Introducción

Este manual estudia principalmente las **ecuaciones en derivadas parciales** (EDPs), aunque también trata las soluciones por medio de series y los problemas de contorno de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). Una EDP es una ecuación en la que aparecen derivadas parciales de una función incógnita de varias variables. Todas las EDPs que trataremos serán **lineales**. Más en concreto, salvo un breve estudio de las lineales de primer orden, de menor interés físico pero que nos servirán para entender las siguientes, veremos EDPs **lineales de segundo orden** (con derivadas de orden 2 o menor), del tipo:

$$[\mathrm{E}] \quad L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} D_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + Hu = F$$

con u, A_{ij}, D_j, H y F funciones de $(x_1, \dots, x_n)$. Casi siempre trataremos el caso $n=2$ para entender mejor los problemas. En más dimensiones en esencia lo que se complican son los cálculos. Una **solución** de [E] será una función $u(x_1, \dots, x_n)$ de clase C^2 en una región D de $\mathbf{R}^n$ que sustituida en la ecuación la convierte en una identidad.

Entre las EDPs lineales de segundo orden se encuentran muchas ecuaciones de la física. Entre ellas las tres EDPs clásicas:

ecuación de ondas $\quad u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$
ecuación del calor $\quad u_t - k\Delta u = 0$
y **ecuación de Laplace** $\quad \Delta u = 0$,

ejemplos respectivos de los tres tipos en que se clasifican: **hiperbólicas**, **parabólicas** y **elípticas**. Las teorías avanzadas de las EDPs vienen a ser la generalización del estudio de estas tres ecuaciones. Sus propiedades son tan diferentes que no existe una teoría general como para las EDOs lineales.

En el **capítulo 1** se describirán las pocas veces que se puede hallar la solución de una EDP mediante integración (por eso, en el capítulo 4 utilizaremos series para resolverla). Veremos cómo calcular la solución general de algunas EDPs de **primer orden** en dos variables (y aparecerá una función arbitraria de las **características**, soluciones de una EDO ligada a la EDP) y de pocas de **segundo** (con dos funciones arbitrarias). Precisaremos qué condiciones adicionales (iniciales o de contorno) se imponen a las EDPs para que tengan **solución única**. De las clásicas, solo para la de **ondas** se podrá deducir su solución general y tendremos una fórmula (de **D'Alembert**) para la solución con el par de datos iniciales. Conseguiremos también con la **transformada de Fourier** resolver algunas EDPs de las anteriores en recintos no acotados y alguna otra nueva (como la del **calor** para la varilla infinita).

El **capítulo 2** describe cómo resolver EDOs lineales de segundo orden mediante **series de potencias** (único método posible en la mayoría de las ocasiones), en torno a los llamados puntos **regulares** y a los **singulares regulares**, incluido el llamado punto del infinito. Se aplica el método a tres ecuaciones particulares (Legendre, Hermite y Bessel) que aparecen al resolver EDPs de la física.

El **capítulo 4** resuelve con el método de **separación de variables** las tres EDPs clásicas (homogéneas y no homogéneas, en diferentes coordenadas y en 2 o más variables) en recintos sencillos (y acotados, al menos, en una variable). Se supone que la solución es producto de funciones de cada variable y esto nos lleva a resolver EDOs para cada una, alguna de ellas con condiciones de contorno. Las soluciones quedan expresadas en términos de **series de Fourier** (habitualmente series de senos o cosenos).

https://dx.doi.org/10.5209/docm.005.01

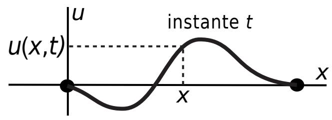
La teoría (muy diferente de la de los de valores iniciales) de los **problemas de contorno para EDOs** (homogéneos y no homogéneos) y un estudio de dichas series se dará previamente en el **capítulo 3**. Y al final del 4 hablaremos brevemente de las **funciones de Green** para problemas de contorno de EDOs y para **Laplace**.

La parte teórica de los apuntes se acaba con un **apéndice** que repasa diferentes conocimientos matemáticos utilizados en las páginas anteriores: de EDOs de primer y segundo orden (estudiadas en el curso de Métodos I del cuatrimestre anterior) y de cálculo en varias variables y de la convergencia uniforme (en asignaturas de primero).

Un cuatrimestre habitual con unas 55 horas de clase se puede distribuir de esta forma aproximada (media de los últimos cursos): 14 horas para el tema 1, 7.5 para el 2, 8 para el 3, 20.5 para el 4, 2 de repaso y 3 para realizar un par de controles.

Para acabar esta introducción, describamos el significado físico de las tres ecuaciones clásicas. Las interpretamos únicamente en sus versiones más sencillas (que son las más tratadas en los apuntes): cuando la u es función de dos variables.

La ecuación de **ondas** unidimensional o ecuación de la **cuerda vibrante** describe las oscilaciones de una cuerda elástica, tensa y fija en sus extremos. Suponemos que sus oscilaciones son transversales y de pequeña amplitud. Si la $u(x,t)$ representa la altura del punto de abscisa x en el instante función t, esa $u(x,t)$ satisface la EDP:



$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t) \ ,$$

donde $c^2 = T_o/\rho$, T_o fuerza de tensión en los extremos, ρ masa por unidad de longitud (densidad lineal) y $F(x,t)$ fuerza vertical externa por unidad de masa que actúa sobre el punto x en el instante t. Para determinar la evolución de una cuerda concreta, se deberá fijar la posición de la cuerda y la distribución de velocidades verticales en el instante inicial, es decir, $u(x,0)$ y $u_t(x,0)$. También se deberá de tener en cuenta que permanece fija en los extremos $x=0$ y $x=L$, o sea, que debe cumplir las condiciones de contorno $u(0,t)=u(L,t)=0$. No olvidemos que el modelo matemático de esta cuerda ideal es una simplificación de la realidad; lo mismo ocurre con las siguientes.

La distribución de temperaturas a lo largo del tiempo en una varilla delgada (que se puede suponer unidimensional) viene regida por la **ecuación del calor**:

$$u_t - k u_{xx} = 0 \ ,$$

donde $u(x,t)$ es la temperatura del punto x en el instante t y $k>0$ es una constante que mide la capacidad de conducir el calor de la varilla. Si hay fuentes de calor en el interior de la varilla se debe poner una $F(x,t)$ en el segundo miembro de la EDP. Aquí basta para determinar la solución, a diferencia de las ondas, dar solo la distribución inicial de temperaturas $u(x,0)$ junto con los datos de contorno, que pueden ser de diferentes tipos: temperatura dada en el extremo, extremo aislado, radiación libre al medio...

Entre otras situaciones físicas, puede decribir la **ecuación de Laplace**

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

la distribución estacionaria de temperaturas en una placa bidimensional. La existencia de fuentes de calor en el interior de la superficie aportaría una F en el segundo miembro (ecuación de Poisson). Frente a las dos EDPs anteriores que describían la evolución de un sistema a lo largo del tiempo, esta describe situaciones estacionarias y los problemas que se plantean para ella son siempre con condiciones de contorno.