



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID  
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD  
PARA MAYORES DE 25 AÑOS  
AÑO 2023

MATERIA: MATEMÁTICAS II

**INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN**

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se calculará sobre las respuestas dadas a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni simbólicas.

**Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

**CALIFICACIÓN:** La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

**TIEMPO:** 90 minutos.

**OPCIÓN A**

**A.1. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Un agricultor tiene una finca con 58 árboles, distribuidos entre naranjos, limoneros y perales. Al plantarlos, la suma del número de limoneros y del doble de perales excedía en 6 unidades al número de naranjos. Sin embargo, tras una plaga en la que murieron 5 naranjos y 3 perales, el número de naranjos se ha equilibrado con el total de limoneros y perales. Calcular el número de perales que han sobrevivido a la plaga.

**A.2. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Se considera la siguiente función definida en su dominio

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0, \\ |x - 1| & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- (1 punto) Determinar el dominio de la función  $f$ , así como su continuidad y diferenciabilidad.
- (0.5 puntos) Determinar las asíntotas verticales, horizontales u oblicuas de  $f$ .
- (1 puntos) Determinar el área de la región comprendida entre el eje  $x$ , la función  $f$  y las rectas verticales  $x = -2$  y  $x = 2$ .

**A.3. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Un rayo láser transcurre a lo largo de la recta  $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-2}$ . Se quiere emitir un segundo láser desde el punto  $P(-1, 0, 0)$  para que ambos láseres converjan en el punto  $Q(0, 1, 0)$ .

- (0.75 puntos) Calcular el ángulo que se formará entre las trayectorias de los láseres.
- (1.25 punto) Calcular la distancia del punto de convergencia al plano  $\pi : x + y - z = -2$ .
- (0.5 puntos) Determinar el plano paralelo a  $\pi$  que pasa por el punto de convergencia.

**A.4. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Se tiene dos sucesos  $A$  y  $B$  que satisfacen  $P(A) = 0.1$ ,  $P(B) = 0.4$  y  $P(A|B) = 0.25$ . Se pide:

- (0.5 puntos) Calcular  $P(B|A)$ .
- (1 punto) Calcular  $P(A \cap B)$  y  $P(A \cup B)$ .
- (1 punto) Calcular  $P(\bar{A} \cup B)$ , donde  $\bar{A}$  denota el suceso complementario a  $A$ .



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID  
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD  
PARA MAYORES DE 25 AÑOS  
AÑO 2023

MATERIA: MATEMÁTICAS II

OPCIÓN B

**B.1. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Consideremos la matriz dependiendo de un parámetro real  $a$  dada por  $A = \begin{pmatrix} a & 2 & a \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Se pide:

- (1 punto) Discutir el rango de la matriz  $AA^t$  en función del valor del parámetro  $a$ , donde  $A^t$  denota la matriz transpuesta a  $A$ .
- (0.5 puntos) Para  $a = 1$ , calcular la inversa de la matriz  $AA^t$ .
- (1 punto) Para  $a = 1$ , sea  $B = A^tA$ . Determinar las soluciones del sistema de ecuaciones

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**B.2. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Una empresa láctea desea diseñar un nuevo envase con forma de paralelepípedo rectangular para empaquetar cuatro litros de leche. Para que se adapte perfectamente a los camiones de transporte, uno de los lados del envase debe medir exactamente un decímetro de longitud. Con estos datos, se pide definir la función que determina cantidad de material necesario para construir cada envase, así como las dimensiones óptimas que minimizan el gasto de material.

**B.3. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Se considera el plano  $\pi : x + z = -1$  y las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = -1 - 2\lambda, \\ z = 3 + \lambda, \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1, \\ y = \lambda, \\ z = 2\lambda. \end{cases}$$

Se pide:

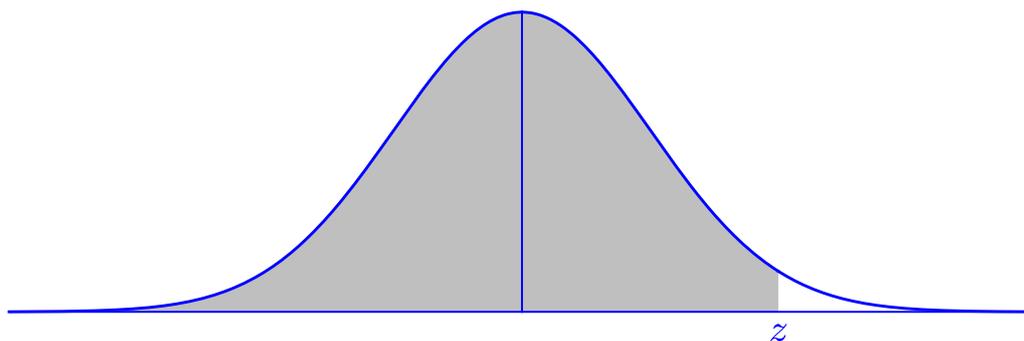
- (0.75 puntos) Determinar la posición relativa entre las rectas  $r$  y  $s$ , así como el ángulo que forman en caso de ser incidentes.
- (0.75 puntos) Calcular la intersección del plano generado por  $r$  y  $s$  con el plano  $\pi$ .
- (1 punto) Calcular la proyección ortogonal de la recta  $s$  sobre el plano  $\pi$ .

**B.4. Calificación máxima:** 2.5 puntos.

El tiempo de vida de una cierta marca de bombillas sigue una distribución normal de media 10 años y desviación típica 2 años.

- (0.5 punto) Calcular la probabilidad de que una bombilla funcione correctamente durante al menos 12 años.
- (1 punto) ¿Cuántos años deben pasar para tener una certeza superior al 90% de que se funde una bombilla?
- (1 puntos) En una aula se instalan 10 de estas bombillas. Calcular la probabilidad de que al menos 2 bombillas se hayan fundido pasados 8 años.

# DISTRIBUCIÓN NORMAL



Ejemplo: si  $Z$  tiene distribución  $N(0, 1)$ ,  $P(Z < 0,45) = 0,6736$ .

$z$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

## MATEMÁTICAS II

### CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

**Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

En cada ejercicio, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento de soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

---

#### A. 1.

Planteamiento: 1.5 puntos.

Resolución: 1 punto.

**Estándares de aprendizaje evaluados:** Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

#### A. 2.

a) Dominio: 0.25 puntos. Continuidad: 0.25 puntos. Derivabilidad: 0.5 puntos.

b) Asíntotas horizontales: 0.25 puntos. Asíntotas verticales: 0.25 puntos.

c) Resolución de la integral indefinida: 0.75 puntos. Aplicación de la regla de Barrow: 0.25 puntos. Para la aplicación de la regla de Barrow, no se penalizará si la integral indefinida es incorrecta.

**Estándares de aprendizaje evaluados:** Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones. Calcula el área de recintos limitados por rectas y curvas sencillas o por dos curvas.

#### A. 3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

b) Planteamiento: 1 punto. Resolución: 0.25 puntos.

c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluados:** Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

#### A. 4.

a) Planteamiento de la Regla de Bayes: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

b)  $P(A \cap B)$ : 0.5 puntos.  $P(B \cup A)$ : 0.5 puntos.

c) Planteamiento: 0.75. Resolución: 0.25.

**Estándares de aprendizaje evaluados:** Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral.

## MATEMÁTICAS II

### CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

**Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

En cada ejercicio, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento de soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

---

#### B. 1.

- a) Cálculo de  $AA^t$ : 0.5 puntos. Rango: 0.5 puntos.
- b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
- c) Cálculo de  $A^tA$ : 0.25 puntos. Planteamiento del sistema: 0.5 puntos. Cálculo de las soluciones: 0.25 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluados:** Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente. Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes. Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado.

#### B. 2.

- a) Planteamiento de la función de coste en dos variables: 0.75 puntos. Planteamiento de la restricción: 0.25 puntos. Planteamiento de la función de coste en una variable: 0.5 puntos. Cálculo de mínimos: 0.75 puntos. Interpretación del resultado: 0.25 puntos.
- Observación: No se penalizará si se plantea directamente la función de coste en una variable de forma correcta.

**Estándares de aprendizaje evaluados:** Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Plantea problemas de optimización relacionados con la geometría o con las ciencias experimentales y sociales, los resuelve e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto.

#### B. 3.

- a) Posición relativa: 0.25 puntos. Ángulo: 0.5 puntos.
  - b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
  - c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
- Observación: No se penalizará si solo se obtiene un punto en el apartado c).

**Estándares de aprendizaje evaluados:** Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

#### B. 4.

- a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
- b) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
- c) Cálculo de la probabilidad para una bombilla: 0.25 puntos. Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

**Estándares de aprendizaje evaluados:** Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora. Conoce las características y los parámetros de la distribución normal y valora su importancia en el mundo científico. Calcula probabilidades de sucesos asociados a fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución normal a partir de la tabla de la distribución o mediante calculadora.