



UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

Curso 2025-2026

MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):

Pregunta 1. (2 puntos) La NFL es la principal liga profesional de fútbol americano de los Estados Unidos. En un partido de la NFL se pueden anotar puntos de diversas formas, siendo las más comunes las siguientes: *touchdown*, *field goal* y *extra point* al que solo se puede optar después de anotar un *touchdown*. Según la normativa de la liga, un *touchdown* vale 6 puntos, un *field goal* 3 puntos y un *extra point* 1 punto.

De uno de los dos equipos de un partido finalizado de la NFL se sabe que solo ha conseguido puntos mediante *touchdown*, *field goal* y *extra point*. Además se sabe que:

- Ha anotado 63 puntos.
- El doble de *field goals* anotados coincidió con el número de *touchdowns* conseguidos.
- La suma del número de *touchdowns* y *field goals* anotados fue cuatro veces el número de *extra points* conseguidos.

Halle el número de *touchdowns*, *field goals* y *extra points* anotados por el equipo.

Pregunta 2. Dada la función real de variable real $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$, se pide:

- a) (1 punto) Hallar dónde se alcanzan los máximos y mínimos relativos de $f(x)$, así como sus correspondientes valores.
- b) (1 punto) Calcular el área del recinto delimitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = 3$ y $x = 6$.

Pregunta 3. Sea r la recta que pasa por $A(1, 2, -5)$ y $B(2, 4, -11)$, sea s la recta dada por la intersección de los planos $x - 2y + 3z = 3$, $x - y = 0$, y sea t la recta paralela a s que pasa por $C(1, 0, 0)$.

- a) (1 punto) Determine la posición relativa de r y s .
- b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**
 - b1) Halle la distancia entre s y t .
 - b2) Halle el coseno del ángulo que forman r y s .

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :

Pregunta 4.1. Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio que verifican $P(\overline{A}) = 0.6$, $P(A \cup B) = 0.75$ y $P(B|A) = 0.375$. Se pide:

- a) (1 punto) Calcular $P(B)$.
- b) (1 punto) Calcular $P(\overline{A}|B)$.

Pregunta 4.2. En los barrios de Tokio se considera el reciclaje y la clasificación de la basura una obligación ciudadana. Si no se clasifican los residuos de forma correcta para que sean retirados por la empresa de recogida de basuras, estos no son recogidos y el barrio puede ser penalizado por el ayuntamiento. En el barrio de Ueno, el 82.5 % de los hogares realizan esta tarea de forma adecuada.

- a) (1 punto) Se analizan los residuos de diez hogares de este barrio. Calcule la probabilidad de que a lo sumo uno de ellos no clasifique correctamente sus residuos.
- b) (1 punto) El ayuntamiento selecciona una muestra aleatoria de 200 hogares en este barrio y si el porcentaje de familias que comete errores en la clasificación de sus residuos es superior o igual al 10 %, el barrio es penalizado. Calcule, aproximando por una distribución normal adecuada, la probabilidad de que los vecinos de Ueno no sean sancionados.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :

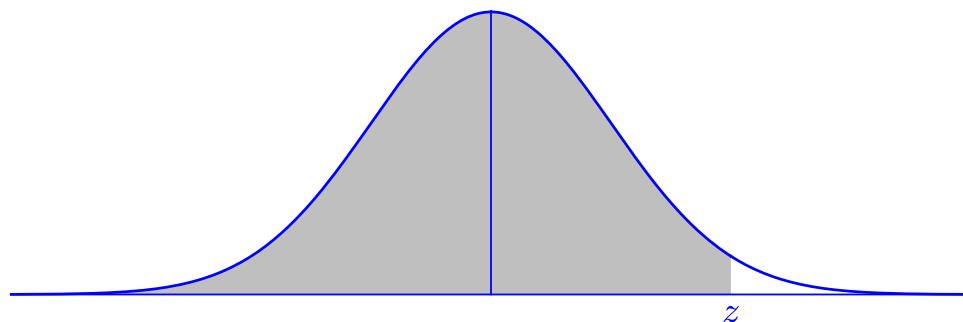
Pregunta 5.1. Sea la función $f(x) = x^2 + bx$.

- a) (1 punto) Determine los valores de b para que la recta $y = x - 1$ sea tangente a la gráfica de la función $f(x)$.
- b) (1 punto) ¿Es cierto que para cualquier valor de b existe una recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ que sea paralela a la recta $y = x - 1$? Justifique la respuesta.

Pregunta 5.2. Calcule los siguientes límites:

- a) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$.
- b) (1 punto) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\ln(1 + 2x)}$.

DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0, 1)$, $P(Z < 0,45) = 0,6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada. **Los contenidos correspondientes al bloque F se evaluarán transversalmente en cualquiera de los ejercicios. Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y se valorarán las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.**

1.

Identificación de las incógnitas: 0.1 puntos. Cada ecuación bien planteada: 0.5 puntos. Resolución correcta del sistema planteado: 0.4 puntos. Si resuelven correctamente un sistema incorrecto: 0.4 puntos.

2.

a) Función a trozos: 0.2 puntos. Derivada: 0.2 puntos. Cálculo de los extremos relativos con la condición $f'(x) = 0$: 0.2 puntos. Determinación de máximo o mínimo: 0.2 puntos. Identificación de los extremos relativos en $x = 1$ y $x = 5$: 0.1 puntos cada uno. Si no se dan los valores máximos y mínimos de la función se restan 0.1 puntos.

b) Integral a resolver escrita como suma de dos integrales: 0.2 puntos cada una. Cálculo de la primitiva: 0.3 puntos. Regla de Barrow: 0.2 puntos. Respuesta correcta: 0.1 puntos.

3.

a) Obtención de los vectores directores de r y s : 0.2 puntos cada uno. Independencia lineal de los mismos: 0.1 puntos. Determinación de un vector a partir de un punto de cada recta: 0.2 puntos. Estudio del rango de la matriz formada por los tres vectores: 0.2 puntos. Respuesta correcta: 0.1 puntos.

b1) Planteamiento geométrico (al ser paralelas hay que coger un punto): 0.5 puntos. Cálculo de la distancia: 0.5 puntos (planteamiento: 0.3 puntos, resolución: 0.2 puntos).

b2) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos. Se restan 0.1 puntos si no se pone el valor absoluto.

4.1.

a) Uso de la probabilidad condicionada: 0.3 puntos. Uso de la probabilidad de la unión: 0.3 puntos. Obtención de la probabilidad de la intersección: 0.2 puntos. Respuesta correcta: 0.2 puntos.

b) Uso de la probabilidad condicionada: 0.3 puntos. Uso de la probabilidad de diferencia de sucesos: 0.3 puntos. Respuesta correcta: 0.4 puntos.

(Si el valor hallado en **a)** es erróneo, las calificaciones se otorgan en **b)** para dicho valor).

4.2.

a) Identificación de la binomial: 0.1 puntos. Identificación de los parámetros: 0.1 puntos. Identificación del suceso: 0.2 puntos. Cálculo de la probabilidad: 0.4 puntos. Respuesta correcta: 0.2 puntos.

b) Parámetros correctos de la normal: 0.2 puntos. Identificación del suceso: 0.2 puntos. Aproximación de Yates: 0.1 puntos. Tipificación: 0.2 puntos. Uso correcto de la tabla: 0.2 puntos. Respuesta correcta: 0.1 puntos.

(Si el valor hallado en **a)** es erróneo, las calificaciones se otorgan en **b)** para dicho valor).

5.1.

a) Obtención de las dos ecuaciones: 0.3 puntos cada una. Resolución: 0.4 puntos (0.2 puntos por cada valor de b).

b) Planteamiento: 0.5 puntos. Justificación correcta: 0.5 puntos.

5.2.

a) Indeterminación: 0.1 puntos. Uso del conjugado: 0.4 puntos. Manipulación algebraica correcta: 0.3 puntos. Respuesta correcta: 0.2 puntos.

b) Indeterminación: 0.1 puntos. Uso de L'Hôpital: 0.3 puntos. Derivación correcta: 0.4 puntos. Respuesta correcta: 0.2 puntos.

MATEMÁTICAS II-SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

1.

Si llamamos x al número de *touchdowns* anotados, y al de *field goals* y z al de *extra points*, las condiciones dadas se traducen en el sistema:

$$\begin{cases} 6x + 3y + z = 63 \\ 2y = x \\ x + y = 4z \end{cases}.$$

La solución de ese sistema es $(8, 4, 3)$. Por lo tanto, el equipo anotó ocho *touchdowns*, cuatro *field goals* y tres *extra points*.

2.

a) Como función a trozos $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 5 & \text{si } x < 1 \text{ o } x \geq 5 \\ -x^2 + 6x - 5 & \text{si } 1 \leq x < 5 \end{cases}$, que está definida y es continua en $\mathbb{R}$.

Para encontrar los extremos relativos, se calcula $f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 & \text{si } x < 1 \text{ o } x > 5 \\ -2x + 6 & \text{si } 1 < x < 5 \end{cases}$. Se observa que $f(x)$ no es derivable en $x = 1$ ni en $x = 5$ ya que las derivadas laterales no coinciden en esos puntos. Al resolver $f'(x) = 0$ se obtiene el valor $x = 3$ y por tanto:

- Se alcanza un máximo relativo en $x = 3$ (la derivada es positiva a la izquierda de ese punto y negativa a la derecha) de valor $f(3) = 4$.
- Se alcanzan mínimos relativos en $x = 1$ y en $x = 5$ (la derivada es negativa a la izquierda de esos puntos y positiva a la derecha) de valores $f(1) = f(5) = 0$.

b) $A = \int_3^5 (-x^2 + 6x - 5)dx + \int_5^6 (x^2 - 6x + 5)dx = \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 5x \right]_3^5 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 5x \right]_5^6 = \left(\frac{25}{3} - 3 \right) + \left(-6 + \frac{25}{3} \right) = \frac{23}{3}.$

3.

a) El vector director de r es $\vec{v}_r = (1, 2, -6)$ y el de s es $\vec{v}_s = (3, 3, 1)$. Los dos vectores son linealmente independientes porque no son proporcionales. Un punto de s es $P_s(0, 0, 1)$. Como $\det(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{AP_s}) = 0$, las rectas se intersectan.

b1) Las rectas s, t son paralelas, por tanto la distancia entre ellas es la distancia del punto $C(1, 0, 0)$ a s . La recta s es $P_s + \lambda \vec{v}_s = (0, 0, 1) + \lambda(3, 3, 1)$. La distancia es

$$\frac{\|\overrightarrow{CP_s} \times \vec{v}_s\|}{\|\vec{v}_s\|} = \frac{\|(-3, 4, -3)\|}{\|(3, 3, 1)\|} = \sqrt{\frac{34}{19}} = \frac{\sqrt{646}}{19} \approx 1.338.$$

b2) El coseno del ángulo que forman las dos rectas es

$$\cos \theta = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{\|\vec{v}_r\| \|\vec{v}_s\|} = \frac{3}{\sqrt{41}\sqrt{19}} = \frac{3\sqrt{779}}{779} \approx 0.107.$$

4.1.

a) $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{1 - 0.6} = 0.375$. Luego $P(A \cap B) = 0.4 \cdot 0.375 = 0.15$.

Además $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Por lo tanto, $0.75 = 0.4 + P(B) - 0.15$ y $P(B) = 0.5$.

b) $P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.5 - 0.15}{0.5} = 0.7$.

4.2.

a) $X \equiv$ "Número de familias de entre las 10 que realizan correctamente la tarea" $\sim B(10, 0.825)$.

Se pide $P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{9} 0.825^9 \cdot 0.175 + \binom{10}{10} 0.825^{10} \approx 0.4559$.

b) $X \equiv$ "Número de familias de las 200 que realizan correctamente la tarea" $\sim B(200, 0.825)$. Como $p = 0.825$, $q = 1 - 0.825 = 0.175$ y $n = 200$. Luego $X \approx Y \sim N(np; \sqrt{npq}) = N(165, 5.37)$. En la muestra escogida el barrio es penalizado si 20 o más hogares cometen errores. Por lo tanto para que no sea penalizado más de 180 hogares tienen que realizar correctamente la tarea. Utilizando la aproximación de Yates se calcula la probabilidad pedida:

$$P(X > 180) \approx P(Y > 180.5) = P(Z > \frac{180.5 - 165}{5.37}) \approx P(Z > 2.89) = 1 - 0.9981 \approx 0.0019.$$

También es respuesta válida $P(Z > 2.88) \approx 0.002$.

5.1.

a) Para que la recta $y = x - 1$ sea tangente a $f(x)$, tiene que existir un punto x_0 tal que $f(x_0) = x_0 - 1$ y $f'(x_0) = 1$. De la segunda condición $2x_0 + b = 1 \Rightarrow b = 1 - 2x_0$, sustituyendo en la primera condición $x_0^2 + (1 - 2x_0)x_0 = x_0 - 1 \Rightarrow x_0^2 = 1$. Por lo tanto $b = -1$ o $b = 3$.

b) Como $f'(x) = 2x + b = 1$ tiene siempre solución, $x = \frac{1-b}{2}$, para todo b , entonces la respuesta a la pregunta es afirmativa.

5.2.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) \frac{\sqrt{x^2 + 3x} + x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{3}{2}$.

b) Aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\ln(1 + 2x)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{3x}}{\frac{2}{1+2x}} = \frac{3}{2}.$$