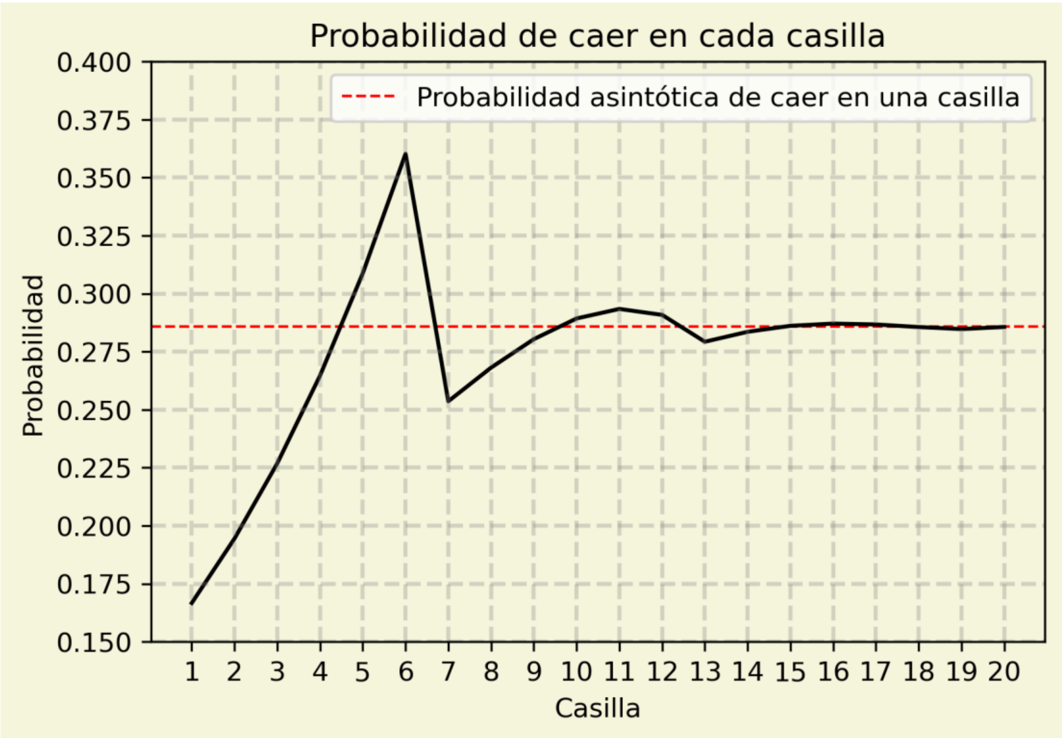
La curiosidad estadística que esconde el juego de la oca

Supongamos que estamos jugando al juego de la oca en un tablero de infinitas casillas, todas iguales y sin efectos especiales. Es decir, no hay casillas que te hagan avanzar o retroceder, no existe el "de oca en oca" o el puente. Supongamos también que estamos jugando con un dado de 6 caras. De forma que empezando en la casilla 0, cada turno lanzamos el dado y avanzamos el número de casillas que marca. La pregunta que nos hacemos es la siguiente ¿Cuál es la probabilidad de caer en cada casilla del tablero?

Si nos fijamos en la primera casilla, solo podemos llegar a ella sacando un 1 y, por tanto, la probabilidad de caer en ella es de $\frac{1}{6}$. Para la casilla tres, podemos llegar sacando las siguientes combinaciones de resultados: 1+1+1,2+1,1+2,3; es decir, de 4 formas distintas e independientes, de probabilidades $\frac{1}{6^3}, \frac{1}{6^2}, \frac{1}{6^2}, \frac{1}{6}$, respectivamente, que en total hacen una probabilidad de 0.227 de caer en la tercera casilla.

Viendo estos resultados iniciales, nuestra primera intuición era que la probabilidad debía aumentar hasta estabilizarse en algún punto. Naturalmente el cálculo no se podía resolver a mano, ya que la descomposición aumentaba exponencialmente, así que decidimos resolverlo con el ordenador. Lo cual nos permitió calcular de forma exacta descomposiciones hasta la casilla 25, a partir de la cual empezó a requerir de demasiado tiempo de cómputo. Así que decidimos simularlo y obtener una aproximación de las probabilidades de caer en cada casilla.

En la imagen se puede ver la probabilidad de caer en cada una de las primeras 20 casillas del tablero. La gran sorpresa es que la casilla más probable de todo el tablero es la casilla 6, seguida por la 5 y que la probabilidad cae drásticamente en la casilla 7. Eso sí, al final la probabilidad se estabiliza en el infinito.



Este fenómeno matemático se puede entender como un proceso de renovación [1], creado por la adición de variables aleatorias i.i.d. positivas $X_1, X_2, \ldots$ que siguen una distribución uniforme discreta con soporte $\{1, \ldots, 6\}$. Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, donde n es el número de dados lanzados y μ el valor esperado del lanzamiento del dado $\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5$; entonces, aplicando el teorema de renovación de Feller-Erdös-Pollard se tiene que

$$\lim_{k \to \infty} P\{S_n = k \; para \; algún \; n \geq 0\} = \frac{1}{\mu}$$

Es decir, la probabilidad de visitar cualquier casilla cuándo la casilla está lo suficientemente lejos de la inicial es de $\frac{1}{3.5} \approx 0.286$.

[1] http://galton.uchicago.edu/~lalley/Courses/383/Renewal.pdf

[1] Feller, W. (1968, 1971). An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol I and II, John Wiley.