UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

Curso **2025-2026**

MATERIA: **MATEMÁTICAS II**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a **cinco** preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):

Pregunta 1. Un virus estomacal presenta como síntomas diarreas y fiebres en un 95 % de los infectados. En un momento de presión asistencial en la Comunidad de Madrid, 40 de cada mil habitantes están infectados por dicho virus. Por otro lado, un 0.5 % de la población no infectada por el virus presenta los mismos síntomas por otras causas.

a) (1 punto) Una persona tiene los síntomas. ¿Cuál es la probabilidad de que esté infectado por el virus estomacal?

b) (1 punto) Dadas dos personas que tienen los síntomas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas tenga el virus?

Pregunta 2. La potencia instantánea en el momento t, $P(t)$, es la derivada de la energía producida hasta el momento t. Una instalación fotovoltaica doméstica en un día despejado genera una potencia en kilowatios (kW) que se modeliza por la siguiente función con respecto a la hora del día $t \in [0, 24)$:

$$P(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le t < 8 \\ 3 + 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{8}(t-12)\right) & \text{si } 8 \le t \le 20 \\ 0 & \text{si } 20 < t < 24 \end{cases}.$$

a) (1 punto) Determine cuándo esa potencia aumenta y cuándo disminuye. ¿Cuál es el momento del día en que la instalación entrega su potencia máxima?

b) (1 punto) Halle la energía producida a lo largo del día en kilowatios hora (kWh).

Pregunta 3. Sea S el conjunto formado por todas las matrices reales 2×2 triangulares superiores para las que el elemento que ocupa el lugar $(2, 2)$ de la matriz es la suma de los elementos de su primera fila, es decir,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \quad \text{con } a,\, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) (1 punto) Pruebe que si A y B son dos matrices cualesquiera del conjunto S, AB está en S.

b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**

  b1) Determine para qué valores de a y b las matrices de S son invertibles. Pruebe que si una matriz de S tiene inversa, esta es también una matriz de S.

  b2) Calcule todas las matrices A de S tales que $A^2 = A$.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :

Pregunta 4.1. Sean la recta $r \equiv (x, y, z) = (1 + t, 1 + t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$, y el plano $\pi : x + y + z = 0$.

a) (1 punto) Determine la posición relativa de la recta r y el plano π.

b) (1 punto) Halle los puntos de la recta r que se encuentran a distancia $\sqrt{3}$ del plano π.

Pregunta 4.2. Sea la recta $r \equiv (x, y, z) = (t, 1, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar dos planos que se corten en la recta r, que formen entre sí un ángulo de $90°$ y uno de ellos pase por el punto $(0, 0, 1)$.

b) (1 punto) Justificar que todas las rectas contenidas en los dos planos obtenidos en el apartado anterior que no tienen puntos en común con la recta r son necesariamente paralelas entre sí.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :

Pregunta 5.1. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{3x - a}$, donde a es un parámetro real.

a) (1 punto) Halle el valor de a para que la gráfica de $f(x)$ presente una asíntota vertical en $x = 2$. Para dicho valor, estudie el resto de asíntotas de la gráfica.

b) (1 punto) Obtenga los valores de a para los cuales la gráfica de la función no presenta asíntotas verticales.

Pregunta 5.2. (2 puntos) Para la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi|x^2 - 1|)$, calcule

$$\int_0^2 x f(x)\, dx \; .$$

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada. **Los contenidos correspondientes al bloque F se evaluarán transversalmente en cualquiera de los ejercicios. Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y se valorarán las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.**

1.
a) Identificación de datos: 0.3 puntos (0.1 puntos por cada probabilidad correcta). Identificación del suceso: 0.1 puntos. Probabilidad total: 0.3 puntos (uso de la fórmula: 0.2 puntos, respuesta correcta: 0.1 puntos). Probabilidad condicionada: 0.3 puntos (uso de la fórmula: 0.2 puntos, respuesta correcta: 0.1 puntos).
b) Identificación de la binomial: 0.1 puntos. Parámetros correctos de la binomial: 0.2 puntos. Identificación del suceso: 0.3 puntos. Cálculo de la probabilidad: 0.4 puntos (planteamiento: 0.2 puntos, respuesta correcta: 0.2 puntos). (Si el valor hallado en **a)** es erróneo, las calificaciones se otorgan en **b)** para dicho valor).

2.
a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento: 0.5 puntos. Tiempo de potencia máxima: 0.5 puntos.
b) Planteamiento de la integral: 0.2 puntos. Primitiva correcta: 0.3 puntos. Regla de Barrow: 0.3 puntos. Respuesta correcta: 0.2 puntos.

3.
a) Elección de dos matrices generales de S: 0.2 puntos. Multiplicación AB: 0.3 puntos. Probar que AB está en S: 0.5 puntos. Si toman $A = B$ y comprueban correctamente que AB está en S se otorgan como máximo 0.4 puntos.
b1) Determinación de los valores a y b: 0.2 puntos. Cálculo de la inversa: 0.5 puntos. Comprobar que la matriz inversa está en S: 0.3 puntos.
b2) Matriz nula: 0.2 puntos. Matriz identidad: 0.2 puntos. Para las otras dos matrices: 0.3 puntos cada matriz (planteamiento: 0.2 puntos, resolución: 0.1 puntos).

4.1.
a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Utilización de la fórmula de la distancia de un punto al plano: 0.2 puntos. Ecuación con valor absoluto: 0.2 puntos. Obtención de las dos ecuaciones a resolver: 0.2 puntos. Cada valor de t: 0.1 puntos. Cada punto correcto: 0.1 puntos.

4.2.
a) Justificación de que el vector director de la recta r está en ambos planos: 0.2 puntos. Determinación de los otros dos vectores directores para obtener los planos: 0.2 puntos por vector. Ecuación de los planos: 0.2 puntos por plano (planteamiento: 0.1 puntos, respuesta correcta: 0.1 puntos).
b) Justificación de que cada recta descrita de los planos es paralela a r: 0.5 puntos. Justificación de paralelismo entre las rectas: 0.5 puntos.

5.1.
a) Planteamiento para la obtención de a: 0.3 puntos. Obtención de a: 0.2 puntos. Justificación de que solo puede haber otra asíntota y esta es oblicua: 0.1 puntos. Obtención de la pendiente de la asíntota oblicua: 0.2 puntos. Obtención de la ordenada del origen: 0.2 puntos.
b) Justificación: 0.4 puntos. Obtención de algún valor de a: 0.4 puntos. Obtención del otro valor de a: 0.2 puntos.

5.2.
Integral a resolver escrita como suma de dos integrales: 0.8 puntos. Primitivas correctas: 0.8 puntos. Regla de Barrow: 0.2 puntos. Respuesta correcta: 0.2 puntos.