Grupo UCM de *Física Matemática*

- Creado en **2006** (con el nombre de “Sistemas solubles e integrables”). Es uno de los grupos de FM más fuertes y con más historia y tradición en España (financiación ininterrumpida desde 1990 con proyectos estatales)
- **7** profesores + **1** doctorando + **1** ex-doctorando (postdoc en la Universidad de Innsbruck), todos en el mismo proyecto del Ministerio (PGC2018-094898-B-I00). Concretamente:
  Luis Martínez, Piergiulio Tempesta, Artemio González, Miguel Ángel Rodríguez, Federico Finkel, Gabriel Álvarez, Elena Median (U. De Cádiz) + Daniel Reyes (doctorando) + José Antonio Carrasco (ex-doctorando)
- En nuestro trabajo de investigación combinamos técnicas matemáticas de todo tipo para resolver exactamente problemas de interés en distintos campos de la física. De esta forma se pueden validar predicciones basadas en métodos aproximados (p. ej., teoría de perturbaciones) y hacer nuevas predicciones que van más allá de lo que se puede conseguir con dichos métodos
- No disponemos de **becas FPI**. Pocos doctores, pero muy selectos. Muchos de ellos acaban destacando en otras ramas de la física o incluso de las matemáticas.
- Excelente relación con el **ICMAT**, del cual es miembro PT: por ej., DR disfrutó recientemente de una beca de 6 meses financiada por dicho instituto

Líneas de investigación actuales

1. **Modelos cuánticos de muchos cuerpos** (cadenas de espines, sistemas de fermiones libres, modelos de electrones fuertemente correlacionados, caos cuántico, entropía de entrelazamiento de modelos solubles, …): AGL, FF, JAC, MAR, PT
2. **Teoría de la información clásica y cuántica** (entropías generalizadas basadas en teoría de grupos, otras medidas grupales de entrelazamiento, …): PT, MAR, JAC, DRN
3. **Sistemas integrables clásicos y álgebra de tensores**: PT, MAR, DRN
4. **Modelos cosmológicos inflacionarios** (aplicaciones de la teoría de sistemas integrables al estudio y clasificación de este tipo de modelos): LM, GA, EM

- Ofrecemos **tesis doctorales** en las líneas 1 (FF y AG) y 2–3 (PT)

- Entropía de entrelazamiento: $X = A \cup B$ sist. cuántico ($A \cap B = \phi$) en un estado puro $|\psi\rangle$.

Estado del subsistema A: es una matriz densidad

$$\rho_A = \mathrm{tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|)$$

La entropía de entrelazamiento de von Neumann se define por

$$S_A = -\mathrm{tr}(\rho_A \log \rho_A) \equiv -\sum_i p_i \log p_i \quad (p_i = \text{autov. de } \rho_A)$$

Objetivo: calcular S_A en algún sistema suf. sencillo, y ver cómo escala con el tamaño de A (para detectar crit.)

- Sistema de fermiones ("spinless") con "hopping" a próximos vecinos:

$$\boxed{H = \sum_{n=0}^{N-2} J_n \left(c_n^+ c_{n+1} + c_{n+1}^+ c_n \right) + \sum_{n=0}^{N-1} B_n c_n^+ c_n \ (+\ \text{const.})}$$

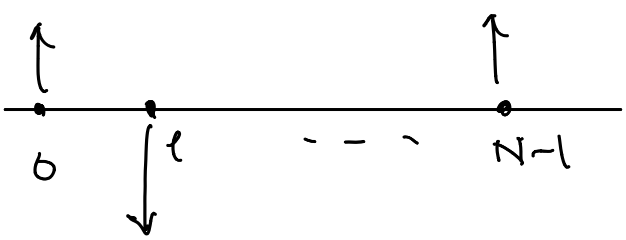
J_n: amplitud del salto entre los sitios n y $n+1$; B_n: pot. químico

$(J_n, B_n \in \mathbb{R},\ J_n \neq 0)$

Este modelo cuántico está estrecham. relacionado con la teoría de matrices y los polinomios ortogonales!!!

$\{|0\rangle_i, |1\rangle_i\}$ = base del esp. de Hilbert del sitio i.

$|0\rangle_i \rightsquigarrow |\downarrow\rangle_i$, $|1\rangle_i \to |\uparrow\rangle_i \implies$ cadena de espines ½



Operadores: $\sigma_n^\pm \longrightarrow$? (NO simplem. $c_n^\pm$, porque $[\sigma_i^\alpha, \sigma_j^\beta] = 0$ para $i \neq j$ mientras $\{c_i^\pm, c_j^\pm\} = 0$).

(tr. de Jordan-Wigner)

Estados de una partícula: $|n\rangle\rangle = c_n^+ |0\rangle$ ↳ vacío

$\Rightarrow H|k\rangle\rangle = J_{k-1}|k-1\rangle\rangle + J_k|k+1\rangle\rangle + B_k|k\rangle\rangle$

H deja inv. lin $\{|0\rangle\rangle, |1\rangle\rangle, \dots, |N-1\rangle\rangle\} \longrightarrow$ matriz $N\times N$

En la base anterior, la matriz de H es

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} B_0 & J_0 & & & \\ J_0 & B_1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & J_{N-2} \\ 0 & & & J_{N-2} & B_{N-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{matriz de Jacobi } (N\times N)$$

(tridiagonal simétrica)

Las energías ε_k de los estados de una partícula se calculan diagonaliz. esta matriz

$\Rightarrow \det(\varepsilon_k - \mathbb{H}) = P_N(\varepsilon_k) = 0.$

- Consideremos los polinomios mónicos $P_0(E) = 1, P_1(E), \dots, P_N(E)$, donde $P_n(E) = \det(E - \mathbb{H}_n)$

↳ menor de orden n de $\mathbb{H}$

$$\Rightarrow P_{n+1}(E) = (E - B_n)P_n(E) - J_n^2 P_{n-1}(E)$$

∴ relación de recurrencia a 3 términos, como la de los polinomios ortogonales clásicos!

Estos polinomios también son ortogonales:

$$\int_{\mathbb{R}} P_n(E) P_m(E)\, \mu(E)\, dE = \gamma_n \delta_{nm}, \quad \gamma_n = J_0^2 \cdots J_{n-1}^2$$

pero con $\mu(E) = \sum_{k=0}^{N-1} w_k\, \delta(E - \varepsilon_k)$ una medida discreta, $w_k > 0$ (calculables)

(concentrada en los ceros $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{N-1}$ de P_N)

Operadores creación / destrucción de modos de energía:

si $(\Phi_{1k}, \dots, \Phi_{nk})$ es el autoestado de $\mathbb{H}$ de autov. ε_k, def.

$$b_k = \sum_{n=0}^{N-1} \Phi_{nk} c_n \quad \Longrightarrow \quad \{b_n, b_m\} = \{b_n^+, b_m^+\} = 0,$$

$\{b_n^+, b_m\} = \delta_{nm}$; b_k^+ crea un modo de energía ε_k

Los autoestados de H son los est. $b_{k_1}^+ \cdots b_{k_\ell}^+ |0\rangle$,

con $k_1 < \cdots < k_\ell$, de energía $\varepsilon_{k_1} + \cdots + \varepsilon_{k_\ell}$ (ℓ = núm. de fermiones)

Se dem. que $\Phi_{nk} = \sqrt{\frac{w_k}{\gamma_n}} P_n(\varepsilon_k)$!

- Sup. que $|\psi\rangle = b_0^+ \cdots b_{K-1}^+ |0\rangle$ (K modos + bajos exc.), y que $A = \{0, \dots, L-1\}$. ¿Cómo se calcula S_A?

1) Def. $\Phi_L^K := (\Phi_{nk})_{\substack{n=0,\dots,L-1 \\ k=0,\dots,K-1}}$ $(L \times K)$

2) $C = \Phi \Phi^T$ $(L \times L)$. Es la matriz de corr.:

$$C_{mn} = \langle \psi | c_m^+ c_n | \psi \rangle$$

3) Si $\eta_0, \dots, \eta_{L-1} \in [0,1]$ son los autovalores de C,

$$S_A = \sum_{k=0}^{L-1} s_2(\eta_k), \qquad s_2(\eta_k) = -\eta_k \log \eta_k - (1-\eta_k) \log(1-\eta_k)$$