) y se aplica la transformada de Laplace se puede obtener:

$$\begin{aligned}\phi(s) &= \frac{B^2 bl}{s^2(s+A)^2 I_{xx}} (u_4^2(s) - u_2^2(s)) = \frac{B^2 bl}{s^2(s+A)^2 I_{xx}} U_2 \\ \theta(s) &= \frac{B^2 bl}{s^2(s+A)^2 I_{yy}} (u_3^2(s) - u_1^2(s)) = \frac{B^2 bl}{s^2(s+A)^2 I_{yy}} U_3 \\ \psi(s) &= \frac{B^2 bl}{s^2(s+A)^2 I_{zz}} (-1)^{i+1} \sum_{i=1}^4 u_i^2(s) = \frac{B^2 bl}{s^2(s+A)^2 I_{zz}} U_4\end{aligned}\quad (2.69)$$

En (2.69) A, B son los coeficientes de la expresión linealizada del motor (2.59), donde C se ha despreciado al ser mucho menor que A y B.

La expresión (2.68) representa una buena aproximación al modelo de la dinámica rotacional, además puede ser operada en tiempo real con un coste computacional asumible para un sistema embarcado de bajo coste.

Para conseguir una expresión (2.68) válida para simulación se han calculado, de forma aproximada, los valores de los parámetros, todo ello tomando como referencia los componentes, motores, piezas elegidas para su montaje (ver capítulo Diseño y construcción de un quadrotor) y bibliografía. En la tabla 2.2. se muestran los parámetros necesarios para el modelo calculados en base a los componentes del vehículo:

	Valor	Unidades
<b>M</b>	0.550	kg
$I_{xx}$	$5.8 \cdot 10^{-3}$	kg · m <sup>2</sup>
$I_{yy}$	$5.8 \cdot 10^{-3}$	kg · m <sup>2</sup>
$I_{zz}$	$1.0 \cdot 10^{-2}$	kg · m <sup>2</sup>
<b>b</b>	$3 \cdot 10^{-5}$	N · s <sup>2</sup>
<b>d</b>	$7 \cdot 10^{-7}$	m
$R_{rad}$	0.125	m
<b>C</b>	0.04	m
$\theta_0$	0.26	rad
$\theta_{tw}$	0.045	rad
$J_r$	$6 \cdot 10^{-5}$	kg · m <sup>2</sup>
<b>L</b>	0.4	m

**Tabla. 2.2. Parámetros físicos del modelo**

Aplicando los parámetros de la tabla 2.2 a la expresión (2.69) se pueden obtener las siguientes expresiones mostradas en (2.70):

$$\begin{aligned}
 \phi(s) &= \frac{168.75}{s^4 + 3.96s^3 + 3.91s^2} U_2 \\
 \theta(s) &= \frac{168.75}{s^4 + 3.96s^3 + 3.91s^2} U_3 \\
 \psi(s) &= \frac{391.564}{s^4 + 3.96s^3 + 3.91s^2} U_4
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

Finalmente es necesario tratar la relación entre las entradas de control U y las velocidades angulares de los rotores  $\Omega$ . De la expresión (2.63) es posible obtener su equivalente matricial:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ 0 & -bl & 0 & bl \\ bl & 0 & -bl & 0 \\ -d & d & -d & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{pmatrix} \tag{2.71}$$

De forma equivalente puede obtenerse una expresión para las velocidades angulares en función del control mediante la inversa de (2.71).

$$\begin{pmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_3^2 \\ \Omega_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4b} & 0 & \frac{1}{2bl} & \frac{-1}{4d} \\ \frac{1}{4b} & -1 & 0 & \frac{1}{4d} \\ \frac{1}{4b} & 0 & \frac{-1}{2bl} & \frac{-1}{4d} \\ \frac{1}{4b} & \frac{1}{2bl} & 0 & \frac{1}{4d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} \tag{2.72}$$

Esta expresión (2.71) muestra la relación entre las velocidades de giro de los motores y la señal de control que se les aplica.

### 3.- Simulador del quadrotor

#### 3.1. Introducción

En este apartado se presenta la simulación del modelo matemático de la dinámica del quadrotor, para ello se ha utilizado MATLAB Simulink, programa con el que se han implementado las expresiones descritas en el capítulo 2. Es importante destacar que el problema de control se ha orientado a la estabilización rotacional del vehículo, tratando el control de la altitud del sistema translacional, pero dejando el resto de variables  $x$  e  $y$  en lazo abierto. Esto se ha realizado al considerar que el control  $X$  e  $Y$  corresponde más a la planificación de la navegación del vehículo, y que como tal sería una segunda etapa del proyecto una vez garantizada la estabilidad robustez frente a perturbaciones del vehículo.

#### 3.2. Estructura del sistema

El programa se ha estructurado en dos bloques principales, uno que describe e implementa la dinámica del quadrotor, y otro que contiene el controlador. De esta manera se ha querido dar una visión clara, sencilla y estructurada del problema. Internamente cada uno de los bloques puede presentar mayor o menor complejidad, pero se ha considerado que provea una visión integral de las expresiones presentadas en (2.64). En la figura 3.1 se muestra la pantalla principal del modelo del quadrotor.

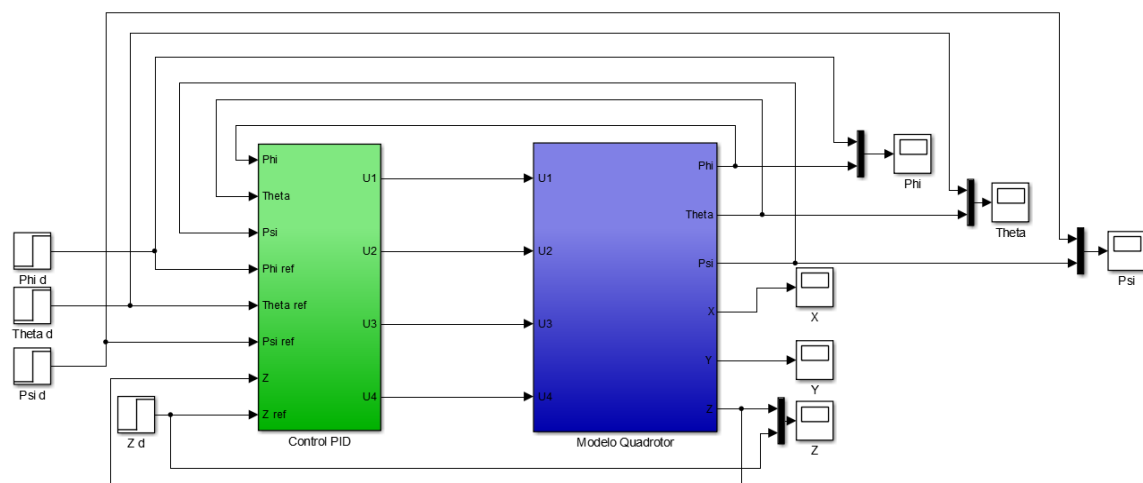


Fig. 3.1. Esquema general del modelo.

En la figura superior se muestra el esquema general del simulador, donde aparecen los dos bloques principales, uno para el control (verde) y otro para el modelo de la dinámica del quadrotor (azul). A nivel general puede verse como las variables realimentadas se corresponde con los ángulos, que son los más sencillos de medir en un caso real mediante giróscopos, si bien es cierto que podrían adquirirse otras variables como derivadas o aceleraciones.

### 3.2.1 Estructura del bloque quadrotor

Evaluando cada bloque por separado se puede entender mejor la filosofía de diseño seguida. Por ejemplo el modelo del Quadrotor, que es el más complejo de los dos incluye los siguientes bloques:

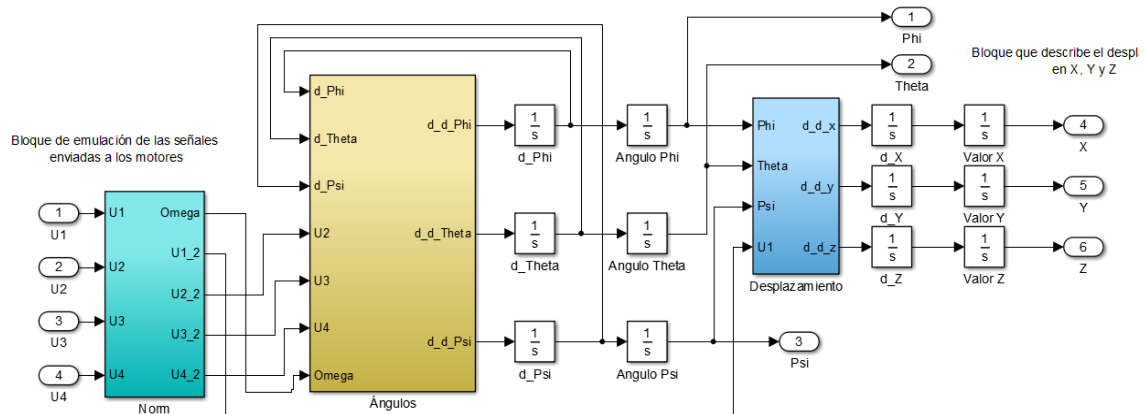


Fig. 3.2. Dinámica del quadrotor.

En la figura 3.2. puede verse como el quadrotor se estructura en tres bloques fundamentales:

1. Bloque de la dinámica de los motores

Este bloque, denotado en la figura 3.2 como "*Norm*", es el encargado de modelar el efecto de los motores en el sistema. El bloque realiza dos funciones, la primera la de reproducir el efecto combinado de las señales de control sobre los motores y la segunda la de generar unas variables manipuladas que incluyan la dinámica de los motores. Un detalle importante es relativo al modelo matemático del motor. Como se ha presentado en el capítulo 2, los motores presentan una respuesta frecuencial de tipo paso bajo. Las pruebas experimentales realizadas para la caracterización de los motores (ver capítulo 8) han dado como resultado una frecuencia eléctrica de corte de los motores usados del orden de 1.8MHz y una frecuencia de respuesta mecánica de 6.7kHz, estas frecuencias son lo suficientemente altas como para que los motores no alteren la dinámica de las señales de control, que presentarán frecuencias de 50Hz, (en caso contrario producirían un efecto de suavizado en las transiciones de alta frecuencia de las señales de control). Dado que las frecuencias máximas de respuesta del motor son lo suficientemente grandes, su contribución se puede omitir sin que se produzcan errores significativos. Esto permite mejorar la eficiencia computacional del simulador.

Este bloque tiene como entradas las señales de control, a su vez tiene como salidas las señales que corresponderían a las fuerzas experimentadas por el vehículo en respuesta a la acción de los motores.

En la figura 3.3. se presenta la configuración de este bloque de normalización y adecuación de las señales de control.

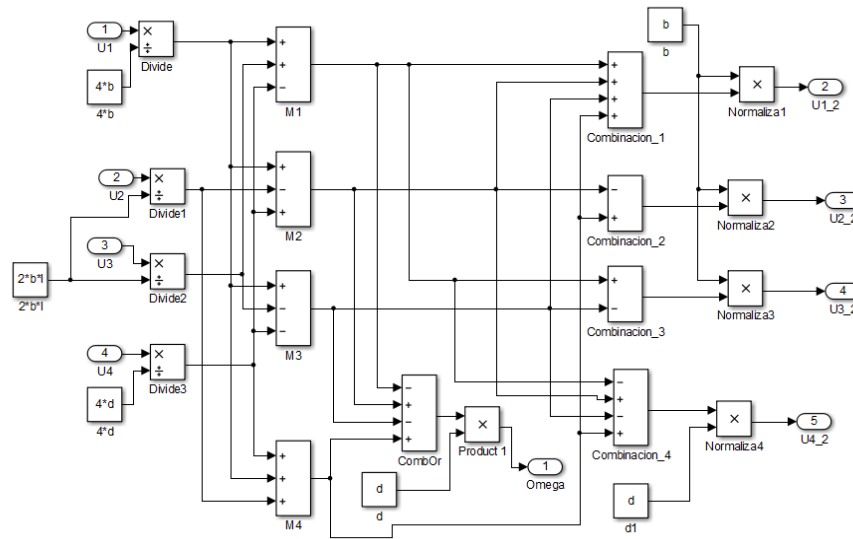


Fig. 3.3. Bloque de normalización de la señales de control.

## 2. Bloque de la dinámica rotacional del quadrotor

Este módulo, llamado "Ángulos" en el modelo general, implementa el comportamiento dinámico de los ángulos (rotacional) pitch, roll y yaw del vehículo. Además tiene como entrada el efecto de los motores sobre el vehículo, y las derivadas de los ángulos. Su salidas son las segundas derivadas de los ángulos. En la figura 3.4 se muestra la implementación de la dinámica rotacional.

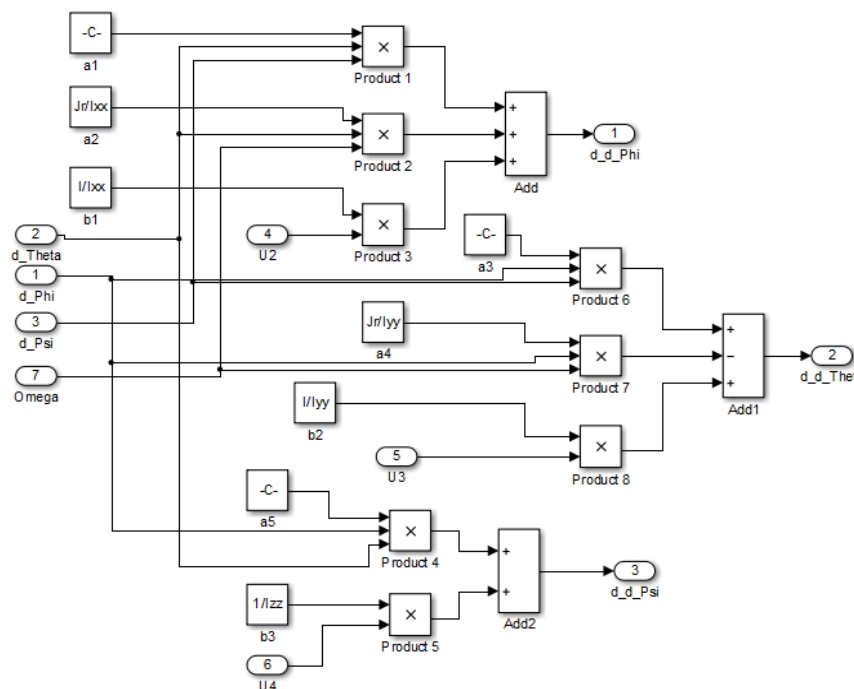


Fig. 3.4. Modelo rotacional del quadrotor.

### 3. Bloque de la dinámica translacional del quadrotor

El tercer bloque de la figura 3.2, llamado "*Desplazamiento*", se corresponde con el modelo matemático de la dinámica de movimiento translacional del vehículo. Este bloque tiene como entradas los ángulos de giro respecto a los ejes coordenados. Como puede entenderse de forma cualitativa, los motores ejercen una fuerza vertical que puede dar lugar a tres casos, que sea igual al peso del vehículo y este se encuentre en situación de sustentación, que sea mayor al peso y el vehículo ascienda, o que sea menor al peso y que el vehículo descienda, en estos tres casos se actúa sobre la coordenada Z del sistema de referencia del vehículo, si bien, sabiendo que se puede actuar de forma independiente sobre cada rotor, se producirá además que el vehículo varíe su inclinación, esto dará lugar a unas fuerzas con componente horizontal y vertical, haciendo que el vehículo se desplace en X e Y además de en Z. Es esta dinámica que engloba las velocidades angulares de los motores y la inclinación del vehículo la que se modela en el tercer bloque. A su vez, las salidas son las aceleraciones en X, Y y Z, que tras su integración corresponden a los desplazamientos en el espacio del vehículo. La figura 3.5 muestra la estructura interna de este bloque, que se corresponde con las ecuaciones vistas en el capítulo 2.

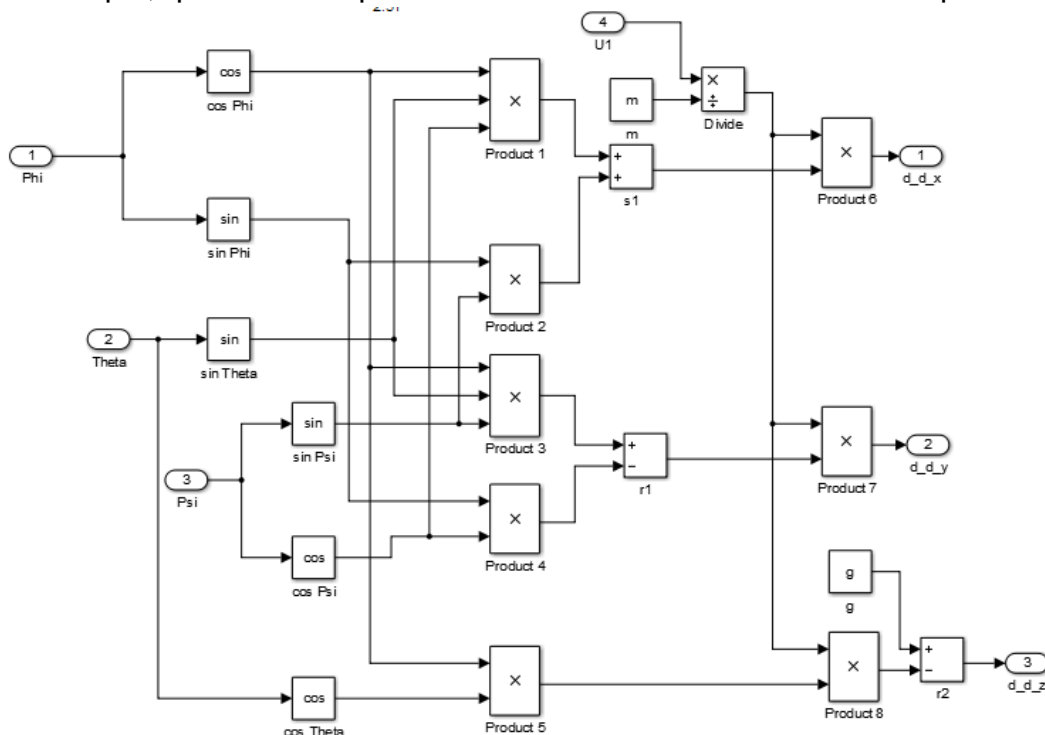


Fig. 3.5. Modelo rotacional del quadrotor.

Hasta ahora se han visto los bloques que permiten la simulación de la dinámica del quadrotor. El otro gran bloque, visto en la figura 3.1, correspondiente al control se estudiará en los capítulos correspondientes a cada uno de los controladores diseñados y simulados.

## 4.- Control de la estabilidad de un quadrotor

Hasta ahora se ha presentado en quadrotor desde el punto de vista físico o funcional, esto ha sido así al tratarse de un paso previo fundamental para abordar el estudio y diseño de los controladores. En este apartado se realiza el estudio del quadrotor en términos de bloque con entradas (variables manipuladas) y salidas (variables controladas).

### 4.1. Estabilidad del quadrotor como problema de control

Como se ha mostrado en los capítulos anteriores, el movimiento de un vehículo quadrotor presenta una complejidad más que significativa. Para que un quadrotor opere en condiciones de seguridad (tanto para la gente como para el propio vehículo) es necesario tratar diferentes problemas de control. En una primera gran división se podría hablar de control de la estabilidad y control del desplazamiento. El control de la estabilidad sería el relativo al control de la dinámica rotacional del vehículo, lo que incluye el control del ángulo de Roll, el de Pitch y el de Yaw. La necesidad de controlar los ángulos de rotación sobre los ejes coordenados es básico, ya que el otro subconjunto de ecuaciones que rigen el movimiento del vehículo en el espacio, modelo translacional, depende de los ángulos de giro en torno a los ejes. Dentro del control del movimiento de translación se dan tres casos, cada uno de estos casos corresponde al movimiento en la dirección del eje X, la del eje Y y la del eje Z. Por un lado, el control sobre X, Y y Z pueden entenderse como un problema de control de la navegación del vehículo, esto es así en muchos casos, y se recurre a diferentes técnicas para su control en base a información combinada a sistemas inerciales, de control remoto o de sistemas satelitales. Si bien en este proyecto se ha entendido el control en la dirección Z como algo necesario para la evaluación correcta del control rotacional y por ello se ha incluido en el problema de control. Será por tanto, el control en Z tratado como el control de la altitud de vuelo del vehículo, si bien para su correcto tratamiento se exigirá como paso previo el control del sistema rotacional del vehículo. De esta forma el desplazamiento a lo largo de Z será regular y controlado.

Dada la naturaleza multivariable del sistema, el tratamiento formal del problema de control del quadrotor requiere un estudio de la interacción de las variables incluidas en el proceso, pudiendo de esta forma establecer un emparejamiento entre variables y analizar la influencia de su acoplo. Esto último permitirá definir la estructura de control (centralizado o descentralizado) dando una explicación razonado a la elección realizada.

La gran mayoría de trabajos de control de un quadrotor desarrollados hasta la fecha no plantean el estudio formal de la interacción entre variables, en realidad no tratan el problema como un caso de control multivariable, sino que asumen de partida un caso de N controles monovariable. Esto es debido a que

todos ellos [1, 2, 4, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 19] proponen la solución del sistema linealizada en torno al punto de operación vista en el capítulo 2, sin partir del estudio global del problema. La solución que aporta la linealización muestra un desacople de las variables de forma que puede entenderse como una arquitectura descentralizada. Esto es así ya en todos ellos realizan las siguientes hipótesis (también consideradas en este proyecto) que simplifican las expresiones del modelo matemático del quadrotor. Estas hipótesis se presentan a continuación:

- Se toma la estructura del quadrotor como rígida. En otro caso se darían movimientos erráticos de los brazos, y creando desbalances de fuerzas de empuje vertical.
- La estructura debe de ser simétrica. Esto hace que el centro de masas del vehículo esté en el centro de físico del mismo.
- El centro de gravedad y el origen del cuerpo fijo se asumen coincidentes.
- Las hélices se suponen rígidas evitando así efectos de orden superior.
- El empuje y el arrastre se toman proporcionales al cuadrado de la velocidad de las hélices.
- Se desprecian los efectos aerodinámicos y los efectos giroscópicos al considerarse muy inferiores a las fuerzas verticales producidas por los motores.
- Se supone que los ángulos de operación son pequeños y las perturbaciones son en torno al punto de operación.
- Se toma el punto de equilibrio en torno a la posición horizontal.

Además de estas hipótesis es necesario definir los requisitos de operación del vehículo que deben ser tenidos en cuenta en el diseño del control.

- El sistema de control se limitará a los ángulos de giro en torno a los ejes X, Y y Z y a la altitud, de forma que la navegación en X e Y quedará en lazo abierto.
- El vehículo operará con rachas de viento reducidas (inferiores a los 5Km/h)
- El vehículo se diseñará para presentar una gran estabilidad (poca sensibilidad frente a las variaciones rápidas) a costa de perder velocidad. Esto implicará que no se permita sobreimpulso en la respuesta de los controladores.

## 4.2. Desacoplo del sistema

El objetivo fijado en este proyecto ha sido el control de la estabilidad del vehículo así como la altitud. Esto acota el alcance del problema, ya que a priori se trata de un sistema con seis variables (aceleración en X, Y, Z, ángulos de roll, pitch y yaw). Al no considerarse el control de la trayectoria del vuelo, el problema se puede reducir al estudio y control de los ángulos, y una vez estabilizados estos al control de la altitud. Como se ha visto en el capítulo 2, la aceleración angular en cada uno de los ejes del sistema de coordenadas depende de la velocidad angular en dichos ejes y de las variables de control. En la figura 4.1 se esquematiza la estructura del subsistema de ángulos.

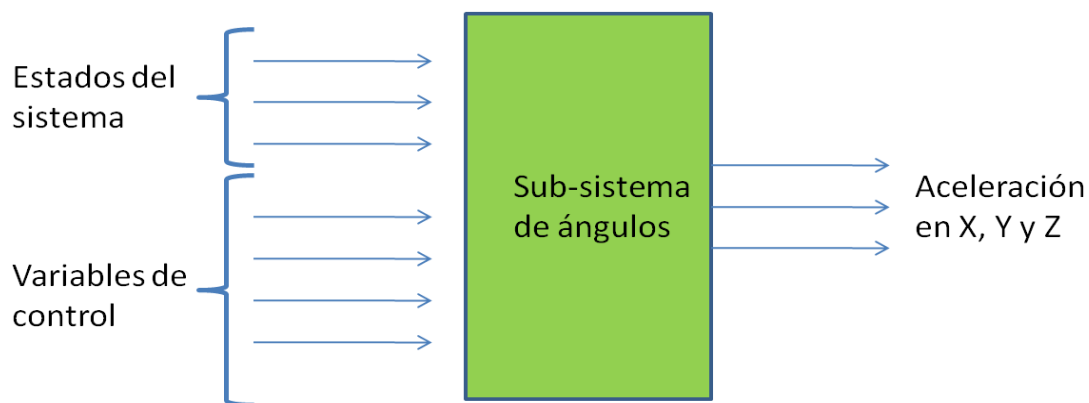


Fig. 4.1. Subsistema de ángulos.

Cómo se puede observar, el sistema es multivariable, donde cada variable de estado depende de una o más señales de control. Con el objetivo de estudiar el acoplamiento de las variables a continuación se presenta el estudio de la matriz de ganancias relativas. Para ello se escribe el sistema (2.64) de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{I_{yy} - I_{zz}}{2I_{xx}} \dot{\psi} & 0 & \frac{I_{yy} - I_{zz}}{2I_{xx}} \dot{\phi} \\ \frac{I_{zz} - I_{xx}}{2I_{yy}} \dot{\psi} & 0 & \frac{I_{zz} - I_{xx}}{2I_{yy}} \dot{\phi} \\ \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2I_{zz}} \dot{\theta} & \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2I_{zz}} \dot{\phi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{J_r}{I_{xx}} \dot{\phi} & \frac{l}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ \frac{J_r}{I_{yy}} \dot{\phi} & 0 & \frac{l}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Derivando la expresión matricial (4.1) respecto a las variables de control  $U_i$  resulta la matriz mostrada a continuación:

$$\begin{pmatrix} \frac{J_r}{I_{xx}} \dot{\phi} & \frac{l}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ \frac{J_r}{I_{yy}} \dot{\phi} & 0 & \frac{l}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Lo primero que se observa en (4.2) es que la variable de yaw se controla únicamente mediante  $U_4$ . Mientras que en las variables de pitch y roll se observa acoplamiento entre las variables de control  $U_2$  y  $U_3$ . Para estudiar la interacción entre variables se procede a calcular el valor de cada una de las variables implicadas. Tomando los parámetros de la tabla 2.2. se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{J_r}{I_{xx}} &= \frac{J_r}{I_{yy}} = 1.034 \cdot 10^{-2} \\ \frac{l}{I_{xx}} &= \frac{l}{I_{yy}} = 43.10 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Además de esto, una de las condiciones es que el vehículo presenta una respuesta lenta, esto hace que la velocidad angular de giro sobre los ejes sea pequeña. De esto último, junto con (4.3) se observa como la dependencia de  $U_1$  es mucho menor que la dependencia de  $U_2$  y  $U_3$ . De manera la asignación de variables quedaría de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &\rightarrow U_2 \\ \ddot{\theta} &\rightarrow U_3 \\ \ddot{\psi} &\rightarrow U_4 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Una vez se ha obtenido esto, y recordando la expresión (2.67) del capítulo 2, se aprecia como es el mismo resultado que se obtuvo al linealizar el sistema en torno al punto de trabajo mediante Taylor. De manera que se puede considerar que la interacción entre variables fuera de la asignación realizada es reducida, y que por tanto se puede plantear la arquitectura de control que se propone en el siguiente apartado.

### 4.3.-Arquitectura de control

Hasta este punto se han planteado diferentes conceptos del modelo del quadrotor, pero para poder abordar el problema del control del mismo es necesario determinar la arquitectura del control que se va utilizar. Como se ha visto en el punto anterior es posible realizar diferentes aproximaciones y suposiciones que permiten el desacoplo del sistema de una manera bastante

significativa. Además, el haber realizado la asignación de cada señal de control a una variable a controlar muestra que una opción bastante lógica y sencilla sería la de implementar una arquitectura de control descentralizada (multi-lazo), donde cada lazo se ajusta independientemente para cada variable a controlar.

El control descentralizado es un tipo de arquitectura que se compone de leyes de control que son independientes entre sí y que conectan un subconjunto de variables de salida con otro subconjunto de variables de entrada, de manera que estos subconjuntos de variables no son usados por más de un controlador. Este tipo de arquitectura trata un sistema multivariable de  $N$  variables como  $N$  sistemas monovariables independientes. En la siguiente imagen se muestra la arquitectura de control que se ha elegido.

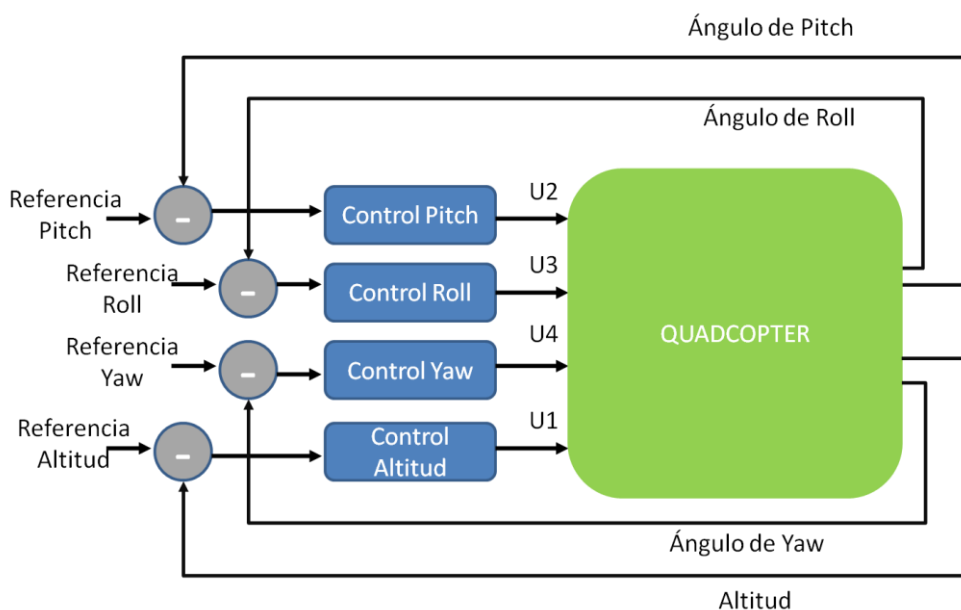


Fig. 4.2. Arquitectura de control propuesta para el quadrotor.

En el apartado 4.2 se ha visto como la interacción entre las variables de control es baja, por lo que la regulación debería poder realizarse con suficiente calidad con la arquitectura descentralizada. Para probar la validez, el simulador se ha realizado sin aproximaciones, es decir se implementa el modelo (2.64) sin recurrir a la expresión aproximada por Taylor (2.67), de forma que se pudiera tener la seguridad que esta arquitectura funciona correctamente sin errores en régimen estacionario.

Hay que destacar que en la figura 4.2. se ha asignado la variable de control 1 a la variable controlada  $Z$ , esto se puede hacer ya que  $X$  y  $Y$  se dejan en lazo abierto, de manera que aún controlando la posición de  $Z$  y los ángulos en cada eje, el comportamiento de  $X$  e  $Y$  será arbitrario. Como se comprobará posteriormente, esto complica la validación experimental del sistema.

## 5.- Diseño de controladores PID para el control de la estabilidad de un quadrotor

En este apartado se presentan las técnicas de control de tipo clásico, especialmente interesantes por su alta aplicación en la industria. El estudio y la simulación sobre el modelo desarrollado se centra en las estructuras PD y PID.

### 5.1.- Introducción a los controladores clásicos PID

#### 5.1.1.-Características principales

Los controles Proporcional Integral Derivativo (PID) están ampliamente extendidos en la industria, siendo una solución probada y fiable que puede adaptarse a una gran cantidad de situaciones donde el modelo de la planta cumpla algunas características. Las ventajas principales de los PID pueden resumirse como sigue:

- Buenas prestaciones de tiempo de respuesta y estabilidad para la mayoría de sistemas.
- Estructura simple que minimiza el coste computacional.
- Permite sintonía y reajuste.

La estructura de PID convencional es la que se muestra en la figura 5.1.

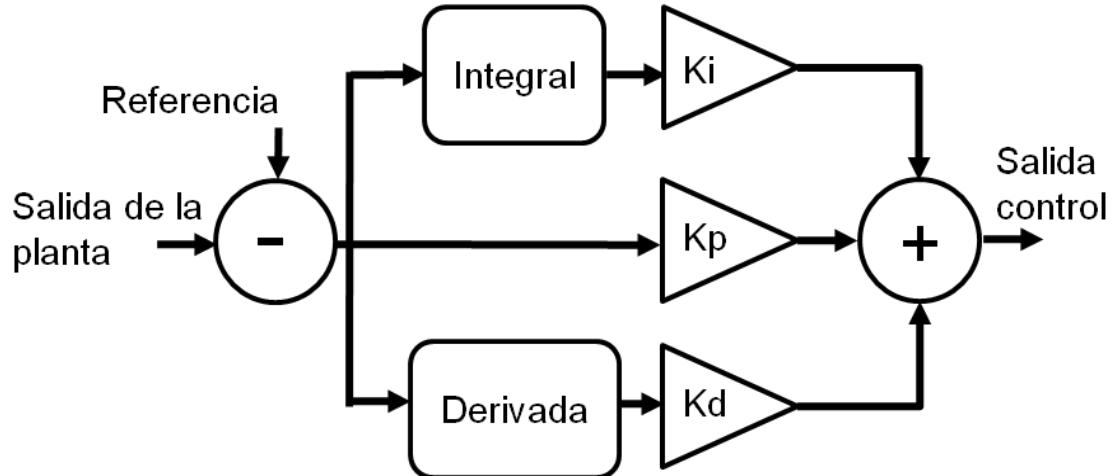


Fig. 5.1. Estructura clásica de un PID.

En la figura superior se muestra la estructura clásica de un PID, el cual consta de un bloque diferencia que da la señal de error definida como la diferencia entre el valor deseado o de consigna y la variable de salida de la planta que se quiere controlar.

La expresión de la señal de control es la siguiente:

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (5.1)$$

Donde  $u$  es la señal de control,  $e$  es el error entre la consigna y la variable a controlar. Como se muestra en (5.1) la señal de control es proporcional al error, la parte integral contribuye al sobreimpulso de la respuesta controlada y al tiempo de establecimiento, la ventaja de su inclusión es que minimiza el error en estado estacionario a costa de empeorar la dinámica de la variable controlada. El último término es proporcional a la derivada de error, este término contribuye a mitigar el sobreimpulso de la respuesta y a mejorar su tiempo de establecimiento, si bien puede producir problemas de estabilidad al tratarse de un cero. El efecto en el dominio transformado de Laplace puede servir para hacerse una idea de las contribuciones a nivel de polos y ceros que produce un control de tipo PID. en (5.2) se muestra esto.

$$u(s) = \left( K_p + \frac{K_I}{s} + sK_D \right) e(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) \quad (5.2)$$

En (5.2) puede verse como el término integral introduce un polo en el origen y el término derivativo corresponde a un cero. Si bien esta solución es correcta, en la práctica se tiende a aplicar la que se muestra a continuación con el fin de reducir problemas en los cambios bruscos del parámetro de error:

$$u(s) = \left( K_p + \frac{K_I}{s} + \frac{sK_D}{1 + s \frac{K_D}{NK_p}} \right) e(s) \quad (5.2)$$

Si el caso anterior hace referencia al control PID clásico, se pueden dar ciertas particularidades que hacen necesario modificar esta estructura de control. Estas limitaciones se representan por medio de la ganancia derivativa del control. A continuación se explica esta problemática.

La acción derivativa de (5.2) puede dar problemas cuando la señal medida presenta ruido de alta frecuencia [17]. Si se modela el ruido de alta frecuencia como un tono frecuencial de pulsación angular  $\omega$ . Esta sinusoidal produce una contribución al término derivativo del control como se muestra:

$$u_n = KT_d \frac{dn}{dt} = aKT_d \omega \cos(\omega t) \quad (5.3)$$

La expresión anterior implica que la amplitud de la señal de control puede ser muy grande cuando la frecuencia es grande. Esto puede dar problemas de saturación de los actuadores, produciendo una mala regulación cuando las variaciones de la salida son rápidas. Este efecto indeseado puede mitigarse modificando el término derivativo como se expresa a continuación:

$$D = -\frac{T_d}{N} \frac{dD}{dt} - KT_d \frac{dy}{dt} \quad (5.4)$$

Que a su vez puede expresarse como:

$$D = -\frac{sKT_d}{1 + s\frac{T_d}{N}} y \quad (5.5)$$

En (5.5) puede verse como el término derivativo se aplica tomando la variable controlada en vez del error entre esta y la señal de consigna. Esto soluciona el problema que pueda darse ante cambios bruscos (escalón) que al ser derivado daría un impulso que podría ocasionar problemas en el actuador.

En (5.2) y en (5.5) aparece un polo, la inclusión de este polo permite limitar la ganancia máxima que tendrá la señal derivativa, buscando de esta forma evitar la saturación del actuador.

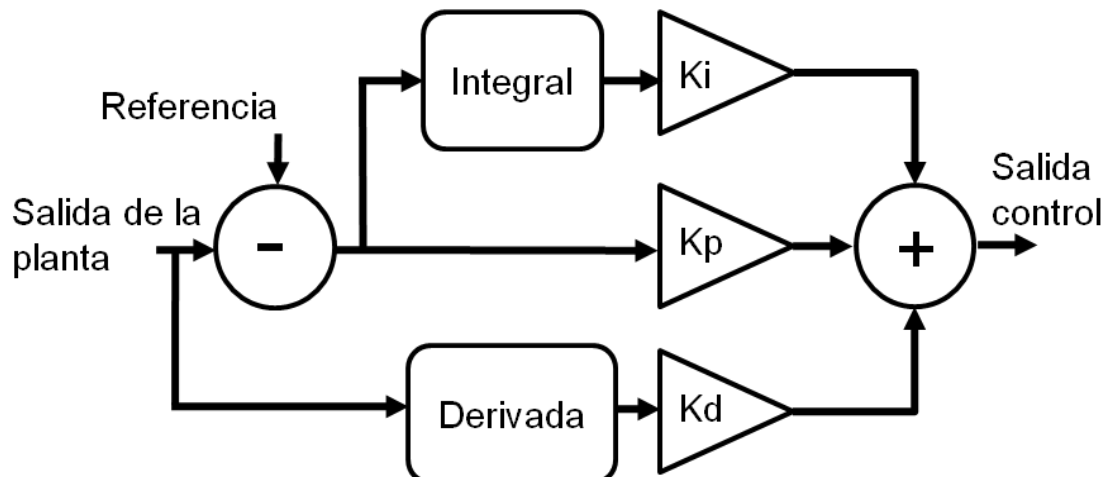


Fig. 5.2. Esquema básico de un PID modificado.

En la figura 5.2 se muestra el diagrama básico de un PID que sigue lo descrito por (5.4).

Visto el caso PID por ser uno de los casos más extendidos en la industria, y el más general de los controladores clásicos. Del caso PID se pueden desprender cualquiera de los otros controladores fundamentales Proporcional (P), Proporcional Integral (PI) o Proporcional Derivativo (PD). A continuación se presentan las señales de control de cada una de las estructuras:

$$u(s) = K_p e(s) \quad (5.6)$$

$$u(s) = \left( K_p + \frac{K_I}{s} \right) e(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{sT_i} \right) e(s) \quad (5.7)$$

$$u(s) = \left( K_p + \frac{sK_D}{1 + s\frac{K_D}{NK_p}} \right) e(s) = K_p \left( 1 + \frac{sT_D}{1 + s\frac{T_D}{NK_p^2}} \right) e(s) \quad (5.8)$$

Las expresiones (5.6), (5.7) y (5.8) corresponden respectivamente a P, PI y PD. Las características generales de cada controlador pueden ser descritas como sigue a continuación:

- Controlador P:

Este controlador es el más sencillo de todos, se basa en la generación de una señal proporcional al error entre la variable a controlar y la consigna. La principal ventaja de este controlador es su simplicidad y la mayor limitación que presenta es el error en régimen estacionario, que podrá ser minimizado aumentando el valor de proporcionalidad. Será interesante usar este tipo de controladores cuando el sistema a controlar sea tolerante con el error.

- Controlador PD:

El controlador proporcional derivativo es apropiado cuando el proceso que se debe controlar incorpora un integrador o cuando deben compensarse variaciones rápidas. Con este tipo de procesos la ganancia puede ser elevada (menor error en régimen estacionario) y no se hace necesaria la inclusión de integradores. El principal problema de los PD es que la parte derivativa es sensible al ruido de alta frecuencia (en realidad el elemento D es un filtro paso alto), para niveles altos de ruido, la ganancia del controlador deberá ser limitada. Además este tipo de controladores pierde eficacia en sistemas donde existen tiempos muertos, siendo en estos casos una solución poco útil.

- Controlador PI:

Este controlador incluye un término proporcional y un término integral. El elemento integral ayuda a reducir el error en régimen estacionario y a compensar las variaciones lentas. Este tipo de controladores es especialmente indicado cuando el proceso presenta retardos. También resulta interesante su aplicación en sistemas con niveles elevados de ruido de alta frecuencia.

- Controlador PID:

Permite mejorar el comportamiento de sistemas que no presentan grandes retardos, pero que si que presentan desfases significativos.

## 5.1.2.- Sintonía de controladores PID

La elección de los parámetros básicos de un controlador es una de las mayores dificultades a la hora de diseñar un control clásico PID. Si bien, si se conoce la función de transferencia del proceso que se quiere controlar, el controlador puede diseñarse mediante soluciones gráficas (por ejemplo con MATLAB [18]), si bien existirán casos en los que será complejo o costoso obtener la función de transferencia del proceso. Si bien en muchos casos será posible aplicar métodos de identificación de sistemas para obtener el modelo usando datos experimentales. En este apartado se presentan varios métodos empíricos de sintonía de PID donde no se requiere conocer la función de transferencia del proceso, sino que se utilizan medidas hechas sobre la planta.

### 5.2.1.1.- Método de oscilación de Ziegler-Nichols (ZN)

Este método sólo es válido para plantas estables en lazo abierto que del siguiente tipo:

$$G_0(S) = \frac{K_0 e^{-S\tau_0}}{A_0 S + 1} \quad (5.9)$$

La metodología que debe seguirse es la descrita a continuación:

1. Colocar la planta real bajo un control proporcional con una ganancia muy pequeña.
2. Aumentar la ganancia hasta que el lazo comienza a oscilar.
3. Medir la ganancia obtenida en 2 (ganancia crítica  $K_c$ ) y medir el periodo de la oscilación  $P_c$ .
4. Diseñar el control en base a la tabla 5.1.

	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5 \cdot K_c$	---	---
PI	$0.45 \cdot K_c$	$\frac{P_c}{1.2}$	---
PID	$0.6 \cdot K_c$	$0.5 \cdot P_c$	$\frac{P_c}{8}$

Tabla 5.1. Diseño controlador método de oscilación Ziegler-Nichols.

### 5.2.2.2.- Método de la curva de reacción de Ziegler-Nichols

Muchas plantas pueden describirse usando el modelo (5.9). Es posible obtener una versión linealizada aplicando el siguiente procedimiento:

1. Configurar la planta en lazo abierto y fijar un punto de operación usual de la misma.
2. Excitar la planta con un escalón una vez que la planta se ha estabilizado. El salto debe ser de entre un 10% y un 20% del valor nominal de operación de la planta.

3. Dejar estabilizar en torno al punto de estacionario.
4. Sobre la respuesta obtenida tomar la recta de máxima pendiente (figura 5.3).

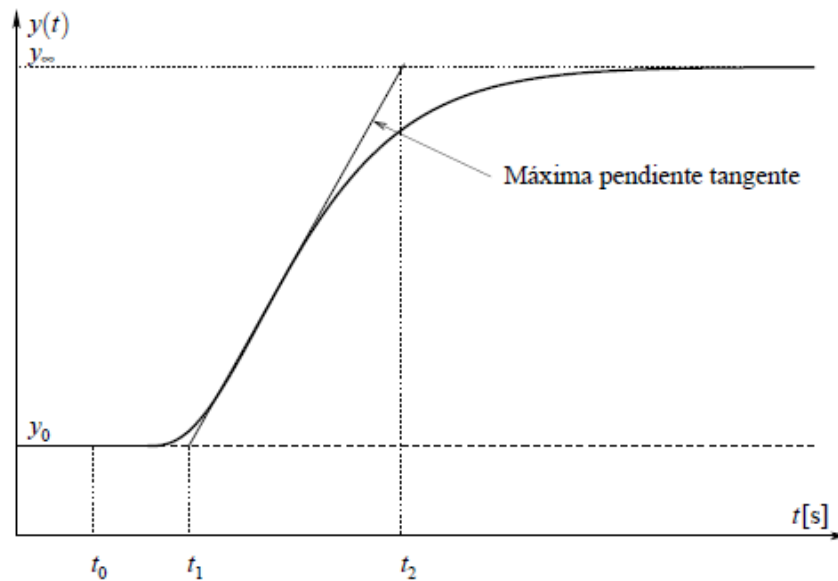


Fig. 5.3. Respuesta al escalón en lazo abierto.

5. Calcular los parámetros según (5.10)

$$\begin{aligned}
 K_0 &= \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \\
 \tau_0 &= t_1 - t_0 \\
 A_0 &= t_2 - t_1
 \end{aligned}
 \tag{5.10}$$

6. Obtener el controlador tal como se indica en la tabla 2.

	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$\frac{K_0}{A_0}$	---	---
PI	$\frac{K_0 \cdot \tau_0}{0.9A_0}$	$3\tau_0$	---
PID	$\frac{K_0 \cdot \tau_0}{1.2A_0}$	$2\tau_0$	$0.5\tau_0$

Tabla 5.2. Diseño controlador método curva Ziegler-Nichols.

La tabla 5.2 muestra un método, si bien en la literatura aparecen otros métodos empíricos como el de Cohen-Coon. Este se basa en el mismo principio que el de la curva de reacción de Ziegler-Nichols, sólo que el punto 6 debe sustituirse por la tabla 5.3.

	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$\frac{A_0}{K_0 \cdot \tau_0} \left(1 + \frac{\tau_0}{3A_0}\right)$	---	---
PI	$\frac{A_0}{K_0 \cdot \tau_0} \left(0.9 + \frac{\tau_0}{12A_0}\right)$	$\frac{\tau_0(30A_0 + 3\tau_0)}{(9A_0 + 20\tau_0)}$	---
PID	$\frac{A_0}{K_0 \cdot \tau_0} \left(\frac{4}{3} + \frac{\tau_0}{4A_0}\right)$	$\frac{\tau_0(32A_0 + 6\tau_0)}{(13A_0 + 8\tau_0)}$	$\frac{4A_0\tau_0}{(11A_0 + 2\tau_0)}$

Tabla 5.3. Diseño controlador método curva Cohen-Coon.

### 5.3. Diseños realizados

En este apartado se presentan los resultados de simulación, realizados con Matlab Simulink, para los controladores clásicos. Para la validación de los controladores se muestran las respuestas al escalón de cada variable controlada. Como se ha mencionado anteriormente, el control se ha realizado con una arquitectura descentralizada. Se ha actuado sobre las variables del sistema rotacional y sobre la altitud (correspondiente al sistema translacional), mientras que X e Y han permanecido en lazo abierto. Esto se ha realizado así debido a que el control de la navegación, o mejor dicho la planificación de la navegación, constituye un problema extenso, que se aparta del caso de estudio al tener que considerarse elementos de interacción con el entorno, obtenidos mediante sensores o estrategias de radionavegación, haciendo necesario un procesamiento de datos específico para permitir la navegación segura.

#### 5.3.1. Control PD

En primer lugar se presenta el modelo de Matlab Simulink implementado para la simulación del control. Este controlador se ha diseñado en base a lo mostrado en los capítulos previos. En particular, este controlador muestra una arquitectura descentralizada, donde cada control PD se encarga de la regulación de una variable. Estas variables han sido asignadas en base a lo visto en el capítulo 4, y se plantea el doble objetivo de conseguir la regulación de las variables de la planta y comprobar la calidad del emparejamiento de las variables que se proponen en las diferentes soluciones (aproximación por Taylor y análisis de la matriz de ganancias relativas). La solución para el término derivativo del control es la presentada en la figura 5.2 (omitiendo el término integral). El control del subsistema de ángulos sirve para generar las señales ya reguladas para el subsistema translacional, de esta forma se presenta la relación entre los ángulos de Roll, Pitch y Yaw sobre la altitud del vehículo, siempre teniendo en cuenta que bajo la aproximación de ángulos pequeños el sistema operaría de forma equivalente sin tener en cuenta la interacción entre los dos subsistemas.

En la figura 5.4 se muestra el control PD planteado con una arquitectura descentralizada.

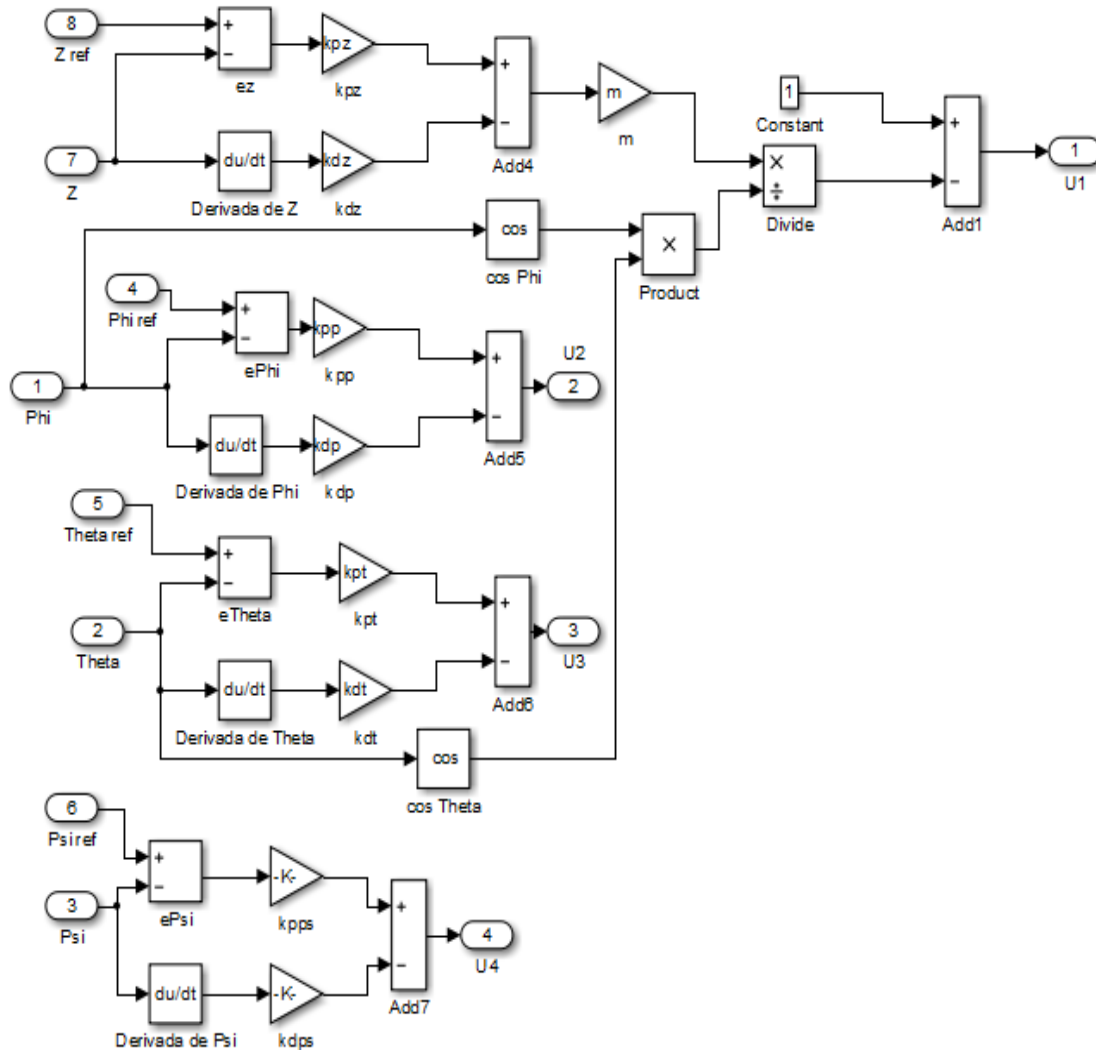


Fig. 5.4. Modelo de Simulink de un control PD.

La sintonía del control se ha realizado en dos aproximaciones. La primera aproximación se ha obtenido siguiendo lo descrito en el punto 5.2 del presente capítulo. Una vez fijado este punto se ha realizado un proceso de ajuste mediante prueba y error de los parámetros proporcional y derivativo del control. Este ajuste se ha realizado para buscar una solución lo más rápida posible pero sin que presente sobreimpulso en la respuesta. En la tabla 5.4 se presentan los parámetros de cada controlador.

Control PD	$K_p$	$K_d$
Roll	3	0.5
Pitch	5.25	0.8
Yaw	9.5	2.0
Altitud	500	100

Tabla 5.4. Parámetros de los controladores PD.

Una vez que los controladores han sido diseñados se puede proceder a la obtención de las variables temporales de interés. A continuación se realiza la

simulación del control PD, para el ajuste de las variables se ha realizado un proceso iterativo de prueba y error, partiendo de un punto de ajuste de compromiso siguiendo los procedimientos descritos en el presente capítulo. Los resultados que se han obtenido son los siguientes:

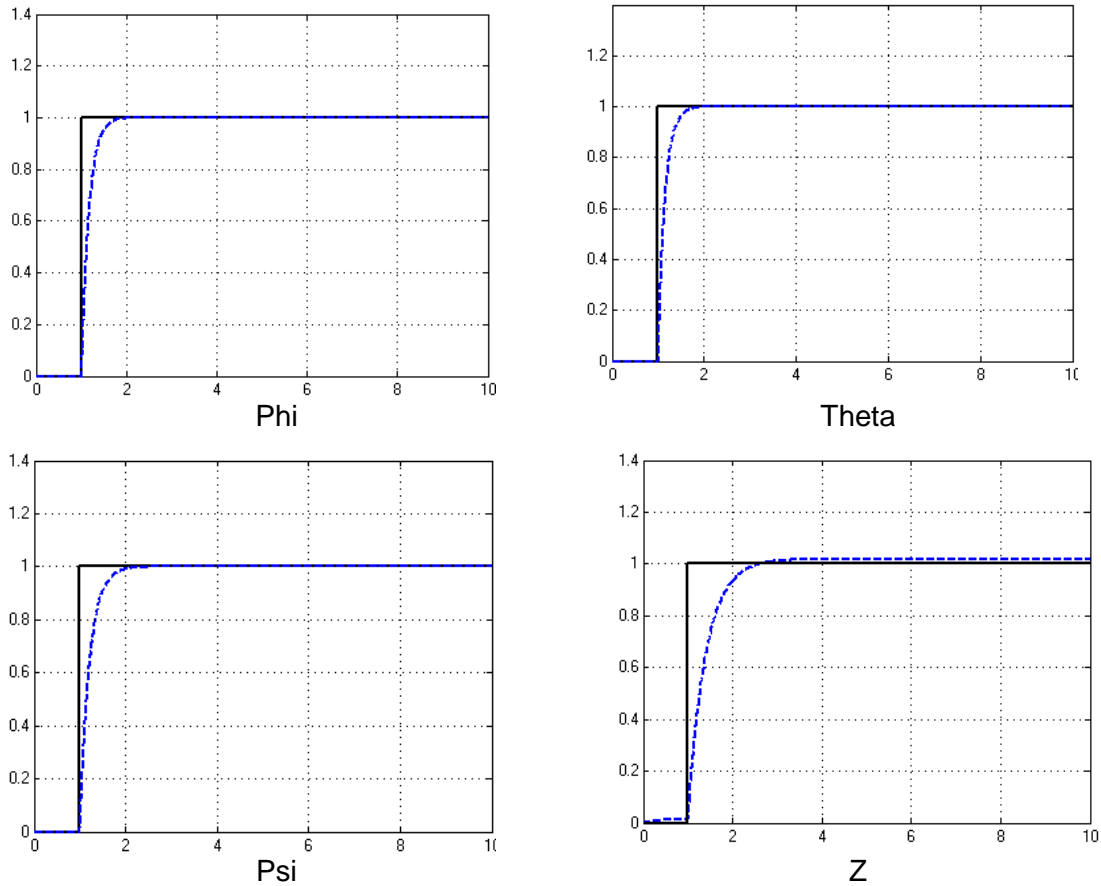


Fig. 5.5. Respuestas al escalón en lazo cerrado con control PD.

En la figura 5.5 puede verse como el control funciona satisfactoriamente para controlar la respuesta. Hay que destacar que se han ajustado las variables del control de forma que no se permitiese sobreimpulso para garantizar la seguridad del vehículo y evitar comportamientos oscilantes en vuelo, bajo esta restricción, se ha intentado minimizar el tiempo de establecimiento.

Es posible observar como la regulación se da de forma correcta para los casos de Phi, Theta y Psi, correspondientes con los ángulos de Roll, Pitch y Yaw, alcanzándose un error despreciable respecto a la referencia, por contra, para el caso Z existe un pequeño error en el seguimiento de la referencia, técnicamente puede considerarse despreciable, y como se presentará en capítulos posteriores es inferior a la propia sensibilidad del sensor usado, por lo que no parecería preocupante. Puede verse como el tiempo necesario para alcanzar el 90% del valor deseado es de entre 1 y 2 segundos, son tiempos relativamente grandes pero tolerables considerando las frecuencias de las perturbaciones externas y el requisito de garantizar la seguridad de la aeronave.

Con el objetivo de evaluar estructuras de control alternativas que presenten mejoras respecto a las mostradas anteriormente se ha realizado un estudio en base a la derivada de la magnitud a controlar. En la figura 5.7 se muestra un control para Roll, Pitch y Yaw en base a esta expresión.

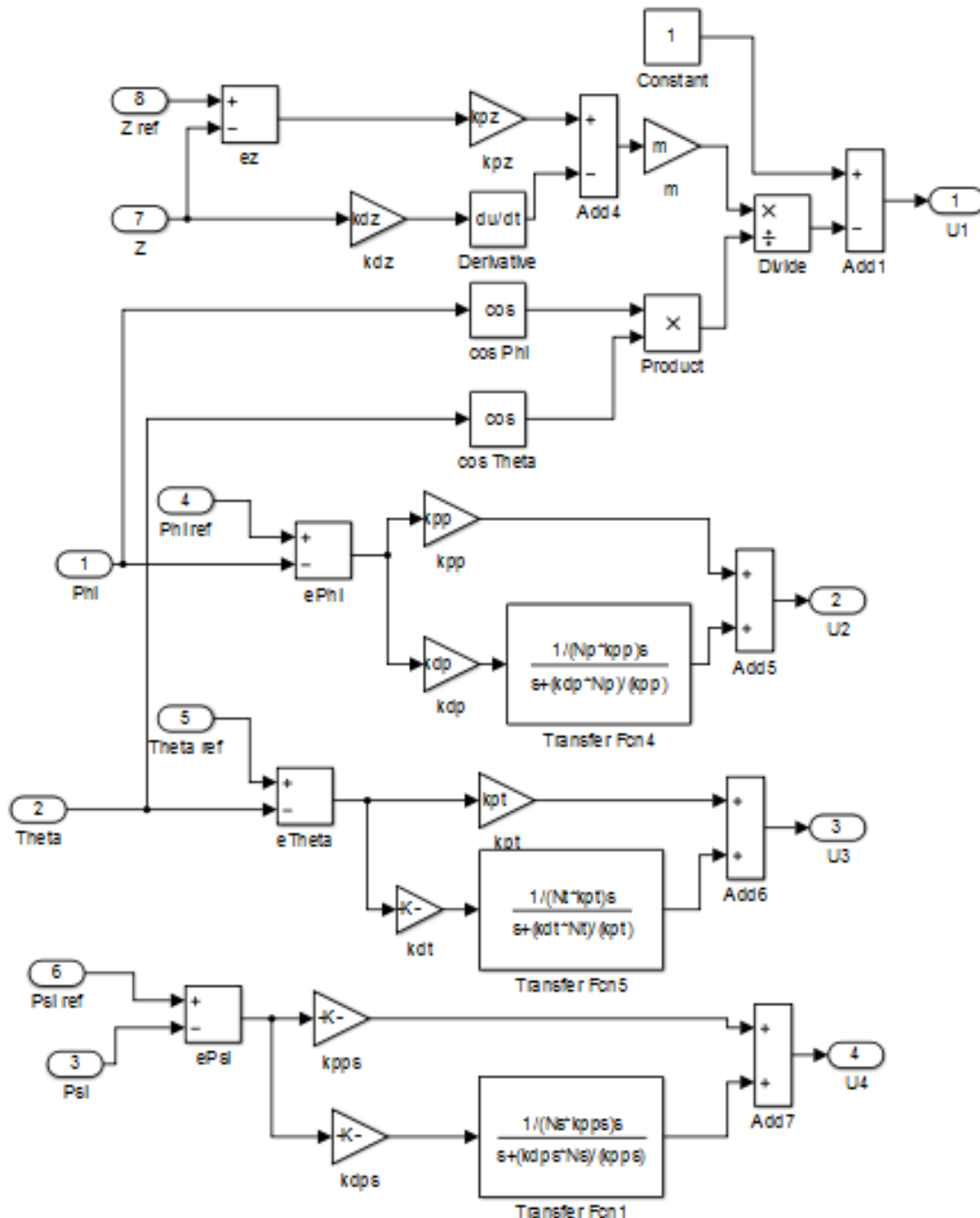


Fig. 5.6. Respuestas al escalón en lazo cerrado con control PD modificado.

Lo más significativo de esta estructura, que aplica al término derivativo, es que limita el valor máximo alcanzable por la respuesta. Esto se había logrado en el caso previo mediante el uso de la derivada de la variable a controlar en vez del error respecto a la consigna.

El ajuste de las constantes proporcionales, derivativas e integrales en el control de la figura 5.6 se muestran en la tabla 5.5.

Control PD	$K_p$	$K_d$	$N_{roll}$	$N_{pitch}$	$N_{yaw}$
Roll	0.24	1.8	4		
Pitch	0.002	0.8		1.5	
Yaw	0.01	0.4			2
Altitud	500	100			

Tabla 5.5. Parámetros de los controladores PD modificado.

Con los valores de la tabla 5.5, las funciones de transferencia de cada uno de los controles resultantes son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \text{Roll: } \frac{u(s)}{e(s)} &= \frac{2.03s + 6.912}{0.096s + 28.8} \\
 \text{Pitch: } \frac{u(s)}{e(s)} &= \frac{0.8s + 0.0036}{0.003s + 1.8} \\
 \text{Yaw: } \frac{u(s)}{e(s)} &= \frac{0.4s + 0.016}{0.02s + 1.6}
 \end{aligned}
 \tag{5.11}$$

Las expresiones vistas en (5.11) muestran las funciones de transferencia en el dominio transformado de Laplace para los controles de Roll, Pitch y Yaw. Para el caso del control de altitud se ha conservado la expresión previa, vista en la figura 5.4, debido a que el control de la altitud requiere magnitudes de la señal controladora altas. Con la respuesta (5.11) esto se hace imposible ya que presenta una saturación en la ganancia. Por contra, usando una estructura convencional, derivada del error, esta magnitud saturaría el actuador cuando se produjesen cambios bruscos entre la variable controlada y la consigna. La derivada del escalón daría como resultado un impulso y con el fin de evitar esto se procesa la variable controlada directamente en vez del error como sería convencional.

Las funciones de transferencia mostradas en (5.11) presentan la ventaja de tener el mismo número de polos como de ceros, esto a nivel computacional es importante para evitar problemas de causalidad, aún así no es crítico ya que la derivada puede ser implementada de forma numérica sin problemas en el caso real.

Con la finalidad de entender mejor las expresiones anteriores se procede al análisis de los diagramas de bode de cada una de ellas. A continuación, en la figura 5.7 se muestran los diagramas de bode correspondientes a cada una de las funciones de transferencia mostradas en (5.11).

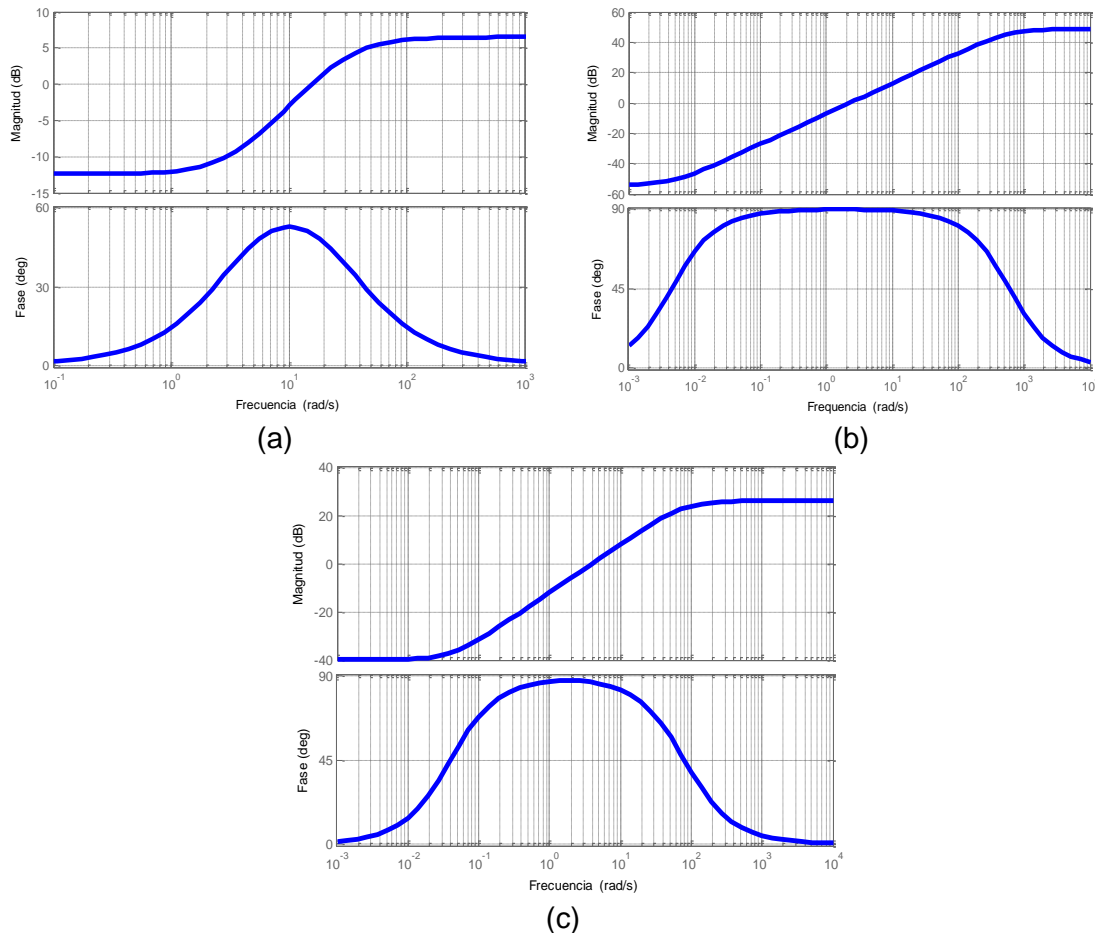


Fig. 5.7. Diagrama de bode (a) control PD de Roll, (b) control PD de Pitch, (c) control PD de Yaw.

En la figura 5.7 se muestran los diagramas de bode correspondientes a las respuestas frecuenciales de las funciones de transferencia de los controladores diseñados. Puede verse como todos ellos presentan una respuesta frecuencial en magnitud de tipo paso alto (con un cero y un polo), además de esto, puede verse como presentan una respuesta de saturación a alta frecuencia. La repuesta frecuencial del control de altitud no puede ser determinada de forma analítica, esto sucede al no tener la misma entrada el término derivativo y el proporcional.

El principal objetivo para plantear esta estructura de control alternativa se debía al intento de minimizar el valor máximo de las señales de control que se enviarán a los actuadores, a la vez se quería mejorar la velocidad de respuesta en el control de las variables. Lo primero no se consigue respecto al caso anterior, incluso si se maximiza la velocidad de respuesta del control se produce un incremento del valor máximo de las señales de control. La velocidad de respuesta si que mejora sin comprometer la estabilidad del sistema, además se consigue esto sin producir sobreimpulsos. En la figura 5.8 se muestran las respuestas temporales obtenidas.

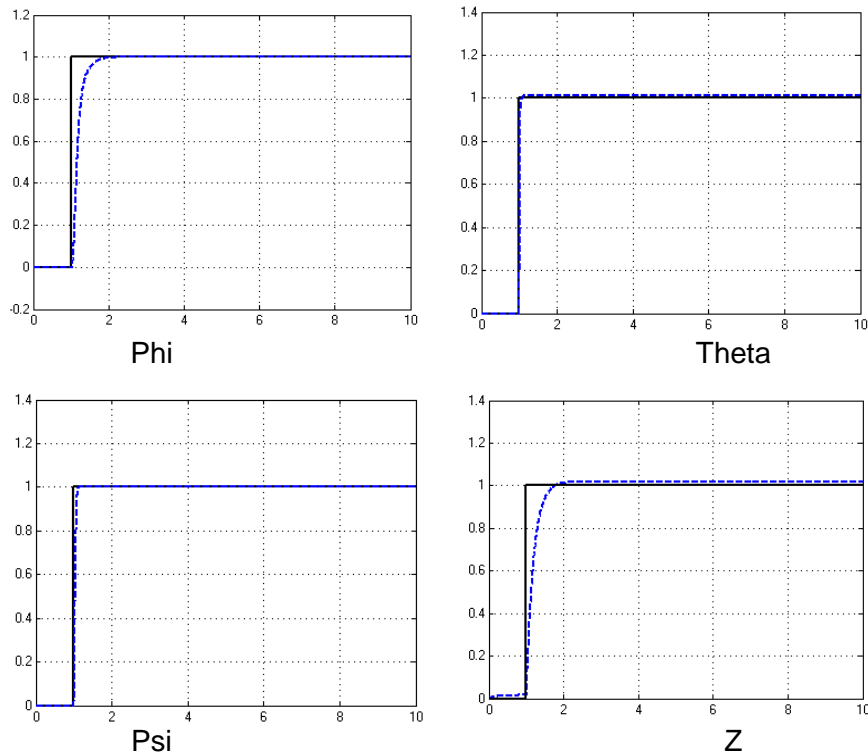


Fig. 5.8. Respuestas al escalón en lazo cerrado con control PD modificado.

### 5.3.2. Control PID

En este punto se presenta el controlador PID. Procediendo de la misma forma que en el apartado 5.3.1 se ha diseñado el siguiente modelo de Matlab-Simulink para el bloque de control. En la figura 5.9 se muestra el diagrama de bloques de Simulink para el diseño del controlador PID clásico.

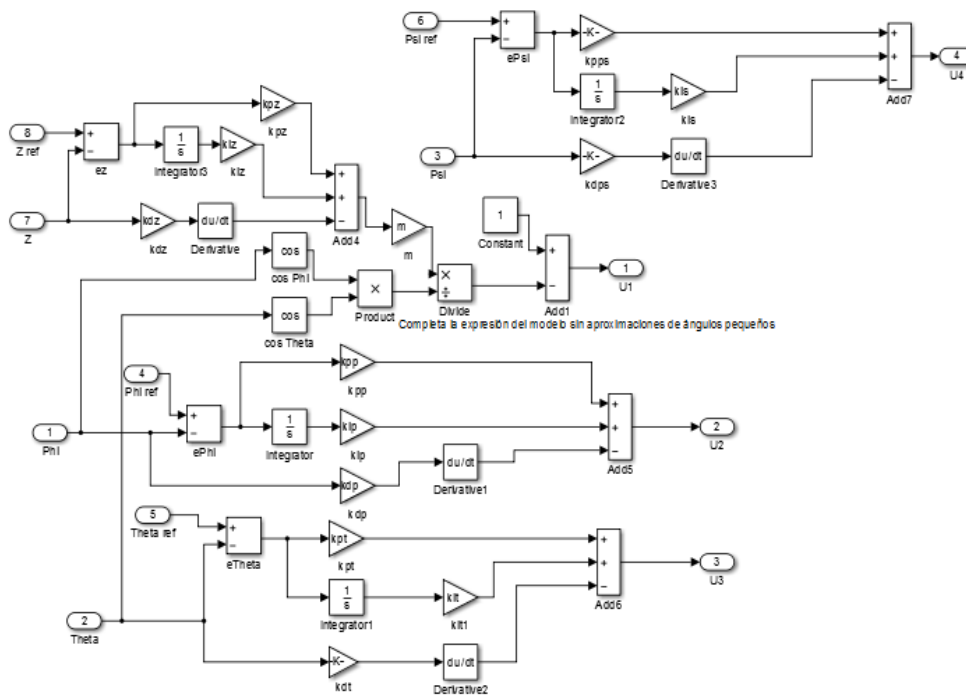


Fig. 5.9. Modelo de Simulink de un control PID.

Como en el caso del control PD, la sintonía del control se ha realizado en dos aproximaciones. La primera aproximación se ha obtenido siguiendo lo descrito en el punto 5.2 del presente capítulo. Una vez fijado este punto se ha realizado un proceso de ajuste mediante prueba y error de los parámetros proporcional, integral y derivativo del control. El criterio de ajuste fino ha sido el de buscar una solución lo más rápida posible en la dinámica pero sin que presente sobreimpulso. En la tabla 5.6 se presentan los parámetros de cada controlador.

Control PD	$K_p$	$K_i$	$K_d$
Roll	10	0.5	0.5
Pitch	17.25	0.8	0.5
Yaw	25	1.5	2
Altitud	300	50	5

Tabla 5.6. Parámetros de los controladores PID.

En la figura 5.10 se presentan las respuestas obtenidas para el caso de una estructura de control de tipo PID clásico.

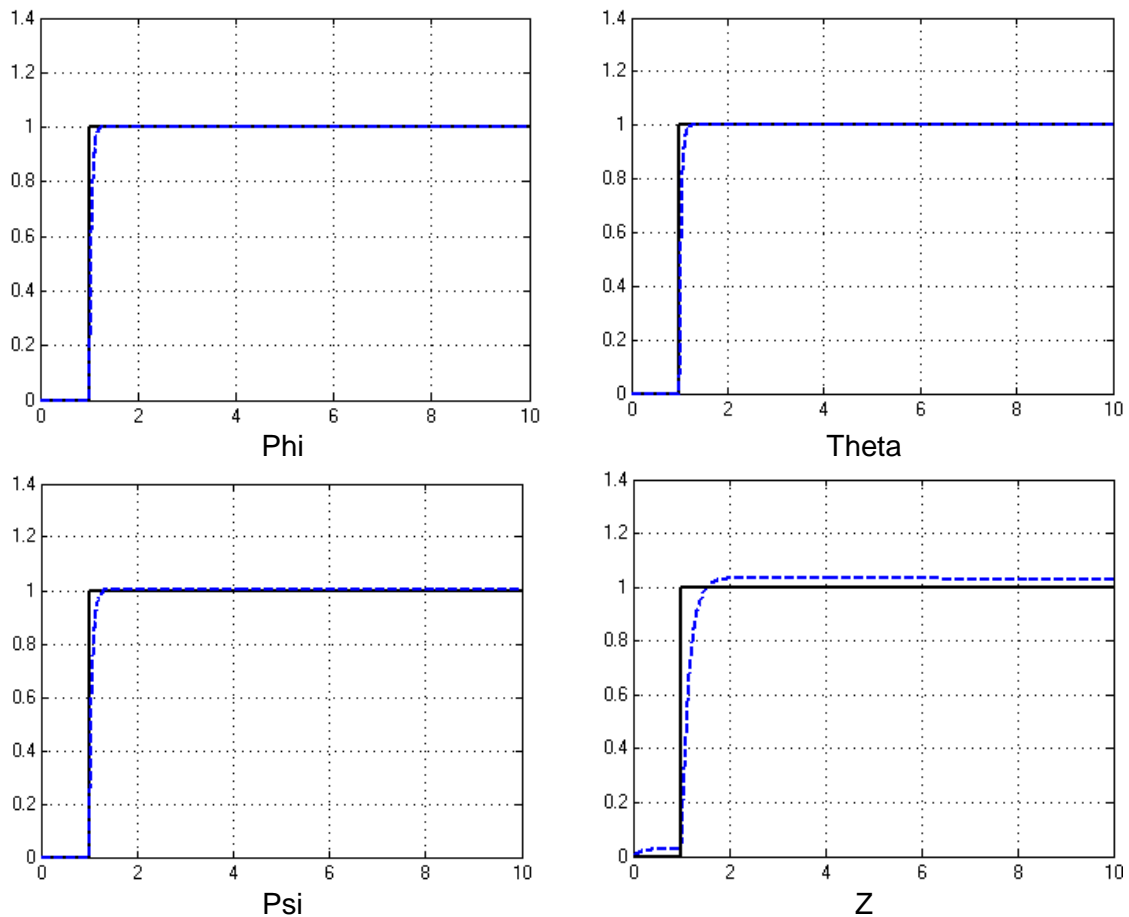


Fig. 5.10. Respuestas al escalón en lazo cerrado con control PID.

Como puede verse en la figura 5.10 el comportamiento de este control bajo la restricción de no permitir sobreimpulso presenta una velocidad de ajuste mucho mayor que para el caso PD, al final de este apartado se mostrará una tabla

comparativa de los tiempos para cada estructura haciendo más evidente esta conclusión. Puede verse que la regulación presenta algunos errores en estado estacionario, cosa que en el caso PD podían evitarse. Una vez más en el control de Z se muestra un comportamiento con un cierto error, de manera que se sigue sin poder alcanzar un error despreciable en estado estacionario.

La principal desventaja de esta estructura de control es que las variables de control pueden tomar valores relativamente grandes que podrían llegar a saturar el actuador. En la estructura de control implementada, el término derivativo aplicaba exclusivamente sobre la magnitud de entrada y no sobre el error, esto permitía reducir en gran medida el valor máximo de la señal de control. Con el objetivo de limitar el valor máximo de la señal de control se presenta en la figura 5.11 la estructura de controlador PID alternativa.

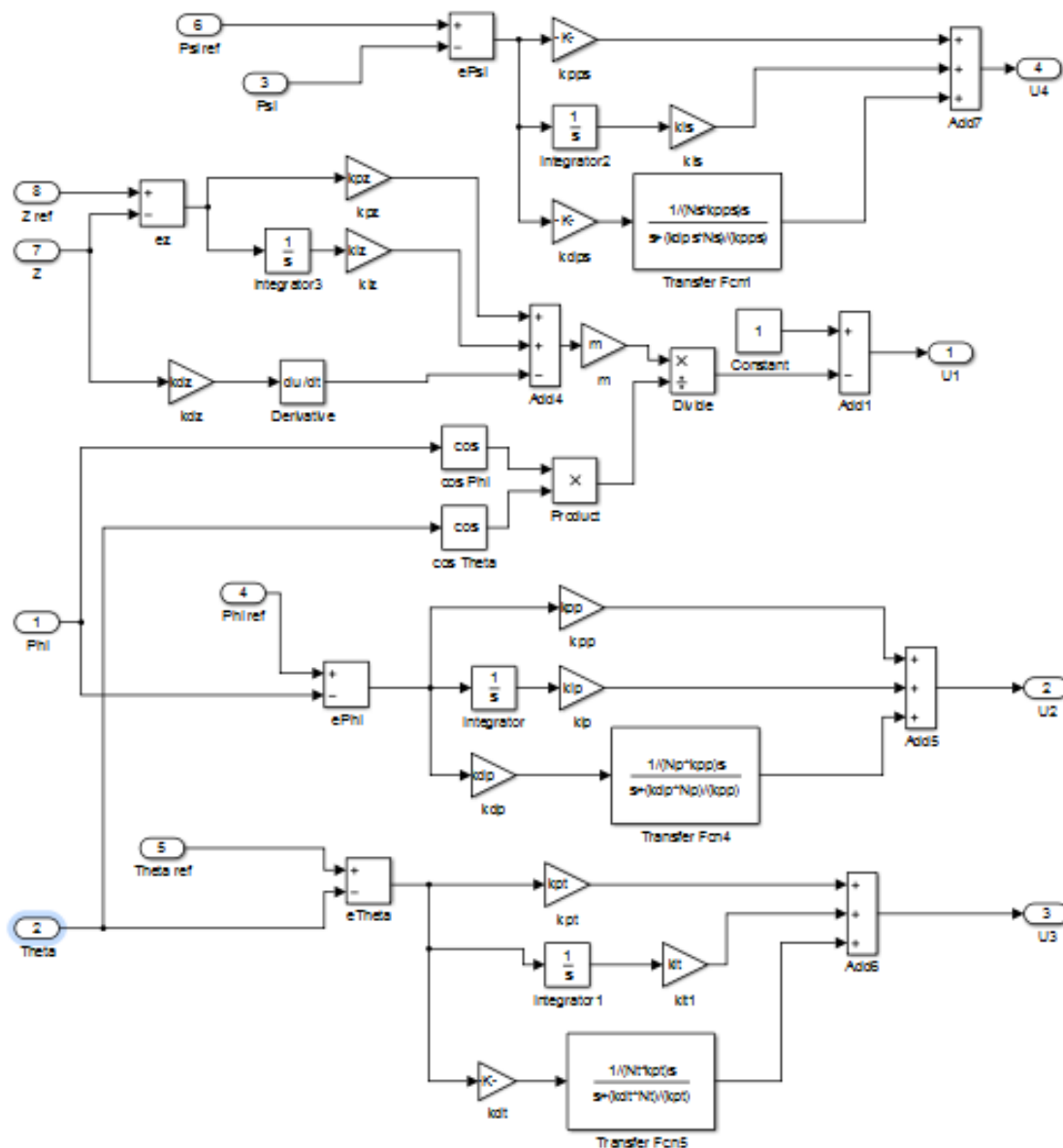


Fig. 5.11. Control PID con saturación en el término derivativo.

En la figura 5.11 se muestra la estructura de control PID correspondiente al término derivativo con saturación en su respuesta. Hay que destacar que el control de altitud no pudo ajustarse a un punto de trabajo lo suficientemente bueno con esta estructura y que fue necesario utilizar la ya estudiada. A priori el ajuste de este controlador ha resultado más complejo y ha requerido un mayor número de ajustes mediante prueba y error. Los parámetros del controlador se muestran en la tabla 5.7.

Control PD	$K_p$	$K_i$	$K_d$	$N_{roll}$	$N_{pitch}$	$N_{yaw}$
Roll	0.1	0.75	0.00001	5	No aplica	No aplica
Pitch	0.0015	0.5	0.00002	No aplica	2	No aplica
Yaw	0.002	0.4	0.00003	No aplica	No aplica	3
Altitud	500	100	20	No aplica	No aplica	No aplica

Tabla 5.7. Parámetros de los controladores PID.

En la tabla 5.7 se muestra como las constantes de ajuste son mucho menores que en caso anterior. En este caso es interesante observar las funciones de transferencia de los controladores

$$\begin{aligned}
 \text{Roll: } \frac{u(s)}{e(s)} &= \frac{0.25s^2 + 3.75s + 3.75 \cdot 10^{-5}}{s^2 + 37.5s} \\
 \text{Pitch: } \frac{u(s)}{e(s)} &= \frac{0.2515s^2 + s + 2 \cdot 10^{-5}}{s^2 + 667s} \\
 \text{Yaw: } \frac{u(s)}{e(s)} &= \frac{0.1353s^2 + 1.2s + 3.6 \cdot 10^{-5}}{s^2 + 600s}
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Las expresiones mostradas en (5.12) presentan una complejidad mayor que los PID convencionales pero presenta dos ventajas significativas, la primera es que la función de transferencia tiene el mismo número de ceros que de polos. La segunda ventaja de esta estructura respecto a otras es que permite limitar la magnitud de la señal generada, esto se debe a que su respuesta frecuencial siempre es menor que la unidad. La forma típica de esta función de transferencia es la de un filtro paso banda (dos polos y dos ceros a frecuencias distintas), donde el primer polo y el primer cero se encuentran a frecuencias muy bajas y son cercanos entre sí.

Uno de los problemas de esta estructura de control es la dificultad para su ajuste, además de que no se ha podido conseguir implementar el control en altitud con esta misma estructura, esto se ha debido a que la señal de control de la altitud necesita alcanzar valores elevados, esto último choca directamente con el propósito de esta estructura de control (limitar el valor máximo de la señal a un nivel bajo).

Analizando las expresiones de los controladores en (5.12) se puede obtener su bode en magnitud y fase. A continuación, en la figura 5.12 se muestran los

diagramas de bode correspondientes a cada una de las funciones de transferencia mostradas en (5.12).

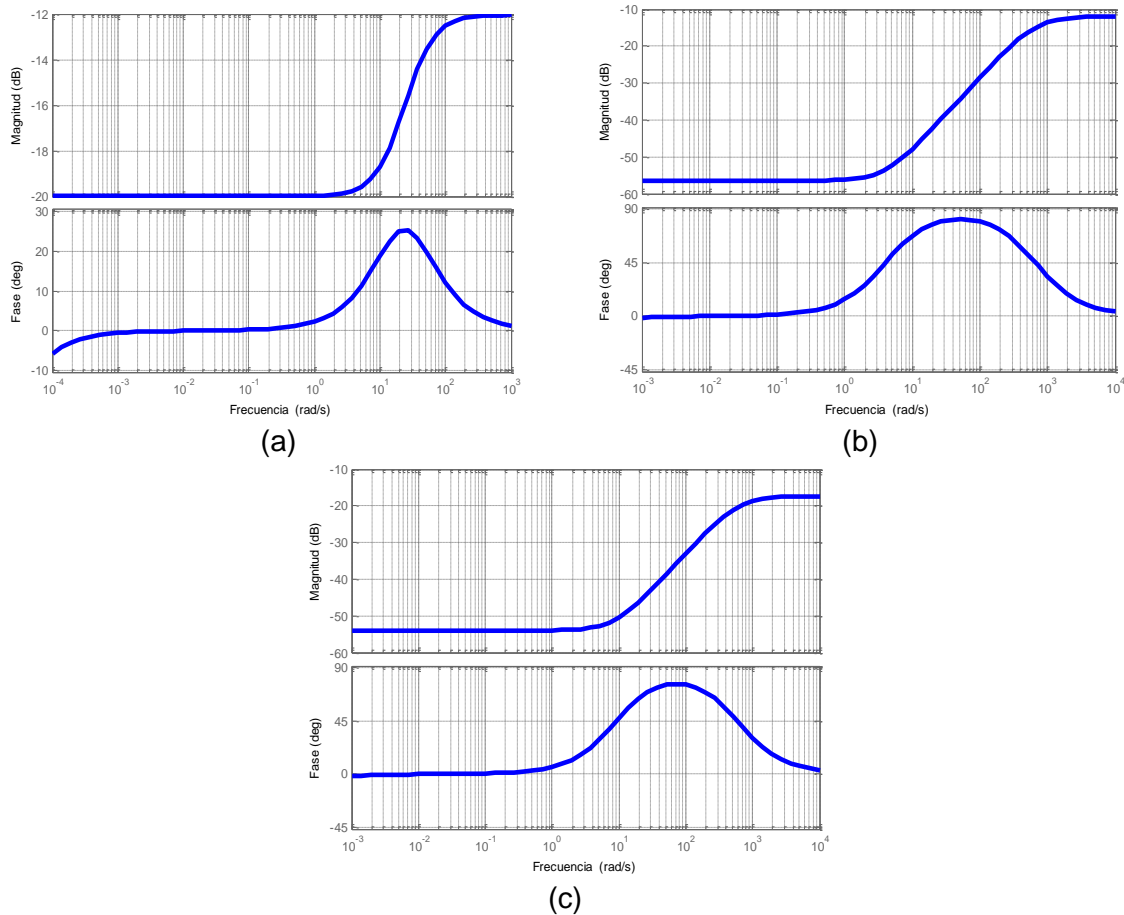


Fig. 5.12. Diagrama de bode (a) control PD de Roll, (b) control PD de Pitch, (c) control PD de Yaw.

En la figura 5.12 se muestra la forma de la función de transferencia de cada uno de los controles implementados dentro de la región de interés. Puede apreciarse como esta respuesta siempre presenta atenuación, además de mostrar dos regiones de saturación claramente diferenciadas.

Una vez presentado el diseño de esta estructura de control alternativa puede procederse al análisis de las respuestas temporales del sistema. Para ello se ha procedido de igual forma que en los casos anteriores. El control implementado en Matlab-Simulink es el mostrado en la figura 5.11.

En la figura 5.13 se muestran la respuestas temporales de las variables de Roll, Pitch, Yaw y de altitud. En el caso de la altitud se ha conservado la misma estructura de control que la mostrada en la tabla 5.6.

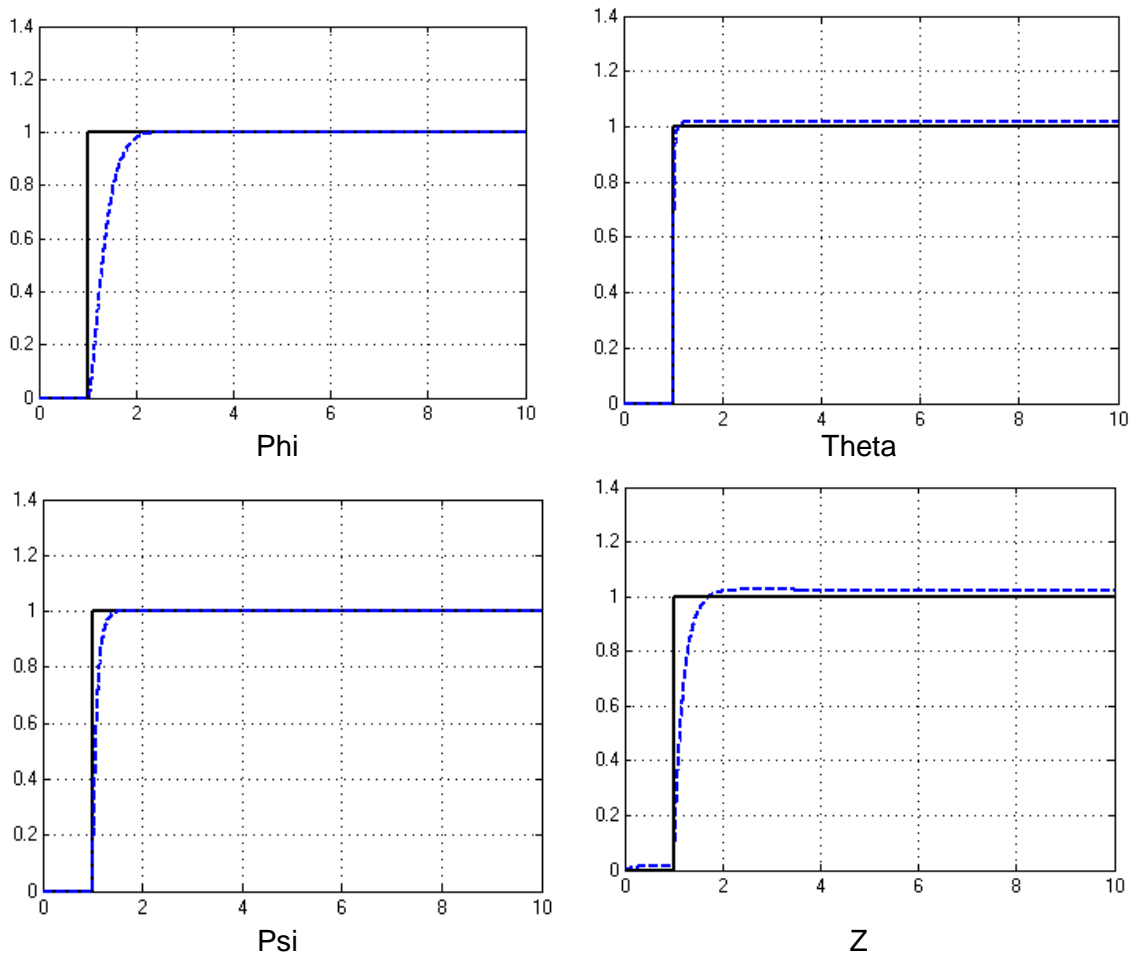


Fig. 5.13. Respuestas al escalón en lazo cerrado con control PID.

En la figura 5.13 se aprecia las respuestas temporales del control. Como en el resto de casos, los controles se han diseñado para no presentar sobreimpulso. Puede verse como en este diseño hay respuestas que presentan tiempos de subida y de bajada mucho menores que otros.

Analizando las magnitudes máximas de esta solución con las obtenidas en el caso de tomar la derivada de la señal a controlar en vez del error se ha obtenido que la mejora no es lo suficientemente buena como para justificar la mayor complejidad de esta estructura frente a la otra, además en algunas configuraciones se obtienen mejores resultados tomando la derivada de la variable a controlar en vez del error y filtrando paso bajo el término derivativo. Dado esto, la única ventaja significativa de la estructura presentada en (5.12) es que se da el mismo número de polos que de ceros, mientras que en caso simple existe un exceso de ceros respecto a polos. Si bien, a la hora de la programación de los controles se usará la aproximación numérica de derivada e integral, siendo ambas estructuras totalmente realizables.

Una vez que las diferentes estructuras han sido analizadas y simuladas es interesante presentar los resultados de forma comparativa. En la tabla 5.8 se

muestra la comparativa de los parámetros principales de los controladores implementados.

		$T_{10\%}$	$T_{90\%}$	Error en régimen estacionario	Máximo sobreimpulso
PD	Roll	1.027s	1.378s	0%	0%
	Pitch	1.022s	1.338s	0%	0%
	Yaw	1.026s	1.480s	0%	0%
	Altitud	1.040s	1.850s	2%	0%
PID	Roll	1.013s	1.111s	0%	0%
	Pitch	1.010s	1.096s	0.13%	0%
	Yaw	1.011s	1.133s	0.5%	0%
	Altitud	1.027s	1.324s	3%	0%
PD Sat	Roll	1.077s	1.375s	0%	0%
	Pitch	1.003s	1.028s	1.1%	0%
	Yaw	1.012s	1.075s	0%	0%
	Altitud	1.026s	1.420s	1.8%	0%
PID Sat	Roll	1.109s	1.704s	0%	0%
	Pitch	1.003s	1.051s	2%	0%
	Yaw	1.011s	1.204s	0%	0%
	Altitud	1.026s	1.412s	2.5%	0%

Tabla 5.8. Comparativa entre los controladores clásicos implementados.

En la tabla 5.8 se han llamado PD y PID a las soluciones basadas en la derivada de la variable a controlar en lugar de la derivada del error, por otro lado, se han denotado PD Sat y PID Sat a las soluciones basadas en la aplicación de un filtrado paso bajo sobre el termino derivada del error.

En la tabla 5.8 puede verse como a nivel de tiempo de subida al 10% y al 90% la solución PID es la que presenta una mayor velocidad, pero puede verse como las diferencias no son críticas para el tipo de vehículo bajo estudio. A nivel de error en régimen estacionario, el control que presenta un mejor comportamiento es el PD, si bien se ha observado en el ajuste del PD que este error se incrementa a medida que se aumenta la velocidad de respuesta. Por otro lado, los controles que presentan saturación en la respuesta no presentan una gran mejoría con respecto al resto de soluciones, además han resultado más complejos de ajustar. De lo anterior se puede concluir, en base a la solución de compromiso prestaciones-simplicidad, que las mejores opciones para el diseño real son las basadas en la arquitectura PD y la PID.

## **6.- Diseño de controladores no lineales de Lyapunov para el control de la estabilidad de un quadrotor**

### **6.1.- Introducción al control no lineal de Lyapunov**

La teoría de Lyapunov para sistemas no lineales tiene su origen en la necesidad de estudiar la estabilidad de un punto de trabajo de un sistema dinámico, es decir, se pretende entender y describir cómo evoluciona un sistema en tiempo, el cual parte de un punto de operación. En 1892 Aleksander Lyapunov presenta el trabajo "*El problema general de estabilidad del movimiento*"[32], en este estudio define el concepto de estabilidad para sistemas no lineales. Este concepto puede entenderse de una forma física y extenderse de la siguiente forma, si la energía total de un sistema es continuamente disipada, entonces el sistema (ya sea lineal o no) con el tiempo llegará a un punto de equilibrio, dado que la energía es un escalar, el análisis de la estabilidad puede llegar a reducirse al estudio de una función escalar. Esto se traduce en que el estudio de la estabilidad de un sistema se puede reducir a la búsqueda de una función llamada  $V(x)$  o función de Lyapunov que defina la energía del sistema, y proceder a la evaluación de esta función escalar en el dominio temporal. Hay que destacar que la elección de la función  $V(x)$  no es única, y no existe un método determinista para fijarla, pero sí que debe cumplir ciertas propiedades, definidas en teoremas de la teoría de Lyapunov [33, 34], para el estudio de la estabilidad de un sistema usando dicha función.

### **6.2.- Diseño de un control no lineal de Lyapunov**

La mayor dificultad a la hora de aplicar la teoría de Lyapunov se sitúa en encontrar una función de Lyapunov  $V(x)$  que cumpla con las condiciones de los teoremas. Como no existe un método determinista, ni siquiera puede garantizarse encontrar la función  $V(x)$ , el método pasa por la propia experiencia e intuición del diseñador del control, y en muchos casos se termina recurriendo a un proceso de prueba y error iterativo que permita obtener una función  $V(x)$ .

A continuación se presenta el diseño realizado para el caso de estudio de este proyecto. En particular se ha diseñado un control basado en la teoría de Lyapunov para la estabilidad de los ángulos de giro del vehículo, además se ha diseñado un control no lineal para la altitud del vehículo, hay que destacar que esto se ha realizado en torno al punto de sustentación, donde los ángulos de giro del vehículo se han considerado muy pequeños e igual a cero. Esta aproximación ha permitido la simplificación de las matemáticas del control.

A continuación se reescribe el sistema para simplificar la notación:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \phi & x_7 &= z \\
 x_2 &= \dot{x}_1 = \dot{\phi} & x_8 &= \dot{x}_7 = \dot{z} \\
 x_3 &= \theta & x_9 &= x \\
 x_4 &= \dot{x}_3 = \dot{\theta} & x_{10} &= \dot{x}_9 = \dot{x} \\
 x_5 &= \psi & x_{11} &= y \\
 x_6 &= \dot{x}_5 = \dot{\psi} & x_{12} &= \dot{x}_{11} = \dot{y}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Partiendo de la base en que sólo se consideran los ángulos de Pitch, Roll y Yaw y sus derivadas, por el método de prueba y error y a partir de [33,34] se propone la siguiente función de Lyapunov en torno al punto de trabajo:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}[(x_1 - x_1^0)^2 + x_2^2 + (x_3 - x_3^0)^2 + x_4^2 + (x_5 - x_5^0)^2 + x_6^2] \tag{6.2}$$

En primer lugar hay que considerar que esta función es definida positiva en el entorno de  $\mathbf{x}^0$ .

Derivando  $V(\mathbf{x})$  se obtiene:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \left( (x_1 - x_1^0)x_2 + x_2\dot{x}_2 + (x_3 - x_3^0)x_4 + x_4\dot{x}_4 + (x_5 - x_5^0)x_6 + x_6\dot{x}_6 \right) \tag{6.3}$$

Utilizando el modelo físico mostrado en (2.55) puede escribirse en función de las variables de control:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(\mathbf{x}) = & \left( (x_1 - x_1^0)x_2 + x_2 \frac{l}{I_{xx}} U_2 + (x_3 - x_3^0)x_4 + x_4 \frac{l}{I_{yy}} U_3 + (x_5 - x_5^0)x_6 \right. \\
 & \left. + x_6 \frac{1}{I_{xx}} U_4 \right) \tag{6.4}
 \end{aligned}$$

Llegado a este punto hay que garantizar que se cumple la condición para la función de Lyapunov [33,34] de:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \tag{6.5}$$

Para garantizar la condición se (6.5) proponen las siguientes leyes de control:

$$\begin{aligned}
 U_2 &= -\frac{I_{xx}}{l}(x_1 - x_1^0) - k_1 x_2 \\
 U_3 &= -\frac{I_{yy}}{l}(x_3 - x_3^0) - k_2 x_4 \\
 U_4 &= -I_{zz}(x_5 - x_5^0) - k_3 x_6
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Las expresiones (6.6) se elijen de manera que al sustituir en (6.4) se obtenga la expresión deseada que satisfaga (6.5).

En (6.6) se han introducido unas constantes  $k_1, k_2, k_3 \in R^+$  que permiten el ajuste del control.

Sustituyendo (6.6) en (6.4) se obtiene:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -k_1 \frac{l}{I_{xx}} x_2^2 - k_2 \frac{l}{I_{yy}} x_4^2 - k_3 \frac{1}{I_{zz}} x_6^2 \leq 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^6 \text{ y } \forall k_1, k_2, k_3 \geq 0 \quad (6.7)$$

En (6.7) se demuestra que existe una función  $V(\mathbf{x})$  semidefinida positiva y que además su derivada  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es semidefinida negativa, por tanto se puede afirmar que existe un punto de equilibrio según lo mostrado en el teorema de Lyapunov [33,34]. Además, aplicando el teorema de LaSalle [33, 34], se puede garantizar que si el sistema parte de un punto del espacio de estados perteneciente a la función  $V(\mathbf{x})$ , el estado del sistema tenderá a la región acotada por dicha función  $V(\mathbf{x})$ , quedando definida una región de atracción. Por otro lado, la estabilidad asintótica [33, 34] se garantiza ya que el mayor subconjunto de puntos invariante en la región  $S = \{x^s \in \mathbf{R}^6 \text{ con } \dot{V}(x) = 0\}$  se limita al origen. Además la estabilidad absoluta [33, 34] se garantiza ya que  $V(\mathbf{x})$  tiende a infinito cuando  $\|\mathbf{x}\|$  tiende a infinito.

Una vez se ha diseñado una ley de control para los ángulos de giro Pitch, Roll y Yaw, es posible considerar que en algún momento se podrá alcanzar una situación de vuelo horizontal y un punto de sustentación donde el vehículo ni ascenderá ni descenderá, es decir que existe una fuerza de empuje que compensa el peso del vehículo y permite que esté inmóvil en el aire. Considerando lo anterior (ángulos igual a cero) y recordando la expresión vista en el capítulo 2 para la segunda derivada de la altura (2.64) se puede escribir de forma simplificada (si  $\theta \approx \phi \approx 0$ ) como:

$$\ddot{z} = g - \frac{1}{m} U_1 \quad (6.8)$$

Con esta simplificación se simplifica la obtención de una función de Lyapunov  $V(\mathbf{x})$ . Procediendo de la misma forma que para el caso anterior se ha obtenido lo siguiente:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} (x_7 - x_7^0)^2 + \frac{1}{2} x_8^2 \geq 0 \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &= (x_7 - x_7^0) x_8 + x_8 \dot{x}_8 = (x_7 - x_7^0) x_8 + x_8 \left( g - \frac{1}{m} U_1 \right) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Escogiendo la ley de control de forma conveniente para llegar a la demostración de  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ :

$$U_1 = m(x_7 - x_7^0) + mg + mk_4 x_8 \quad (6.10)$$

Al sustituir (6.10) en (6.9) se obtiene el siguiente resultado:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -k_4 x_8^2 \leq 0 \forall x_7, x_8 \in \mathbf{R} \text{ y } \forall k_4 \geq 0 \quad (6.11)$$

En (6.11) se demuestra que existe una función de Lyapunov semidefinida positiva y que además presenta una derivada  $\dot{V}(x)$  semidefinida negativa, por tanto se puede afirmar que existe un punto de equilibrio. Además, la constante  $k_4$  puede ser elegida para ajustar el comportamiento de la solución. De todo esto se puede concluir que la ley de control (6.10) propuesta permite el control de la altitud del quadrotor partiendo de la condición en la que el sistema rotacional ha sido estabilizado previamente.

### 6.3. Simulación de un control mediante la teoría de Lyapunov

Una vez diseñadas las leyes de control, se procede a su simulación mediante el modelo de Simulink descrito en el capítulo 3. Para ello se ha implementado control en Matlab-Simulink en base a las expresiones (6.6) y (6.10). En la figura 6.1 se muestra la estructura de este control.

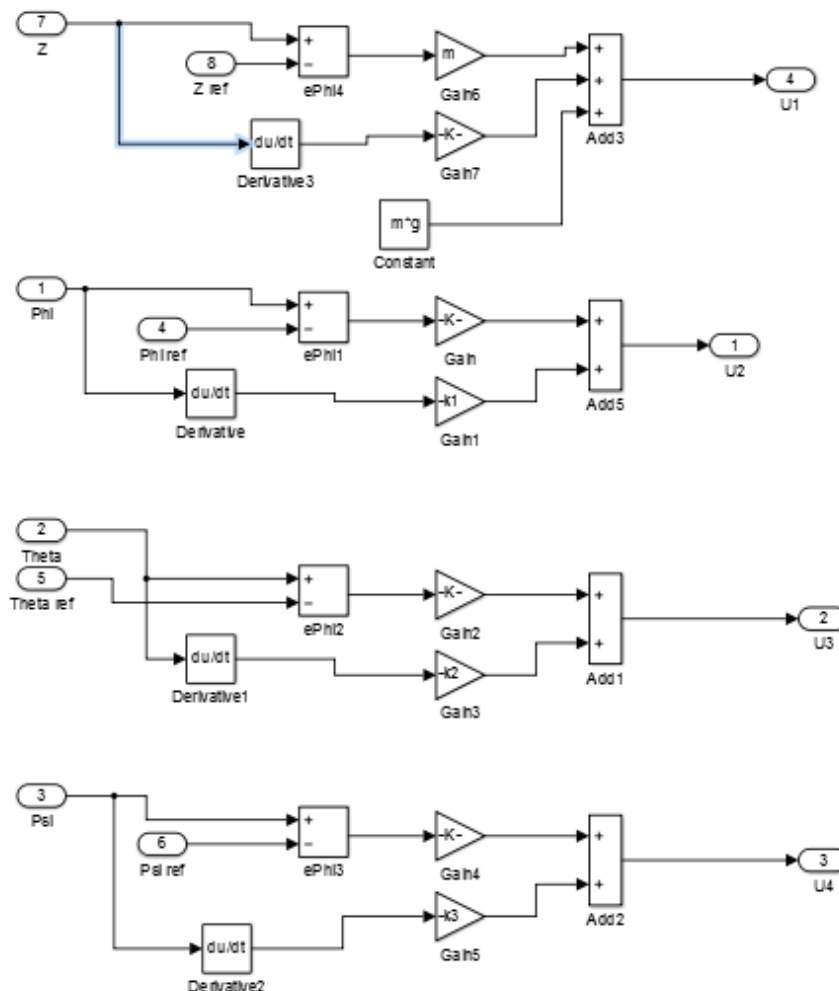


Fig. 6.1. Modelo de Matlab-Simulink del control de Lyapunov propuesto.

El ajuste de las constantes  $k_1, k_2, k_3, k_4$  del control de Lyapunov se realiza por el método de prueba y error. Hay que destacar que aún teniendo una estructura

semejante a la de un control PD, sólo se dispone de un orden de libertad, la variable de ganancia del término derivativo correspondiente con  $k_1, k_2, k_3, k_4$  para cada caso, esto se debe a que la ganancia del término proporcional viene marcada por la propia física del vehículo. En la tabla 6.1 se muestra el valor de ajuste de las constantes del control.

Constante	Valor
$k_1$	0.025
$k_2$	0.028
$k_3$	0.035
$k_4$	1.75

Tabla 6.1. Valores de ajuste de las constantes del control.

A continuación, en la figura 6.2 se muestran los resultados obtenidos con un control diseñado usando la teoría de Lyapunov.

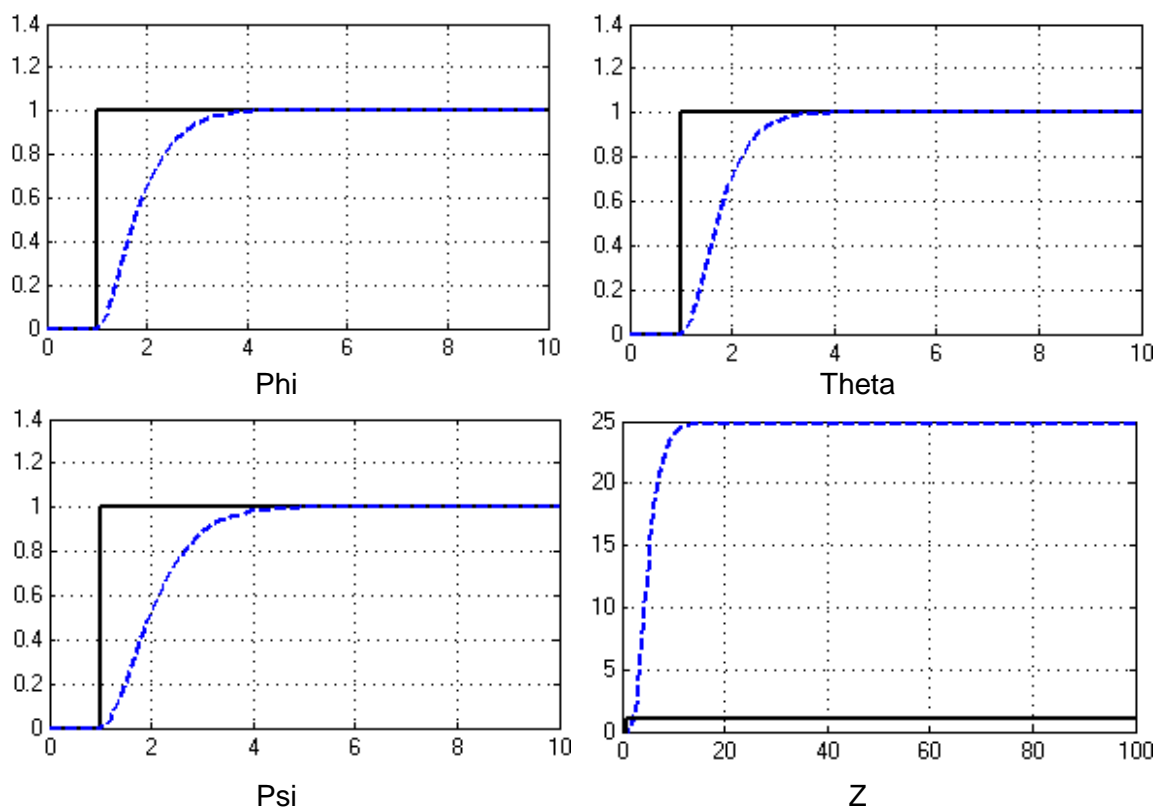
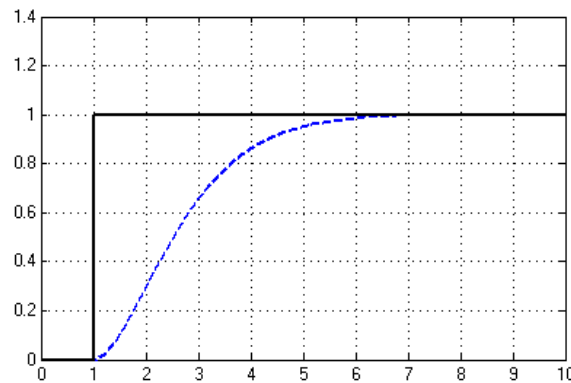


Fig. 6.2. Respuestas al escalón en lazo cerrado con control Lyapunov.

En la figura 6.1 puede verse como el control de los ángulos de Roll, Pitch y Yaw se realiza correctamente, mientras que el control de Z presenta un error en régimen estacionario importante, esto se debe a la suposición de que el quadrotor opera en el punto donde los ángulos de Roll, Pitch y Yaw se consideran cero o muy cercanos a cero, es decir, la ley de control diseñada sólo funciona cuando el vehículo está en posición horizontal y no se producen perturbaciones en torno a este punto de trabajo. Hay que recordar que en el diseño de la ley de control de la variable Z (altitud) mediante la teoría de Lyapunov ya se consideró esta aproximación. Es por este motivo por el que no

es posible ajustar el control al error deseado cuando no se da esta condición. Para solucionar esto se puede fijar el punto de trabajo haciendo nulos los ángulos de Roll, Pitch y Yaw. Procediendo de esta forma se obtiene la regulación de la variable altitud. En la figura 6.3 se muestra el resultado en la regulación de la altitud una vez considerado lo anterior.



*Fig. 6.3. Control de Z en el punto de equilibrio.*

En la figura 6.3 se muestra la respuesta temporal para la variable Z (altitud) cuando el vehículo opera en torno al punto de estabilidad horizontal (variables del sistema rotacional nulas). Puede verse como para este caso la ley de control diseñada sí que funciona de la forma deseada.

Todas las respuestas se han ajustado de forma empírica, pero para el ajuste todas ellas se ha mantenido la premisa de no permitir sobreimpulso. Partiendo de esta condición, el ajuste se ha realizado como una solución de compromiso entre errores en estado estacionario, estabilidad de la solución y velocidad de la respuesta. Como se ha venido presentando a lo largo de los capítulos, una de las condiciones más importantes para el funcionamiento de quadrotor ha sido el de garantizar la estabilidad y la seguridad, inclusive a costa de perder velocidad, si bien los resultados obtenidos usando este control parecen excesivos.

En general, la conclusión que se extrae de este control es que aún permitiendo el diseño matemático de una solución de control no lineal, esta es más lenta que todos los casos de diseño de controladores clásicos mostrados en el capítulo 5. Además de esto, el mayor inconveniente que presenta esta solución es que el control de la altitud de vuelo sólo funciona en torno al punto de equilibrio. La gran ventaja de esta solución es la sencillez del ajuste, ya que sólo presenta un grado de libertad.

A modo de resumen comparativo, en la tabla 6.2 se muestran los valores característicos de cada una de las respuestas temporales presentadas para este capítulo y para el capítulo 5.

		$T_{10\%}$	$T_{90\%}$	Error en régimen Estacionario	Máximo sobreimpulso
PD	Roll	1.027s	1.378s	0%	0%
	Pitch	1.022s	1.338s	0%	0%
	Yaw	1.026s	1.480s	0%	0%
	Altitud	1.040s	1.850s	2%	0%
PID	Roll	1.013s	1.111s	0%	0%
	Pitch	1.010s	1.096s	0.13%	0%
	Yaw	1.011s	1.133s	0.5%	0%
	Altitud	1.027s	1.324s	3%	0%
PD Sat	Roll	1.077s	1.375s	0%	0%
	Pitch	1.003s	1.028s	1.1%	0%
	Yaw	1.012s	1.075s	0%	0%
	Altitud	1.026s	1.420s	1.8%	0%
PID Sat	Roll	1.109s	1.704s	0%	0%
	Pitch	1.003s	1.051s	2%	0%
	Yaw	1.011s	1.204s	0%	0%
	Altitud	1.026s	1.412s	2.5%	0%
Lyapunov	Roll	1.354s	4.912s	0%	0%
	Pitch	1.358s	5.129s	0%	0%
	Yaw	1.469s	6.273s	0%	0%
	Altitud	1.495s	4.331s	0% (2500%)	0%

Tabla 6.2. Comparativa entre los controladores clásicos implementados.

En la tabla 6.2 puede verse como los tiempos para la solución basada en la teoría de Lyapunov son mucho mayores que los obtenidos para los controladores clásicos. Por contra se muestra como los errores en régimen estacionario son inexistentes en el caso de Lyapunov, esto se debe a que el diseño realizado es conservador, ya que al intentar mejorar los tiempos de respuesta aparece rápidamente sobreimpulso en la respuesta.

## **7.- Diseño de un control robusto QFT para el control de la estabilidad de un quadrotor**

En la mayoría de casos reales, los procesos que se desean controlar van a presentar una incertidumbre elevada en la dinámica. De esta imprecisión a la hora de identificar o de obtener un modelo estático de los parámetros de la planta surge la necesidad de técnicas de diseño de controladores que presenten un diseño en base a estas tolerancias o desviaciones. Esta necesidad la suple la técnica de control conocida como QFT, o técnica de realimentación cuantitativa.

### **7.1.- Introducción a la metodología de control QFT**

La metodología QFT es una técnica de diseño en el dominio de la frecuencia, permitiendo el diseño con tolerancias significativas en la planta, asegurando unas prestaciones mínimas no formuladas de forma matemática sino de forma cuantitativa. Además esta técnica puede aplicarse sistemas lineales o no lineales, continuos o discretos, considerándose una técnica versátil y de complejidad reducida, si se compara con otras técnicas de control robusto.

Esta metodología presenta las siguientes ventajas [20]:

- Permite generalizar los conceptos de diseño clásico en el dominio de la frecuencia.
- Permite diseñar controladores robustos insensibles a las variaciones de las plantas.
- El problema queda acotado desde el principio del diseño.
- Su aplicación es más sencilla que otras técnicas de control robusto.
- Se adapta en función de la incertidumbre de la planta.
- Puede determinarse en cada etapa del desarrollo si las especificaciones puede ser alcanzadas.
- El rediseño es sencillo.

Las etapas seguidas en el desarrollo de este control son:

1. Establecimiento de las especificaciones en el dominio de la frecuencia.
2. Definición del conjunto de frecuencias donde se quiere garantizar las prestaciones.
3. Obtención de las plantillas que representan de forma gráfica la incertidumbre de un proceso a cada frecuencia.
4. Obtención de las restricciones para cada rango de frecuencias sobre el plano de Nichols.
5. Ajuste de la función de transferencia en lazo abierto con el objetivo de sintetizar el controlador sobre el plano de Nichols.
6. Obtención de un prefiltro para garantizar las especificaciones de seguimiento robusto.
7. Validación del diseño.

Se tiene que destacar que el proceso no es tan secuencial como se ha presentado, sino que puede ser necesario la redefinición de los requisitos para poder alcanzar un controlador para esos rangos de incertidumbre.

## 7.2.- Diseño QFT realizado

Para el diseño de estos controladores se ha utilizado la herramienta SISO-QFTIT desarrollada en el departamento de Informática y Automática de la UNED [21]. Esta herramienta presenta una interfaz gráfica que simplifica el proceso de diseño y permite un entendimiento claro y didáctico de la metodología de diseño QFT, ofreciendo una visión clara de cada punto del proceso de diseño. Para hacer uso de esta herramienta se requiere la función de transferencia de la planta, de manera que una vez obtenido un modelo simplificado pero realista para las condiciones de operación, y partiendo de la función de transferencia planteada en (2.68), se puede proceder al diseño del control QFT.

En este caso se tiene una planta del tipo:

$$P(s) = \frac{K}{s^2(s+a)^2} \quad (7.1)$$

La expresión mostrada en (7.1) es válida como función de transferencia genérica para los ángulos de Pitch, Roll y Yaw (posteriormente se determinará la planta nominal para cada caso y el margen de los parámetros). Por otro lado, el caso del control de la altitud tiene que ser tratado de forma independiente, ya que no puede obtenerse una función de transferencia de forma directa de las expresiones mostradas en (2.64). Para poder tratar el diseño de un control para la altitud siguiendo la técnica QFT es necesario realizar algunas aproximaciones. Partiendo de la expresión para  $\ddot{z}$  vista en (2.64) se tienen que asumir las siguientes hipótesis:

1. Los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  son pequeños de forma que  $\cos(\theta) \cong 1$  y  $\cos(\phi) \cong 1$ .
2. Se puede suponer que  $|g| \ll \left| \frac{1}{m} U_1 \right|$ .

Considerando estas hipótesis se consigue que la función de transferencia en el dominio transformado de Laplace para la altitud sea de la forma (7.1). Se tiene por tanto un modelo de función de transferencia para cada una de las variables que se quieren controlar. Hay que destacar que cada una de estas funciones de transferencia presentan una forma nominal distinta, que además es propia de la configuración física del vehículo. Se podría realizar un diseño genérico para todas las funciones de transferencia pero esto resultaría en un diseño demasiado conservador. A continuación se mostrarán las formas de planta nominal de cada variable que se quiere controlar.

$$P_{0\_pitch}(s) = \frac{5.6}{s^2(s+0.9)^2}$$
$$P_{0\_roll}(s) = \frac{5.6}{s^2(s+0.9)^2}$$

$$P_{0\_yaw}(s) = \frac{8.1}{s^2(s + 0.9)^2} \quad (7.2)$$

$$P_{0\_z}(s) = \frac{1.8}{s^2(s + 0.9)^2}$$

Las plantas nominales mostradas en (7.2) se han calculado en base a los parámetros físicos del vehículo mostrados en la tabla 2.2.

Cada una de las plantas nominales consideradas en (7.2) presentan una incertidumbre propia de la identificación de los parámetros del sistema físico con el que se trabaja. Retomando la expresión (7.1) se pueden expresar las funciones de transferencia de la planta de la siguiente forma.

$$P_{pitch}(s) = \frac{K_{pitch}}{s^2(s + a)^2}$$

$$P_{roll}(s) = \frac{K_{roll}}{s^2(s + a)^2}$$

$$P_{yaw}(s) = \frac{K_{yaw}}{s^2(s + a)^2} \quad (7.3)$$

$$P_z(s) = \frac{K_z}{s^2(s + a)^2}$$

Donde  $K_i$  y  $a$  son constantes que dependen de la física del vehículo y de los elementos que lo componen. Cada una de estas constantes presentan un margen de incertidumbre modelado en base a las tolerancias de fabricación del vehículo, de la documentación técnica de los elementos y de las perturbaciones. A continuación se muestra una tabla donde se muestran los intervalos.

	<b>Margen de incertidumbre</b>
$K_{pitch}$	[1.7,15.5]
$K_{roll}$	[1.7,15.5]
$K_{yaw}$	[2.5,22.5]
$K_z$	[0.5,4.2]
$a$	[0.5,2]

Tabla 7.1. Márgenes de trabajo.

Para poder aplicar la técnica de diseño QFT es necesario conocer el margen de frecuencias de trabajo. Para determinar el rango de frecuencias de interés se ha realizado un estudio de las condiciones climáticas de una región española durante un año [22], en particular se han tomado los datos de las velocidades de viento promedio en el Baix Penedés, provincia de Tarragona, España. Esto se ha realizado con el objetivo de obtener las frecuencias de trabajo en las que se quiere que la planta esté controlada. En este caso las perturbaciones externas que se han considerado es el viento, dada la dificultad de cuantificar cada una de las frecuencias que componen un viento o una turbulencia causada por rebotes o interacciones complejas que se pueden dar en un fluido en movimiento, se ha considerado la velocidad del viento racheado, y por medio de la siguiente fórmula [22] se ha extraído la frecuencia natural de la perturbación.

$$f_N = \frac{\text{Velocidad del viento}}{375} \quad (7.4)$$

Si bien esta expresión empírica puede ser simplista desde el punto de vista físico, permite obtener una primera aproximación al rango de frecuencias de trabajo.

Mes	Velocidad media del viento (km/h)
Enero	18.52
Febrero	20.37
Marzo	14.81
Abril	12.96
Mayo	11.11
Junio	12.96
Julio	12.96
Agosto	12.96
Septiembre	14.81
Octubre	16.67
Noviembre	20.37
Diciembre	14.81

Tabla. 7.2. Velocidad del viento racheado.

Además de a información dada en la tabla se han obtenido los valores de velocidad de viento máxima y mínima anual. La máxima fue de 102km/h y la mínima de 2km/h. Claramente hay que fijar unas condiciones de contorno, ya que la operación de un quadrotor de estas características con vientos de 102 km/h es imposible. Se descarta por tanto este valor de viento extremo para esta región, pero se establece una nueva cota superior que garantice el 95% de los casos, esta velocidad máxima con el margen de confianza descrito se situaría en torno de los 40km/h. Siendo este valor más coherente y que además cubre holgadamente los valores medios de la tabla 3.4 será utilizado como valor de contorno. El valor de velocidad mínima se coge en el caso de 2km/h. Las frecuencias máximas y mínimas que resultan son las siguientes.

$$f_{max} = 29.63mHz \rightarrow \omega_{max} = 0.19 \text{ rad/s}$$

$$f_{min} = 1.5mHz \rightarrow \omega_{min} = 9.31mrad/s$$

De esta forma queda definido el rango de frecuencias de trabajo donde se presentan perturbaciones. Hay que destacar que este estudio es dependiente de la región y que variará en función del entorno de operación. Por tanto, realizar diseños conservadores para los controles permitirá dotar al sistema de una mayor flexibilidad frente a los diferentes escenarios de operación.

Habiendo definido las incertidumbres presentes en la planta, así como los márgenes frecuenciales de trabajo se puede proceder al diseño de los controles mediante la técnica QFT. Como se ha mencionado anteriormente, el diseño se realizará de forma gráfica. Para este fin se ha usado la herramienta SISO-QFTIT [21].

De las expresiones (7.2) se puede concluir que deberán diseñarse 3 controles, ya que los de Pitch y Roll presentan la misma función de transferencia. A continuación se mostrará el proceso de diseño de uno de los controladores (extrapolable a los restantes). En la figura 7.1 se muestra la pantalla de definición de las plantillas en la herramienta SISO-QFTI.

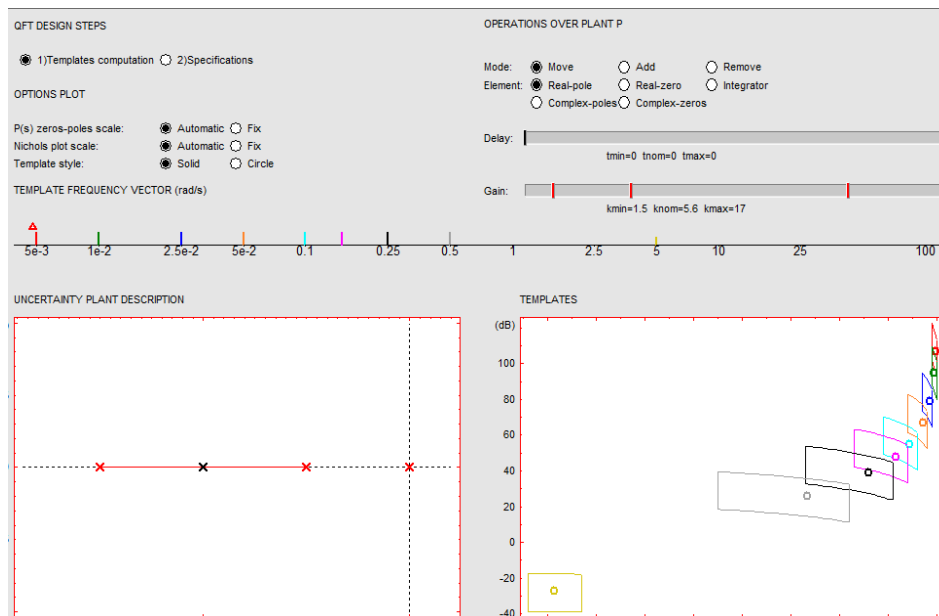


Fig. 7.1. Definición de la planta y de las incertidumbres.

Se ha definido un vector de frecuencias  $\Omega \in \{5 \cdot 10^{-3}, 1 \cdot 10^{-2}, 2.5 \cdot 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-2}, 0.1, 0.15, 0.25, 0.5, 5\}(\text{rad/s})$ . El vector de frecuencias de trabajo es  $\Omega' \in \{1 \cdot 10^{-2}, 2.5 \cdot 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-2}, 0.1, 0.15, 0.25, 0.5\}(\text{rad/s})$ .

A nivel de especificaciones se han definido tres, la de estabilidad robusta, definida mediante el requisito de disponer de un margen de fase superior a  $50^\circ$  [19]. La segunda ha sido la referente al rechazo a las perturbaciones a la salida de la planta, de esta forma se busca garantizar la operación del vehículo con la máxima seguridad para el quadrotor. Para fijar esta especificación de rechazo se aplica la siguiente expresión.

$$\left| \frac{1}{1 + C(s) \cdot P(s)} \right| \leq B \quad (7.5)$$

En la ecuación (7.5) B representa el nivel de especificación de rechazo para una planta  $P(s)$  y un control  $C(s)$ . Considerando un máximo error de 0.175rad se tiene un valor de  $B=5$ . Por último, en el diseño de especificaciones se ha fijado la condición de seguimiento robusto de la referencia (7.6).

$$\alpha(s) \leq \left| \frac{C(s) \cdot P(s)}{1 + C(s) \cdot P(s)} \right| \leq \beta(s) \quad (7.6)$$

La respuesta  $\alpha(s)$  y  $\beta(s)$  se han diseñado de forma conservadora en ancho de banda [4, 9]. La especificación se muestra en la tabla 7.3.

$\Omega$	$5 \cdot 10^{-3}$	$10^{-2}$	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	0.1	0.15	0.25	0.5
$\alpha(s)$	0	0	0	-2.5	-6.5	-8.5	-10.5	-11.5
$\beta(s)$	-3.5	-3.5	-3.5	-8	-14	-15	-16	-20

Tabla 7.3. Especificación tabulada de seguimiento robusto.

En la figura 7.2 se muestran las pantallas de configuración de las especificaciones.

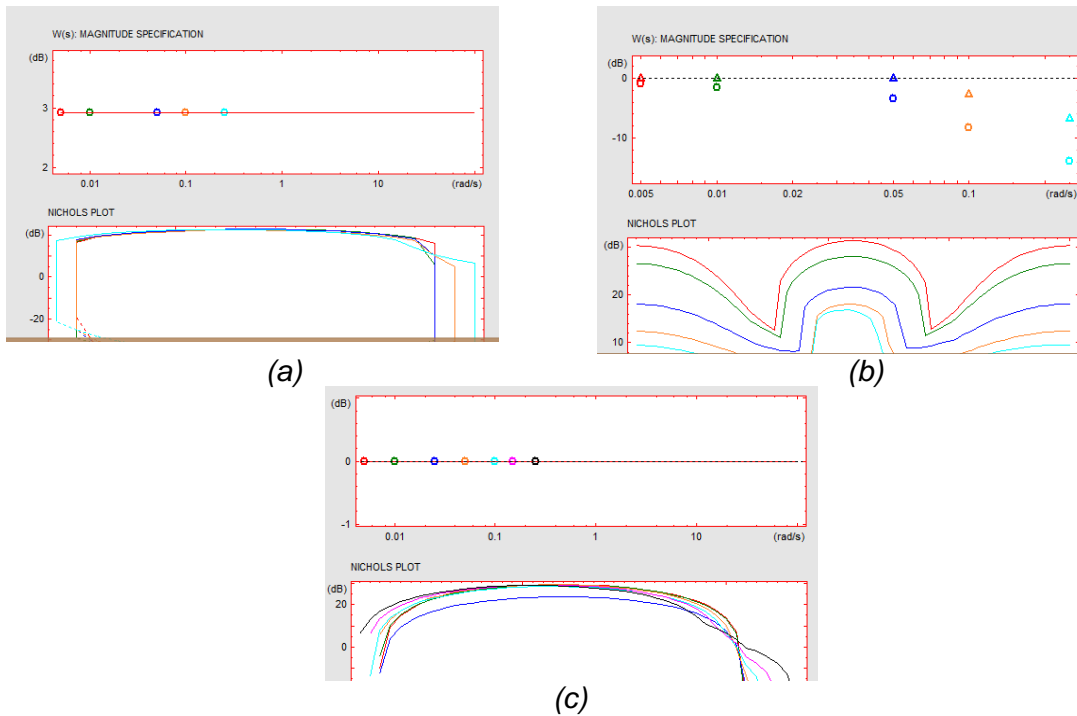


Fig. 7.2. Estabilidad robusta (a), seguimiento robusto de la referencia (b) y rechazo a las perturbaciones a la salida.

Una vez configuradas las plantillas y definidas las especificaciones se puede proceder al ajuste de la función en lazo abierto mediante la herramienta gráfica. En la figura 7.3. se muestra la representación de la función en lazo abierto sobre el diagrama de Nichols.

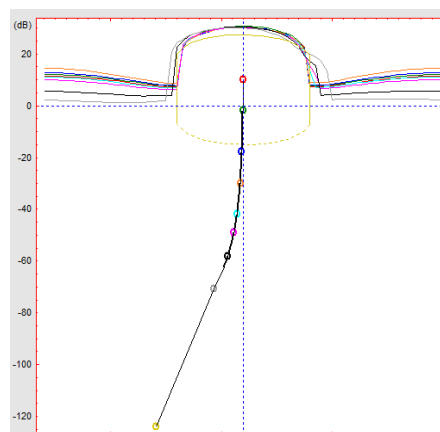


Fig. 7.3. Diagrama de Nichols con curvas de restricción finales  $B(j\omega)$  y la representación de la función de transferencia en lazo abierto.

A continuación se presenta una posible secuencia de pasos para el ajuste de la función de transferencia en lazo abierto.

1. En el caso de partida, la función de transferencia en lazo abierto  $L_0(j\omega)$  es igual a la función de transferencia de la planta nominal  $P_0(j\omega)$ . En la figura 7.3 se muestra como  $L_0(j\omega)$  está a la izquierda de la fase  $-180^\circ$ . El primer paso será desplazar la curva hasta el semiplano derecho del diagrama de Nichols. Para lograr desplazar la curva hacia la derecha se inserta un cero. En la figura 7.4 (a) se muestra este efecto.
2. En el diagrama de Nichols de la figura 7.4 se aprecia como no todos los puntos frecuenciales de  $L_0(j\omega)$  cumplen el criterio de estar por encima de sus respectivas líneas de especificación. Es por tanto necesario desplazar más la  $L_0(j\omega)$  hacia la derecha. En la figura 7.4 (b) se muestra el efecto de incluir otro cero cercano al origen en el control.

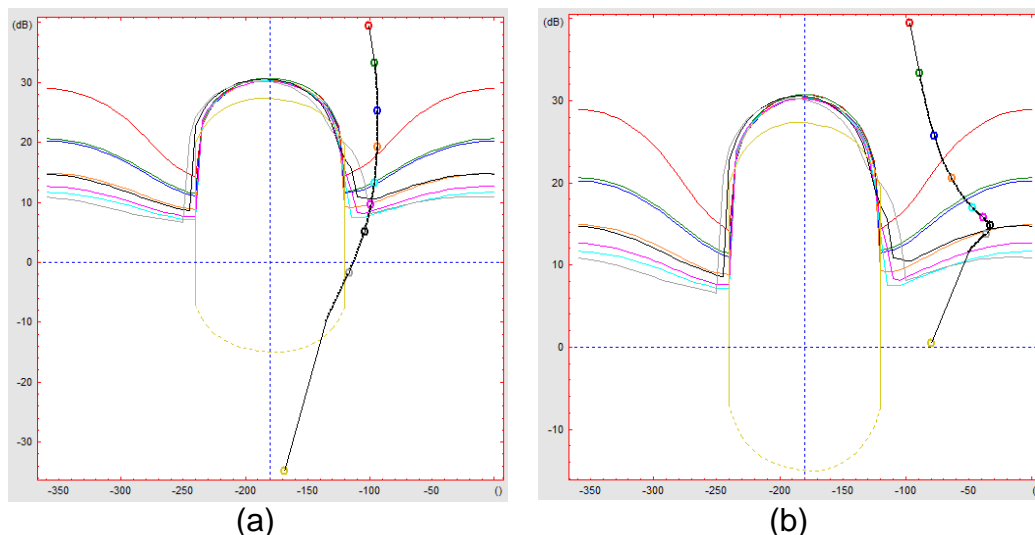


Fig. 7.4. Diagrama de Nichols tras la inclusión de un primer cero (a) y con la inclusión de un segundo.

3. En el diagrama de Nichols de la figura 7.4 (b) se aprecia como ahora todos los puntos frecuenciales de  $L_0(j\omega)$  cumplen el criterio de estar por encima de sus respectivas líneas de especificación. Si bien el control aún no se ha ajustado correctamente por diferentes motivos. El primero es que se tiene que garantizar el exceso de polos sobre ceros. Como la función de transferencia (7.1) presenta un exceso de polos sobre ceros igual a 4 la forma final de  $L_0(j\omega)$  deberá presentar un exceso de polos sobre ceros igual a  $4+\mu$ , donde  $\mu$  tiene que ser mayor igual a 1 [20]. Primeramente se probará con un exceso de polos sobre ceros de  $L_0(j\omega)$  igual a 5, esto implica que el exceso de polos sobre ceros de la función de transferencia del control sea 1. Por todo lo anterior, y dado que en este punto la función de transferencia del control presenta dos ceros deberán incluirse 3 polos. Además de esto, la inclusión de los polos

ayudará a reducir el ancho de banda a la vez que ajusta la respuesta sobre el plano de Nichols a las curvas de especificaciones. En la figura 7.5 se muestra el efecto de incluir 3 polos (dos complejos conjugados y uno real).

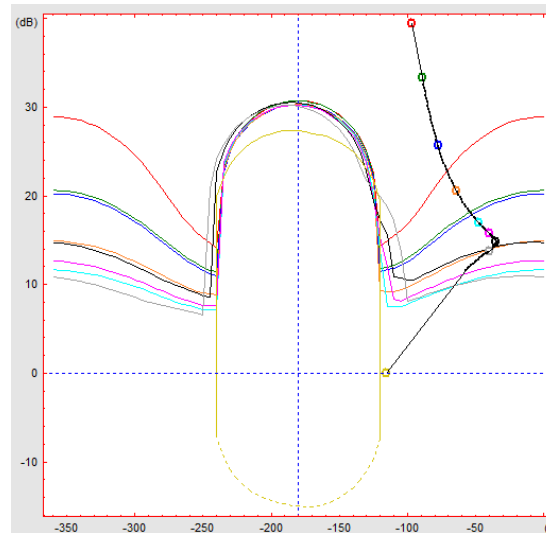


Fig. 7.5. Diagrama de Nichols tras incluir 3 polos en la función de transferencia del control.

4. En la figura 7.5 se muestra como ahora la función  $L_0(j\omega)$  cumple los requisitos para todas las frecuencias definidas. Al haber obtenido la función de transferencia del controlador en base al ajuste de la función en lazo abierto  $L_0(j\omega)$  se dispone de una estructura de control que garantiza las variaciones de ganancia en lazo cerrado. Con el objetivo de conseguir que estas variaciones se den en unos márgenes determinados por la especificación de seguimiento robusto se debe diseñar un prefiltro. En la figura 7.6 se muestra el ajuste del prefiltro.

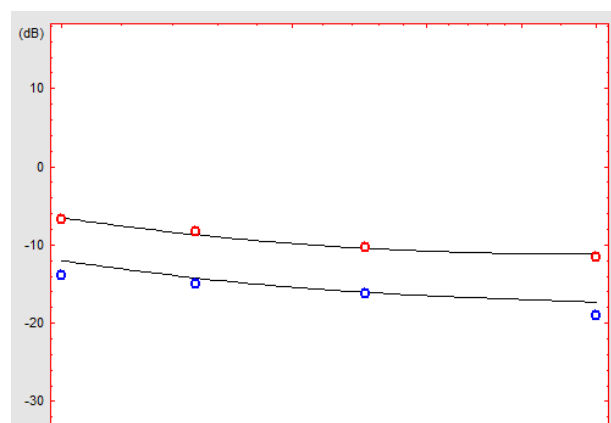
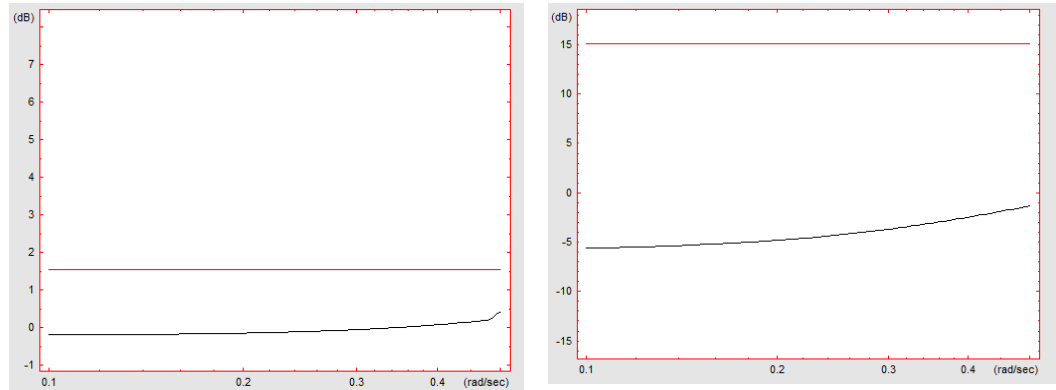


Fig. 7.6 Ajuste de la función del prefiltro.

5. En la figura 7.6 se muestra la respuesta del diseño del prefiltro realizado comparada con los requisitos de seguimiento robusto de la respuesta. Una vez completados los pasos previos se dispone de un diseño de

control y prefiltro adaptado a los requisitos. A continuación se procede a la validación de las especificaciones de estabilidad robusta y de rechazo a las perturbaciones a la salida de la planta. En la figura 7.7 se muestra la validación para las restricciones mencionadas.



(a) (b)  
 Fig. 7.7. Validación para (a) estabilidad robusta y (b) rechazo a las perturbaciones.

En la figura 7.7 se muestra como el diseño cumple las especificaciones planteadas para el diseño de control realizado. El control de las variables Yaw y de z se han realizado siguiendo la misma metodología. Las funciones de transferencia para el prefiltro  $F_i(s)$  y el control  $C_i(s)$  para cada variable se muestran a continuación.

$$\begin{aligned}
 F_{pitch}(s) &= 0.5 \frac{s + 0.2}{s + 0.1} \\
 C_{pitch}(s) &= \frac{0.085(s^2 + 0.005s)}{(s^2 + 3.5s + 6.25)(s + 0.0025)} \\
 \\ 
 F_{roll}(s) &= 0.5 \frac{s + 0.2}{s + 0.1} \\
 C_{roll}(s) &= \frac{0.085(s^2 + 0.005s)}{(s^2 + 3.5s + 6.25)(s + 0.0025)} \\
 \\ 
 F_{yaw}(s) &= 0.55 \frac{s + 0.2}{s + 0.1} \\
 C_{yaw}(s) &= \frac{0.9(s^2 + 0.001s)}{(s^2 + 3.5s + 6.25)(s + 0.2)} \\
 \\ 
 F_z(s) &= 0.01 \frac{s + 0.4}{s + 0.1} \\
 C_z(s) &= \frac{40 \cdot 10^3 (s + 0.5)(s + 0.3)}{(s^2 + 3.2s + 5.3)(s + 250)}
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

### 7.3. Simulación de un control diseñado mediante QFT

Una vez que se han obtenido las funciones de transferencia mostradas en (7.6). Con estas funciones se puede proceder a la implementación del modelo de control en Matlab Simulink. En la figura 7.8. se muestra la estructura de control diseñada para las variables de Pitch, Roll, Yaw y Altitud.

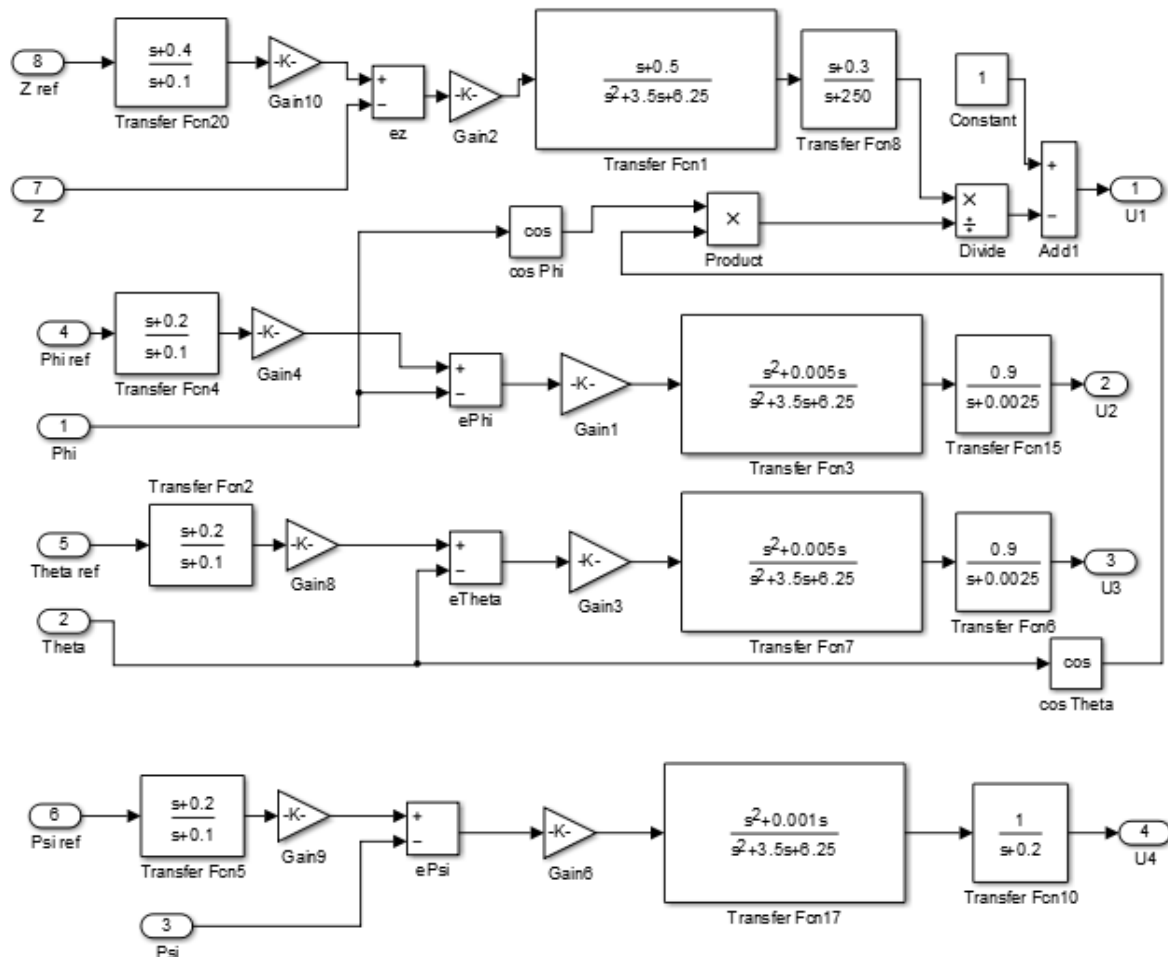


Fig.7.8. Modelo de control diseñado mediante la técnica QFT.

Con el control implementado para cada variable, tal y como se muestra en la figura 7.8., se puede proceder a la validación temporal del modelo. Para la simulación del control se ha usado el modelo del quadrotor presentado en el capítulo 3 de este trabajo, además se ha supuesto que el sistema trabaja con ángulos de Pitch, Roll y Yaw pequeños o nulos. Esto se ha realizado así (al igual que en el caso del diseño mediante la teoría de Lyapunov) por la aproximación realizada sobre la ecuación de la aceleración en Z para poder obtener una función de transferencia simple con la que diseñar el control mediante la técnica de QFT. En la figura 7.9 se muestran los resultados obtenidos mediante simulación para los controles diseñados en (7.6).

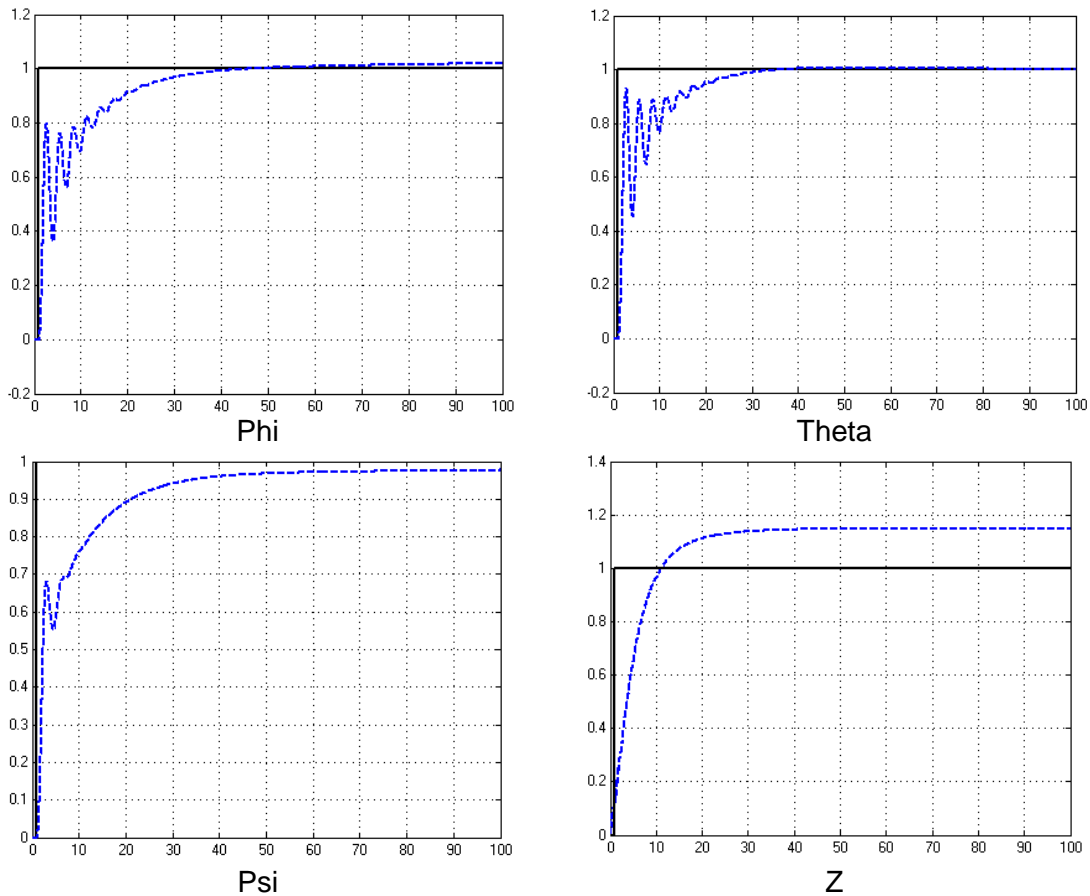


Fig. 7.9. Respuestas al escalón para cada variable.

En la Figura 7.9 se puede ver como para los controles diseñados la dinámica de las respuestas es menos regular que en los casos anteriores. Aún así se alcanza el valor de control. A priori puede verse como presentan tiempos de respuesta muy superiores a los vistos en los otros casos. Además de esto, la dinámica observada en la respuesta de Z puede apreciarse un error en estado estacionario muy significativo, esto se debe a la aproximación realizada en la obtención de la función de transferencia. Cuando se consideran que los ángulos de Pitch, Roll y Yaw ya han sido estabilizados previamente a cero se obtiene una respuesta tal como se muestra a continuación en la figura 7.10.

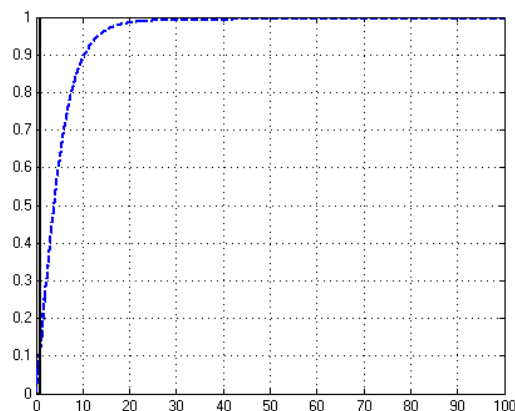


Fig. 7.10. Respuesta temporal para Z con ángulos estabilizados a cero.

De las figuras 7.9 y 7.10 puede verse como esta solución de control es más lenta que las vistas en los capítulos 5 y 6. A continuación se presenta una tabla resumen con los parámetros más significativos de todas las respuestas propuestas.

		$T_{10\%}$	$T_{90\%}$	Error en régimen estacionario	Máximo sobreimpulso
PD	Roll	1.027s	1.378s	0%	0%
	Pitch	1.022s	1.338s	0%	0%
	Yaw	1.026s	1.480s	0%	0%
	Altitud	1.040s	1.850s	2%	0%
PID	Roll	1.013s	1.111s	0%	0%
	Pitch	1.010s	1.096s	0.13%	0%
	Yaw	1.011s	1.133s	0.5%	0%
	Altitud	1.027s	1.324s	3%	0%
PD Sat	Roll	1.077s	1.375s	0%	0%
	Pitch	1.003s	1.028s	1.1%	0%
	Yaw	1.012s	1.075s	0%	0%
	Altitud	1.026s	1.420s	1.8%	0%
PID Sat	Roll	1.109s	1.704s	0%	0%
	Pitch	1.003s	1.051s	2%	0%
	Yaw	1.011s	1.204s	0%	0%
	Altitud	1.026s	1.412s	2.5%	0%
Lyapunov	Roll	1.354s	4.912s	0%	0%
	Pitch	1.358s	5.129s	0%	0%
	Yaw	1.469s	6.273s	0%	0%
	Altitud	1.495s	4.331s	0%, (2500%)	0%
QFT	Roll	1.4817s	19.155s	1.8%	0%
	Pitch	1.523s	16.02s	2%	0%
	Yaw	1.601s	21.245s	2.5%	0%
	Altitud	1.60s	8.432s	0%, (15%)	0%

Tabla. 7.4. Tabla comparativa de los controles estudiados.

En la tabla 7.4 se muestran los parámetros más característicos para cada solución estudiadas. En primer lugar, hay que destacar que se han fijado condiciones estrictas para no permitir sobreimpulsos, esto limita la efectividad de algunas estrategias, especialmente a nivel de velocidad. En la tabla 7.2 se puede ver como los controladores PID y PD son prácticamente iguales, posiblemente por el requisito de no sobreimpulso fijado, y son además mucho mejores que el resto de estrategias diseñadas.

A nivel de error en régimen estacionario se puede ver como los que presentan un mejor comportamiento son los controladores PD y de Lyapunov. Hay que destacar que el control de Lyapunov es muy similar al control PD pero con

menos grados de libertad al venir condicionado por la estructura física del vehículo.

Por otro lado el control que presenta mejor tolerancia a la incertidumbre en la caracterización de la planta es el QFT, funcionando relativamente bien para rangos de valores dispares que abarcaría todos los casos posibles. Si bien es el que presenta una respuesta más lenta y mayores errores en régimen estacionario. Esto hace que sea una solución no aplicable a un caso de operación real.

Desde el punto de vista de la complejidad de diseño los más sencillos son los realizados mediante las técnicas de Lyapunov y QFT. Esto es así ya que se implementan directamente de las expresiones matemáticas o mediante ajustes gráficos. Es cierto que el control de Lyapunov presenta una complejidad teórica mayor, ya que no existe garantía de encontrar una función de Lyapunov que demuestre las condiciones de estabilidad. En este caso ha sido posible al trabajar sobre un modelo simplificado de las expresiones matemáticas (de forma general esto no puede generalizarse). Tanto el control QFT como el Lyapunov han demostrado estar limitados en la regulación de  $Z$ , ya que sólo se realiza con errores reducidos cuando se parte de que los ángulos en torno a los ejes son nulos.

Si bien el ajuste es más complejo que el de Lyapunov al disponer de más órdenes de magnitud, el caso del PD sería el más idóneo, además el uso de un PID no resulta ventajoso debido a las restricciones aplicadas. Es por eso que todo parece indicar que la mejor solución es el control PD, siempre bajo las aproximaciones realizadas en el capítulo 4, que a priori y en relación con la bibliografía parecen más que aceptables, es por ello que se considera la opción más interesante para aplicar en el modelo real. Además de lo anterior, dentro de los controladores clásicos PD y PID se han probado diferentes estructuras (denominadas PD Sat y PID Sat), estas estructuras alternativas han presentado un comportamiento ligeramente peor que los PD y PID.

## **8.- Diseño y construcción de un quadrotor**

### **8.1. Introducción**

Hasta el momento se ha estudiado el quadrotor desde el punto de vista del modelo físico y de su control aplicando diferentes estrategias y metodologías de síntesis. En este apartado se pretende mostrar todo el trabajo desarrollado en la implementación real del vehículo, si bien, la densidad del trabajo llevado a cabo en lo relativo a la electrónica implicada y a la programación del sistema embarcado puede apartar la atención del problema principal que es el control, es importante entender el comportamiento de los sensores y del procesado de los datos para detectar algunas limitaciones que se pueden dar al pasar del caso teórico y simulado a un caso más real.

### **8.2. Propulsión**

El sistema de propulsión del quadrotor se constituye en base a tres elementos fundamentales, las hélices, los motores y los controladores de velocidad (ESC, Electronic Speed Controller). Cada conjunto de estos tres elementos, que conforman los cuatro propulsores incluidos en el quadrotor, son dependientes entre ellos para producir la fuerza necesaria para elevar, desplazar y estabilizar el UAV. En el siguiente apartado se van a presentar cada uno de estos elementos de forma separada.

#### **8.2.1. Motores**

Los motores de corriente continua (DC) son usados de forma extensa en los vehículos no tripulados, especialmente en los de pequeño tamaño. Normalmente se usan dos tipos de motor DC, los motores DC brushed (BDC) y los motores DC brushless (BLDC). Los motores brushless o motores sin escobillas, son los más usados para el desarrollo de quadrotores ya que presentan una mayor durabilidad, eficiencia y potencias superiores a los motores Brushed. Por contra coste de fabricación de los motores Brushless es superior. Las diferencias en términos de velocidad angular entre los dos tipos de motor son muy reducidas, alcanzado ambas magnitudes similares y suficientemente altas como para estabilizar el vuelo del quadrotores.

Los motores más adecuados para la construcción de quadrotores son los que presentan más de 1000 rpm y por Volt aplicado, esto significaría que trabajando a un valor de voltaje típico suministrado por una batería de Litio estándar de 12V, el rotor giraría a 12000 revoluciones por minuto, si bien, es normal que este tipo de rotores giren a un máximo de 7000 rpm, ya que en su modo de operación normal presentará una carga aerodinámica producida por la hélice. Esto último puede entenderse como que la velocidad de rotación efectiva, en las condiciones de operación normales, será de unas 600 rpm/V. Es por este motivo que para obtener ciertas garantías de que el motor podrá

estabilizar correctamente el quadrotor los motores deben sobre dimensionarse en un 40% [35].

Los motores BLDC que se montan en quadrotores muestran como el vástago unido al rotor sobresale del propio motor, esto es así con el objetivo de poder fijar la hélice de forma robusta. Además es típico que este tipo de motores, tengan su estator constituido a partir de imanes permanentes hechos de Neodimio (NdFeB). El Neodimio está clasificado en el grupo de las tierras raras, y presenta una alta permanencia magnética, lo que significa que puede crear un campo magnético permanente intenso.

Para la construcción de este quadrotor se ha utilizado un motor brushless de 1000rpm/V y 30A. En la figura 8.1 puede verse el motor con la hélice ya fijada. Este tipo de motores son de bajo coste y se utilizan ampliamente en aplicaciones de modelismo ya que pueden alcanzar hasta 12000 rpm.



Fig. 8.1. Motor usado en la construcción del quadrotor.

### 8.2.2. Control electrónico de velocidad

La principal finalidad del control de velocidad (ESC) es suministrar una tensión de alimentación al motor proporcional a un señal de control definido por el controlador central. El ESC alimenta el motor mediante un sistema de tres fases DC, variando el nivel de cada una de las fases entre cero y el nivel de pico de la batería. En la siguiente figura se muestra el esquema general de un control de velocidad.

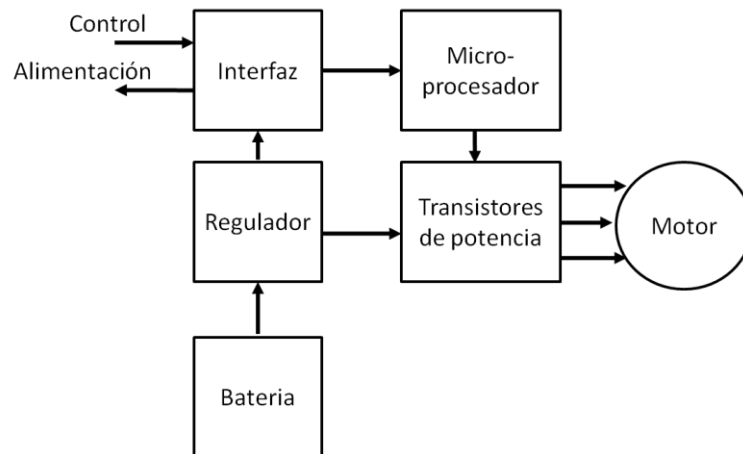


Fig. 8.2. Esquema genérico de un ESC.

Normalmente, el microprocesador utilizado en este tipo de sistemas es uno de bajo coste de 8 bits, con salidas PWM (Pulse Width Modulation). La energía entregada al motor es obtenida de la batería, la cual es modulada por el microprocesador y usada para atacar los transistores de potencia, que suelen ser de tecnología MOSFET (Metal-Oxide-Semiconductor Field-Effect Transistor), que operan como interruptores digitales. Normalmente, los controladores ESC usados son de 25A (fijado para motores de 1000 rev/min).

Para este proyecto se ha usado un ESC sobredimensionado de 30A, para que no hubiera problemas en la alimentación de los motores, si bien el compromiso entre corriente proporcionada y consumo es crítico como en cualquier sistema alimentado con baterías.

Para el diseño de este quadrotor se han realizado dos pruebas, una con un ESC comercial de bajo coste, y la segunda con una fuente de corriente de potencia controlada mediante un PWM, las dos han dado buenos resultados, pero el coste del sistema comercial era inferior al de fabricación propia (limitado por el coste de mecanizado de las placas al implementarlo en PCB (Printed Circuit Board), por eso finalmente se ha decidido utilizar el sistema comercial (ver Figura 8.3).



Fig. 8.3. ESC usado en el modelo construido.

### 8.2.3. Hélices

Las hélices son los elementos responsables de convertir el movimiento de rotación de los motores en fuerzas verticales de empuje. La eficiencia típica de las hélices que pueden encontrarse en los quadrotores es del 70% y se define como se muestra a continuación:

$$E = \frac{\text{Empuje} + \text{Velocidad axial}}{\text{Resistencia} + \text{Velocidad angular}} \quad (8.1)$$

De la expresión (8.1) se desprende que el movimiento de la hélice genera una fuerza vertical de empuje proporcional a la rotación del motor. El punto más crítico en la elección de las hélices es el tamaño y debe elegirse teniendo en cuenta lo siguientes puntos:

- La fuerza generada es proporcional a la superficie de la hélice, de manera que hélices mayores proporcionan fuerzas mayores, pero mayor tendrá que ser la potencia del motor.
- Cuanto más pequeña es la hélice, mayor tiene que ser la velocidad de giro del motor para producir la misma fuerza de empuje.
- Las hélices pequeñas favorecen la estabilidad del quadrotor, pero no dan buenos resultados cuando se realiza vuelo acrobático.
- Las hélices de fibra de carbono son más resistentes que las de plástico y presentan menores vibraciones, por contra su precio es bastante superior.

En el quadrotor implementado se han usado hélices de fibra de carbono de 10cm. En la figura 8.1 puede verse la hélice unida al motor.

### 8.2.4. Determinación de la fuerza del sistema de propulsión

Con el objetivo de identificar la fuerza vertical que ejerce cada motor, en este punto se pretende mostrar un posible experimento para realizarlo [35]. Al no disponer de un encoder óptico no ha sido posible determinar también la velocidad de giro de los motores. En la figura 8.4 se muestra el montaje usado.

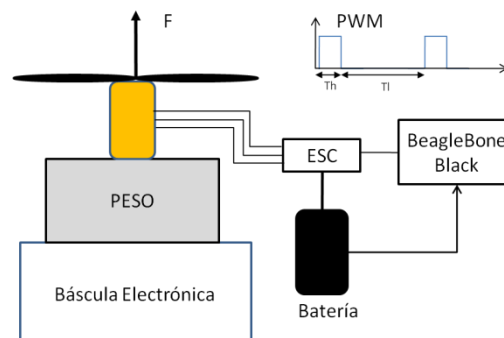


Fig. 8.4. Experimento para determinar la fuerza producida por el propulsor.

Con el montaje de la figura 8.4 se pretende determinar la fuerza que ejerce el motor y la hélice sobre una masa. El método más sencillo posible para realizar esto ha sido el siguiente:

1. Fijación del propulsor a un bloque de madera de 1000gr.
2. Conexión del sistema de alimentación del propulsor.
3. Activación del software de gestión del PWM.
4. Medida de la diferencia de peso medido en la báscula para diferentes ciclos de trabajo del PWM.

Los resultados obtenidos han sido los que se muestran en la Tabla 8.1

Tiempo de nivel alto (Th)	Fuerza vertical (gr)
1ms	No respuesta del motor
1.1ms	No respuesta del motor
1.2 ms	No respuesta del motor
1.3 ms	782
1.4 ms	634
1.5 ms	483
1.6 ms	267
1.7 ms	110
1.8 ms	50
1.9 ms	15
2.0 ms	0

Tabla. 8.1. Resultados del experimento.

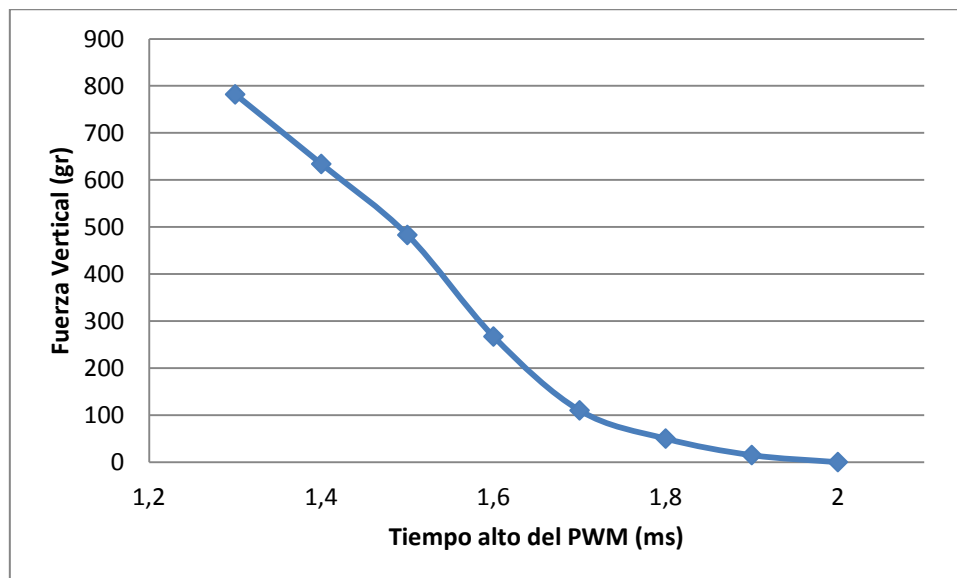


Fig. 8.5. Característica Fuerza-Señal PWM.

Debe tenerse en cuenta que la figura 8.5 es válida bajo unas condiciones de operación concretas (carga de la batería al máximo con 12V y 25A). Además, los resultados son válidos para un motor de manera que bajo las mismas condiciones de operación la fuerza total resultante de sistema será cuatro veces la mostrada en la figura 8.5.

### 8.3. Sensores

Una de las partes más importantes en cualquier sistema de control es el elemento de interacción entre el controlador y el estado actual de la planta. Para el caso del quadrotor es necesario disponer de diferentes sensores que permitan conocer el estado de cada variable. En este caso se ha optado por sensores digitales de bajo precio para medir las siguientes variables:

- Aceleración en X.
- Aceleración en Y.
- Aceleración en Z.
- Velocidad angular en X.
- Velocidad angular en Y.
- Velocidad angular en Z.
- Temperatura.
- Presión atmosférica.
- Campo magnético.

Se observa que existe cierta redundancia en las medidas de algunas variables, ya que de las aceleraciones en cada eje pueden desprenderse también las velocidades o los ángulos, de igual forma que puede hacerse con las velocidades angulares. Esto se debe a que muchos sistemas de bajo coste integran tanto acelerómetros de tres ejes como giróscopos de tres ejes. Si bien a nivel de procesado de los datos la obtención de los ángulos de giro sobre el eje puede presentar ventajas o inconvenientes, por ejemplo, con un giróscopo la salida tiene que ser integrada para obtener los valores de los ángulos, lo que en tiempo discreto implica el promediado de las  $N$  muestras anteriores a lo largo del giro, esto puede presentar complicaciones de sincronismo o errores de sesgo en la medida. Por otro lado la obtención de los ángulos con un acelerómetro triaxial implica cálculos trigonométricos, que pueden ser más costosos a nivel computacional pero evitan los errores de sesgo o de sincronismo. Por contra si el vehículo está horizontal y gira sobre el eje  $z$  no podrá medirse el ángulo de Yaw, ya que el vector de aceleración de gravedad no habrá sufrido ningún cambio. Esto puede suplirse con el uso de un magnetómetro, ya que tomando como referencia el norte magnético siempre será posible determinar el giro en torno al eje  $z$ .

Por otro lado determinar una altitud de vuelo es un problema. Habitualmente se usan sensores de ultrasonidos, el problema de esto es que sólo son válidos para rangos de unos pocos metros. Los sensores de presión atmosférica pueden usarse como alternativa con rangos de operación mucho mayores. Para que estos sensores ofrezcan una medida fiable deben de ser calibrados ya que presentan una fuerte dependencia con la meteorología. En base a las

consideraciones realizadas hasta el momento, para la construcción del vehículo desarrollado en este trabajo se ha decidido utilizar los siguientes sensores:

Acelerómetro triaxial digital: ADXL345 [24].

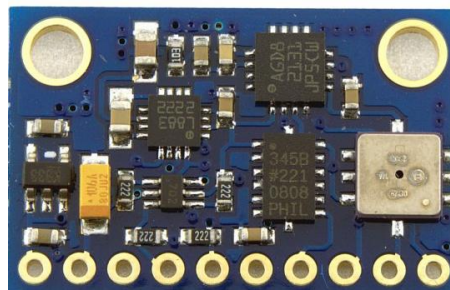
Giróscopo triaxial digital: L3G4200D [25].

Magnetómetro digital: HMC5883L [26].

Altímetro digital: BMP085 [27].

Hay que destacar que tanto el altímetro como el acelerómetro incluyen sensores de temperatura internos, de esta forma es posible compensar las derivas y los errores de medida por temperatura siguiendo las pautas indicadas por el fabricante.

Una vez justificada la necesidad de cada sensor y elegidos los componentes más adecuados para el caso de estudio fue necesario determinar cómo proceder con su integración en el vehículo. Principalmente existían dos alternativas, la primera diseñar los circuitos electrónicos y proceder al montaje de estos, mientras que la segunda consistía en adquirir los sensores ya montados en placas de evaluación. Al final se optó por adquirir las placas de evaluación al resultar mucho más económico que encargar la fabricación del diseño propio realizado. En la figura 8.6 se muestra la placa de evaluación usada que integra los sensores descritos anteriormente.



*Fig. 8.6. Sensores integrados.*

La placa con los sensores presenta un coste inferior a los 10\$, por este motivo es una solución interesante tanto para fines docentes como para aplicaciones de hobby.

### **8.3.1.- Acelerómetro triaxial digital ADXL345**

El ADXL345 es un acelerómetro de tres ejes con un muy bajo consumo energético y resolución de 13-bits. Permite medir aceleraciones en el rango de  $\pm 2g$ ,  $\pm 4g$ ,  $\pm 8g$ ,  $\pm 16g$ , esto es más que suficiente para aplicaciones de UAV civiles ya que las fuerzas a las que se verán sometidos serán muy inferiores a estas aceleraciones.

Este sensor digital consume menos de  $23\mu\text{A}$  en estado de medida, y permite la interconexión con protocolos de comunicación estandarizados y de amplia implantación en las plataformas industriales actuales. Además permite transmisiones de hasta 400kbps, más que suficiente para que los retardos entre muestras medidas sean despreciables.

La resolución dispositivo, en el rango de medida inferior, es de 3.9mg. Esto da información de la precisión con la que pueden trabajar los sistemas actuales, y más si se tiene en cuenta que este sensor presenta un coste en fabricante de unos pocos céntimos de euro.

### **8.3.2.- Giróscopo triaxial digital L3G4200D**

Este sensor es un giróscopo digital de tres ejes de calificación ultra-estable, que permite medir velocidades de giro en los rangos de  $250^\circ/\text{s}$ ,  $500^\circ/\text{s}$  y  $2000^\circ/\text{s}$ , con una precisión de 16 bits en la medida. Además permite modos de operación de bajo consumo, haciéndolo ideal para aplicaciones embarcadas y alimentadas con baterías.

Este tipo de sensores se comunica con protocolos I2C (Inter-Integrated Circuit) o SPI (Serial Peripheral Interface). Este tipo de protocolos de comunicación, altamente extendidos en la industria, son de uso sencillo cosa que permite que el desarrollo del software necesario sea poco costoso y de ágil desarrollo. La velocidad de transmisión y de respuesta que presentan estos protocolos permite que los tiempos de adquisición y de transmisión de los datos sea despreciable evitando de esta forma posibles problemas de sincronización.

Los rangos de temperatura de operación de este sensor es de  $-40$  a  $+85^\circ\text{C}$ , cosa que lo hace ideal para aplicaciones en vehículos aéreos o que deban operar en condiciones hostiles.

### **8.3.3.- Magnetómetro digital HMC5883L**

Este sensor es un compas digital de 3 ejes con el que es posible desarrollar aplicaciones de magnetometría. En este caso permite operar como brújula digital para determinar el norte magnético y mantener una referencia útil para la navegación.

El sensor presenta una precisión de 12 bits y de  $1^\circ$  grado de error en la determinación del norte magnético, lo que lo hace idóneo para sistemas de navegación de rango reducido.

Además de lo anterior presenta un consumo inferior a los  $100\mu\text{A}$ , lo que lo convierte en un buen candidato para sistemas embarcados.

Como el resto de dispositivos presentados, presenta una pila de protocolos serie I2C para la comunicación con múltiples plataformas.

En lo relativo a la calibración, presenta un sistema de compensación de derivas mediante calibración interna, lo que ayuda a reducir los errores en la navegación.

#### **8.3.4.- Altimetro digital BMP085**

Este sensor permite medir presiones atmosféricas y determinar a partir de estas la altitud sobre el nivel del mar, con un rango de medida de +9000m a -500m o lo que es lo mismo, de 300 a 1100 hPa de presión atmosférica. Además permite la medida precisa de la temperatura, y un sistema de calibración interna que permite compensar errores, ofreciendo una precisión de 0.1m.

Este sensor de bajo coste y precisión más que aceptable permite, previa calibración del sesgo, medir altitudes de vuelo sin tener que recurrir a medidas de ultrasonido que siempre limitan el rango.

Una vez más, este sensor digital presenta una salida serie de tipo I2C de hasta 3.4Mbps, lo que permite despreciar los retardos de transmisión. Además que permite integrar todos los sensores en un único bus de datos minimizando el coste del sistema.

### **8.4. Procesador central**

El procesador central, permite la ejecución de los programas que reciben la información del estado del vehículo, desde los sensores, y que genera las acciones necesarias para permitir el correcto funcionamiento de la aeronave. Este sistema, se ha elegido siguiendo unos principios básicos de prestaciones, precio, estandarización y capacidad. Todo con el objetivo de tener control total sobre cada elemento, permitiendo de esta forma ejecutar múltiples programas que puedan dotar de versatilidad al quadrotor. Para este fin se ha elegido un microcomputador de hardware abierto, de la marca Texas Instruments, la BeagleBoneBlack [28]. Ésta consta de un gran número de periféricos como convertidores analógico a digital (ADC), moduladores de anchura de pulsos (PWM), interfaces de comunicación serie y paralelo. Además este sistema trabaja con un sistema operativo Linux empotrado (embedded), esto permite simplificar mucho el desarrollo de aplicaciones complejas, además que dota a la programación de una gran flexibilidad y de posibilidades prácticamente ilimitadas. Las principales ventajas de este microcomputador, que sigue las pautas modernas de sistemas empotrados [29], son su coste y su versatilidad cosa que lo hacen especialmente indicado para aplicaciones docentes e inclusive comerciales. Esta plataforma está menos extendida que otras similares (Arduino o Raspberry pi) ya que su aprendizaje resulta ligeramente más complejo que estos. Por este motivo no suele ser usado de forma intensiva para aplicaciones de aficionados a la ingeniería.



aplicaciones de hobby se utiliza JavaScript o Python. Esto permite simplificar mucho el desarrollo al presentar una curva de aprendizaje reducida. Sin embargo, en este proyecto se ha desarrollado toda la programación en ANSI C y C++. Se ha procedido de esta forma por la mayor eficiencia y velocidad de ejecución que presentan los programas escritos en estos lenguajes. Esto es importante para aplicaciones que requieren adquirir datos del entorno de forma rápida y continua, por tanto la minimización de los tiempos de ejecución es muy importante, ya que durante estos tiempos muertos se podrían perder datos provocando un mal comportamiento del sistema o inclusive problemas de estabilidad que hicieran peligrar su integridad. La aplicación aquí desarrollada se sitúa en la frontera entre los sistemas con requisitos de ejecución en tiempo real y los que no presentan esta restricción. Además de lo anterior, lenguajes de bajo nivel como ANSI C y C++ presentan un mayor grado de estandarización que otros de alto nivel adaptados a una plataforma concreta. El desarrollo de los programas en estos lenguajes de bajo nivel, sobre un determinado sistema operativo, posibilitará su adaptación de forma rápida y no muy costosa a otras plataformas similares.

Una de las características más importantes de la BeagleBoneBlack son los recursos de comunicación, adquisición y actuación de los que dispone. A continuación, en la tabla 8.2, se presentan los elementos que se han considerados más importantes para el correcto desarrollo de las aplicaciones más habituales que se encuentran en proyectos como el desarrollado en este trabajo de final de máster.

<b>Elemento</b>	<b>Número de recursos</b>	<b>Descripción</b>
<b>GPIO</b>	65	Pines binarios de entrada-salida
<b>PWM</b>	8	Moduladores de anchura de pulso de 0 a 3.3V y de hasta 25MHz
<b>ADC</b>	7	Convertidores Analógico-Digital de 12bits de 100KSPS
<b>Timers</b>	4	Referencias de Clock
<b>CAN</b>	2	Interfaz de comunicaciones industriales
<b>I2C</b>	2	Interfaz de comunicaciones serie de alta velocidad
<b>UART</b>	4	Interfaz de comunicaciones serie
<b>SPI</b>	2	Interfaz de comunicaciones serie

*Tabla 8.2. Periféricos E/S de la BeagleBoneBlack.*

## 8.5. Arquitectura física y lógica del vehículo

Ahora que ya se han planteado los elementos que constituyen el vehículo aéreo, se puede plantear la arquitectura del sistema. En este apartado se van a presentar, de forma descriptiva, la arquitectura del hardware como la del software. En la figura 8.8. se muestra un esquema descriptivo de la arquitectura de interconexión de los diferentes elementos. Se distinguen los siguientes subsistemas:

- Actuadores (Motores, MX).
- Sensores (Acelerómetro, Giróscopo, Altímetro y Magnetómetro).
- Controladores de Velocidad (ESC X).
- Procesador central (BeagleBoneBlack).
- Batería (LiPo, 12V/25A).

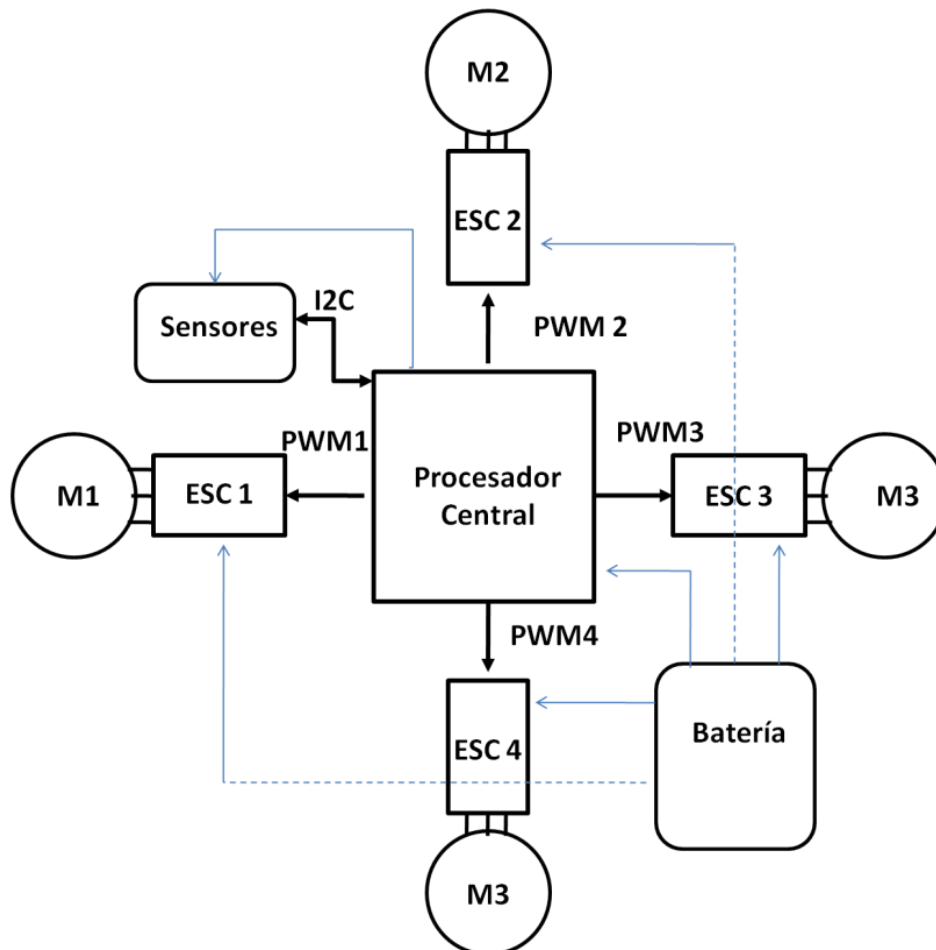
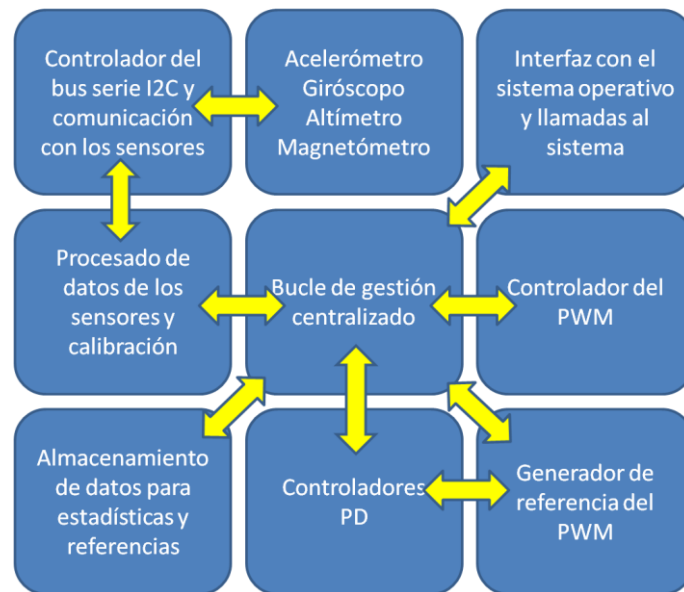


Fig. 8.8. Arquitectura hardware del vehículo.

Se observa que a nivel de bloque que la complejidad viene dada por el software que controla el conjunto de los elementos, ya que sin este los elementos no funcionarían. En la figura 8.9 se muestra la arquitectura de software que se ha implementado.



*Fig. 8.9. Arquitectura del software implementado.*

En la figura 8.9 se muestra la arquitectura del software así como las interacciones entre cada bloque conceptual. Como puede verse se trata de una arquitectura centralizada, ya que se basa una estructura iterativa central que se encarga de gestionar la recepción de la información y distribuirla a cada bloque según corresponda, y de esta forma implementar en último lugar la acción de control sobre el actuador. A continuación se explica la función de cada bloque conceptual.

- **Acelerómetro-giróscopo-altímetro-magnetómetro:** Elemento que se corresponde con la placa de sensores. Cada sensor tiene una dirección hexadecimal asignada desde fábrica y responde a consultas realizadas a dicha dirección mediante protocolo I2C.
- **Controlador del bus I2C y comunicación con los sensores:** Este bloque realiza las funciones de habilitar los interfaces I2C entre el sistema operativo, configurarlos, iniciar la comunicación con los sensores y adquirir los datos enviados por estos. Comunica de forma bidireccional con los sensores y transmite los datos al bloque de calibración y recibe un reconocimiento del correcto almacenaje de los mismos.
- **Procesado de datos de los sensores y calibración:** Este elemento recibe los datos de las variables físicas y aplica las correcciones de calibración determinadas por el fabricante. Una vez calibrados los datos los almacena en un fichero y habilita un indicador para el bloque precedente y otra para el bucle central conforme los datos están actualizados al último valor disponible.
- **Bucle de gestión centralizado:** Este bloque corresponde al bucle infinito que repite la ejecución de cada función básica y distribuye la información entre los otros elementos.

- **Almacenamiento de datos para estadísticas y referencias:** Este bloque conceptual recibe los datos y lo guarda en ficheros en un directorio del sistema operativo de forma que su almacenaje sea independiente de la ejecución del programa.
- **Controladores PID:** Este bloque implementa la acción de control en base a los datos de los sensores.
- **Generador de referencias del PWM:** Este bloque conceptual recibiría el valor de control generado por el controlador PD y lo adecuaría a una referencia para el PWM en forma de un ancho de pulso. Este valor sería usado posteriormente por el controlador central para comunicar con el elemento correspondiente.
- **Controlador del PWM:** Este elemento inicializa el controlador de anchura de pulsos (PWM) correspondiente a cada motor y lo activaría al valor generado por el generador de referencias del PWM.
- **Interfaz con el sistema operativo y llamadas al sistema:** Este elemento se encarga de la configuración de los elementos propios del sistema operativo y de implementar las llamadas al sistema para generar un flujo de múltiples procesos paralelos.

Hay que destacar que la arquitectura presentada sólo requiere de intervención humana para fijar los valores de la referencia o la configuración de la misión. Con esto se quiere decir que la operación de las siguientes tareas para alcanzar el punto de operación son autónomos.

La principal ventaja de la arquitectura del software planteada es su gran escalabilidad. Esto se debe a que su alta modularidad permite que se adapte de forma rápida a nuevos requisitos, criterios de diseño o elementos periféricos. Además, esta estructura permite la detección de fallos de una forma más ágil, ya que el problema de diseño se divide en otros más sencillos y que pueden ser abordados de forma simple.

Como se ha comentado en apartados previos, en este trabajo se ha controlado la dinámica de los ángulos (sistema rotacional) y de la altitud de vuelo. El mapeo del entorno y el control de la trayectoria del vuelo constituyen un trabajo paralelo de gran magnitud. Si bien dada la potencia del procesador y la cantidad de recursos hardware, estas funciones extras podrían ser implementadas sobre la plataforma aquí desarrollada. En la figura 8.10 se han definido, de forma general, los elementos necesarios para implementar el control de la navegación y como estos bloques se integrarían con el software ya desarrollado en este trabajo.

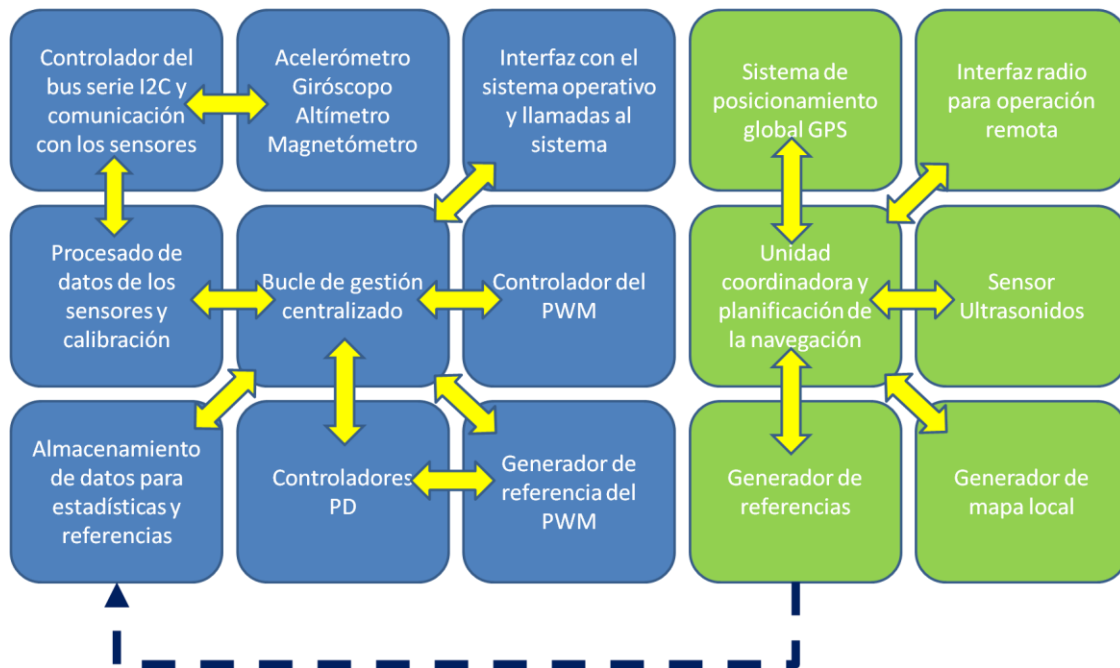


Fig. 8.10. Propuesta de arquitectura de software con navegación autónoma.

La arquitectura de software de la figura 8.10 muestra que la integración del control de la navegación daría lugar a una arquitectura híbrida. Esto se debe a que se constituye en base a dos grandes bloques diferenciados que interactúan entre ellos, pero que generan señales de control de forma independiente en base a los datos que procesan. Como puede verse en la figura 8.10, la navegación autónoma o remota complica tanto la arquitectura del software como la del hardware, cosa que se traduce en un mayor coste. Pese a este incremento en la complejidad, se puede entender que si el sistema controla de forma correcta los ángulos del sistema rotacional, el control de la navegación se traducirá en un problema de ajuste de estos ángulos en base a una trayectoria previa calculada. La mayor dificultad a la hora de calcular la trayectoria que se quiere describir es principalmente la referente a la creación de mapas, la interpretación estadística del entorno y el procesado de datos. Los algoritmos usados para este tipo de funciones presentarían más un problema de programación (complicando el software necesario) que uno de control. Por este motivo, y dada la necesidad de acotar la extensión del proyecto, la navegación no se incluyó como objetivo.

Una vez que se ha planteado la arquitectura del hardware y del software para el control de la estabilidad y de la altura del quadrotor se puede proceder a la descripción de los algoritmos del software diseñado. Con el algoritmo se quiere mostrar la secuencia de ejecuciones realizadas para el correcto funcionamiento. A continuación en las figuras 8.11 y 8.12 se muestran las secuencias de ejecución para el algoritmo que describe el software diseñado.

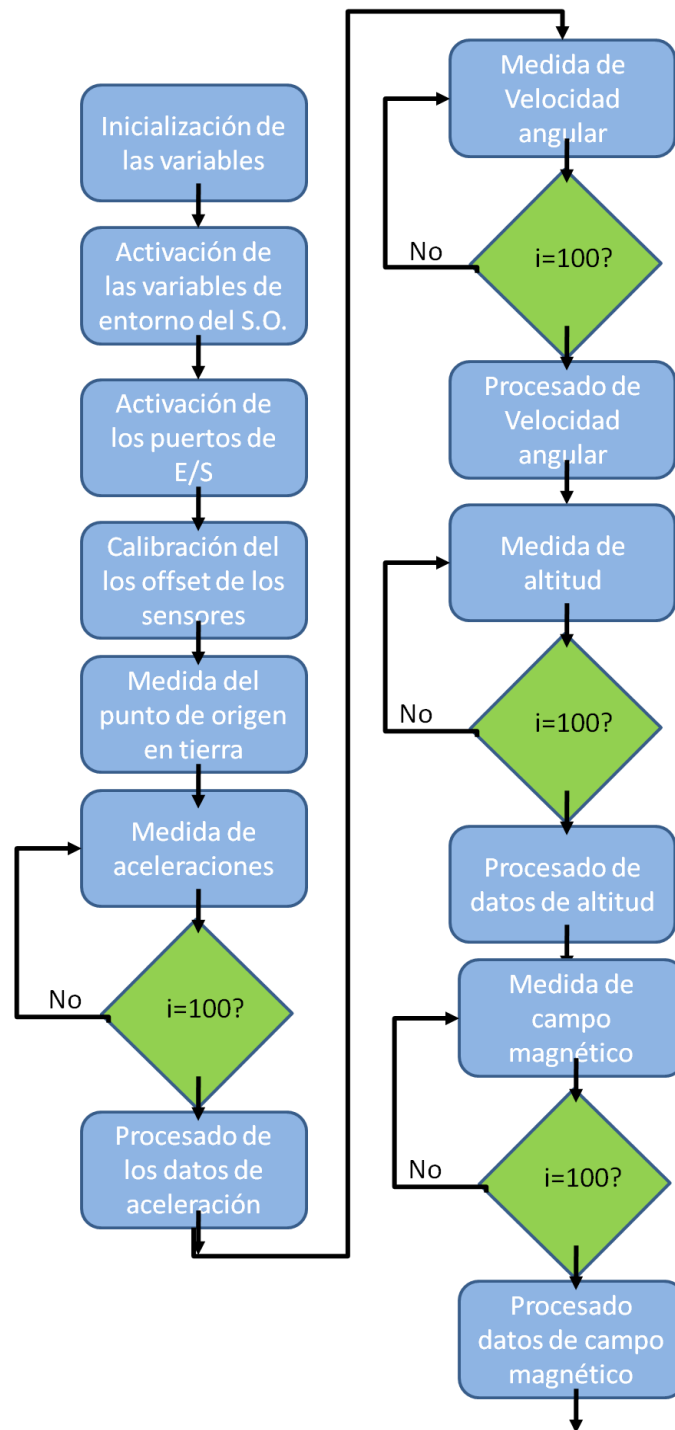


Fig. 8.11. Algoritmo implementado para la adquisición y procesado de datos (Parte 1).

En el algoritmo de la figura 8.11 se muestra la secuencia de ejecución para el bloque de adquisición de datos. Puede verse como la primera parte corresponde al proceso de activación e inicialización de los diferentes elementos y variables. Una vez realizado eso se puede proceder a adquirir un primer valor y proceder a la calibración del punto de origen para todos los sensores. Este punto de origen se corresponde con el punto en tierra donde todas las variables de los sensores deben ser cero (salvo la dirección del norte

magnético. La medida de los datos se realiza de forma secuencial ya que el bus I2C opera en exclusión mutua (sólo puede ser usado por elemento cada vez). Cada variable se adquiere 100 veces y se promedia (esto equivale a un filtrado que mitiga el ruido que está incorrelado con los datos). Una vez que los datos han sido promediados se usan para el cálculo de cada variable de interés. La segunda parte del algoritmo, figura 8.12, corresponde a la generación de las señales de control.

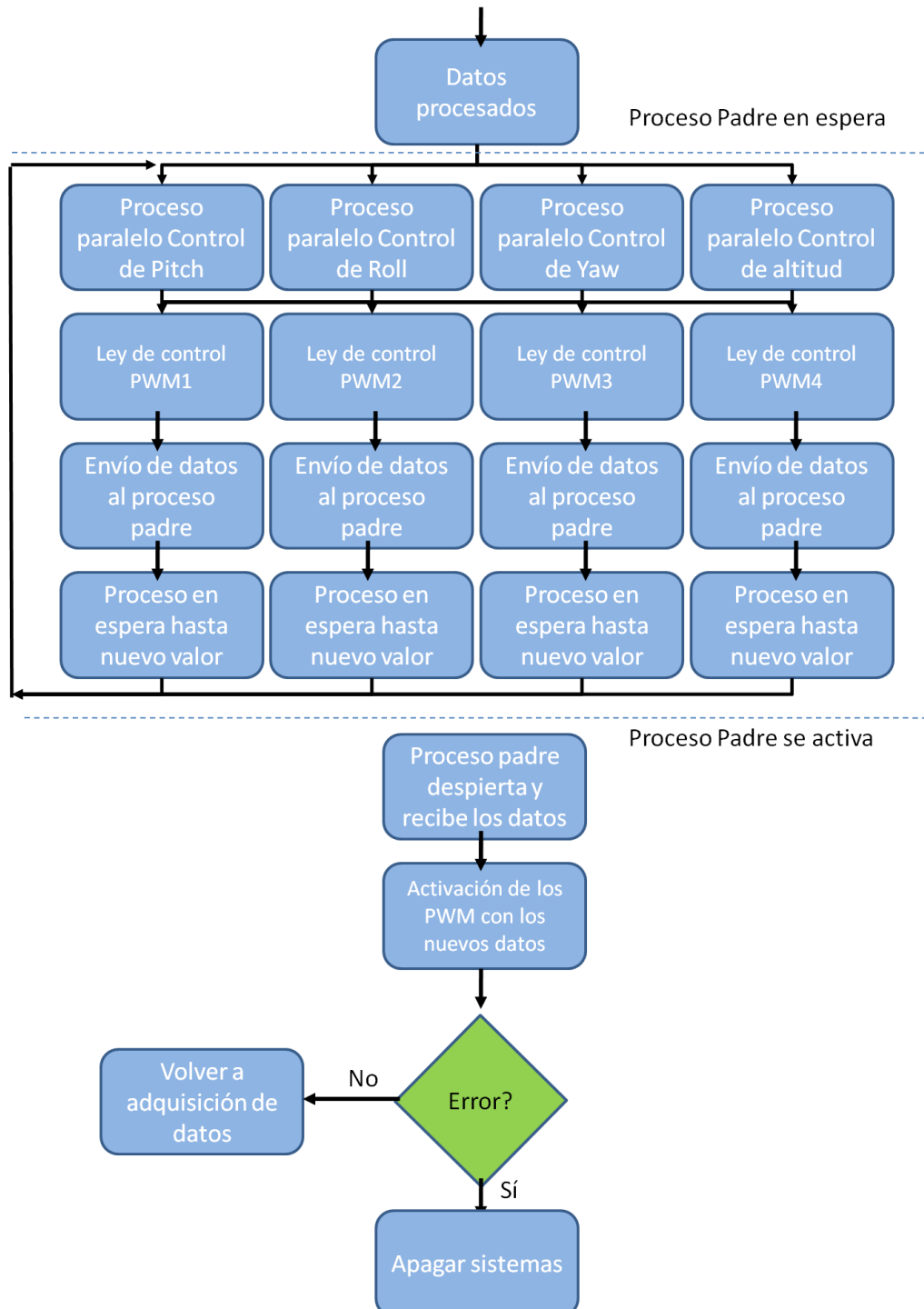


Fig. 8.12. Algoritmo implementado para la adquisición y procesado de datos (Parte 2).

Puede verse como presenta una estructura de computación paralela. Con la paralelización se intenta buscar un mecanismo de bloqueo y sincronización, o lo que es lo mismo, el proceso "padre" lanza cuatro procesos "hijo" y cada uno de estos se ocupa de generar la señal de control correspondiente. A su vez el proceso "padre" queda bloqueado a la espera de que todos los procesos "hijo" despierten y devuelvan todas las señales de control al proceso padre. De esta forma se consigue actuar sobre todos los motores de forma casi simultánea. La actuación sobre los motores corresponde al proceso padre. La ejecución será iterativa mientras no se determine que el sistema tiene que apagarse.

## 8.6. Modelo construido

En este apartado se quiere mostrar el quadrotor que se ha construido. En la figura 8.13 se muestra el esquema descriptivo de la base y de las medidas de esta.

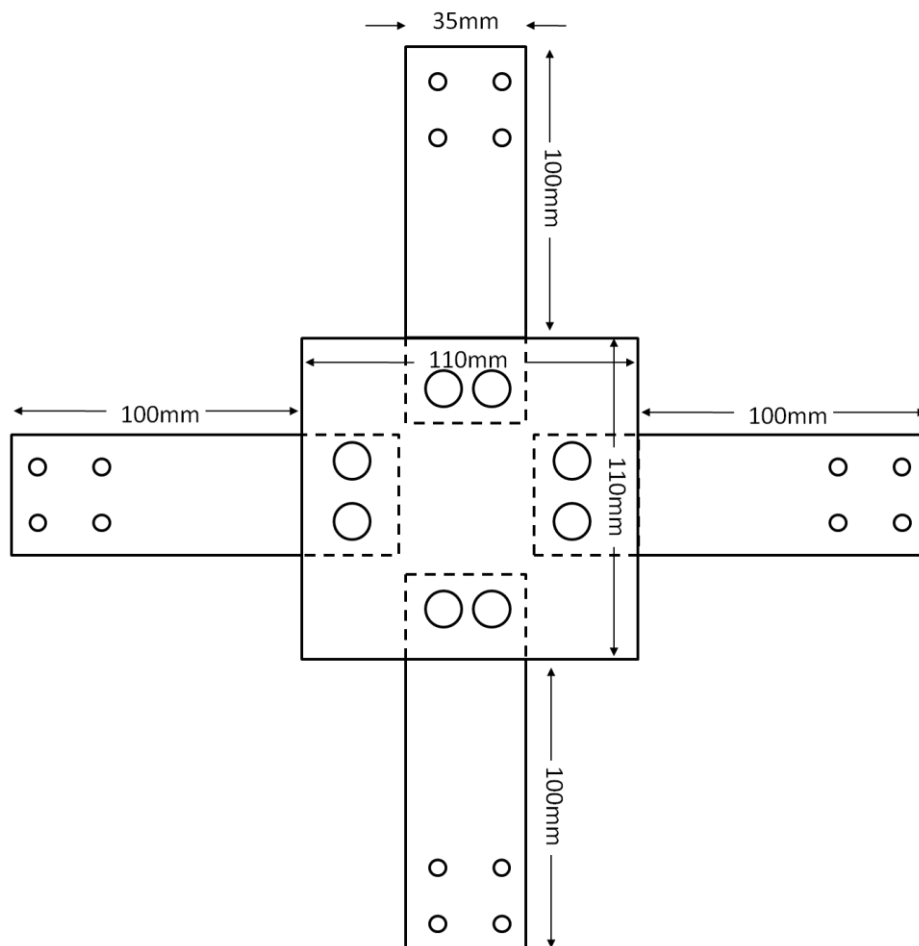


Fig. 8.13. Base del quadrotor.

El armazón se ha construido en metacrilato, revestido de panel plástico de polipropileno alveolar por los siguientes motivos:

- Su alta resistencia al impacto

- Resistente a la intemperie y a los rayos UV
- Su ligereza en comparación con otros materiales
- Su dureza similar a la del aluminio
- Su densidad  $1.18g/cm^3$

Dadas las medidas planteadas en la figura 8.13, el peso de la estructura es de 100 gramos. En la siguiente figura se muestra la base del prototipo. En la figura 8.14 se muestra la base del quadrotor construida.



*Fig. 8.14. Base del prototipo del quadrotor.*

Una vez diseñada y construida la base es importante replantearse la distribución de los elementos. Hay que destacar que para evitar errores en el vuelo, el sistema tiene que ser lo más simétrico posible. Con el objetivo de distribuir los elementos de una forma lo más simétrica posible, en la figura 8.15 se muestra una posible propuesta de distribución.

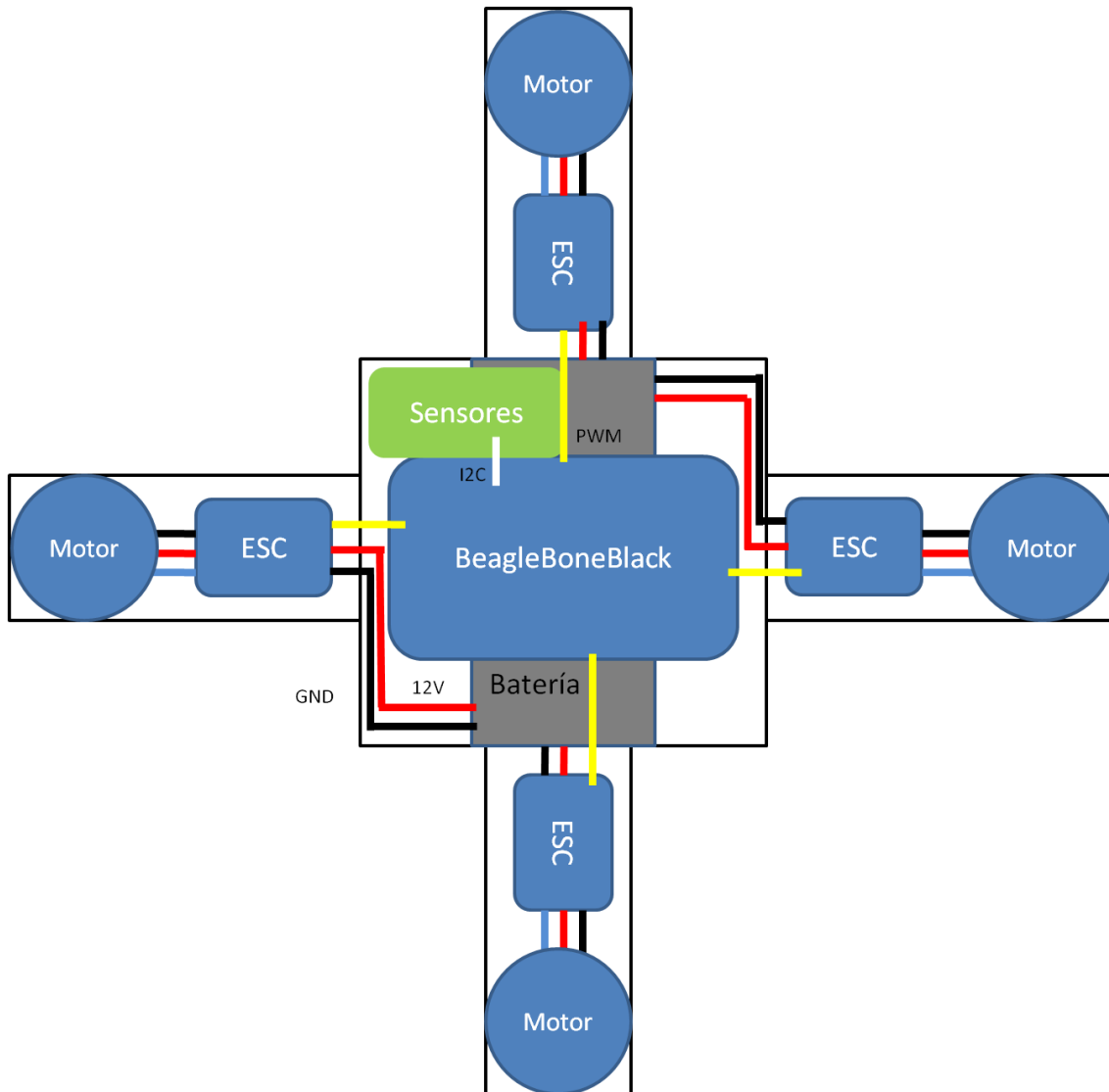
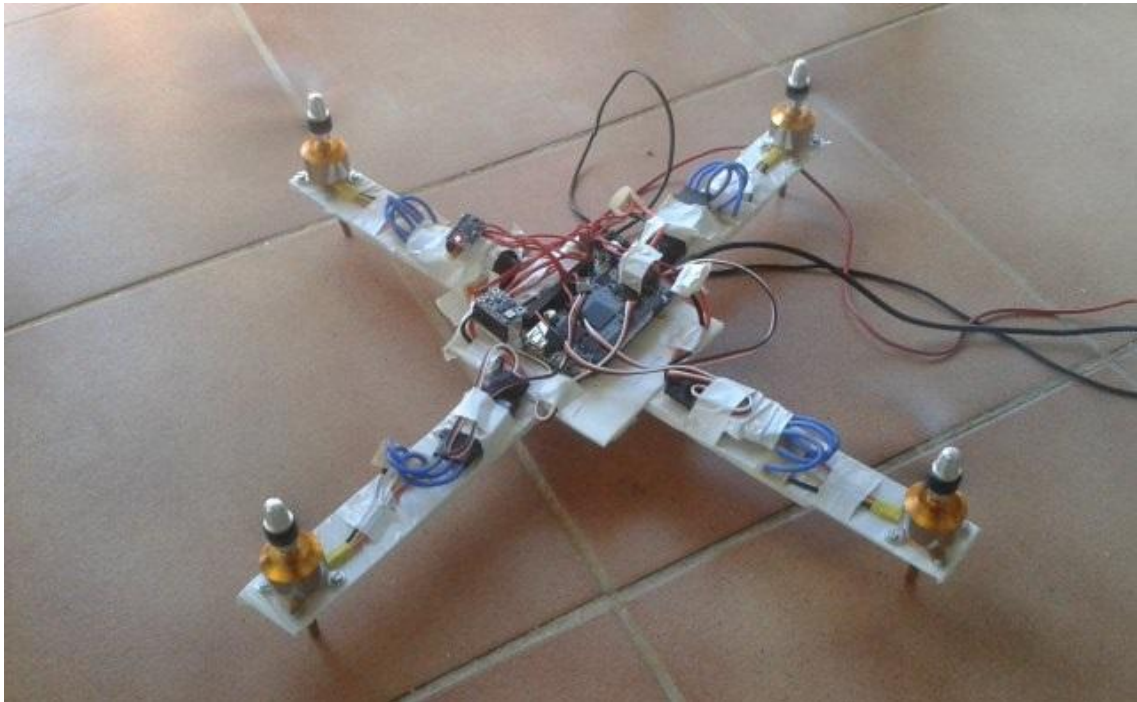


Fig. 8.15. Distribución de los elementos sobre la base del quadrotor.

El vehículo construido destaca por su reducido tamaño y peso, esto hace que sea posible maximizar su tiempo de vuelo al requerirse un esfuerzo menor por parte de los motores, esfuerzo que se traducen en un menor consumo energético. De esta forma es posible trabajar con una batería estándar, en concreto el modelo usado es el de una batería de Litio-Polímero de 12V y 25A. En las pruebas realizadas con el *quadrotor* construido, el tiempo de operación alcanzado ha sido de 15 minutos. Es posible aumentar el tiempo de vuelo reduciendo el peso del vehículo y reduciendo el tamaño de la hélice. Para la mayoría de las pruebas se ha utilizado un sistema de alimentación externo basado en una fuente de alimentación de un ordenador (de 450W de potencia) modificada para funcionar como fuente de laboratorio. En la figura 8.16 se muestra el *quadrotor* construido y ya operativo para realizar las primeras pruebas de vuelo. Los cables que se muestran son los correspondientes a la alimentación de los sistemas y el cable para la telemetría. En la figura 8.17 se muestra el vehículo en vuelo.



*Fig. 8.16. Quadrotor construido.*



*Fig. 8.17. Vehículo diseñado en vuelo.*

## 9. Validación experimental

### 9.1. Consideraciones previas al ajuste de los motores

En la figura 9.1 se muestra la nomenclatura y la dirección de giro de los motores montados en el vehículo.

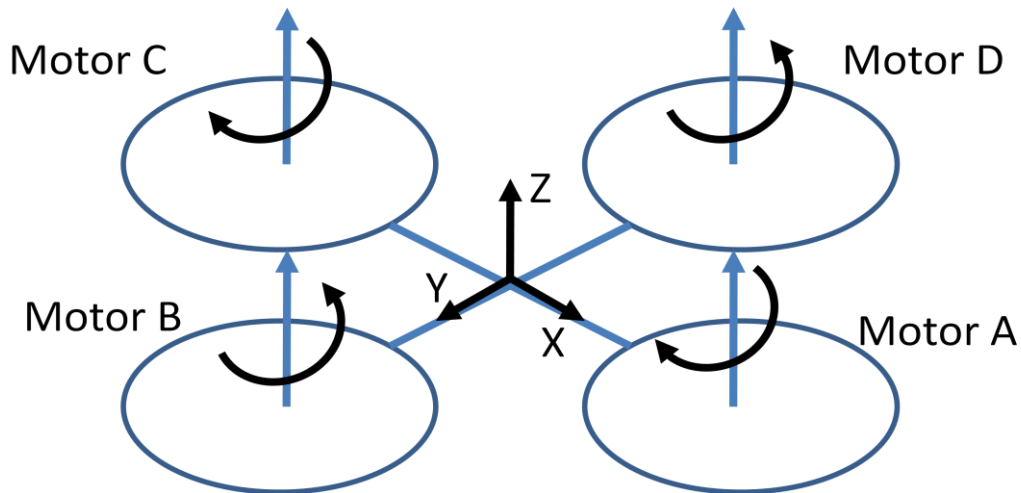


Fig. 9.1 Convenio de nomenclatura y giro de los motores.

En primer lugar hay que recordar que la señal aplicada sobre cada motor es una combinación de las señales de control generadas por cada controlador. Además las formulas resultantes para cada uno de los motores depende del convenio de giro usado y de la nomenclatura asignada a cada motor. Por tanto siguiendo los convenios definidos en la figura 9.1 se pueden definir las siguientes expresiones para cada motor:

$$\begin{aligned}
 \text{Motor A} &= \text{Salida control Z} + \text{Salida Control } \phi - \text{Salida control } \psi \\
 &= U_1 + U_2 - U_4 \\
 \\
 \text{Motor B} &= \text{Salida control Z} + \text{Salida Control } \theta + \text{Salida control } \psi \\
 &= U_1 + U_3 + U_4 \\
 \\
 \text{Motor C} &= \text{Salida control Z} - \text{Salida Control } \phi - \text{Salida control } \psi \\
 &= U_1 - U_2 - U_4 \\
 \\
 \text{Motor D} &= \text{Salida control Z} - \text{Salida Control } \theta + \text{Salida control } \psi \\
 &= U_1 - U_3 + U_4
 \end{aligned}
 \tag{9.1}$$

En las expresiones anteriores, los términos de Salida de control de cada una de las variables a controlar se corresponden a la señal generada por el controlador digital. Para la implementación de los controladores de cada una de las variables se han usado las expresiones mostradas en (9.2).

$$\text{Salida Control } \phi = K_p e[n] + K_i \cdot T_m \cdot \{e[n] + e[n - 1]\} + \frac{K_d}{T_m} \{\phi[n] - \phi[n - 1]\}$$

$$\text{Salida Control } \theta = K_p e[n] + K_i \cdot T_m \cdot \{e[n] + e[n - 1]\} + \frac{K_d}{T_m} \{\theta[n] - \theta[n - 1]\}$$

$$\text{Salida Control } \psi = K_p e[n] + K_i \cdot T_m \cdot \{e[n] + e[n - 1]\} + \frac{K_d}{T_m} \{\psi[n] - \psi[n - 1]\} \quad (9.2)$$

$$\text{Salida Control } Z = K_p e[n] + K_i \cdot T_m \cdot \{e[n] + e[n - 1]\} + \frac{K_d}{T_m} \{Z[n] - Z[n - 1]\}$$

Una vez obtenidas las expresiones anteriores, se requiere relacionarlo con el valor temporal de ciclo de trabajo que hay que generar en el PWM. Esto se realiza de la siguiente forma.

$$\text{Valor PWM} = \text{Salida del controlador} + \text{offset del PWM} \quad (9.3)$$

Esta expresión permite fijar un valor de partida para el giro del motor a partir de la configuración del PWM. La constante de offset del PWM permite fijar un punto de operación cuando no hay salida del controlador. Este valor puede fijarse de forma arbitraria o como parámetro de calibración.

Con estas últimas nociones teóricas se completa el control del quadrotor y puede procederse a su evaluación en vuelo. Para esto se han realizado pruebas de campo donde se ha hecho que internamente el quadrotor registrara valores de las medidas de los sensores para un tiempo de muestreo de 250ms. Se ha elegido este valor para que los retardos en la ejecución de las otras acciones del programa fueran despreciables. La precisión del tiempo de muestreo ha sido especialmente crítica y para conseguirla se han creado estructuras de bloqueo mutuo y sincronización de procesos, de esta forma y asumiendo un retardo extra (muy inferior al tiempo de muestreo) se ha conseguido trabajar con los controles PID y PD digitales. El único problema derivado del uso de 250ms como tiempo de muestreo es que el ruido de alta frecuencia presente en la respuesta (originado principalmente en los sensores) sufre un suavizado o produce efectos de aliasing al no cumplirse el criterio de Nyquist. Además de esto, la propia respuesta temporal medida puede presentar un suavizado en su dinámica. Este suavizado puede ocasionar que los transitorios no se puedan determinar correctamente si los cambios son muy bruscos o de alta frecuencia. Si bien estos inconvenientes no afectarán a la determinación del estado estacionario de la respuesta.

## 9.2. Pruebas y procedimientos experimentales a realizar

En este apartado se va a definir las diferentes pruebas que van a realizar sobre el modelo construido para comprobar el correcto funcionamiento del vehículo.

En primer lugar se debe determinar que el control de Pitch, Roll y Yaw funciona correctamente y es capaz de alcanzar el punto de consigna de operación (Pitch, Roll y Yaw igual a cero). Con el objetivo de determinar que los controles del sistema rotacional son capaces de estabilizar el vehículo en torno a los valores de referencia se ha procedido de la siguiente manera:

1. Se habilitan por software sólo los controles correspondientes al control que se quiere evaluar.
2. Se fija el quadrotor mediante cuerdas de forma que sólo haya un grado de libertad angular correspondiente al que se quiere evaluar ( $Pitch \cong 45^\circ$ ,  $Roll \cong 45^\circ$  o  $Yaw \cong 10^\circ$ ).
3. Se fija un ángulo de inicial diferente de cero para el ángulo que se quiere evaluar.
4. Se activa el software de control con los valores de los diseños realizados por simulación y se toman de forma automática los valores de las magnitudes físicas.
5. Ajuste fino de los parámetros de los controladores.
6. Se repite para los otros ángulos restantes.

Una vez completada la validación de cada uno de los controles del sistema rotacional se puede proceder a la validación del control de altitud. El procedimiento que se ha seguido en este caso ha sido el siguiente:

1. Se habilita el software de control completo (incluye los controles de Pitch, Roll, Yaw y Altitud).
2. El quadrotor se fija inferiormente con una cuerda para limitar los movimientos del vehículo y evitar desplazamientos peligrosos (necesario al quedar la navegación en x e y en lazo abierto).
3. Se define la consigna de altura de vuelo a 0.5m.
4. Se define el punto de consigna para los ángulos de Pitch, Roll y Yaw igual a cero (condición de vuelo horizontal).
5. Se configura el tiempo de inicio de forma retardada para evitar riesgos en la manipulación del vehículo.
6. El software, configurado con los valores de los controles obtenidos, inicia de forma automática las acciones y registra los datos y se mantiene el enlace con el ordenador para paro de emergencia.

Una vez definidos los diferentes experimentos que se quieren realizar para comprobar el correcto funcionamiento del diseño de los controles se puede proceder a la realización de las diferentes pruebas experimentales.

### 9.3. Pruebas experimentales realizadas

Del estudio de simulación, realizado en capítulos anteriores, se concluyó que las soluciones de control que presentaban un mejor comportamiento temporal eran las de PID y la de PD. También se vio que el PID diseñado bajo criterios de minimización del sobreimpulso perdía efectividad y no presentaba una mejora sustancial en tiempo de respuesta comparada con la solución más simple PD. Por otro lado es cierto que en un caso real introducir un término integrador en el control podría ayudar a reducir el error en estado estacionario. La posible mejora que aportaría el PID en términos de régimen estacionario queda condicionada a que el vehículo ha sido diseñado para maximizar la estabilidad (a través de la propia construcción del quadrotor) a costa de perder velocidad de respuesta. Para poder determinar de forma inequívoca las ventajas y los inconvenientes de aplicar la solución PD y la PID se ha propuesto su implementación vía software. Además de esto, el principal objetivo de este apartado ha sido validar el correcto funcionamiento de vehículo en vuelo. Para lograr la validación del sistema se han seguido los pasos descritos en el apartado 9.2 tanto para el caso PID como para el PD. A continuación en la figura 9.2 se muestran las respuestas temporales para el caso del control PID.

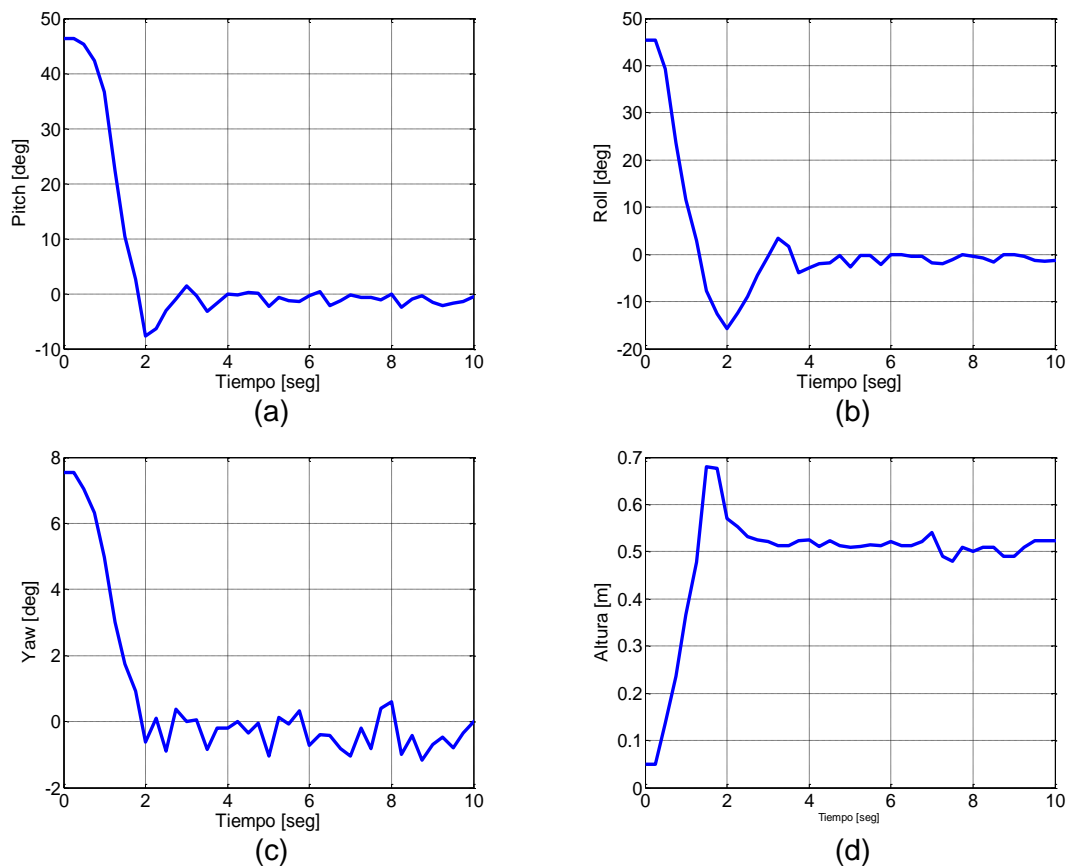


Fig. 9.2. Respuesta experimental para el control PID.

En la figura 9.2 se muestra el resultado que se ha obtenido con el control implementado. El ajuste tomado para los parámetros proporcional, integral y derivativo han sido los obtenidos por simulación, ya que su calibración experimental era complicada. Los parámetros se muestran en la tabla 9.1:

	Roll	Pitch	Yaw	Altitud
<b>Proporcional</b>	14	9.0	24	250
<b>Derivativo</b>	1.1	0.75	2	35
<b>Integral</b>	0.3	0.2	1.7	5

Tabla 9.1. Parámetros del control PID implementado.

En la siguiente tabla 9.2 se presentan los resultados más característicos medidos en las respuestas de la figura 9.2.

		$T_{10\%}$	$T_{90\%}$	Error en régimen estacionario	Máximo sobreimpulso	Máximo Rizado
<b>PID</b>	Roll	0.4s	1.2s	1.2 [deg]	15.1 [deg]	7.2 [deg]
	Pitch	0.8s	1.7s	0.8 [deg]	7.6 [deg]	4.5 [deg]
	Yaw	0.6s	1.8s	0.5 [deg]	0 [deg]	1.75 [deg]
	Altitud	0.3s	1.2s	4%	36%	8%

Tabla 9.2. Parámetros de la respuesta del control PID implementado.

En la tabla 9.2 se muestra como los sobreimpulsos son significativos de forma que comprometen la operatividad del vehículo y dificulta su validación. Si bien se observa como el tiempo de respuesta es mejor que el que se vio en simulación, esto puede ser poco deseado ya que se vuelve más inestable y difícil de controlar (por ejemplo si el objeto del quadrotor fuese gravar imágenes de video, se preferiría una dinámica lenta pero sin variaciones bruscas). A nivel de régimen estacionario, el sistema responde de forma aceptable para Roll, Pitch y Yaw, sin embargo presenta un error en la altitud que no se ha conseguido mitigar, este error podría deberse a los parámetros del PID fijados un error en el modelo del vehículo o a la interacción entre variables. Esta validación experimental se realizó un día con una climatología favorable, es decir sin rachas de viento, de forma que el desempeño del control podría variar en presencia de perturbaciones significativas.

Una vez visto el comportamiento que muestra el control PID se puede proceder a repetir el mismo procedimiento para el control PD. Configurando el controlador como se muestra en la tabla 9.3 en base al modelo de simulación y ajustes posteriores.

	Roll	Pitch	Yaw	Altitud
<b>Proporcional</b>	4.5	2.5	9	400
<b>Derivativo</b>	0.8	0.5	2	200

Tabla 9.3. Parámetros del controlador PD.

En la figura 9.3 se muestran las respuestas temporales obtenidas para el control PD.

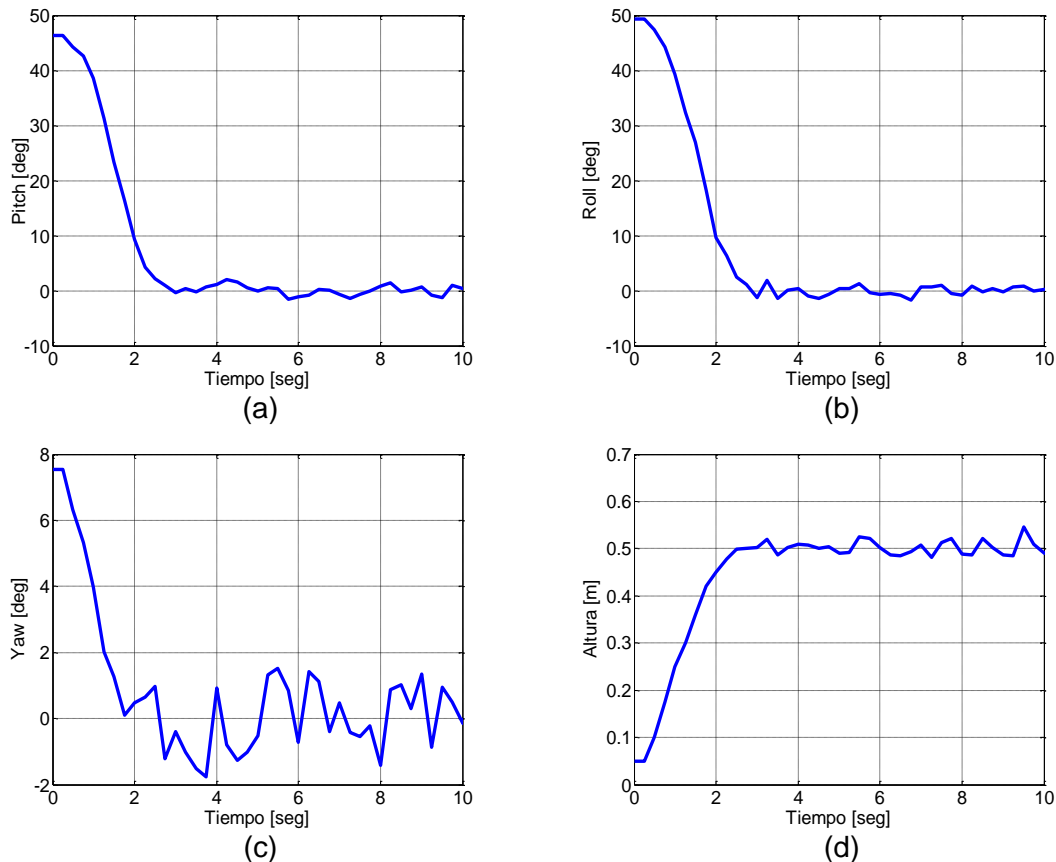


Fig. 9.3. Respuesta experimental para el control PD.

En la siguiente tabla 9.4 se presentan los resultados más característicos medidos en las respuestas de la figura 9.3.

		$T_{10\%}$	$T_{90\%}$	<b>Error en régimen estacionario</b>	<b>Máximo sobreimpulso</b>	<b>Máximo rizado</b>
<b>PD</b>	Roll	0.75s	2.3s	0.5 [deg]	0 [deg]	2 [deg]
	Pitch	0.82s	2.2s	0.5 [deg]	0 [deg]	3.5 [deg]
	Yaw	0.4s	1.6s	0.8 [deg]	0 [deg]	3.2 [deg]
	Altitud	0.3s	2s	0%	0%	8%

Tabla 9.4. Parámetros de la respuesta del control PD implementado.

Se observa que el control PD es más lento que el PID, sin embargo la dinámica es mucho más suave y regular. En comparación con los resultados obtenidos mediante simulación los controles son ligeramente más lentos y presentan comportamientos ideales. Por ejemplo el rizado se puede deber tanto a los errores de medida de los sensores como a pequeñas perturbaciones externas y vibraciones del vehículo.

## 10.- Estudio económico

En este capítulo se presenta de forma breve el coste económico del proyecto, así como un desglose de los materiales usados.

El presente proyecto se estructura en 12 créditos ECTS (European Credit Transfer and Accumulation System) dentro del máster de ingeniería de sistemas y control de la UNED. Tal y como se definen los créditos ECTS dentro del Espacio Europeo de Educación Superior cada crédito corresponde a entre 25 y 30 horas invertidas. Por tanto para un proyecto de 12 créditos abarcaría un total de 360 horas de dedicación. Este total de horas si se computaran en jornadas laborales de 8 horas de dedicación correspondería a 45 días. En base a todo lo anterior la dedicación aproximada a este proyecto ha sido de unas 90 jornadas de 8 horas, o lo que es lo mismo de 720 horas. Determinar el precio de la hora de ingeniería puede depender de diferentes factores al no estar regulados, aún así, es habitual cuantificar el precio de la hora de un ingeniero junior entre los 35 y los 50€. En este caso se va a elegir un valor intermedio de 40€/hora. De todo lo anterior se desprende el siguiente coste en horas de ingeniería:

**Coste de horas invertidas: 28800€.**

Para determinar el coste total es necesario sumar el coste de los materiales. A continuación se presenta una lista de los materiales usados en el desarrollo del vehículo con los precios a fecha de 2015.

Componente	Precio unitario (€)	Cantidad	Precio total (€)
<b>Bateria 12V-25A LiPO</b>	24.50	1	24.50
<b>Bateria 4V-1.1A Li-ion</b>	4.5	1	4.5
<b>Placa de sensores</b>	11.60	1	11.60
<b>Hélices</b>	3	4	12
<b>ESC</b>	8.09	4	32.36
<b>Motor DC 930KV</b>	13.77	4	55.08
<b>BeagleBoneBlack</b>	45.74	1	45.74
<b>Base alveolar</b>	3	1	3
<b>Base metacrilato</b>	10	1	10
<b>Tornillería</b>	1	1	1

*Tabla 10.1. Lista de material y coste.*

De la tabla 10.1 se puede determinar que el coste en material ascendió a:

**Coste en material total: 199.78€.**

Para el desarrollo del proyecto se requirió el uso de instrumentos de laboratorio además de un ordenador personal. Para poder obtener un coste de todos los recursos implicados hay que incluir al coste en horas y en material el coste en

instrumentación de laboratorio. En la tabla 10.2 se presenta la lista de la instrumentación de laboratorio necesaria para realizar el proyecto.

Equipo	Coste (€)
<b>Osciloscopio de 150MHz GWINSTEK</b>	700
<b>Fuente de tensión de laboratorio Rigol</b>	980
<b>Analizador de espectros</b>	Incluido en el osciloscopio
<b>Ordenador portatil Toshiba 8Gb RAM</b>	1000
<b>Multímetro digital</b>	20
<b>Cargador de baterías Li-Po</b>	52

*Tabla 10.2. Instrumentación de laboratorio necesaria.*

De la tabla 10.2 se desprende que el coste en concepto de equipos de laboratorio es:

**Coste de equipos: 2752€.**

Una parte muy importante del proyecto se ha realizado sobre Matlab-Simulink. Al ser este software una solución comercial de pago a los costes materiales hay que sumar el precio de la licencia (se supone su versión universitaria).

**Coste licencia Matlab-Simulink: 500€.**

Una vez que se han desglosado todos los costes se puede obtener el coste total de desarrollo. En la tabla 10.3 se muestra el computo del coste total.

<b>Coste de horas invertidas</b>	<b>28800€</b>
<b>Coste en material total</b>	199.78€
<b>Coste de equipos</b>	2752€
<b>Coste licencia Matlab-Simulink</b>	500€
<b>Coste Total</b>	<b>32251.78€</b>

*Tabla 10.3. Coste total de desarrollo.*

## 11.- Conclusiones y trabajo futuro

En este proyecto se ha realizado un estudio de las tendencias actuales y futuras en vehículos no tripulados. Además se ha presentado un estudio formal del modelado matemático de un quadrotor, ofreciendo un modelo de simulación realista que ha permitido el diseño de diferentes controladores.

En base al modelo matemático obtenido en los primeros capítulos de este trabajo se ha implementado un simulador sobre Matlab-Simulink. En base a esta herramienta se han realizado simulaciones para diferentes tipos de controladores: cuatro de ellos clásicos de tipos PD y PID, un control no lineal que se ha calculado matemáticamente en base a la teoría de estabilidad de Lyapunov, y un control robusto QFT diseñado en el dominio transformado de la frecuencia. De la evaluación de las prestaciones de cada uno se ha podido concluir que los que controladores que ofrecían un mejor comportamiento para la aplicación estudiada eran los clásicos PD y PID. Si bien es cierto, para poder implementar estos controles de forma relativamente sencilla era necesario considerar algunas aproximaciones y acotar el escenario de operación. De esta forma se pudo obtener un modelo donde las variables a controlar se podían considerar desacopladas. Estas aproximaciones se cumplen en la mayoría de casos de vuelo para entornos poco exigentes, o lo que es lo mismo, entornos donde las perturbaciones externas no son significativas.

Por otro lado, el diseño de un control no lineal como solución para el caso de estudio se ha demostrado posible, aún así, es cierto que la solución mostrada por este diseño tomaba la forma de un control PD clásico con una menor flexibilidad en su ajuste. Las limitaciones de ajuste de los parámetros del control de Lyapunov diseñado, además de las aproximaciones adicionales para simplificar el modelo del quadrotor, ha mostrado un peor comportamiento que el visto en la soluciones de control PD y PID.

El controlador QFT propuesto ha presentado la ventaja de permitir un diseño gráfico en base a las condiciones de operación, si bien presenta una tolerancia significativa a las desviaciones en el modelado de la planta, su desempeño comparado con los otros controladores se ha demostrado peor. Es posible que en este caso, el rediseño de las condiciones de contorno u operación, permita obtener una solución acotada a unas condiciones más estrictas, pero con un mejor ajuste a un caso concreto. Aún así, parece poco probable que pueda mejorar lo visto en el caso del PD.

Si el trabajo de simulación ha permitido evaluar cuatro soluciones de control y el ajuste de cada controlador. La validación experimental ha resultado básica para poder determinar si el modelo matemático era acertado para el diseño de los controladores. Por este motivo fue necesario el desarrollo de un quadrotor real. En este punto la toma de decisiones se volvieron complicadas, la primera

decisión fue la de decantarse por la compra de un modelo comercial sobre el cual se pudiera implementar los algoritmos de control o el desarrollo de un modelo propio. Claramente, en el primer caso se hubiera podido desarrollar todo de una forma mucho más rápida, pero se consideró que se perdería perspectiva sobre el marco de trabajo. Por este motivo se decidió el desarrollo de la plataforma propia. Esta decisión creó un marco de trabajo mucho más transversal, ya que no sólo se trataba de un proyecto de control, sino que ya se incluían áreas diversas como la elección de motores, problemas constructivos como peso, tamaño de las hélices, sistemas de alimentación, selección de los procesadores de datos y sensores y programación de la aplicación. Al final se decidió trabajar con arquitecturas abiertas, y con sistemas "embedded" con sistema operativo incorporado. Esto permitió la máxima optimización a la hora de comunicar y sincronizar cada bloque, haciendo posible la calibración y el procesado de datos adquiridos de los sensores. Se considera que la decisión del desarrollo de una plataforma propia, a pesar de ser mucho más laboriosa, dota al proyecto de una robustez muy superior, habiendo sido participe de cada decisión y presentando una solución integral poco convencional y adaptada a los requisitos. Se ha querido hablar de solución poco convencional por varios motivos, el primero por los sensores asociados, ya que típicamente no se utilizan sensores de presión atmosférica para el control de la altitud, si bien esto puede complicar el procesado de señal, dota al sistema de una versatilidad mayor, al permitir la navegación a cotas más elevadas. El segundo motivo por el que se habla de solución poco convencional es el haber desarrollado todo el control en lenguaje C, este lenguaje compilado se puede entender como bajo nivel, y presenta una complejidad mayor que otros lenguajes mucho más usuales, pero a la vez permite optimizar el código en hasta 10 veces (en tiempos de computación) lo que garantiza las máximas prestaciones en la operación del quadrotor.

Otra decisión importante fue el hecho de plantear el sistema como totalmente autónomo. El quadrotor que se ha desarrollado no necesita mayor interacción humana que la de definir el objetivo que se quiere lograr, por ejemplo una altura o una posición de equilibrio en vuelo estático. Si bien hay que recordar que la navegación queda como un tema totalmente paralelo por la magnitud que implica.

En conclusión, el modelo construido puede presentar un rendimiento en vuelo inferior a los comerciales, pero ha servido para validar de forma experimental, el control diseñado mediante simulación. Además ha demostrado que el control PD, para condiciones de operación de baja intensidad, es la mejor solución por su simplicidad y el desempeño.

Por último, la decisión de haber diseñado y construido el propio quadrotor hace posible no sólo la validación de lo planteado anteriormente, sino también evaluar cualquier otro algoritmo de control que se desee, ya que se trata de

una arquitectura sobre la que se tiene pleno control y lo que es quizá más importante, pleno conocimiento.

Una vez finalizado este proyecto en el que se ha desarrollado un vehículo quadrotor totalmente operativo y que ha permitido evaluar diferentes soluciones de control quedarían pendientes los siguientes puntos:

1. **Navegación autónoma:** El diseño de un sistema de navegación autónoma requeriría la incorporación de un sistema de radionavegación. La radionavegación podría implementarse de diferentes formas y podría implicar tanto sistemas de posicionamiento por satélite (GPS o el sistema europeo aún en despliegue Galileo) o mediante técnicas de RF mediante radiobalizas. Dada la potencia del microcomputador BeagleBoneBlack, la inclusión de sistemas de radionavegación podría hacerse de tres maneras distintas. La primera sería adquirir un receptor GPS comercial de tamaño reducido que se conectara vía USB a la BeagleBoneBlack. Esta solución sería la más sencilla y rápida y sólo sería necesario adquirir un sistema con drivers para linux. La segunda solución sería la de construir un sistema de navegación por satélite en base a algún SoC (*System on Chip*) de los que actualmente se comercializan. Suelen ser chips de complejidad media y coste reducido, la principal dificultad en este tipo de diseños es la relativa al diseño y construcción de las placas de circuitos impresos, ya estos dispositivos integrados se suelen presentar en encapsulados orientados a la fabricación industrial automatizada, de forma que su soldadura manual es muy compleja o incluso imposible. La tercera opción sería la de diseñar un cabezal de RF sintonizado en la banda de frecuencias del sistema de interés que desplazara la señal a alta frecuencia a un canal de frecuencia intermedia que pudiera ser digitalizado con la BeagleBoneBlack para su procesado. Esta solución presenta dos dificultades, la primera es relativa al diseño del cabezal de RF ya que su diseño requiere un conocimiento experto en sistemas de microondas, el segundo problema es de programación ya que el desarrollo de un receptor GPS digital constituye un proyecto aparte.
2. **Sistema de planificación de trayectorias:** Determinada la posición del vehículo en base alguna solución de radionavegación se tendría que implementar el algoritmo para poder trazar una trayectoria entre dos puntos. Esto puede hacerse de interpolando los puntos origen y destino y trazando la trayectoria a seguir.
3. **Sistema de identificación de obstáculos:** Una navegación totalmente autónoma requerirá que el quadrotor sea capaz de esquivar obstáculos. Para poder realizar esta función será necesario dotar al vehículo de nuevos sensores que permitan obtener datos del entorno para poder realizar mapas.

4. **Sistema de interacción con el usuario:** Una aplicación habitual en los UAV es que transmitan información en tiempo real. Para dar solución a esto será necesario diseñar un sistema de RF para transmitir la información que sea de interés directamente del vehículo al usuario en tierra. Además, esta comunicación es fundamental para tomar el control del vehículo si se detecta un mal funcionamiento del mismo.

## Anexo A

### Momentos de inercia

Los momentos de inercia describen el comportamiento de un cuerpo en rotación en torno a un eje. Los momentos de inercia pueden dividirse en dos magnitudes, El momento escalar de inercia y el momento del tensor de inercia [15-16].

El momento escalar de inercia se define como se muestra a continuación:

$$I = \iiint_V \rho r^2 dV \quad (\text{A.1})$$

Donde  $I$  tiene unidades de  $[kg\ m^2]$  es el momento escalar de inercia, y  $V$  es el volumen que ocupa el objeto.  $\rho$  es el densidad del objeto con expresado en  $[kg\ m^{-3}]$  y  $r$  es la distancia perpendicular desde entre el punto del objeto considerado y el eje de rotación.

El tensor de inercia se define como la siguiente matriz:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Donde los términos  $I_{ii}$  denotan el momento de inercia alrededor del eje  $i$  cuando el objeto rota sobre este mismo eje. Por contra el término  $I_{ij}$  expresa el momento de inercia en torno al eje  $j$  cuando el objeto rota en torno al eje  $i$ .

A continuación se muestra el cálculo de los momentos de inercia para diferentes geometrías.

- **Sólido rectangular**

Dado un rectángulo de dimensiones  $L$  (largo),  $W$  (ancho) y  $H$  (alto), donde la densidad es  $\rho = m/(LWH)$  y  $m$  indica masa.

$$I_X = \int_z \int_y \int_x \rho(y^2 + z^2) dx dy dz = \rho \left( LH \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} y^2 dy + LW \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z^2 dz \right) = \quad (\text{A.3})$$

$$= \frac{m}{LWH} \left( \frac{LHW^3}{12} + \frac{LWH^3}{12} \right) = m \left( \frac{W^2}{12} + \frac{H^2}{12} \right)$$

$$I_Y = \int_z \int_y \int_x \rho(x^2 + z^2) dx dy dz = \rho \left( LH \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx + LW \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z^2 dz \right) = \quad (\text{A.4})$$

$$= \dots = m \left( \frac{L^2}{12} + \frac{H^2}{12} \right)$$

$$\begin{aligned}
 I_Z &= \int_z \int_y \int_x \rho(x^2 + y^2) dx dy dz = \rho \left( LH \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dy + LW \int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} y^2 dz \right) = \\
 &= \dots = m \left( \frac{L^2}{12} + \frac{W^2}{12} \right) \quad (\text{A.5})
 \end{aligned}$$

- **Sólido cilíndrico**

Dado un cilindro de dimensiones R (radio) y H (alto), donde la densidad es  $\rho = m/(\pi r^2 H)$  y m indica masa.

$$\begin{aligned}
 I_X &= \int_z \int_y \int_x \rho(y^2 + z^2) dx dy dz = \rho \left( \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} \int_{-\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 - y^2}}^{\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 - y^2}} (y^2 + z^2) dx dy dz \right) = \\
 &\rho \left( \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R (r^2 \text{sen}^2(\theta) + z^2) r dr d\theta dz \right) = \frac{m}{\pi R^2 H} \left( \frac{HR^4}{4} \pi + \frac{R^2 H^3}{12} \pi \right) \quad (\text{A.6}) \\
 &= m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_Y &= \int_z \int_y \int_x \rho(x^2 + z^2) dx dy dz = \rho \left( \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R (r^2 \text{cos}^2(\theta) + z^2) r dr d\theta dz \right) : \quad (\text{A.7}) \\
 &= \dots = m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_Z &= \int_z \int_y \int_x \rho(x^2 + z^2) dx dy dz = \rho \left( \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R (r^2 \text{cos}^2(\theta) + r^2 \text{sen}^2(\theta)) r dr d\theta dz \right) \quad (\text{A.8}) \\
 &= \dots = m \left( \frac{R^2}{2} \right)
 \end{aligned}$$

## Anexo B

Cálculo de los ángulos de Roll, Pitch usando acelerómetros tridimensionales

$$\begin{aligned} Pitch &= \arctan\left(\frac{A_x}{\sqrt{A_y^2 + A_z^2}}\right) \\ Roll &= \arctan\left(\frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_z^2}}\right) \end{aligned} \quad (B.1)$$

Donde  $A_x, A_y, A_z$  son las aceleraciones sobre los ejes x, y, z respectivamente.

## Anexo C

### Teorema de Lyapunov para la estabilidad local

Si existe una función  $V(x)$  tal que presenta derivadas parciales continuas, siendo  $V(x)$  definida positiva en un entorno (condición de local), y su primera derivada es localmente semi-definida negativa, entonces se puede afirmar que el origen es estable. Si la derivada es localmente definida negativa, entonces la estabilidad es asintótica.

### Teorema de Lyapunov para la estabilidad global

Suponiendo la existencia de una función  $V(x)$  con derivadas de primer orden continuas de manera que  $V(x)$  es definida positiva, y la primera derivada de  $V(x)$  es definida negativa, además  $V(x)$  tiende a infinito cuando lo hace  $x$ , entonces el origen es un punto asintóticamente estable de forma global. En caso que la primera derivada de  $V(x)$  fuera semi-definida negativa, no se podría afirmar nada respecto a la estabilidad asintótica.

### Conjuntos invariantes locales

Si se considera un sistema autónomo  $f(x)$ , con  $f$  continuo, y se ha encontrado una función  $V(x)$  con primeras derivadas parciales continuas, se puede asumir que para algún valor  $l > 0$ , la región del espacio  $\Omega_l$  definida por  $V(x) < l$  es acotada. Además de esto si la primera derivada de  $V(x)$  es menor o igual que cero para todo  $x$  en la región  $\Omega_l$ , y  $R$  es un conjunto de puntos dentro de esta región donde  $M$  es el conjunto invariante más grande en  $R$ , entonces se puede afirmar que cada solución  $x(t)$  que se origine en la región  $\Omega_l$  tenderá a  $M$  a medida que el tiempo tienda a infinito. Si además el conjunto  $R$  que anula la primera derivada de  $V(x)$  no contiene otras trayectorias de  $f(x)$  que  $x=0$ , se puede afirmar que el punto de equilibrio  $x=0$  es asintóticamente estable, además de esto la región más grande que  $\Omega_l$  es un dominio de atracción del punto de equilibrio.

### Conjuntos invariantes locales

Si se considera un sistema autónomo  $f(x)$ , con  $f$  continuo, y se ha encontrado una función  $V(x)$  con primeras derivadas parciales continuas, se puede asumir que para una función primera derivada de  $V(x)$  menor o igual a cero en todo el espacio de estado, y que  $V(x)$  tiene a infinito con  $\|x\|$ , siendo  $R$  el conjunto de todos los puntos de todo el espacio donde la primera derivada de  $V(x)$  se anula, y  $M$  el conjunto invariante más grande en  $R$ , entonces se puede afirmar que todas las soluciones convergen asintóticamente de forma global a  $M$  cuando el tiempo tiende a infinito.

## Referencias

- [1] S. Winkler, M. Buschmann, L. Krüger, H.W. Schulz, P. Vörsmann, "AutoMAV-Micro Aerial Vehicles for Airport Surveillance", TENCON, conf. paper, pp.1-6, 21-24 Nov., 2005, Melbourne.
- [2] S. Bouabdallah, A. Noth, R. Siegwart, "PID vs LQ Control Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor", Proc. International Conference on Intelligent Robots and Systems, 28 Sept.-2 Oct., 2004, Sendai, Japan.
- [3] R.J. Wood, "The First Takeoff of a Biologically Inspired At-Scale Robotic Insect", IEEE Transactions On Robotics, Vol. 24, No. 2, pp. 341-347, April, 2008.
- [4] A. Tewari, "Advanced Control of Aircraft, Spacecraft and Rockets", Wiley, 2011.
- [5] <http://systemsengineeringresearchlaboratory.org>
- [6] <http://www.rctoys.com/>
- [7] J.K. Shiau, D.M. Ma, P.Y. Yang, G.F. Wang, J.H. Gong, "Design of a Solar Power Management System for an Experimental UAV", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 45, No. 4, Oct, 2009.
- [8] R. Austin, "Unmanned Air Systems. UAV Design, Development and Deployment". Wiley, 2010.
- [9] B.L. Stevens, F. L. Lewis, "Aircraft control and simulation", Wiley, 1992.
- [10] R. Murray., "A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation". CRC, 1994
- [11] G. Fay, "Derivation of the aerodynamic forces for the mesicopter simulation," 2001.
- [12] K. P. Valavanis, "Advances in Unmanned Aerial Vehicles", Springer, 2007.
- [13] P. Castillo, P. García, R. Lozano, P. Albertos, "Modelado y Estabilización de un Helicóptero con Cuatro Rotores", Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, Vol. 4, N°.1, "007, pp.41-57.
- [14] T. Bresciani, "Modelling, Identification and Control of a Quadrotor Helicopter", Msc. Thesis, Lund University, 2008.
- [15] S.K. Singh, "Moments of Inertia of Rigid Bodies", 2011
- [16] D.B. Marghitu, M. Dupac, "Advanced Dynamics. Analytical and Numerical Calculations with MATLAB", Springer, 2012

- [17] K. J. As. Hägglund, "PID Controllers; theory, design, and tuning", Instrument Society of America , 1995.
- [18] MATLAB®, "Control System Toolbox", 2014.
- [19] L.M. Argentim, W.C. Rezende, P.E. Santos, R.A. Aguila, "Guidance and Trajectory Following of an Autonomous Vision-Guided Micro QuadRotor ", Proc. Infomatics, Electronics & Vision, pp.1-6, 17-18 May 2013, Dhaka.
- [20] J.M. Díaz, "Tema 6: Introducción al control robusto QFT", Apuntes de Control Multivariable, Universidad Nacional de Educación a Distancia, curso 2014-2015.
- [21] J.M. Díaz, S. Dormido, J. Aranda, "SISO-QFTIT Manual del Usuario", Universidad Nacional de Educación a Distancia, Jul. 2004.
- [22] <http://www.aemet.es>, Agencia Estatal de Meteorología de España.
- [23] R. Daussy, "Guía práctica de la construcción metálica ", 1972
- [24] <http://www.analog.com/media/en/technical-documentation/data-sheets/ADXL345.pdf>, analog devices.
- [25] <http://www.st.com/web/en/resource/technical/document/datasheet/CD00265057.pdf>, ST.
- [26] [http://www51.honeywell.com/aero/common/documents/myaerospacecatalog-documents/Defense\\_Brochures-documents/HMC5883L\\_3-Axis\\_Digital\\_Compass\\_IC.pdf](http://www51.honeywell.com/aero/common/documents/myaerospacecatalog-documents/Defense_Brochures-documents/HMC5883L_3-Axis_Digital_Compass_IC.pdf), honeywell.
- [27] <http://media.digikey.com/pdf/Data%20Sheets/Bosch/BMP085.pdf>, Bosch.
- [28] <http://www.ti.com/tool/beaglebk>, Texas Instruments.
- [29] J. Ganssle, T. Noergaard, F. Eady, L. Edwards, D.J. Katz, R. Gentile, K. Arnold, K. Hyder, B. Perrin, C. Huddleston, "Embedded Hardware", Elsevier.
- [30] <http://www.ti.com/product/am3359>, Texas Instruments.
- [31] D. Molloy, "Exploring BeagleBone. Tools and techniques for bulding with embedded linux", Jown Wiley & Sons, 2015.
- [32] A. M., Lyapunov, "The general problem of the stability of motion", Taylor & Francis, 1992.
- [33] H. K. Khalil, "Nonlinear Systems", Prentice Hall, 2002.
- [34] J-J. E. Slotine, W. Li, "Applied Nonlinear Control", Prentice Hall, 1991.
- [35] D. Norris, "Build Your Own Quadcopter", McGraw-Hill, 2014.