

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
Curso 2026-2027
MATERIA: MATEMÁTICAS II

Modelo
orientativo

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a **cinco** preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación máxima por pregunta: 2 puntos):

Pregunta 1. Dos rectas r y s en un mismo plano π se cortan perpendicularmente en un punto C . La recta r está determinada por los puntos $P(1, 0, 2)$ y $Q(0, 2, 4)$ y la recta s está determinada por $A(0, 4, 2)$ y el punto C .

- a) (1 punto) Halle las ecuaciones del plano π y las coordenadas de C .
- b) (1 punto) Halle un punto R de la recta s tal que la distancia de R a Q sea igual a la distancia de P a Q .

Pregunta 2. Sea la función:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

- a) (1 punto) Halle las asíntotas horizontales de $f(x)$.

- b) (1 punto) Halle $\int_0^{\ln(3)} (f(x) + 1) dx$.

Pregunta 3. Para llegar a tiempo a primera hora al instituto, Ana debe coger a las ocho de la mañana una de las tres líneas, $L1$, $L2$ o $L3$, que parten de la estación de autobuses y tienen parada cerca del instituto. Las probabilidades de poder coger los autobuses a las ocho de la mañana en esta estación son de $\frac{2}{3}$ para $L1$, $\frac{4}{5}$ para $L2$ y $\frac{3}{5}$ para $L3$. Estos tres sucesos son independientes. Si Ana está a las 8 de la mañana en la estación de autobuses, se pide:

- a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que Ana llegue a tiempo a primera hora a su instituto.
- b) (1 punto) **Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:**
 - b1) Calcular la probabilidad de que no pueda coger la línea $L2$ sabiendo que solo puede coger una de las otras dos líneas.
 - b2) Calcular la probabilidad de que pueda coger exactamente dos de las tres líneas.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :

Pregunta 4.1. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (a+2)x + y + z = a \\ x - ay + 3z = 0 \\ 3x + ay + z = 1 \end{cases},$$

se pide:

- a) (1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro a .
- b) (1 punto) Resolver el sistema para $a = 1$.

Pregunta 4.2. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix},$$

donde a es un número real.

- a) (1 punto) Determine para qué valores de a la matriz A^{2026} es invertible.
- b) (1 punto) Para $a = 0$, pruebe que $A^3 = 2A$ y calcule la matriz A^9 .

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación máxima: 2 puntos) :

Pregunta 5.1. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \in [0, 2] \\ ax^2 + bx & \text{si } x \in (2, 5) \\ -(x-5)^2 + 15 & \text{si } x \in [5, 7] \end{cases}.$$

- a) (1 punto) Halle los valores de a y b para los que la función $f(x)$ es continua en $[0, 7]$.
- b) (1 punto) La longitud de la gráfica de una función $f(x)$ en un intervalo $[x_0, x_1]$ se calcula con la integral $L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$. Utilice la fórmula dada para calcular la longitud de la gráfica de $f(x)$ en el intervalo $[0, 2]$.

Pregunta 5.2. Sea $f(x) = \frac{-2x + 1}{x - 1}$.

- a) (1 punto) Halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.
- b) (1 punto) Halle, si existen, los puntos de la gráfica de $f(x)$ cuya recta tangente tenga pendiente 1.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada. **Los contenidos correspondientes al bloque F se evaluarán transversalmente en cualquiera de los ejercicios. Se penalizará en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y se valorarán las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.**

1.

a) Ecuación del plano: 0.5 puntos (planteamiento: 0.3 puntos, resolución: 0.2 puntos). Coordenadas del punto C : 0.5 puntos (planteamiento: 0.3 puntos, resolución: 0.2 puntos).

b) Cálculo de la distancia de P a Q : 0.2 puntos. Planteamiento: 0.4 puntos. Resolución: 0.4 puntos. Se otorga la puntuación máxima dando un solo punto correcto.

2.

a) Cada límite: 0.5 puntos (planteamiento: 0.2 puntos, resolución: 0.3 puntos).

b) Integral a calcular: 0.1 puntos. Primitiva: 0.5 puntos. Regla de Barrow: 0.3 puntos. Respuesta correcta: 0.1 puntos.

3.

a) Identificación del suceso: 0.3 puntos. Planteamiento del cálculo de la probabilidad: 0.3 puntos. Resolución: 0.4 puntos.

b1) Identificación del suceso: 0.3 puntos. Planteamiento del cálculo de la probabilidad: 0.3 puntos. Resolución: 0.4 puntos.

b2) Identificación del suceso: 0.3 puntos. Planteamiento del cálculo de la probabilidad: 0.3 puntos. Resolución: 0.4 puntos.

4.1.

a) Cálculo de los valores de a para la discusión: 0.2 puntos. Discusión del caso compatible determinado: 0.2 puntos. Por cada uno de los otros dos casos correctamente discutido: 0.3 puntos.

b) Sistema de ecuaciones a resolver correcto: 0.2 puntos. Aplicación de un método de resolución de sistemas: 0.4 puntos. Respuesta correcta: 0.4 puntos.

4.2.

a) Cálculo del determinante de A : 0.3 puntos. Determinación de los tres valores de a : 0.1 puntos por valor. Argumentación de que la potencia es invertible: 0.4 puntos.

b) Comprobación de la igualdad: 0.4 puntos. Intento de utilizar la igualdad para calcular A^9 : 0.3 puntos. Cálculo correcto de A^9 : 0.3 puntos.

5.1.

a) Obtención del sistema: 0.6 puntos. Resolución: 0.4 puntos.

b) Obtención correcta de la integral a resolver: 0.5 puntos. Primitiva: 0.2 puntos. Regla de Barrow: 0.2 puntos. Respuesta correcta: 0.1 puntos.

5.2.

a) Cálculo de la derivada: 0.4 puntos. Identificación del signo siempre positivo: 0.2 puntos. Por cada intervalo de crecimiento correcto: 0.2 puntos.

b) Ecuación bien planteada: 0.4 puntos. Valores correctos de x : 0.2 puntos por cada uno. Determinación correcta de los puntos de la gráfica: 0.1 puntos por cada uno.

MATEMÁTICAS II-SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

1.

a) Se trata del plano que contiene a P, Q y A . Tiene vectores $\vec{u} = (-1, 2, 2)$, $\vec{v} = (1, -4, 0)$. Una ecuación del plano es $4x + y + z = 6$.

El vector director de la recta s es perpendicular al vector normal del plano $\vec{n} = (4, 1, 1)$ y al de la recta r , $\vec{u} = (-1, 2, 2)$, por tanto es $\vec{n} \times \vec{u} = (0, -9, 9)$. Se toma como vector de la recta a $(0, 1, -1)$. El punto C es la intersección de la recta $P + t\vec{u} = (1, 0, 2) + t(-1, 2, 2)$ con $A + s(0, 1, -1) = (0, 4, 2) + s(0, 1, -1)$. Resolviendo sale $t = 1$, y el punto $(0, 2, 4)$, que es el punto $C = Q$.

b) La distancia de P a Q es $\|\vec{PQ}\| = 3$. El vector unitario de la recta s es $\frac{\vec{CA}}{\|\vec{CA}\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, -1)$. Hay dos puntos que cumplen la condición pedida: $Q \pm 3\frac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, -1) = \left(0, 2 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}, 4 \mp \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

2.

a) Para hallar las asíntotas horizontales, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -1$. Asíntotas $y = 1$ e $y = -1$.

b)
$$\int_0^{\ln(3)} (f(x) + 1) dx = \int_0^{\ln(3)} \frac{2e^x}{e^x + 1} dx = [2 \ln(e^x + 1)]_0^{\ln(3)} = 2 \ln(2).$$

3.

Sean los sucesos $A_i \equiv$ "Poder coger el autobús Li a las 8:00 horas", con $i \in \{1, 2, 3\}$. Son sucesos independientes.

a) La probabilidad de llegar a tiempo al instituto es igual a la probabilidad de no perder los tres autobuses. La probabilidad de perder los tres autobuses es $P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{75}$. Por lo tanto la probabilidad pedida es:

$$P(\overline{\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}}) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} = 1 - \frac{2}{75} = \frac{73}{75}.$$

b1)
$$P(\overline{A_2} | ((A_1 \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap A_3))) = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{\frac{7}{75}}{\frac{7}{75}} = \frac{1}{5} = 0.2.$$

b2)
$$P(\text{Poder coger 2 líneas de autobuses}) = P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{75} + \frac{6}{75} + \frac{16}{75} = \frac{34}{75}.$$

4.1.

a) El determinante de la matriz de coeficientes es igual a $-4a^2 - 4a + 8$ que tiene dos raíces reales distintas: $a = 1$ y $a = -2$. Por lo tanto, el sistema es compatible determinado si $a \neq 1, -2$. Para $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado y es incompatible para $a = -2$.

b) La solución es $(x, y, z) = \left(-\lambda + \frac{1}{4}, 2\lambda + \frac{1}{4}, \lambda\right)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

4.2.

a) $\det A = a^3 - 2a = a(a^2 - 2)$. Luego A es invertible para $a \neq 0, \pm\sqrt{2}$. Para los mismos valores la matriz A^{2026} es invertible porque $\det(A^{2026}) = (\det A)^{2026}$.

b) Para $a = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

luego $A^3 = 2A$.

$$\text{Por tanto, } A^9 = (A^3)^3 = (2A)^3 = 8A^3 = 16A = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 0 \\ 16 & 0 & 16 \\ 0 & 16 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.1.

a) La función $f(x)$ es continua en todo su dominio de definición excepto quizás en $x = 2$ y $x = 5$. Será continua en esos valores si $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = f(5) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$. Esto da lugar al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4a + 2b = 6 \\ 25a + 5b = 15 \end{cases}$$

que es compatible determinado con solución $a = 0$ y $b = 3$.

b) La derivada de $f(x)$ en el intervalo $(0, 2)$ es $f'(x) = 2$. Se plantea la integral de la longitud:

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^2 \sqrt{1 + 2^2} dx = \int_0^2 \sqrt{5} dx = \left[\sqrt{5} x \right]_0^2 = 2\sqrt{5}.$$

5.2.

a) Se calcula la primera derivada para determinar los intervalos de crecimiento:

$$f'(x) = \frac{-2(x-1) - (-2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Como la derivada no se anula y tiene signo positivo, la función $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$ y en $(1, \infty)$.

b) Para que la recta tangente tenga pendiente 1, se tiene que cumplir que $f'(x) = 1$, es decir,

$$\frac{1}{(x-1)^2} = 1 \Leftrightarrow 1 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0.$$

Las soluciones de la ecuación son $x = 0$ y $x = 2$. La gráfica de la función tiene rectas tangentes con pendiente 1 en los puntos $(0, -1)$ y $(2, -3)$.