

Optimización de una célula solar: Un modelo simplificado

Jesús Ait Idir Lahuerta^a, Sergio Santos Villar^a, Raúl Enrique Pariente Martín^a

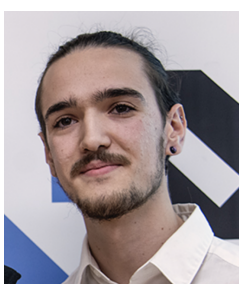
^a Universidad de Oviedo

Boletín del IMI N^o 158, (16 Enero 2025), Sección “IMI-Publica”

<https://doi.org/10.57037/b-imi.00158.imip>



Jesús Ait Idir Lahuerta



Raúl Enrique Pariente Martín



Sergio Santos Villar

Resumen

Este artículo aborda la optimización de la potencia generada por células solares mediante modelización matemática. Se plantea un modelo simplificado unidimensional basado en ecuaciones diferenciales que describe la dinámica de electrones y huecos en los semiconductores. Se encuentran las soluciones a dichas ecuaciones en general y aplicando condiciones de contorno concretas.

El objetivo es maximizar la potencia generada, considerando diferentes variables. A través de métodos numéricos complejos como Nelder-Mead e incluso otros más simples como Newton-Raphson, se optimizan las condiciones para alcanzar una potencia máxima. El problema se simplifica reduciendo variables, analizándolo con cinco variables inicialmente, después con tres y finalmente con una, logrando una mayor precisión. Muestra el interés por simplificar y reducir problemas de optimización a menos variables, buscando una mayor exactitud y sencillez matemática.

Además, se propone el uso del algoritmo MPPT (seguidor de punto de máxima potencia) para ajustar dinámicamente el voltaje en condiciones cambiantes más realistas, como fluctuaciones de temperatura.

Palabras clave: Modelización, ecuaciones diferenciales, optimización matemática, métodos numéricos, células solares

Abstract

This article addresses the optimization of the power generated by solar cells through mathematical modeling. A simplified one-dimensional model based on differential equations is proposed to describe the dynamics of electrons and holes in semiconductors. General solutions to these equations are found, as well as specific solutions applying certain boundary conditions.

The goal is to maximize the generated power, considering different variables. Using complex numerical methods such as Nelder-Mead and more simple ones such as Newton-Raphson, the conditions are optimized to achieve maximum power. The problem is simplified by reducing the number of variables, starting with five variables, then analyzing it with three, and finally reducing it to one, achieving greater precision. It highlights the importance of simplifying and reducing optimization problems to fewer variables for improved mathematical accuracy and simplicity.

Additionally, the use of the MPPT algorithm (Maximum Power Point Tracking) is proposed to dynamically adjust the voltage under more realistic changing conditions, such as temperature fluctuations.

Keywords: Modelling, differential equations, mathematical optimization, numerical methods, solar cells

Índice

1. Introducción	5
2. Problema propuesto	6
2.1. Modelo matemático simplificado	6
2.2. Estimación de la corriente, J , de la célula solar	8
2.3. Problema de Optimización	14
2.3.1. Optimización con cinco variables	16
2.3.2. Reducción del problema: Optimización con tres variables	18
2.3.3. Reducción del problema: Optimización con una variable	21
2.3.4. Más sobre la optimización de la potencia P	25
3. Conclusiones	27
Referencias	29

1. Introducción

En la actualidad, la generación de energía a partir de fuentes renovables, como la solar, es un tema de vital importancia debido al creciente desafío del cambio climático y la necesidad de una transición hacia fuentes de energía más limpias. La energía solar fotovoltaica ha emergido como una de las soluciones más prometedoras por su capacidad de convertir la luz solar en electricidad de manera eficiente y sostenible. Países de Europa y América Latina, como Alemania, España, Chile y México, están liderando importantes iniciativas en este ámbito, lo que refleja la relevancia global de este tipo de tecnología.

Dentro de este contexto, las células solares juegan un papel crucial al ser los dispositivos que convierten directamente la luz solar en energía eléctrica. Estas células están compuestas por materiales semiconductores que, al ser expuestos a la radiación solar, generan electrones y huecos, partículas que, al desplazarse, producen una corriente eléctrica. El reto en el desarrollo de estas células solares radica en optimizar su rendimiento, es decir, maximizar la eficiencia con la que convierten la energía solar en electricidad.

Para abordar este desafío, la modelización matemática se convierte en una herramienta esencial. A través de ecuaciones que describen el comportamiento de las partículas dentro de los semiconductores, los científicos pueden predecir y mejorar el funcionamiento de las células solares. Estos modelos incluyen variables como la densidad de corriente generada, la difusión y movimiento de los electrones y huecos, y las condiciones de frontera en las distintas capas de la célula solar.

El problema que se presenta en este proyecto se centra en el desarrollo de un modelo simplificado en una dimensión que permita describir el comportamiento de una célula solar bajo un espectro solar determinado. A partir de este modelo, se busca optimizar los parámetros clave de diseño para maximizar la potencia generada por la célula solar. Este tipo de enfoque es fundamental no solo para la mejora continua de la tecnología existente, sino también para el desarrollo de soluciones energéticas más sostenibles que puedan satisfacer las crecientes demandas de energía limpia a nivel global.

En resumen, la relevancia de este problema de modelización radica en su contribución directa al avance de la tecnología solar, una herramienta clave para abordar los desafíos energéticos del futuro.

Para los programas informáticos a lo largo del trabajo se han utilizado tanto Python como Matlab.

2. Problema propuesto

2.1. Modelo matemático simplificado

Para plantear nuestro modelos matemático simplificado del comportamiento de la célula acoplamos las ecuaciones de deriva-fusión con las de continuidad con la finalidad de encontrar una única ecuación diferencial para la concentración de electrones (es decir, n) y otra para la concentración de huecos (es decir, p).

Recordamos que, asumiendo que el campo eléctrico en un material semiconductor es despreciable (por ejemplo, considerando junturas de alto dopaje) las ecuaciones de deriva-fusión y de continuidad vienen dadas en forma estacionaria, cuando $x \in [-W_n, W_p]$, por:

$$J_n(x) = qD_n \frac{dn}{dx}(x) \quad (\text{Deriva-difusión para electrones})$$

$$\frac{1}{q} \frac{dJ_n}{dx}(x) - \left(\frac{\Delta n(x)}{\tau_n} - G \right) = 0 \quad (\text{Continuidad para electrones})$$

$$J_p(x) = -qD_p \frac{dp}{dx}(x) \quad (\text{Deriva-difusión para huecos})$$

$$\frac{1}{q} \frac{dJ_p}{dx}(x) + \left(\frac{\Delta p(x)}{\tau_p} - G \right) = 0 \quad (\text{Continuidad para huecos})$$

Observando estas ecuaciones reparamos en que derivando las expresiones de deriva-fusión podemos introducir expresiones explícitas de las derivadas de J_n y J_p en las ecuaciones de continuidad dependientes únicamente de q, D_n, n en el caso de los electrones o bien de q, D_p, p en el caso de los huecos.

Las derivadas respecto a x de las ecuaciones de deriva-fusión en cada caso son de la forma:

$$\frac{dJ_n}{dx} = qD_n \frac{d^2n}{dx^2} \quad (\text{para electrones})$$

$$\frac{dJ_p}{dx} = -qD_p \frac{d^2p}{dx^2} \quad (\text{para huecos})$$

Si además sustituimos estas igualdades en las expresiones en las ecuaciones de continuidad conseguimos acoplar las ecuaciones tal y como se pedía.

Sustituyendo en la ecuación de continuidad para electrones:

$$\frac{1}{q}qD_n \frac{d^2n}{dx^2} - \left(\frac{\Delta n(x)}{\tau_n} - G \right) = 0$$

Simplificando:

$$D_n \frac{d^2n}{dx^2} - \left(\frac{\Delta n(x)}{\tau_n} - G \right) = 0$$

Sustituyendo en la ecuación de continuidad para huecos:

$$\frac{1}{q}(-qD_p \frac{d^2p}{dx^2}) + \left(\frac{\Delta p(x)}{\tau_p} - G \right) = 0$$

Simplificando:

$$-D_p \frac{d^2p}{dx^2} + \left(\frac{\Delta p(x)}{\tau_p} - G \right) = 0$$

Las expresiones que hemos encontrado en el apartado anterior pueden simplificarse considerando la condición de oscuridad, es decir $G = 0$. Realizando esto obtenemos las siguientes expresiones en cada caso.

$$D_n \frac{d^2n}{dx^2} - \frac{\Delta n(x)}{\tau_n} = 0 \quad (\text{para electrones})$$

$$-D_p \frac{d^2p}{dx^2} + \frac{\Delta p(x)}{\tau_p} = 0 \quad (\text{para huecos})$$

Recordemos además que $\Delta n(x) = n(x) - n_0$ y que $\Delta p(x) = p(x) - p_0$. Es decir, que n tiene las mismas derivadas que Δn y también p tiene las mismas derivadas que Δp . Este hecho nos permite simplificar una vez más las expresiones previas otorgando a nuestras ecuaciones la forma de ecuación diferencial propiamente dicha.

$$\frac{d^2\Delta n}{dx^2} - \frac{\Delta n(x)}{\tau_n D_n} = 0 \quad (\text{para electrones})$$

$$\frac{d^2 \Delta p}{dx^2} - \frac{\Delta p(x)}{\tau_p D_p} = 0 \quad (\text{para huecos})$$

2.2. Estimación de la corriente, J , de la célula solar

Comencemos por obtener J_D resolviendo las ecuaciones diferenciales que planteamos en el apartado anterior. Es conveniente notar que, aunque se vayan a presentar individualmente las soluciones para la ecuación de los electrones y la de los huecos, ambas siguen la misma estructura general de modo que esperamos que sus soluciones coincidan en forma diferenciándose únicamente por prefactores y/o constantes.

Recordamos que en el caso de los electrones buscamos resolver:

$$\frac{d^2 \Delta n}{dx^2} - \frac{\Delta n(x)}{\tau_n D_n} = 0$$

Este tipo de ecuación diferencial admite una solución general de la forma:

$$\Delta n(x) = A e^{\frac{x}{\sqrt{\tau_n D_n}}} + B e^{-\frac{x}{\sqrt{\tau_n D_n}}}$$

Llevando a cabo un procedimiento análogo para los huecos recordamos que la ecuación que buscamos resolver es:

$$\frac{d^2 \Delta p}{dx^2} - \frac{\Delta p(x)}{\tau_p D_p} = 0$$

La solución general en este caso es idéntica a la del caso de los electrones:

$$\Delta p(x) = C e^{\frac{x}{\sqrt{\tau_p D_p}}} + D e^{-\frac{x}{\sqrt{\tau_p D_p}}}$$

Con la idea de que a obtención de estas soluciones a las ecuaciones diferenciales no parezca demasiado fortuita realizaremos una pequeña digresión en lo que respecta a resolución de ecuaciones diferenciales.

En esta resolución estamos considerando ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden homogéneas, y las cuales se pueden escribir en la forma general:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - ky = 0 \quad (1)$$

donde $y = \Delta n(x)$ y $k = \frac{1}{\tau_n D_n}$. o bien $y = \Delta p(x)$ y $k = \frac{1}{\tau_p D_p}$

Asumiendo la solución de la ecuación diferencial de la forma $y(x) = e^{\lambda x}$ y sustituyendo en la ecuación diferencial obtenemos:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - k e^{\lambda x} = 0 \quad (2)$$

Factorizando, tenemos:

$$e^{\lambda x} (\lambda^2 - k) = 0 \quad (3)$$

Para que esto se cumpla, se debe tener $\lambda^2 - k = 0$, es decir:

$$\lambda^2 = k \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm \sqrt{k} \quad (4)$$

Por lo tanto, las soluciones son de la forma:

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{k}x} + C_2 e^{-\sqrt{k}x} \quad (5)$$

donde C_1 y C_2 son constantes determinadas por las condiciones de frontera.

Una vez conocemos la estructura de las soluciones que buscamos podemos imponer las condiciones de contorno y la ley de la juntura con la idea de obtener las formas explicitas de los coeficientes A, B, C, D introducidos previamente. Recordemos que la ley de la juntura explica cómo se relacionan los portadores de carga extra (electrones y huecos) con el potencial eléctrico en una juntura p-n (es decir en la frontera de la zona de agotamiento, en nuestro caso $x = -X_n$ y $x = X_p$). Las ecuaciones que describen estas relaciones son:

$$\Delta n(X_p) = \frac{n_{int}^2}{N_A} (e^{qV/(kT)} - 1)$$

$$\Delta p(-X_n) = \frac{n_{int}^2}{N_D} (e^{qV/(kT)} - 1)$$

Además, a nivel práctico, los valores extremos de la juntura p-n, X_n y X_p , vienen dados por:

$$X_n = \sqrt{\frac{2\varepsilon V_{int}}{q} \frac{N_A}{N_D(N_A + N_D)}} \quad \text{y} \quad X_p = \sqrt{\frac{2\varepsilon V_{int}}{q} \frac{N_D}{N_A(N_A + N_D)}}.$$

Además, también tendremos las condiciones de contorno dadas por $\Delta n(-W_n) = 0$ y $\Delta p(W_p) = 0$, es decir, dadas por la imposición de que las concentraciones adicionales de electrones y huecos en los extremos de la célula son nulos.

Una vez conocidas las condiciones que debemos pedir a cada solución podemos proceder a realizar los cálculos explícitos.

Para los electrones la solución es de la forma:

$$\Delta n(x) = Ae^{\frac{x}{\sqrt{\tau_n D_n}}} + Be^{-\frac{x}{\sqrt{\tau_n D_n}}}$$

Aplicando las condiciones de contorno:

- (C1) En $x = -W_n$:

$$Ae^{-\frac{W_n}{\sqrt{\tau_n D_n}}} + Be^{\frac{W_n}{\sqrt{\tau_n D_n}}} = 0$$

- (C2) En $x = X_p$:

$$Ae^{\frac{X_p}{\sqrt{\tau_n D_n}}} + Be^{-\frac{X_p}{\sqrt{\tau_n D_n}}} = \frac{n_{int}^2}{N_A} (e^{qV/(kT)} - 1)$$

Para los huecos la solución es de la forma:

$$\Delta p(x) = Ce^{\frac{x}{\sqrt{\tau_p D_p}}} + De^{-\frac{x}{\sqrt{\tau_p D_p}}}$$

Aplicando las condiciones de contorno:

- (C3) En $x = W_p$:

$$Ce^{\frac{W_p}{\sqrt{\tau_p D_p}}} + De^{-\frac{W_p}{\sqrt{\tau_p D_p}}} = 0$$

- (C4) En $x = -X_n$:

$$Ce^{-\frac{X_n}{\sqrt{\tau_p D_p}}} + De^{\frac{X_n}{\sqrt{\tau_p D_p}}} = \frac{n_{int}^2}{N_A} (e^{qV/(kT)} - 1)$$

Las condiciones de contorno nos llevan a:

La condición C1 impone:

$$A = -Be^{\frac{2W_n}{\sqrt{\tau_n D_n}}}$$

Sustituyendo la condición C1 en C2 tenemos:

$$-Be^{\frac{2W_n+X_p}{\sqrt{\tau_n D_n}}} + Be^{-\frac{X_p}{\sqrt{\tau_n D_n}}} = \frac{n_{int}^2}{N_A} (e^{qV/(kT)} - 1)$$

o bien, factorizando B :

$$B \left(e^{-\frac{X_p}{\sqrt{\tau_n D_n}}} - e^{\frac{2W_n+X_p}{\sqrt{\tau_n D_n}}} \right) = \frac{n_{int}^2}{N_A} (e^{qV/(kT)} - 1)$$

Con ellos podemos obtener la expresión de B :

$$B = \frac{\frac{n_{int}^2}{N_A} (e^{qV/(kT)} - 1)}{e^{-\frac{X_p}{\sqrt{\tau_n D_n}}} - e^{\frac{2W_n+X_p}{\sqrt{\tau_n D_n}}}} = -\frac{2n_{int}^2}{N_A} (e^{qV/(kT)} - 1) \frac{e^{-\frac{W_n}{\sqrt{\tau_n D_n}}}}{\sinh\left(\frac{W_n+X_p}{\sqrt{\tau_n D_n}}\right)}$$

Por lo tanto, podemos escribir A :

$$A = -\frac{\frac{n_{int}^2}{N_A} (e^{qV/(kT)} - 1) e^{\frac{2W_n}{\sqrt{\tau_n D_n}}}}{e^{-\frac{X_p}{\sqrt{\tau_n D_n}}} - e^{\frac{2W_n+X_p}{\sqrt{\tau_n D_n}}}} = \frac{2n_{int}^2}{N_A} (e^{qV/(kT)} - 1) \frac{e^{\frac{W_n}{\sqrt{\tau_n D_n}}}}{\sinh\left(\frac{W_n+X_p}{\sqrt{\tau_n D_n}}\right)}$$

Las condiciones de contorno en el caso de los huecos nos llevan a:

La condición C3 impone:

$$C = -De^{-\frac{2W_p}{\sqrt{\tau_p D_p}}}$$

Sustituyendo C3 en C4 obtenemos:

$$-De^{-\frac{2W_p+X_n}{\sqrt{\tau_p D_p}}} + De^{\frac{X_n}{\sqrt{\tau_p D_p}}} = \frac{n_{int}^2}{nd} (e^{qV/(kT)} - 1)$$

o bien, factorizando D :

$$D \left(e^{\frac{X_n}{\sqrt{\tau_p D_p}}} - e^{-\frac{2W_p+X_n}{\sqrt{\tau_p D_p}}} \right) = \frac{n_{int}^2}{N_D} (e^{qV/(kT)} - 1)$$

Esto nos permite despejar D :

$$D = \frac{\frac{n_{int}^2}{N_D} (e^{qV/(kT)} - 1)}{e^{\frac{X_n}{\sqrt{\tau_p D_p}}} - e^{-\frac{2W_p+X_n}{\sqrt{\tau_p D_p}}}} = -\frac{2n_{int}^2}{N_D} (e^{qV/(kT)} - 1) \frac{e^{-\frac{W_p}{\sqrt{\tau_p D_p}}}}{\sinh\left(\frac{W_p+X_n}{\sqrt{\tau_p D_p}}\right)}$$

Por lo tanto, podemos escribir C :

$$C = -\frac{\frac{n_{int}^2}{N_D} (e^{qV/(kT)} - 1) e^{-\frac{2W_p}{\sqrt{\tau_p D_p}}}}{e^{\frac{X_n}{\sqrt{\tau_p D_p}}} - e^{-\frac{2W_p + X_n}{\sqrt{\tau_p D_p}}}} = \frac{2n_{int}^2}{N_D} (e^{qV/(kT)} - 1) \frac{e^{\frac{W_p}{\sqrt{\tau_p D_p}}}}{\sinh\left(\frac{W_p + X_n}{\sqrt{\tau_p D_p}}\right)}$$

Estos coeficientes determinan por completo las soluciones de las ecuaciones diferenciales lo que nos permite obtener $J_D = J_p(-X_n) + J_n(X_p)$. Las expresiones para la corriente de electrones J_n y de huecos J_p son:

$$J_n(x) = qD_n \frac{d\Delta n}{dx} \quad (\text{Deriva-difusión para electrones}) \tag{6}$$

$$J_p(x) = -qD_p \frac{d\Delta p}{dx} \quad (\text{Deriva-difusión para huecos}) \tag{7}$$

Esto nos indica que podemos obtener J_n y J_p derivando las soluciones obtenidas previamente.

$$\frac{d\Delta n}{dx} = \frac{A}{\sqrt{\tau_n D_n}} e^{\frac{x}{\sqrt{\tau_n D_n}}} - \frac{B}{\sqrt{\tau_n D_n}} e^{-\frac{x}{\sqrt{\tau_n D_n}}} \tag{8}$$

$$\frac{d\Delta p}{dx} = \frac{C}{\sqrt{\tau_p D_p}} e^{\frac{x}{\sqrt{\tau_p D_p}}} - \frac{D}{\sqrt{\tau_p D_p}} e^{-\frac{x}{\sqrt{\tau_p D_p}}} \tag{9}$$

Si sustituimos esta derivada J_n obtenemos:

$$J_n(x) = qD_n \left(\frac{A}{\sqrt{\tau_n D_n}} e^{\frac{x}{\sqrt{\tau_n D_n}}} - \frac{B}{\sqrt{\tau_n D_n}} e^{-\frac{x}{\sqrt{\tau_n D_n}}} \right) \tag{10}$$

Simplificando la expresión y sustituyendo los coeficientes A, B :

$$J_n(x) = \frac{q\sqrt{D_n}}{\sqrt{\tau_n}} \left(A e^{\frac{x}{\sqrt{\tau_n D_n}}} - B e^{-\frac{x}{\sqrt{\tau_n D_n}}} \right) = \frac{q\sqrt{D_n}}{\sqrt{\tau_n}} B \left(-e^{\frac{2W_n + x}{\sqrt{\tau_n D_n}}} - e^{-\frac{x}{\sqrt{\tau_n D_n}}} \right) = \tag{11}$$

$$= \frac{q\sqrt{D_n}}{\sqrt{\tau_n}} B e^{\frac{W_n}{\sqrt{\tau_n D_n}}} \left(-e^{\frac{W_n + x}{\sqrt{\tau_n D_n}}} - e^{-\frac{W_n + x}{\sqrt{\tau_n D_n}}} \right) = \frac{q\sqrt{D_n}}{\sqrt{\tau_n}} \frac{n_{int}^2}{N_A} (e^{qV/(kT)} - 1) \operatorname{cotanh}\left(\frac{W_n + x}{\sqrt{\tau_n D_n}}\right) \tag{12}$$

Sustituyendo la derivada en J_p obtenemos:

$$J_p(x) = -qD_p \left(\frac{C}{\sqrt{\tau_p D_p}} e^{\frac{x}{\sqrt{\tau_p D_p}}} - \frac{D}{\sqrt{\tau_p D_p}} e^{-\frac{x}{\sqrt{\tau_p D_p}}} \right) \quad (13)$$

Simplificando de modo similar a como hicimos en el caso de los electrones tenemos:

$$J_p(x) = -\frac{q\sqrt{D_p}}{\sqrt{\tau_p}} \left(C e^{\frac{x}{\sqrt{\tau_p D_p}}} - D e^{-\frac{x}{\sqrt{\tau_p D_p}}} \right) = -\frac{q\sqrt{D_p}}{\sqrt{\tau_p}} \frac{n_{int}^2}{N_D} \left(e^{qV/(kT)} - 1 \right) \cotanh\left(\frac{W_p + x}{\sqrt{\tau_p D_p}}\right) \quad (14)$$

Como citamos anteriormente $J_D = J_p(-X_n) + J_n(X_p)$, de modo que necesitamos conocer las expresiones de dichas evaluaciones de J_p y J_n

Evaluando J_n en X_p :

$$J_n(X_p) = \frac{q\sqrt{D_n}}{\sqrt{\tau_n}} \frac{n_{int}^2}{N_A} \left(e^{qV/(kT)} - 1 \right) \cotanh\left(\frac{W_n + X_p}{\sqrt{\tau_n D_n}}\right) \quad (15)$$

Evaluando J_p en $-X_n$:

$$J_p(-X_n) = -\frac{q\sqrt{D_p}}{\sqrt{\tau_p}} \frac{n_{int}^2}{N_D} \left(e^{qV/(kT)} - 1 \right) \cotanh\left(\frac{W_p - X_n}{\sqrt{\tau_p D_p}}\right) \quad (16)$$

Con ello damos la expresión de J_D

$$J_D = qn_{int}^2 \left(e^{qV/(kT)} - 1 \right) \left(\frac{\sqrt{D_n}}{N_A \sqrt{\tau_n}} \cotanh\left(\frac{W_n + X_p}{\sqrt{\tau_n D_n}}\right) - \frac{\sqrt{D_p}}{N_D \sqrt{\tau_p}} \cotanh\left(\frac{W_p - X_n}{\sqrt{\tau_p D_p}}\right) \right) \quad (17)$$

A partir de los valores dados del problema podemos evaluar las diferentes funciones.

Podemos otorgar también un valor para J si tenemos en cuenta los valores de la Tabla 1. Sin más que sustituir en las expresiones que ya habíamos obtenido previamente tenemos:

$$J = J_L - J_D \quad (18)$$

$$= J_L - qn_{int}^2 \left(e^{qV/(kT)} - 1 \right) \left(\frac{\sqrt{D_n}}{N_A \sqrt{\tau_n}} \cotanh\left(\frac{W_n + X_p}{\sqrt{\tau_n D_n}}\right) - \frac{\sqrt{D_p}}{N_D \sqrt{\tau_p}} \cotanh\left(\frac{W_p - X_n}{\sqrt{\tau_p D_p}}\right) \right) \quad (19)$$

Parámetro	Valor
V	0.45 V
W_n	$0.2 \cdot 10^{-4}$ cm
W_p	179.810^{-4} cm
N_D	10^{20} cm ⁻³
N_A	$4.7 \cdot 10^{15}$ cm ⁻³
D_p	11.6 cm ² /s
τ_p	$3700 \cdot 10^{-6}$ s
D_n	2 cm ² /s
τ_n	$371 \cdot 10^{-6}$ s
J_L	$50 \cdot 10^{-3}$ A/cm ²
n_{int}	$9.696 \cdot 10^9$ cm ⁻³
q	$1.602176634 \cdot 10^{-19}$ C
k	$1.380649 \cdot 10^{-23}$ J/K
T	300 K
ε	$1.035918 \cdot 10^{-12}$ F/cm

Tabla 1: Valores óptimos de la célula solar(Nelder-Mead).

$$J = 0.046711148754153 \text{ A/cm}^2 \quad (20)$$

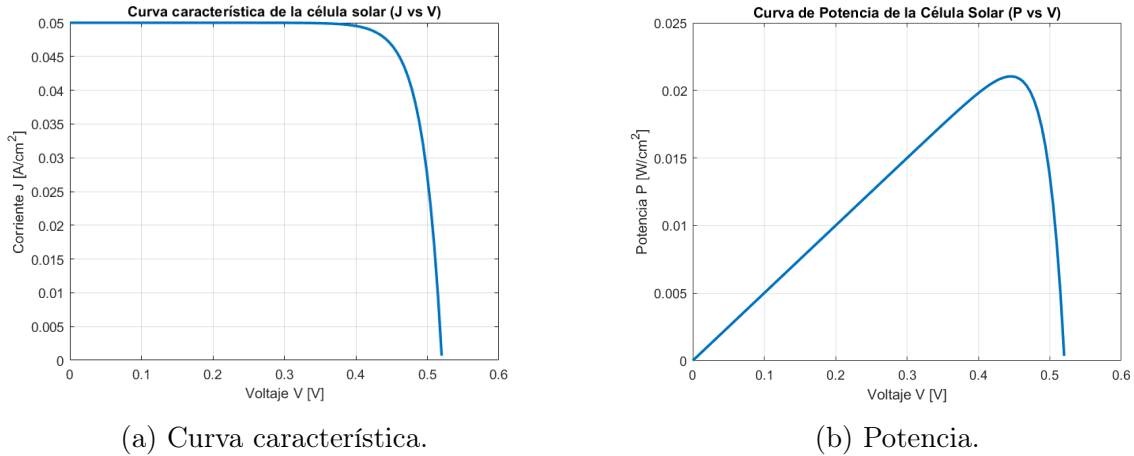
Notemos que esta sería la estimación matemática. Si se busca mayor corrección a nivel físico se deberían ajustar las cifras decimales significativas en nuestro resultado de acuerdo con los datos con los que estamos trabajando. En un inicio seguiremos trabajando con valores con un gran número de cifras decimales puesto que nuestro interés se centrará prioritariamente en la parte de optimización que este problema tiene, no obstante es importante no olvidar el número de cifras decimales con el que se debe trabajar en función de cual sea la finalidad del resultado.

Ahora, consideraremos nuevamente los valores dados en la Tabla 1 salvo el propuesto para V y dibujaremos la gráfica de J en función de V para un rango del voltaje entre 0 y 0.52V (Ver Figura 1).

En este apartado consideramos la potencia de la célula solar $P(V) = J(V) \cdot V$ y dibujamos la gráfica de P(V) en función de V para un rango de voltaje entre 0 y 0.52V. Notemos que la expresión de la potencia es fácil de calcular una vez tenemos la expresión de J(V) (Ver Figura 1).

2.3. Problema de Optimización

En este último apartado buscaremos optimizar (maximizar) la potencia de la célula solar $P(V)=J(V)V$. En particular para esta optimización consideraremos V, W_n, w_p, N_D, N_A como variables.



(a) Curva característica.

(b) Potencia.

Figura 1: Curva característica y potencia de célula solar con valores dados de W_n, W_p, N_A y N_D .

Para comenzar formularemos el problema de optimización matemática para maximizar la potencia de la célula solar.

Los elementos principales de un problema de optimización son:

- La función objetivo es la aplicación $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}$ (Ω abierto) que se quiere maximizar o minimizar.
- La región factible es el conjunto

$$S = \{x \in \Omega : g_i(x) \leq b_i \forall i = 1, \dots, m; l_j \leq x_j \leq u_j \forall j = 1, \dots, n\}$$

sujeto a las denominadas restricciones formales $g_i(x) \leq b_i$, donde $g_i : \Omega \subseteq \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones lineales y a las restricciones de cota o de dominio de las variables $l_j \leq x_j \leq u_j$.

El problema de optimización se denomina de optimización lineal si $f(x)$ es una función lineal, si no, se denomina problema de optimización no lineal, este segundo va a ser nuestro caso.

Un problema de optimización no tiene porqué tener necesariamente una solución óptima, y mucho menos única. Podría haber varias soluciones óptimas o incluso no haber ninguna (si por ejemplo $S = \emptyset$). Para nuestro problema esperamos encontrar una única solución óptima (parece claro que existe a partir de la segunda imagen de la figura 1), pero esto no siempre es posible.

Nuestro objetivo va a ser maximizar la potencia de la célula solar $P(V) = J(V) \cdot V$, donde la corriente $J(V)$ está dada por la ecuación:

$$J = J_L - qn_{int}^2 (e^{qV/(kT)} - 1) \left(\frac{\sqrt{D_n}}{N_A \sqrt{\tau_n}} \coth \left(\frac{W_n + X_p}{\sqrt{\tau_n D_n}} \right) - \frac{\sqrt{D_p}}{N_D \sqrt{\tau_p}} \coth \left(\frac{W_p - X_n}{\sqrt{\tau_p D_p}} \right) \right)$$

El problema de optimización se define como:

$$\text{Maximizar: } P(V, W_n, W_p, N_D, N_A) = J(V) \cdot V$$

Sujeto a las siguientes restricciones (según la Tabla 2):

$$\begin{aligned} 0.1 \text{ V} &\leq V \leq 0.52 \text{ V} \\ 0.05 \times 10^{-4} \text{ cm} &\leq W_n \leq 0.75 \times 10^{-4} \text{ cm} \\ 100 \times 10^{-4} \text{ cm} &\leq W_p \leq 200 \times 10^{-4} \text{ cm} \\ 10^{18} \text{ cm}^{-3} &\leq N_D \leq 5 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3} \\ 10^{14} \text{ cm}^{-3} &\leq N_A \leq 10^{16} \text{ cm}^{-3} \end{aligned}$$

Los demás parámetros considerados en el modelo inicial son los dados en la Tabla 1.

Considerando los valores y rangos dados previamente resolveremos el problema planteado con un acercamiento numérico. Para comenzar podemos calcular el valor de la potencia máxima en el caso no optimizado. Para ello consideramos los valores de la Tabla 1 y los introducimos en la expresión de la potencia. Con ello llegamos al valor numérico $P = 0.021020016939369 \text{ W/cm}^2$

2.3.1. Optimización con cinco variables

En primera instancia podemos abordar el problema de la optimización de una forma algo "naive" buscando numéricamente el máximo de la función de cinco variables con un método como el método de Nelder-Mead. Este es un algoritmo popular para la optimización no lineal basado en la evolución de un simplex en el espacio de variables.

Aunque en un inicio parece una idea sencilla, se trata también de un acercamiento bastante adecuado teniendo en cuenta el número de variables con el que trabajamos y el hecho de que nuestra función objetivo contenga términos que involucran funciones hiperbólicas y cocientes de variables que pueden ser difíciles de manejar usando métodos tradicionales de optimización. Otro argumento en pro de este algoritmo es el hecho de que estamos optimizando sujetos a ciertas restricciones y el método Nelder-Mead puede operar con estos rangos si se implementan adecuadamente límites en las variables o penalizaciones. En concreto las restricciones con que trabajamos son suaves y no muy complicadas (no involucran discontinuidades), lo que facilita el uso de un método como Nelder-Mead, el cual presenta cierta sensibilidad a la suavidad de la función.

A continuación se presentan los valores óptimos obtenidos de la utilización de este algoritmo:

Parámetro	Valor
V óptimo	0.47488881356154145 V
W_n óptimo	$7.5 \cdot 10^{-5}$ cm
W_p óptimo	0.01 cm
N_D óptimo	$5 \cdot 10^{20}$ cm ⁻³
N_A óptimo	10^{16} cm ⁻³
Potencia máxima	0.022518574411824366 W/cm ²

Tabla 2: Valores óptimos de la célula solar(Nelder-Mead).

Además del algoritmo de Nelder-Mead probamos con otros algoritmos conocidos como es el de Powell, el método de Newton truncado (TNC), el algoritmo secuencial de mínimos cuadrados (SLSQP) y un algoritmo de aproximación lineal del problema (COBYLA). Comparamos todos ellos con nuestra elección, Nelder-Mead y vemos que este último es el que mejor resultado da. Por eso, y por lo explicado anteriormente decidimos quedarnos con este algoritmo, los valores de los demás se muestran a continuación:

Parámetro	Valor
V óptimo	0.47488881455128656 V
W_n óptimo	$7.499999995843919 \cdot 10^{-5}$ cm
W_p óptimo	0.010000000167665979 cm
N_D óptimo	$4.999999999997765 \cdot 10^{20}$ cm ⁻³
N_A óptimo	999999999999948.0 cm ⁻³
Potencia máxima	0.022518574411364876 W/cm ²

Tabla 3: Valores óptimos de la célula solar(Powell).

Parámetro	Valor
V óptimo	0.47488880724625315 V
W_n óptimo	$7.5 \cdot 10^{-5}$ cm
W_p óptimo	0.01793746630353654 cm
N_D óptimo	$5 \cdot 10^{20}$ cm ⁻³
N_A óptimo	10^{16} cm ⁻³
Potencia máxima	0.02251857432721177 W/cm ²

Tabla 4: Valores óptimos de la célula solar(TNC).

Parámetro	Valor
V óptimo	0.4594248218297998 V
W_n óptimo	$7.5 \cdot 10^{-5}$ cm
W_p óptimo	0.01 cm
N_D óptimo	10^{20} cm ⁻³
N_A óptimo	4700000000000000.0 cm ⁻³
Potencia máxima	0.021747501759795798 W/cm ²

Tabla 5: Valores óptimos de la célula solar(SLSQP).

Parámetro	Valor
V óptimo	0.4594248242413194 V
W_n óptimo	$7.5 \cdot 10^{-5}$ cm
W_p óptimo	0.01852414744754478 cm
N_D óptimo	10^{20} cm ⁻³
N_A óptimo	4700000000000000.0 cm ⁻³
Potencia máxima	0.02174750152637191 W/cm ²

Tabla 6: Valores óptimos de la célula solar(COBYLA).

2.3.2. Reducción del problema: Optimización con tres variables

En el apartado anterior hemos presentado un acercamiento un poco tosco a la obtención del máximo de la potencia de la célula solar. Si nos fijamos, todas las variables (excepto V), usando el algoritmo de Nelder-Mead, alcanzan su máximo en un punto extremo del intervalo en el que está restringido. Esto, no solo sucede en Nelder-Mead si no que observamos en todos que los valores de W_n , W_p , N_A y N_D parecen acercarse siempre al mismo valor extremo. Por ello, nos planteamos que quizás el aumento de algunas variables haga crecer/decrecer nuestra función objetivo sin depender del valor del resto de variables.

Entonces, refinaremos un poco el procedimiento anterior mostrando algunas conclusiones que se obtienen de un pequeño estudio analítico de nuestra función objetivo. En concreto, como paso previo a la optimización numérica, trataremos de eliminar (de forma analítica) alguna de las variables presentes en el problema. De esta forma reducimos la dimensionalidad del problema, no solo simplificándolo si no obteniendo resultados finales más precisos.

Nos fijaremos en particular en algunas derivadas parciales de la función potencia.

$$\frac{\partial P}{\partial W_n} = \frac{V}{\sqrt{\tau_n d_n}} q n_{int}^2 (e^{qV/(kT)} - 1) \frac{\sqrt{D_n}}{N_A \sqrt{\tau_n}} \operatorname{csch}^2\left(\frac{W_n + X_p}{\sqrt{\tau_n D_n}}\right) > 0$$

donde vemos que es positiva la expresión debido a que $\frac{qV}{kT} > 0$ y, por tanto $(e^{qV/(kT)} - 1) > 0$.

Obtenemos que el valor de W_n en el punto que maximice P será el máximo de nuestro intervalo para él, es decir, $7.5 \cdot 10^{-5}$ cm.

De manera similar, obtenemos

$$\frac{\partial P}{\partial W_p} = -\frac{V}{\sqrt{\tau_p D_p}} q n_{int}^2 (e^{qV/(kT)} - 1) \frac{\sqrt{D_p}}{N_D \sqrt{\tau_p}} \operatorname{csch}^2\left(\frac{W_p - X_n}{\sqrt{\tau_p D_p}}\right) < 0$$

Obtenemos que el valor de W_p en el punto que maximice P será el mínimo de nuestro intervalo para él, es decir, 0.01 cm.

Debido a que esta derivada no está definida en el punto en el que $W_p - X_n = 0$ (problema que no teníamos en el caso de la parcial con respecto a W_n ya que ahí el argumento de la cosecante hiperbólica era siempre positivo), debemos comprobar también que $W_p > X_n$ no se puede dar para asegurarnos que de verdad el máximo ocurre en $W_p = 0.01$ cm.

El valor máximo de V_{int} es $V_{int} < 1$ V (sustituyendo en la fórmula de V_{int} los valores máximos de na y nd). Tenemos por lo tanto que

$$X_n < \sqrt{\frac{2\epsilon N_A}{q N_D (N_A + N_D)}} < 3.6 \cdot 10^{-7} \text{ cm}$$

donde en la segunda cota hemos sustituido el valor máximo de N_D en el numerador y los valores mínimos de N_A y N_D en el denominador. Como el valor mínimo que puede tener W_p es 0.01 cm, queda demostrado que $W_p - X_n > 0$.

Así, el nuevo problema de optimización se define como:

$$\text{Maximizar: } P(V, N_D, N_A) = J(V) \cdot V$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$0.1 \text{ V} \leq V \leq 0.52 \text{ V}$$

$$10^{18} \text{ cm}^{-3} \leq N_D \leq 5 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3}$$

$$10^{14} \text{ cm}^{-3} \leq N_A \leq 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$

De modo similar a como procedimos en el caso de cinco variables resolveremos el problema propuesto recurriendo a los métodos Nelder-Mead, Powell, TNC, SLSQP y COBYLA.

Parámetro	Valor
V óptimo	0.47488881309973097 V
N_D óptimo	$5 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-3}$
N_A óptimo	10^{16} cm^{-3}
Potencia máxima	0.022518574411824366 W/cm ²

Tabla 7: Valores óptimos de la célula solar(Nelder-Mead).

Parámetro	Valor
V óptimo	0.4748888139862167 V
N_D óptimo	$4.9999999999996228 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-3}$
N_A óptimo	$9999999974962080.0 \text{ cm}^{-3}$
Potencia máxima	0.02251857440923877 W/cm ²

Tabla 8: Valores óptimos de la célula solar(Powell).

Parámetro	Valor
V óptimo	0.4748888084653681 V
N_D óptimo	$5 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-3}$
N_A óptimo	10^{16} cm^{-3}
Potencia máxima	0.022518574411824338 W/cm ²

Tabla 9: Valores óptimos de la célula solar(TNC).

Parámetro	Valor
V óptimo	0.45942482159130943 V
N_D óptimo	10^{20} cm^{-3}
N_A óptimo	$4700000000000000.0 \text{ cm}^{-3}$
Potencia máxima	0.021747501759795795 W/cm ²

Tabla 10: Valores óptimos de la célula solar(SLSQP).

Parámetro	Valor
V óptimo	0.4594248309705877 V
N_D óptimo	10^{20} cm^{-3}
N_A óptimo	$4700000000000000.0 \text{ cm}^{-3}$
Potencia máxima	0.02174750175979585 W/cm ²

Tabla 11: Valores óptimos de la célula solar(COBYLA).

En estas tablas podemos observar que no existe una tendencia general en las nuevas soluciones. En métodos como Nelder-Mead obtenemos valores de potencia máxima iguales a los que obteníamos con cinco variables. En otros como el método Powell tenemos una muy ligera pérdida en la potencia máxima al limitarnos al estudio a tres variables. Sin embargo, en otros métodos como TNC y COBYLA observamos una mejora también pequeña de la potencia máxima. Esta mejora se debe a que la solución que nos daban estos algoritmos en la optimización con cinco variables, no obtenía correctamente el valor de W_p que hemos calculado analíticamente

2.3.3. Reducción del problema: Optimización con una variable

Como vimos anteriormente, hemos sido capaces de reducir la dimensión de nuestro problema de cinco variables a solo tres. Idealmente, como continuación al análisis hecho previamente, nos gustaría obtener los extremos de la función de forma analítica. No obstante esto no es factible en la mayoría de las ocasiones en que se pretende modelizar un fenómeno físico.

Es por ello que desde aquí debemos estudiar numéricamente algunos aspectos de esta optimización. En particular, sería interesante estudiar un fenómeno recurrente que se observa al optimizar nuestro problema con diferentes algoritmos y es que para todos nuestros resultados aproximados anteriores el valor extremo de la función objetivo parece alcanzarse para valores extremos de N_A y N_D .

Este hecho parece indicar que existe la posibilidad de que tengamos una relación de monotonía entre P y las variables N_A y N_D .

Para comprobar si en efecto esto sucede bastaría con tomar las parciales respecto de cada una de las variables N_A y N_D y estudiar si dichas derivadas tienen signo constante en los intervalos dados por la Tabla 2. No obstante, al tomar estas parciales nos encontramos con expresiones demasiado complicadas como para abordarlas con un estudio analítico.

Por este motivo hemos decidido proceder por medio de una prueba numérica, es decir, pretendemos obtener valores para la función $\frac{\partial P}{\partial N_A}(V; N_A, N_D)$ y $\frac{\partial P}{\partial N_D}(V; N_A, N_D)$ en los intervalos de interés y comprobar el signo que toman.

Para realizar este proceso tomamos un mallado tridimensional de 10^6 puntos y evaluamos $\frac{\partial P}{\partial N_A}(V; N_A, N_D)$ en ellos, colorearemos de rojo aquellos que tomen un valor positivo y de azul los que tomen valores negativos.

Este estudio revela que P siempre es creciente con N_A y alcanzamos el máximo en $N_A = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$. Lo mismo ocurre con N_D , por tanto la función objetivo alcanza el máximo en $N_D = 5 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-3}$.

Como conclusión, hemos sido capaces de reducir el problema a:

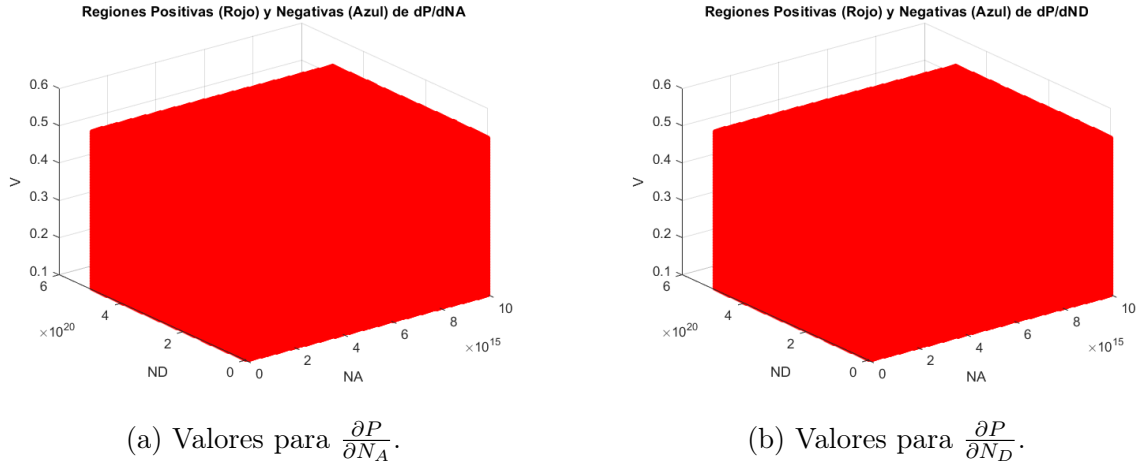


Figura 2: Valores para $\frac{\partial P}{\partial N_X}$, con $X = A, D$.

Maximizar: $P(V) = J(V) \cdot V$

Sujeto a la restricción:

$$0.1 V \leq V \leq 0.52 V$$

Este problema unidimensional puede estudiarse derivando la función potencia respecto a V y encontrando la condición para el máximo. Destacamos que X_n y X_p son independientes de V puesto que dependen únicamente de N_A y N_D (ya fijados por nuestro estudio anterior). De este modo tendremos que $\Delta = \left(\frac{\sqrt{D_n}}{N_A \sqrt{\tau_n}} \operatorname{cotanh} \left(\frac{W_n + X_p}{\sqrt{\tau_n} D_n} \right) - \frac{\sqrt{D_p}}{N_D \sqrt{\tau_p}} \operatorname{cotanh} \left(\frac{W_p - X_n}{\sqrt{\tau_p} D_p} \right) \right)$ es una constante independiente de V . Este hecho nos permite reescribir:

$$J = J_L - qn_{int}^2 \Delta (e^{qV/(kT)} - 1)$$

Así, igualando la derivada a cero obtenemos:

$$P'(V) = J'(V) \cdot V + J(V) = (J_L + qn_{int}^2 \Delta) - qn_{int}^2 \Delta \cdot e^{\frac{qV}{kT}} \left(\frac{qV}{kT} + 1 \right) = 0 \implies J_L + qn_{int}^2 \Delta = qn_{int}^2 \Delta \cdot e^{\frac{qV}{kT}} \left(\frac{qV}{kT} + 1 \right)$$

$$\implies e^{\frac{qV}{kT}} \left(\frac{qV}{kT} + 1 \right) - \frac{J_L}{qn_{int}^2 \Delta} - 1 = 0$$

Esta última ecuación admite resolución numérica. Podemos, por ejemplo, resolverla utilizando el método de Newton-Raphson [2], uno de los métodos más utilizados en resolución numérica de ecuaciones debido a su velocidad y simplicidad. La idea del método es muy sencilla. Tomamos una función $f(x)$ a maximizar en un intervalo $[a, b]$. Partiendo de un valor inicial, $x_0 \in [a, b]$ calculamos la recta

tangente a $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$. Obtenemos el punto de corte de esta recta con el eje X , lo llamamos x_1 y repetimos el argumento. Podemos intuir geoméricamente la idea del método en la figura 3.

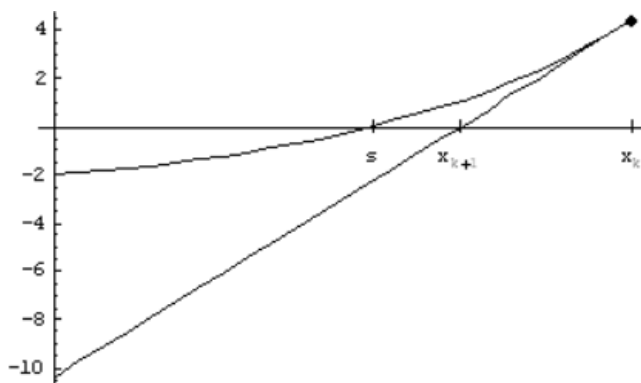


Figura 3: Idea geométrica del método de Newton-Raphson. Fuente: <https://www.ugr.es/prode-las/AnNumCaminos/ftp/Tema2.htm>

El algoritmo calcula en cada paso el valor de la siguiente aproximación a nuestra raíz según la expresión:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_{n+1})}$$

partiendo de un valor inicial x_0 .

Teorema 2.1 Teorema de Convergencia Global del Método de Newton-Raphson

Sea $f \in C^2([a, b])$ tal que se verifica:

- $f(a)f(b) < 0$
- $f'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$
- $f''(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$

Entonces, necesariamente existe $s \in [a, b]$ tal que $f(s) = 0$ al que la sucesión iterativa del método de Newton-Raphson converge partiendo de un punto inicial x_0 tal que $f(x_0) \cdot f''(x_0) \geq 0$.

Vamos a comprobar estas hipótesis para nuestra función $f(V) = e^{\frac{qV}{kT}} \left(\frac{qV}{kT} + 1 \right) - \frac{J_L}{qn_{int}^2 \Delta} - 1$ en el intervalo $[0.1, 0.52]$. Para ello, vamos a obtener la primera y segunda derivada de f :

$$f'(V) = \frac{qe^{\frac{qV}{kT}}}{kT} \left(\frac{qV}{kT} + 2 \right) > 0$$

$$f''(V) = \frac{q^2 e^{\frac{qV}{kT}}}{k^2 T^2} \left(\frac{qV}{kT} + 3 \right) > 0$$

Es claro que ambas son positivas en nuestro intervalo, ya que el primer factor es no nulo y no negativo y, además, el factor del paréntesis está compuesto por un primer sumando no negativo y un segundo sumando positivo. Esto confirma que ambas derivadas sean estrictamente positivas.

Ahora, estudiemos el cumplimiento de las condiciones del teorema de Newton, para poder aplicar el método asegurando su convergencia.

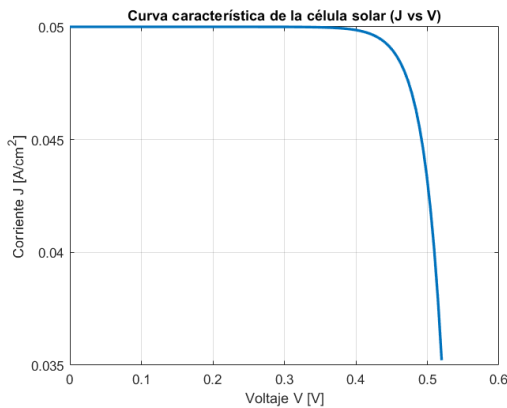
- $f(0.1) = -1.840349113287040 \cdot 10^9$ y $f(0.52) = 9.646377225539572 \cdot 10^9$.
Por tanto $f(0.1) \cdot f(0.52) < 0$.
- $f'(x) \neq 0 \forall x \in [0.1, 0.52]$, como acabamos de explicar es un valor estrictamente positivo.
- $f''(x) \neq 0 \forall x \in [0.1, 0.52]$, como acabamos de explicar es un valor estrictamente positivo.

Es decir, si tomamos un x_0 tal que $f(x_0) \cdot f''(x_0) \geq 0$, el método de Newton convergerá a nuestra solución. Para nuestro caso basta elegir un x_0 tal que $f(x_0) \geq 0$. Tomamos por ejemplo $x_0 = 0.5 \in [0.1, 0.52]$. Tras seis iteraciones y con una tolerancia de 10^{-8} obtenemos la solución:

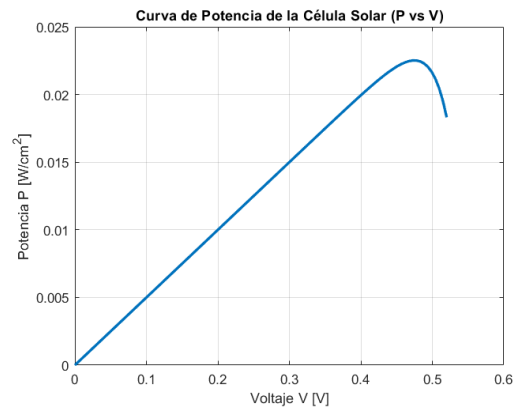
$$V^* = 0.47488881348114037 \text{ V}$$

Existen otros modos para elegir nuestro valor inicial de forma más refinada, no obstante, la forma de elección utilizada es más que suficiente para obtener resultados suficientemente buenos sin la necesidad de usar un algoritmo más complejo.

Con este desarrollo concluimos que el valor de V que maximiza la potencia coincide con el obtenido en los anteriores apartados y la potencia máxima será $P_{max} = 0.022518574411824362 \frac{W}{cm^2}$.



(a) Curva característica óptima.



(b) Potencia óptima.

Figura 4: Curva característica y potencia de célula solar con valores óptimos de W_n, W_p, N_A y N_D .

2.3.4. Más sobre la optimización de la potencia P

Hemos averiguado el valor del voltaje V que maximiza la potencia en el caso de los parámetros fijados de la Tabla 1. Aunque nuestro resultado sea bastante bueno y, en principio, una buena aproximación matemática, en general se trata de un acercamiento poco realista. Las células solares se encuentran por lo general en espacios abiertos, bajo la influencia de los constantes cambios que se den en el ambiente. Obviamente la cantidad de luz que llega al receptor no se va a mantener constante, va a variar de forma continua. Es decir, no es realista asumir las mismas condiciones todo el rato, como que la temperatura sea constante.

Lo primero que podemos pensar como solución es en simplemente modificar el valor del voltaje cada cierto tiempo. Midiendo las nuevas condiciones ambientales, obtenemos un nuevo valor óptimo. Así, por ejemplo, cada cierto tiempo podríamos medir de nuevo factores ambientales, como la temperatura, y así resolver de nuevo las operaciones dadas en la última sección y obtener el nuevo voltaje óptimo.

Aunque teóricamente no parece tener ningún problema la solución anterior, en la práctica no es viable. Para empezar, si el sistema debe tomar cada cierto tiempo diferentes medidas ambientales (como temperatura) se ve obligado a gastar energía en estas medidas. Es posible que no sea óptimo este gasto de energía a cambio de la mejora en la potencia generada. Por otro lado, el tiempo que transcurre entre dos mediciones es tiempo en que la potencia no es óptima, e incluso pueden darse situaciones puntuales, como la aparición de una nube, que hagan que esa potencia se sitúe muy lejos de la optimalidad. Incluso aunque se consiguiesen realizar mediciones de forma constante, para subsanar este problema, (y sin tener en cuenta el gasto en energía) el sistema puede verse afectado por el ruido de las medidas ambientales y por la falta de tiempo para que el potencial se estabilice entre dos medidas consecutivas, dando lugar a pequeñas fluctuaciones.

En este contexto, y ante la ineficacia del intento mencionado en el párrafo anterior, surge la idea del MPPT [4] o seguidor de punto de máxima potencia. Uno de los algoritmos más utilizados es el MPPT de perturbación y observación (P&O). La idea de este algoritmo es bastante simple, el sistema emite un voltaje, dando una corriente, para medir entonces la potencia obtenida. Después, se perturba el voltaje y se emite uno ligeramente diferente. Si la potencia aumenta, se sigue perturbando en la misma dirección que antes, si disminuye se perturba en la dirección contraria. Así, el voltaje conseguirá acercarse en cada momento a su situación ideal. Podemos ver un diagrama¹ explicativo de los pasos a seguir en la iteración n del método en la figura 5.

Otro punto a favor es que este algoritmo se implementa de forma sencilla y realista a través de los controladores MPPT de carga solar.

En nuestro caso, aprovechando la solución previa, lo ideal sería tomar una medida de la temperatura,

¹En el diagrama se denota la corriente por I .

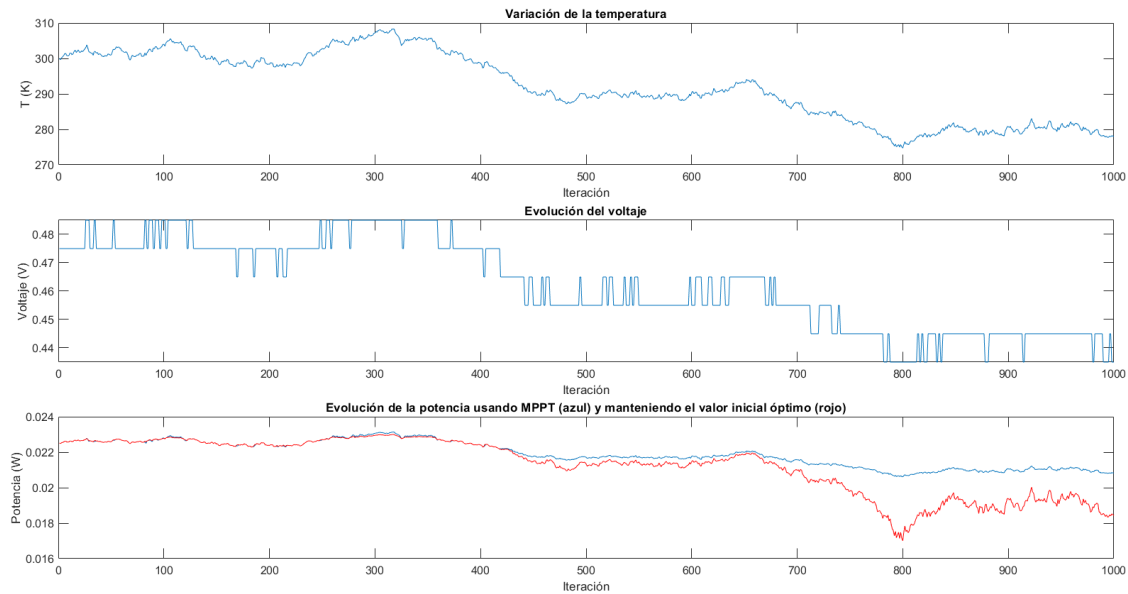


Figura 6: Figuras de evolución de temperatura, voltaje y potencia óptimos a lo largo del algoritmo P&O. En la última figura, tenemos una comparación con no utilizar el algoritmo.

el momento de la iteración puede darnos una buena idea de la cantidad de potencia perdida.

$$\Delta P_{total} = 0.656885362130466 \frac{W}{cm^2}$$

Teniendo en cuenta que la potencia que estamos generando es del orden de $0.02 \frac{W}{cm^2} \sim 0.03 \frac{W}{cm^2}$, las pérdidas suponen una gran cantidad de potencia perdida, de gran importancia, especialmente para un mayor tiempo.

3. Conclusiones

A lo largo de este trabajo se ha planteado un modelo matemático para optimizar la potencia generada por una célula solar, basándonos en la ecuación que relaciona la corriente $J(V)$ con varias variables clave como el voltaje V , las longitudes de difusión de electrones y huecos W_n y W_p , y las concentraciones de dopantes N_D y N_A . El objetivo principal fue maximizar la potencia eléctrica $P(V) = J(V) \cdot V$, sujeta a restricciones físicas y de diseño propias de los materiales involucrados.

El desarrollo del modelo comenzó con la formulación de la ecuación para $J(V)$, la cual contiene términos no lineales, incluyendo funciones hiperbólicas y factores dependientes de la temperatura y las propiedades de los semiconductores. Además se abordaron las complejidades matemáticas del modelo asegurando la viabilidad física de las soluciones haciendo que estas se amoldasen a las diferentes restricciones de las variables involucradas en nuestro problema. Se consiguió reducir la dimensionalidad

del problema a optimizar, haciéndolo más sencillo de manejar y obteniendo resultados más precisos.

En el apartado de optimización, se utilizaron diferentes técnicas de optimización partiendo desde un acercamiento intuitivo del proceso de maximizar de la función objetivo y finalizando en un método más refinado que mezcla un estudio analítico de la función potencia y la aplicación de métodos de resolución numéricos de ecuaciones.

Los resultados obtenidos muestran una configuración óptima para maximizar la potencia de la célula solar bajo las condiciones dadas. Los valores de V , W_n , W_p , N_D y N_A que se obtuvieron a través de la optimización cumplen con todas las restricciones y permiten una maximización efectiva de $P(V)$. El análisis también permitió observar cómo cambios en los parámetros afectan el rendimiento general de la célula, lo que proporciona una herramienta valiosa para futuros diseños o mejoras.

Además, se estudió un caso más realista que el dado, teniendo en cuenta la naturaleza fluctuante del problema. Atendiendo a los posibles cambios de la temperatura que suceden en la naturaleza, presentamos y comprobamos a través de una simulación un algoritmo realista y utilizado en la actualidad. Ante las limitaciones del modelo idealizado, intentamos dar cabida a la solución poco realista uniéndola con un método extra que tuviera en cuenta la variabilidad de algunas condiciones.

En conclusión, este trabajo demuestra cómo la modelización matemática puede ser aplicada eficazmente para resolver problemas complejos en ingeniería de semiconductores. La solución obtenida no solo cumple con los requisitos del problema planteado, sino que también ofrece un marco flexible para explorar otras configuraciones o incluso incorporar nuevos factores en futuros estudios.

Referencias

- [1] Olsson, D. M., & Nelson, L. S. (1975). *The Nelder-Mead Simplex Procedure for Function Minimization*. *Technometrics*, 17(1), 45-51.. <https://doi.org/10.1080/00401706.1975.10489223>
- [2] Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. <https://estadistica-dma.ulpgc.es/FCC/05-3-Raices-de-Ecuaciones-2.html>
- [3] Facchinei, F., Lucidi, S., & Palagi, L. (1999). *A truncated Newton algorithm for large scale box constrained optimization*. *SIAM Journal on Optimization*. *Tech. Report 15-99 DIS*.. https://www.researchgate.net/publication/2371201_A_Truncated_Newton_Algorithm_for_Large_Scale_Box_Constrained_Optimization
- [4] B. Patra, P. Nema, M. Khan, & O. Khan (2022). *Optimization of solar energy using MPPT techniques and industry 4.0 modelling*. <https://doi.org/10.1016/j.susoc.2022.10.001>