UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2023-2024**
MATERIA: **MATEMÁTICAS II**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente **cuatro** preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes de un parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + az = -a \\ x + 2y + 3z = -2 \\ ax + ay + 2z = -8 \end{array}\right\}.$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función del parámetro a.

b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para $a = -10$.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{si } x < 1 \\ e + \dfrac{x \ln x}{x^2+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

y se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en $x = 1$.

b) (0.75 puntos) Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c) (0.75 puntos) Calcular $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Los vértices de un triángulo son $A(-1, 0, 1)$, $B(0, 1, 0)$ y un punto C situado sobre la recta

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 0 \\ x & + & z & = & -1 \end{array} \right. .$$

a) (1.5 puntos) Calcule las posibles coordenadas de C sabiendo que el área del triángulo es $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) (1 punto) Determine una ecuación de la recta que pasa por $P(2, 1, -1)$ y es paralela a la recta dada r.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En un espacio muestral se consideran tres sucesos A, B y C, tales que $P(A \cup B \cup C) = 1$. Sabiendo que los sucesos B y C son independientes y que $P(A) = 0.5$, $P(\overline{C}) = 0.3$, $P(B \cup C) = 0.73$, $P(A \cap C) = 0.21$ y $P(A \cap B \cap C) = 0.06$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar si los sucesos A y $B \cup C$ son independientes.

b) (1.5 puntos) Calcular $P(B)$ y $P(C \cap (A \cup B))$.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Halle un número natural de tres cifras del que se conoce que: sus cifras suman 13; si al número dado se le resta el doble del número que resulta de intercambiar las cifras de las centenas y de las unidades, el resultado es 437; además, la cifra de las decenas excede en una unidad a la media aritmética de las otras dos cifras.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) (0.5 puntos) Escriba un ejemplo de una función polinómica de grado 3 cuya gráfica corte al eje de las abscisas en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$. Escriba también un ejemplo de una función polinómica de grado 3 cuya gráfica corte al eje de las abscisas solo en los puntos $x = 1$ y $x = 0$.

b) (1 punto) Escriba un ejemplo de una función polinómica de grado 3 que tenga un máximo relativo en el punto $(0, 0)$ y un mínimo relativo en el punto $(1, -1)$.

c) (1 punto) Justifique si la gráfica de una función polinómica de grado 3 puede no cortar al eje de las abscisas.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = 2 \end{array} \right.$.

a) (0.5 puntos) Calcule el ángulo que forma la recta r con el vector normal al plano $z = 0$.

b) (1.25 puntos) Sean π_1 y π_2 dos planos que se cortan en la recta r. Calcule unas ecuaciones de ambos planos sabiendo que π_1 pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ y que π_2 no corta al eje OZ.

c) (0.75 puntos) Estudie la posición relativa de la recta r y la recta s de ecuación $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-1}{3}$.

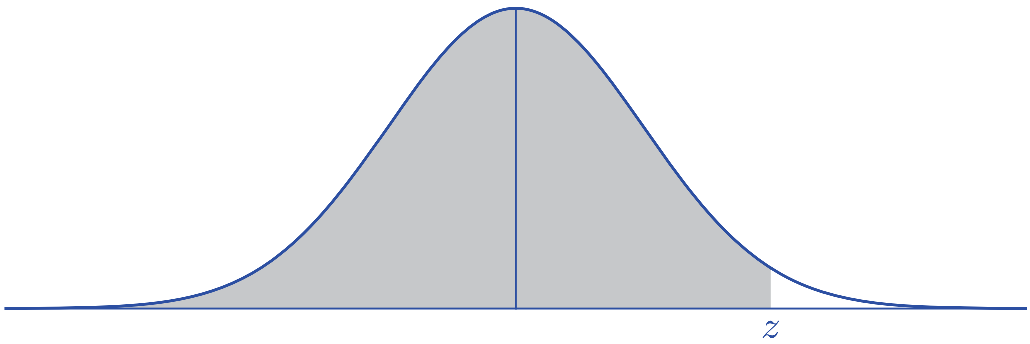
B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Entre los procesadores que utiliza cierta marca de ordenadores portátiles para un modelo, un $30\,\%$ son de una nueva tecnología que promete una mayor efectividad. Se utilizan todos los procesadores, se empaquetan los ordenadores fabricados en palés de 10 portátiles y se envían 20 palés a cada una de sus tiendas. Se pide:

a) (1.5 puntos) Determinar la distribución, la media y la desviación típica de la variable "*número de portátiles con los procesadores de la nueva tecnología en un palé*". Calcular la probabilidad de que en un palé haya exactamente dos portátiles con la nueva tecnología.

b) (1 punto) Calcular, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos el $75\,\%$ de los portátiles recibidos en una tienda no lleven los procesadores de la nueva tecnología.

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $\mathrm{N}(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.
Los contenidos correspondientes al bloque F se evaluarán transversalmente en cualquiera de los ejercicios. Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y se valorarán las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A.1.

a) Obtención de los valores críticos: 0.5 puntos (0.25 puntos cada uno). Discusión del sistema: 1.5 puntos (0.5 puntos cada uno de los tres casos).
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

A.2.

a) Estudio de la continuidad: 0.25 puntos. Estudio de la derivabilidad: 0.75 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Primitiva: 0.5 puntos. Regla de Barrow: 0.25 puntos.

A.3.

a) Planteamiento: 1 punto. Cálculo correcto de los posibles puntos solución: 0.25 puntos cada uno.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

A.4.

a) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Por cada una de las dos probabilidades: 0.75 puntos (planteamiento: 0.5 puntos; resolución: 0.25 puntos).

B.1.

Planteamiento del sistema: 1.5 puntos (0.5 puntos por cada ecuación correctamente planteada). Resolución correcta del sistema planteado: 1 punto. En caso de resolución correcta de un sistema con alguna ecuación mal planteada, se valorará con hasta 0.5 puntos.

B.2.

a) Por cada función polinómica: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

B.3.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Obtención del ángulo: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.75 puntos. Obtención de la ecuación: 0.5 puntos (0.25 puntos por plano).
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

B.4.

a) Distribución correcta: 0.5 puntos. Media correcta: 0.25 puntos. Desviación típica correcta: 0.25 puntos. Cálculo de la probabilidad pedida: 0.25 puntos por el planteamiento; 0.25 puntos por la resolución.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos. El cálculo sin corrección por continuidad, o una incorrecta, se penalizará con 0.25 puntos.

MATEMÁTICAS II – SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

A.1.

a) Tenemos que el determinante de la matriz de coeficientes es $-a^2 - 9a + 10$, que tiene por raíces a $a = 1$ y $a = -10$.
Si $a \neq 1, -10$, el sistema es compatible determinado.
Si $a = 1$ el rango de la matriz de coeficientes es 2, pero la matriz ampliada tiene rango 3. Es un sistema incompatible.
Si $a = -10$, el rango de la matriz es 2, igual al rango de la matriz ampliada. Es un sistema compatible indeterminado con 1 grado de libertad.
b) En el caso $a = -10$, la solución es $x = (18 + 17\lambda)/5, y = (-14 - 16\lambda)/5, z = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

A.2.

a) Se tiene que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} xe^x = e$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(e + \dfrac{x\ln x}{x^2+1}\right) = e = f(1)$, de manera que la función f es continua en $x = 1$.
En cuanto a la derivabilidad,

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{xe^x - e}{x-1} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \lim_{x\to 1}(e^x + xe^x) = 2e$$
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{x\ln x}{x^2+1}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2+1}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} \frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1} = \frac{1}{2},$$

por lo que la función f no es derivable en $x = 1$.
b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(e + \dfrac{x\ln x}{x^2+1}\right) \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} e + \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x + 1}{2x} \overset{\text{(L'Hôpital)}}{=} e + \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{2} = e.$
c) Aplicando integración por partes y la Regla de Barrow se obtiene:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xe^x\,dx = \Big[xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = (e - 0) - \Big[e^x\Big]_0^1 = e - (e-1) = 1.$$

A.3.

a) $\vec{v_r} = (1, 2, -1)$, $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$. Punto genérico de la recta $C = (\lambda, 2\lambda, -1-\lambda)$, $\overrightarrow{AC} = (\lambda + 1, 2\lambda, -2-\lambda)$, $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (\lambda - 2, 1, \lambda - 1)$. Área del triángulo: $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|$. Entonces: $\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2}$. Resolviendo, si $\lambda = 1$, $C_1 = (2, 4, -3)$; si $\lambda = 2$, $C_2 = (1, 2, -2)$.
b) La recta pedida, s, sería intersección de dos planos, π_1, π_2, paralelos a los dados en la ecuación de la recta r y que pasen por el punto dado. El plano π_1 pasa por $P(2, 1, -1)$ y es paralelo al plano $2x - y = 0$: $\pi_1 \equiv 2x - y - 3 = 0$; el plano π_2 pasa por $P(2, 1, -1)$ y es paralelo al plano $x + z = -1$: $\pi_2 \equiv x + z - 1 = 0$. Entonces, la recta solución es $s \equiv \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$.

A.4.

a) Se tiene que $1 = P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B\cup C) - P(A\cap(B\cup C)) = 1.23 - P(A\cap(B\cup C)) \implies P(A\cap(B\cup C)) = 0.23 \neq 0.365 = 0.5\cdot 0.73 = P(A)\cdot P(B\cup C)$. Por lo tanto, A y $B\cup C$ no son independientes.
b) Puesto que $0.73 = P(B\cup C) = P(C) + P(B) - P(B\cap C) = 0.7 + P(B) - 0.7\cdot P(B)$, obtenemos que $P(B) = \frac{0.73-0.7}{0.3} = 0.1$. En cuanto a la otra probabilidad pedida,

$$P(C\cap(A\cup B)) = P((A\cap C)\cup(B\cap C)) = P(A\cap C) + P(B\cap C) - P(A\cap B\cap C) = 0.21 + 0.1\cdot 0.7 - 0.06 = 0.22.$$

B.1.

Si x es la cifra de las centenas, y la cifra de las decenas y z la cifra de las unidades, hay que resolver el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 13 \\ (100x+10y+z)-2(100z+10y+x) & = & 437 \\ y-1 & = & \dfrac{x+z}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 13 \\ 98x-10y-199z & = & 437 \\ x-2y+z & = & -2 \end{array}\right. .$$

La solución del sistema es $x=7$, $y=5$ y $z=1$. Por lo tanto, el número buscado es el 751.

B.2.

a) Función polinómica de grado 3 que corta al eje de las abscisas en los 3 puntos: $p(x)=x(x-1)(x-2)=x^3-3x^2+2x$. Función polinómica de grado 3 que corta al eje de las abscisas en los 2 puntos: $p(x)=x(x-1)^2=x^3-2x^2+x$ o $p(x)=x^2(x-1)=x^3-x^2$.
b) Sea $p(x)$ la función polinómica buscada, entonces $p'(0)=p'(1)=0 \Rightarrow p'(x)=ax(x-1)$. Integrando tenemos que $p(x)=a(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2})+C$. Entonces, como $p(0)=0$ y $p(1)=-1$, tenemos que $p(x)=2x^3-3x^2$.
c) Siempre tiene que cortar: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x)=\pm\infty$ o $\mp\infty$. Esto implica que existen dos números suficientemente grandes A y B, tales que $f(A)f(B)<0$ y, como cualquier función polinómica es continua, por el teorema de Bolzano existe un valor $c\in(A,B)$ tal que $f(c)=0$.

B.3.

a) El vector director de la recta vendrá dado por $\mathbf{v}=(1,2,1)\times(1,1,2)=(3,-1,-1)$ y el vector normal al plano $z=0$ es $(0,0,1)$. Así, el ángulo pedido es $\alpha=\arccos\left(\dfrac{|(3,-1,-1)\cdot(0,0,1)|}{\|(3,-1,-1)\|\|(0,0,1)\|}\right)=\arccos\left|\dfrac{1}{\sqrt{11}}\right|\approx 72.5^o$.
b) Los puntos $A(2,0,0)$ y $B(-1,1,1)$ pertenecen a r. Así pues, una ecuación de π_1 es $(x,y,z)=A+\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AP}=(2-3\alpha-\beta,\alpha+2\beta,\alpha+3\beta)$. Dado que no corta al eje OZ, el vector $(0,0,1)$ es director de π_2. Así pues, una ecuación de π_2 es $(x,y,z)=A+\alpha\overrightarrow{AB}+\beta(0,0,1)=(2-3\alpha,\alpha,\alpha+\beta)$.
c) Un vector director de s es $(1,-2,3)$. No son coincidentes ni paralelas. Veamos si se cortan: $s\equiv(x,y,x)=(-2+\alpha,1-2\alpha,1+3\alpha)$. Sustituyendo en las ecuaciones de r, no hay solución, luego se cruzan.

B.4.

a) La variable aleatoria $X=$ "*número de portátiles con los procesadores de la nueva tecnología en un palé*" sigue una distribución Binomial$(n=10,p=0.3)$. Su media es $n\cdot p=3$, su desviación típica, $\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}=\sqrt{2.1}\approx 1.45$ y

$$P(X=2)=45\cdot 0.3^2\cdot 0.7^8=0.2334744405\approx 0.2335.$$

b) La variable aleatoria $Y=$ "*número de portátiles recibidos en una tienda sin los procesadores de la nueva tecnología*" sigue una distribución Binomial$(n=200,p=0.7)$, de media 140, desviación típica $\sqrt{42}\approx 6.48$ y el $75\,\%$ de 200 es 150. Aproximamos $P(Y\geq 150)$ con $P(T\geq 149.5)$ donde T es una distribución normal $N(140,6.48)$. Tipificando, $Z=\frac{T-140}{6.48}\sim N(0,1)$, obtenemos

$$P(T\geq 149.5)=P\left(Z\geq \tfrac{149.5-140}{6.48}\right)\approx P(Z\geq 1.47)=1-0.9292=0.0708.$$