

TRABAJO DE FIN DE GRADO

El Teorema de Morley

POR

DANIEL IBAIBARRIAGA PARRA

Dirigido por:

Elías Baro González



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID,
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS,
GRADO EN MATEMÁTICAS

Julio, 2023

Resumen

En lógica de primer orden, una teoría se dice κ -categórica si tiene un único modelo de cardinalidad κ , salvo isomorfismo. El Teorema de Morley establece que si una teoría es κ -categórica para algún cardinal κ no numerable, entonces también lo será para cualquier otro cardinal no numerable. En este trabajo, se presenta una demostración de este teorema probando que una teoría es κ -categórica en un cardinal no numerable si, y solo si, es ω -estable y no posee pares de Vaught. Durante el proceso se analizarán conceptos clave de la Teoría de Modelos, como los modelos primos, las sucesiones indiscernibles y la minimalidad fuerte.

Palabras clave: κ -categórico, modelo primo, modelo atómico, modelo homogéneo, ω -estable, par de Vaught, (κ, λ) -modelo, sucesión indiscernible, fuertemente minimal.

Abstract

In first-order logic, a theory is said to be κ -categorical if it has exactly one model of cardinality κ up to isomorphism. Morley's Theorem states that if a theory is κ -categorical for some uncountable cardinal κ , then it is κ -categorical for every uncountable cardinal. We provide a proof of this fact by demonstrating that a theory is categorical in an uncountable power if and only if it is ω -stable and lacks Vaughtian pairs. Throughout the process, fundamental concepts of Model Theory will be analyzed, such as prime models, indiscernible sequences, and strong minimality.

Key words: κ -categorical, prime model, atomic model, homogeneous model, ω -stable, Vaughtian pair, (κ, λ) -model, indiscernible sequence, strongly minimal.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Contexto histórico	1
1.2. Nota sobre la demostración	2
1.3. Nociones previas de lógica	2
2. Tipos	7
2.1. Introducción al uso de tipos	7
2.2. La topología de los tipos	9
2.3. Modelos primos	14
2.4. Teorías ω -estables y extensión de modelos primos	17
3. Condiciones necesarias para la κ-categoricidad	21
3.1. Teorema de los dos cardinales de Vaught	21
3.2. Órdenes de indiscernibles	30
4. El Teorema de Morley	35
4.1. Conjuntos fuertemente minimales	35
4.2. El Teorema de Baldwin y Lachlan	41
Bibliografía	45

Capítulo 1

Introducción

1.1. Contexto histórico

En 1904, el matemático Oswald Veblen introduce en su trabajo “A system of axioms for geometry” [12] la idea de *categoricidad* referido a un sistema de axiomas. Su enfoque, lejos de la metodología y el lenguaje de la Teoría de Modelos actual, definía un sistema como categórico si solo existía un objeto matemático que satisficiera los axiomas. Más concretamente, Veblen planteaba en su artículo una axiomática de la geometría euclídea expresada a partir de las nociones *a priori* de “punto” y de “orden” entre los puntos. En consecuencia, un sistema de axiomas era categórico si para cualesquiera dos objetos que lo cumplieren, existía una biyección entre los puntos que respetase el orden.

Aunque prometedora, esta noción quedó desfasada cuando, en los años treinta, Löweheim y Skolem demostraron que toda teoría de primer orden con al menos un modelo infinito tenía modelos de tamaño arbitrariamente grande [2]. Por tanto, la noción de categoricidad había de depender del cardinal del modelo que se tomara. Como consecuencia, en 1954 Vaught [11] y Łoś [14], de manera paralela, definen el concepto de κ -categoricidad para referirse a aquellas teorías que tienen un único modelo de cardinal infinito κ salvo isomorfismo¹.

Por esta época ya se conocían ciertas teorías categóricas para algunos cardinales. Por ejemplo, se sabía que la teoría de los órdenes lineales densos sin extremos era \aleph_0 -categórica pero no categórica para ningún cardinal no numerable [14]. Por otra parte, Hammel en 1905 [3] ya había demostrado que, suponiendo el axioma de elección, todo espacio vectorial tenía una base. Con lo cual, empleando que toda biyección entre bases se puede extender a un isomorfismo, se había probado que la teoría de los espacios vectoriales sobre cuerpos numerables era κ -categórica en todo cardinal infinito κ . Por último, Steinitz había demostrado en 1910 [9] que dos cuerpos algebraicamente cerrados no numerables de la misma característica y del mismo grado de trascendencia eran isomorfos. En particular, esto probaba que la teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados de característica 0 era κ -categórica para cualquier cardinal $\kappa > \aleph_0$. Estas observaciones, así como la ausencia de teorías que cayesen fuera de estas categorías, llevaron a Łoś a plantear la siguiente conjetura:

Conjetura 1.1.1. (Conjetura de Łoś) Existen tres tipos de teorías κ -categóricas con $\kappa \geq \aleph_0$:

1. Las teorías κ -categóricas para todo cardinal infinito κ .
2. Las teorías κ -categóricas en todo cardinal no numerable κ .
3. Las teorías que solo son \aleph_0 -categóricas.

¹Todas las nociones se definirán de manera más rigurosa en el cuerpo del trabajo.

Durante los siguientes años, las publicaciones de Teoría de Modelos sobre este tema se incrementaron sustancialmente e importantes matemáticos en el área como Mostowski, Vaught o Ryll-Nardzewski fueron obteniendo pequeños avances sobre la conjetura. Todo este trabajo culminó en 1965 cuando Morley [6] demostró el siguiente teorema:

Teorema 1.1.2. (Teorema de Morley) Si T es una teoría κ -categórica para algún cardinal no numerable κ , entonces T es λ -categórica para todos los cardinales no numerables λ .

La habilidad de Morley consistió en generalizar conceptos topológicos al estudio de la lógica. En particular, Morley consigue probar su teorema basándose fundamentalmente en los espacios derivados y el Teorema de Cantor-Bendixon. Para ello no solo introduce nueva terminología, como teoría totalmente trascendente o modelo saturado, sino que define una noción de *dimensión* asociada a cada fórmula. En su honor, esta herramienta se conocerá como *Rango de Morley*.

Años más tarde, Baldwin y Lachlan [1], en su estudio de una conjetura de Vaught sobre teorías \aleph_1 -categóricas, dan una demostración alternativa a la ofrecida por Morley en su trabajo. Más específicamente, encuentran condiciones necesarias y suficientes para que una teoría sea categórica en un cardinal no numerable. Para ello, toman una noción de dimensión, más cercana a la geometría, basada en las fórmulas fuertemente minimales.

1.2. Nota sobre la demostración

La demostración realizada en este trabajo del Teorema de Morley no será la original tal y como se desarrolla en [6]. En su lugar, se empleará una demostración más cercana a la propuesta por Baldwin y Lachlan [1], siguiendo una versión moderna de la misma expuesta por David Marker en [5]. La ventaja de adoptar este enfoque es que permite hacer un estudio de conceptos muy relevantes de la Teoría de Modelos, entre los que destacan los modelos primos, el espacio de tipos o las teorías fuertemente minimales.

1.3. Nociones previas de lógica

Se asume que el lector está familiarizado con los conceptos básicos de la lógica de primer orden incluyendo el Teorema de Compacidad o el Teorema de Completitud de Gödel, entre otros. No obstante, en esta primera sección se hará un repaso somero de las principales definiciones y resultados previos necesarios para el desarrollo de este trabajo. Un tratamiento mucho más detallado de la materia, así como todas las demostraciones de los enunciados que se presentan a continuación, se pueden encontrar entre el primer y segundo capítulo de [5] y [10] y en el primer capítulo de [8].

La lógica de primer orden se centra en describir estructuras matemáticas. Si nos fijamos en objetos matemáticos, como por ejemplo espacios vectoriales, grupos o grafos, se observa que no son muy numerosas las especificaciones necesarias para definirlos. De hecho, en la mayoría de casos solo se necesita hablar de un conjunto, de ciertas constantes distinguidas, de ciertos subconjuntos distinguidos y de alguna función del conjunto en sí mismo. Por ende, un *lenguaje* \mathcal{L} no será más que un conjunto de símbolos de constante (c), de relación (R) y de función (f). Asociados a la función y al símbolo de relación habrá un número natural, llamado aridad, que denotará, en el caso de la función, el número de entradas que admite; y en el caso del subconjunto, el tamaño de las n -tuplas que contiene.

A continuación, nos interesa expresar propiedades que se correspondan con aquellas dadas en las distintas áreas de las matemáticas. Para ello, primero introducimos la idea de *\mathcal{L} -término*, que son las combinaciones finitas de los símbolos del lenguaje, donde también se incluye la posibilidad de añadir variables. Estos pueden entenderse como las distintas expresiones matemáticas que se pueden

formar con los elementos del lenguaje. Empleándolos se pueden definir las \mathcal{L} -fórmula atómica para referirse a las propiedades más sencillas que se pueden expresar. Estas son esencialmente el decir que dos términos son iguales o el saber si una n -tupla de términos está en un conjunto. Combinando una cantidad finita de fórmulas atómicas, empleando los conectores lógicos de negación (\neg) y conjunción (\wedge), así como el cuantificador existencial (\exists) sobre las variables libres², se define recursivamente el conjunto de las \mathcal{L} -fórmulas. Llamaremos *complejidad de una \mathcal{L} -fórmula* a la cantidad de conectores que se hayan empleado para definirla. En general, se escribirá $\phi \in \mathcal{L}$ para decir que ϕ es una \mathcal{L} -fórmula.

Seguidamente, se necesita una manera de trabajar con los objetos matemáticos que permita dotar de significado a las fórmulas que acabamos de construir. Definiremos una \mathcal{L} -estructura \mathcal{M} como un conjunto M y cierta interpretación de los símbolos de nuestro lenguaje \mathcal{L} . Con una interpretación del lenguaje nos referimos a lo siguiente:

1. Para un símbolo de constante c , que su interpretación $c^{\mathcal{M}}$ esté en M .
2. Para un símbolo de función f , que su interpretación sea una aplicación $f^{\mathcal{M}} : M^n \rightarrow M$, donde n es la aridad de la función f .
3. Para un símbolo de relación R , que su interpretación sea un subconjunto $R^{\mathcal{M}} \subset M^n$, donde n es la aridad del símbolo de relación R .

Llamaremos al conjunto M el universo de la \mathcal{L} -estructura \mathcal{M} . En general, durante el trabajo emplearemos letras góticas $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{S}, \dots$ para referirnos a \mathcal{L} -estructuras y emplearemos las letras normales M, N, S, \dots para referirnos a su universo. Adicionalmente, cuando hablemos del cardinal de una estructura nos referiremos al cardinal de su universo.

Dada una \mathcal{L} -estructura \mathcal{M} , un \mathcal{L} -término $t(v_1, \dots, v_n)$ y $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in M^n$, se define $t^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ recursivamente sustituyendo cada símbolo de \mathcal{L} por su interpretación y las variables libres v_1, \dots, v_n por a_1, \dots, a_n . De la misma manera, puesto que las fórmulas están formadas esencialmente de términos, se dice que $\bar{a} \in M^n$ *satisface una fórmula $\phi(v_1, \dots, v_n)$ en \mathcal{M}* si la propiedad que exprese ϕ , cuando se evalúan en \bar{a} todos los \mathcal{L} -términos que la contienen, es cierta³. Esto lo denotaremos como $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$.

Las fórmulas que no tienen variables libres se las conoce como \mathcal{L} -sentencias. Para este tipo de fórmulas escribimos $\mathcal{M} \models \phi$ para expresar que ϕ describe una propiedad cierta en \mathcal{M} (sin necesidad de hacer referencia a ningún elemento de M). A un conjunto arbitrario de \mathcal{L} -sentencias T se le denomina *\mathcal{L} -teoría*. Diremos que \mathcal{M} *es un modelo de T* si $\mathcal{M} \models \phi$ para cada \mathcal{L} -sentencia $\phi \in T$. Aquellas teorías que tienen un modelo se dirá que son *satisfacibles* y, si todo subconjunto finito suyo tiene un modelo, se dirá que son *finitamente satisfacibles*. Por último, dada una \mathcal{L} -sentencia ϕ , escribiremos $T \models \phi$ si ϕ es cierto en todo modelo de T .

La noción de satisfacción para una teoría se puede extender para un conjunto de \mathcal{L} -fórmulas de la siguiente manera. Sea $\Gamma(w_1, \dots, w_n)$ un conjunto de \mathcal{L} -fórmulas y consideremos $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{c_i : i = 1, \dots, n\}$ el lenguaje que resulta de añadir un nuevo símbolo de constante a \mathcal{L} por cada variable de Γ . En este nuevo lenguaje, Γ puede ser entendido como una \mathcal{L}^* -teoría si sustituimos cada una de las apariciones de la variable v_i en las fórmulas de Γ por la nueva constante c_i . Por lo tanto, decimos que Γ es *satisfacible*, si lo es como teoría en el nuevo lenguaje \mathcal{L}^* . Observamos que si \mathcal{M}^* es un \mathcal{L}^* -estructura que satisface Γ , entonces, por la construcción anterior, esta es esencialmente una \mathcal{L} -estructura (la obtenida al solo considerar las interpretaciones de \mathcal{L}) y una n -tupla de elementos $(a_1, \dots, a_n) \in M^{*n}$ de forma que para toda \mathcal{L} -fórmula $\phi(\bar{w}) \in \Gamma(\bar{w})$ se cumple $\mathcal{M} \models \phi(a_1, \dots, a_n)$.

²Una variable en una \mathcal{L} -fórmula se dice *libre* si no aparece cuantificada. Aunque aquí no se especifique, esta propiedad requiere una definición rigurosa por recursividad, tal y como se hace en [8, Definición 1.3.9]

³Respecto a cómo tratar la noción de *veracidad* en una estructura, esta requiere un estudio detallado para poder definirla de manera precisa. Como referencia, durante el trabajo se empleará la expuesta en la Sección 1.4 de [8].

Como es usual en matemáticas, es necesario definir algún tipo de morfismo entre los objetos matemáticos que conserve su estructura. En este caso lo importante es que preserve las interpretaciones de \mathcal{L} .

Definición 1.3.1. Sean \mathcal{M}, \mathcal{N} dos \mathcal{L} -estructuras. Decimos que una función inyectiva $\eta : M \rightarrow N$ es un \mathcal{L} -*monomorfismo* si preserva todas las interpretaciones de los símbolos de \mathcal{L} . Un \mathcal{L} -monomorfismo biyectivo se le conoce como \mathcal{L} -isomorfismo. Decimos que dos estructuras son isomorfas si existe un isomorfismo entre ellas y escribimos $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ para denotarlo.

En caso de que se tenga una \mathcal{L} -estructura \mathcal{M} y una biyección $g : M \rightarrow N$, se puede inducir en N una \mathcal{L} -estructura de manera natural. Adicionalmente, la estructura \mathcal{N} resultante de esta construcción será isomorfa a \mathcal{M} .

Definición 1.3.2. Sean \mathcal{M}, \mathcal{N} dos \mathcal{L} -estructuras, entonces decimos que \mathcal{M} es *subestructura* de \mathcal{N} si $M \subset N$ y la inclusión $\iota : M \rightarrow N$ es un monomorfismo. En este caso escribiremos $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ para denotar que \mathcal{M} es subestructura de \mathcal{N} .

Véase que, dado un monomorfismo $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, se puede definir una \mathcal{L} -estructura $f(\mathcal{M})$ con universo $f(M)$ que, además, será subestructura de \mathcal{N} . Por otra parte, es posible caracterizar cuándo un subconjunto N de una \mathcal{L} -estructura es una subestructura.

Proposición 1.3.3. Sea \mathcal{M} una \mathcal{L} -estructura y N un subconjunto de M . Entonces N es el universo de cierta \mathcal{L} -subestructura de \mathcal{M} si, y solo si, contiene todas las interpretaciones de los símbolos de constante $c^{\mathcal{M}}$ y está cerrada por las funciones $f^{\mathcal{M}}$.

Si consideramos un conjunto arbitrario X de M , esta última observación permite definir la *subestructura generada en \mathcal{M} por X* como la menor subestructura de \mathcal{M} que contiene a X , a todos los símbolos de constante y está cerrada por símbolos de función. Nótese que en este caso el cardinal de la subestructura generada es el máximo entre el cardinal del lenguaje y el de X .

Obsérvese que preservar las interpretaciones de los símbolos de \mathcal{L} no implica que las interpretaciones de las \mathcal{L} -fórmulas también se conserven. Esto motiva las siguientes definiciones.

Definición 1.3.4. Sean \mathcal{M} y \mathcal{N} dos \mathcal{L} -estructuras, entonces un \mathcal{L} -monomorfismo $j : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ se dice *elemental* si se cumple

$$\mathcal{M} \models \phi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathcal{N} \models \phi(j(a_1), \dots, j(a_n)), \quad (\ddagger)$$

para toda \mathcal{L} -fórmula $\phi(v_1, \dots, v_n)$ y para todos $a_1, \dots, a_n \in M$.

En el caso de que $j : B \rightarrow \mathcal{N}$ para cierto $B \subset M$ (no necesariamente una \mathcal{L} -estructura), diremos que j es *parcialmente elemental* si cumple (\ddagger) para toda \mathcal{L} -fórmula y todos $a_1, \dots, a_n \in B$. Si \mathcal{M} es una subestructura de \mathcal{N} diremos que es una *subestructura elemental*, si la inclusión es un monomorfismo elemental. En ese caso lo denotaremos como $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ y diremos que \mathcal{M} es una extensión elemental de \mathcal{N} o que \mathcal{N} es una subextensión de \mathcal{M} .

En el caso de que se tenga un \mathcal{L} -isomorfismo, este es necesariamente elemental. En particular, las estructuras isomorfas cumplen las mismas sentencias y, por ende, si una es modelo de una teoría, la otra también.

Una de las herramientas más importantes durante el trabajo serán las cadenas elementales.

Definición 1.3.5. Sea $(I, <)$ un orden lineal y supongamos que $(M_i)_{i \in I}$ es una colección de \mathcal{L} -estructuras. Entonces, diremos que $(M_i : i \in I)$ es una *cadena* de \mathcal{L} -estructuras si $M_i \subseteq M_j$ para cada $i < j$. Si adicionalmente, $M_i \prec M_j$ para todo $i < j$ llamaremos a $(M_i : i \in I)$ una *cadena elemental*.

Dada una cadena de modelos $(\mathcal{M}_i : i \in I)$ es posible definir una \mathcal{L} -estructura \mathcal{M} que tenga como universo $M := \bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i$ y a los \mathcal{M}_i como subestructuras. Adicionalmente, si dicha cadena es elemental, se tiene que para todo $i \in I$ se cumple que $\mathcal{M}_i \prec \mathcal{M}$.

Por otra parte, se puede dar una caracterización de cuándo una subestructura es elemental.

Proposición 1.3.6. (Test de Tarski-Vaught) Sea \mathcal{M} una subestructura de \mathcal{N} . Entonces, \mathcal{M} es una subestructura elemental de \mathcal{N} si, y solo si, para cada fórmula $\phi(v, \bar{w})$ y $\bar{a} \in M$, si existe $b \in N$ tal que $\mathcal{N} \models \phi(b, \bar{a})$, entonces hay un $c \in M$ tal que $\mathcal{N} \models \phi(c, \bar{a})$.

Una de las propiedades más importantes de las extensiones elementales es que van a existir siempre y cuando se impongan ciertas restricciones a su cardinal.

Teorema 1.3.7. (Teorema de Löweheim-Skolem ascendente) Sea \mathcal{M} una \mathcal{L} -estructura infinita y sea κ un cardinal infinito de manera que $\kappa \geq |\mathcal{M}| + |\mathcal{L}|$. Entonces, existe una \mathcal{L} -estructura de cardinal κ y un monomorfismo elemental $j : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$.

Lo mismo ocurre con las subestructuras elementales que, adicionalmente, se pueden tomar de manera que contengan un conjunto X arbitrario.

Teorema 1.3.8. (Teorema de Löweheim-Skolem descendente) Sea \mathcal{M} una \mathcal{L} -estructura y $X \subset M$, entonces existe una \mathcal{L} -subestructura elemental \mathcal{N} de \mathcal{M} de manera que $X \subset N$ y $|\mathcal{N}| \leq |X| + |\mathcal{L}| + \aleph_0$.

Sea T una \mathcal{L} -teoría y ϕ una \mathcal{L} -sentencia. En general, en matemáticas, para probar que ϕ es cierta en T , no se prueba que sea cierta en todo modelo de T sino que se da una demostración de cómo ϕ se puede deducir de las sentencias de T . En lógica, la idea de que una teoría puede demostrar cierta \mathcal{L} -sentencia se puede formalizar de manera rigurosa empleando la idea de *consecuencia lógica* [8]. En caso de que exista una demostración de ϕ a partir de las sentencias de T se denotará $T \vdash \phi$. Esta nueva manera de estudiar las propiedades deducibles de una teoría no es, sin embargo, diferente a la de consecuencia semántica $T \models \phi$ que habíamos introducido anteriormente. Más específicamente, lo que Gödel demostró en 1929 fue lo siguiente:

Teorema 1.3.9. (Teorema de Completitud de Gödel) Sea T una \mathcal{L} -teoría y ϕ una \mathcal{L} -sentencia, entonces $T \models \phi$ si, y solo si, $T \vdash \phi$.

Haciendo uso de este teorema se puede conseguir un criterio para saber cuándo una teoría es satisfacible. Diremos que una teoría T es *inconsistente* si existe alguna \mathcal{L} -fórmula de manera que $T \vdash (\phi \wedge \neg\phi)$. En caso contrario, diremos que la teoría es consistente, es decir, cuando empleando sentencias de T no se puede deducir ninguna contradicción.

Corolario 1.3.10. *Una \mathcal{L} -teoría es consistente si, y solo si, es satisfacible.*

La consecuencia principal de este resultado es el conocido como Teorema de Compacidad.

Teorema 1.3.11. (Teorema de Compacidad) Una \mathcal{L} -teoría T es satisfacible si, y solo si, es finitamente satisfacible.

Diremos que una teoría T es *completa* si se cumple que para toda sentencia ϕ o bien se verifica $T \models \phi$ o bien $T \models \neg\phi$. En particular, en una teoría completa todos los modelos cumplen las mismas sentencias. Sea \mathcal{M} una \mathcal{L} -estructura, definimos la *teoría completa de \mathcal{M}* como

$$\text{Th}(\mathcal{M}) := \{\phi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-sentencia y } \mathcal{M} \models \phi\}.$$

Entre las principales consecuencias del Teorema de Compacidad tenemos que toda \mathcal{L} -teoría T con modelos infinitos tiene modelos de cardinal κ , para cualquier $\kappa \geq |\mathcal{L}|$.

Definición 1.3.12. Sea T una teoría con modelos de cardinal al menos κ , entonces decimos que T es κ -categórica si cualesquiera dos modelos de cardinal κ son isomorfos.

Teorema 1.3.13. (Test de Vaught) Sea T una teoría satisfacible con modelos infinitos y κ -categórica para algún cardinal $\kappa \geq |\mathcal{L}|$. Entonces, T es completa.

Finalmente, merece la pena destacar que durante el desarrollo del trabajo se hará uso de varias herramientas elementales de la Teoría de Conjuntos. Entre las más reseñables se encuentra el uso de ordinales y cardinales; así como sus propiedades y aritmética [4, Secciones 2, 3 y 5], el uso de inducción y recursión transfinita [4, Teoremas 2.14 y 2.15] y el Lema de Zorn [4, Teorema 5.4]. Así mismo, se asumirá el axioma de elección durante todo el trabajo y se empleará, sin mencionarlo explícitamente, cualquiera de sus enunciados equivalentes.

Capítulo 2

Tipos

2.1. Introducción al uso de tipos

Supongamos para el resto del capítulo que \mathcal{M} es una \mathcal{L} -estructura y $A \subset M$. La idea de este capítulo será entender qué objetos potenciales de \mathcal{M} podemos describir con propiedades de primer orden y posibles parámetros de A . Para ello, se extiende el lenguaje \mathcal{L} a $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{c_a : a \in A\}$ y se interpreta los nuevos símbolos en \mathcal{M} como el elemento de A al que están asociados.

Definición 2.1.1. Dado p un conjunto de \mathcal{L}_A -fórmulas con variables libres v_1, \dots, v_n . Decimos que p es un n -tipo (sobre A) si $p \cup \text{Th}_A(\mathcal{M})$ es satisfacible. Diremos que un n -tipo es completo si para cualquier \mathcal{L}_A -fórmula ϕ en variables libres v_1, \dots, v_n se da $\phi \in p$ o $\neg\phi \in p$. Adicionalmente, denotaremos por $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ al conjunto de n -tipos completos. Cuando se entienda por el contexto omitiremos la n en n -tipo.

Observación 2.1.2. Por el Teorema de Compacidad podemos reemplazar en la definición satisfacible por finitamente satisfacible. De hecho, esto nos da una manera más sencilla para saber cuándo un conjunto de \mathcal{L}_A -fórmulas es un tipo. En efecto, el hecho de que $p \cup \text{Th}_A(\mathcal{M})$ sea finitamente satisfacible quiere decir que para cualesquiera fórmulas $\phi_1, \dots, \phi_m \in p$ existe un modelo \mathcal{N} de $\text{Th}_A(\mathcal{M})$ y un elemento $\bar{a} \in N^m$ cumpliendo $\mathcal{N} \models \phi_1(\bar{a}) \wedge \dots \wedge \phi_m(\bar{a})$. Pero entonces se tiene que

$$\mathcal{N} \models \exists v_1 \dots \exists v_m (\phi_1(\bar{v}) \wedge \dots \wedge \phi_m(\bar{v}))$$

y, por tanto, también

$$\mathcal{M} \models \exists v_1 \dots \exists v_m (\phi_1(\bar{v}) \wedge \dots \wedge \phi_m(\bar{v})).$$

Es decir, que para que p sea un tipo es suficiente con comprobar que dado un número finito de fórmulas en p , existe una tupla de \mathcal{M} que las satisfaga.

Observación 2.1.3. No siempre nos va a interesar hablar de los tipos de un modelo \mathcal{M} , hay veces que conviene realizar un estudio más general y hablar de los tipos de una teoría T . En este caso los definimos sustituyendo en la definición anterior $\text{Th}_A(\mathcal{M})$ por T y denotamos al conjunto de n -tipos completos como $S_n(T)$. Si la teoría T es además completa, es inmediato comprobar que $S_n(T) = S_n^{\mathcal{M}}(\emptyset)$ para todo $\mathcal{M} \models T$.

Como ocurre con muchas nociones en matemáticas, la idea de tipo completo no es más que el concepto de objeto maximal (en el sentido de la inclusión). Para ver la equivalencia entre ambas formulaciones es suficiente con notar que para una teoría T consistente o bien $T \cup \{\phi\}$ o bien $T \cup \{\neg\phi\}$ es consistente. De aquí, mediante una aplicación rutinaria del Lema de Zorn llegamos al siguiente resultado:

Proposición 2.1.4. *Todo tipo p está contenido en algún tipo completo de \mathcal{M} .*

Definición 2.1.5. Dado un tipo p sobre A decimos que $\bar{a} \in M^n$ realiza p si $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ para todo $\phi \in p$. Si p no está realizado en \mathcal{M} diremos que \mathcal{M} omite a p .

La condición de que $p \cup \text{Th}_A(\mathcal{M})$ sea satisfacible en la definición de tipo quiere decir (por el Teorema de Completitud) que nuestro tipo es consistente con la teoría completa de \mathcal{M} . Esto no implica, sin embargo, que vaya a haber algún elemento de \mathcal{M} que satisfaga todas las fórmulas de p .

Ejemplo 2.1.6. Tomemos $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, >)$ y $A = \mathbb{N}$. Entonces el conjunto de fórmulas:

$$q(v) = \{v > 1, \dots, v > n, \dots\}$$

es un 1-tipo, pues es claramente finitamente satisfacible. Sin embargo, se tiene que no hay ningún $a \in \mathbb{R}$ que realice q .

En el apartado anterior el tipo q no es completo; por ejemplo, la \mathcal{L}_A -fórmula $v = 1$ no está, ni tampoco su negación. Sin embargo, no es difícil encontrar tipos completos, pues si consideramos para cada $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in M^n$ el conjunto de \mathcal{L}_A -fórmulas:

$$\text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A) := \{\phi(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{L}_A : \mathcal{M} \models \phi(a_1, \dots, a_n)\},$$

este sería un tipo completo. Además, por definición, este tipo se encuentra realizado por \bar{a} .

Por otra parte, si tomamos cualquier extensión elemental \mathcal{N} de \mathcal{M} , se tiene que, para cualquier $\bar{a} \in M^n$ se cumple $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A) = \text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{a}/A)$. De hecho, en esta situación $\text{Th}_A(\mathcal{M}) = \text{Th}_A(\mathcal{N})$ y, por consiguiente, cualquier tipo completo en \mathcal{M} , con parámetros en A , también lo es en \mathcal{N} y viceversa. Por lo tanto, concluimos que $S_n^{\mathcal{M}}(A) = S_n^{\mathcal{N}}(A)$, es decir, que los tipos completos son los mismos en una estructura y en cualquier extensión elemental suya.

Sean \mathcal{M} y \mathcal{N} con un subconjunto común A , tal que $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A) = \text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{b}/A)$, entonces $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ es parcialmente elemental. En efecto, basta con observar que para cada \mathcal{L}_A -fórmula $\varphi(\bar{v})$ se tiene:

$$\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}) \iff \varphi(\bar{v}) \in \text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A) \iff \varphi(\bar{v}) \in \text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{b}/A) \iff \mathcal{N} \models \varphi(\bar{b})$$

El recíproco a este resultado es también cierto y para probarlo es suficiente con reordenar las implicaciones anteriores. Con lo cual hemos probado:

Proposición 2.1.7. *Sean \mathcal{M} y \mathcal{N} dos \mathcal{L} -estructuras arbitrarias con un subconjunto común A y consideremos $\bar{a} \in M^n$ y $\bar{b} \in N^n$. Entonces $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A) = \text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{b}/A)$ si, y solo si, $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ es parcialmente elemental.*

A continuación, veremos que para cualquier tipo, no necesariamente completo, existe una extensión elemental donde este se puede realizar.

Teorema 2.1.8. *Sea \mathcal{M} una \mathcal{L} -estructura, $A \subset M$ y $p(\bar{v})$ un n -tipo sobre A . Entonces existe una extensión elemental \mathcal{N} de \mathcal{M} de manera que p se realiza en \mathcal{N} .*

Demostración. Sea p un tipo de \mathcal{M} sobre $A \subset M$, entonces por la Observación 2.1.2 este es, en particular, un tipo sobre M . Con lo cual, $p \cup \text{Th}_M(\mathcal{M})$ es satisfacible, es decir, que existe una \mathcal{L}_M -estructura $\mathcal{N} \models \text{Th}_M(\mathcal{M})$ y $\bar{a} \in N^n$ de manera que $\mathcal{N} \models \phi(\bar{a})$ para toda \mathcal{L} -fórmula $\phi(\bar{v}) \in p$.

Nótese que como \mathcal{N} satisface el conjunto de \mathcal{L}_M -sentencias

$$\text{Th}_M(\mathcal{M}) = \{\phi(m_1, \dots, m_n) : \mathcal{M} \models \phi(m_1, \dots, m_n), \phi \in \mathcal{L}\},$$

el monomorfismo de $f : M \rightarrow N$ que asocia a cada $m \in M$ la interpretación de su símbolo de constante asociado $m^{\mathcal{N}}$, es claramente elemental. En particular, se tiene que $f(\mathcal{M}) \prec \mathcal{N}$. Identificando M con $f(M)$, pues son claramente isomorfos como \mathcal{L} -estructuras, podemos asumir que \mathcal{N} es una extensión elemental de \mathcal{M} , como queríamos probar. □

Observación 2.1.9. Nótese que en el teorema anterior, por ser $\text{Th}_M(\mathcal{M})$ una \mathcal{L}_M -teoría \mathcal{N} puede ser tomado de cualquier cardinal cumpliendo $|\mathcal{N}| \geq |\mathcal{L}_M| = |\mathcal{M}| + |\mathcal{L}|$. En particular, existe una extensión de \mathcal{M} que realiza p de cardinal $|\mathcal{M}| + |\mathcal{L}|$.

Como ya hemos observado antes, los tipos completos son los mismos para \mathcal{M} y cualquier extensión elemental suya. Empleando el resultado anterior, esto nos lleva a la siguiente caracterización de tipo completo:

Corolario 2.1.10. *Un conjunto de fórmulas p es un tipo completo sobre A si, y solo si, existe una extensión elemental \mathcal{N} de \mathcal{M} y un $\bar{a} \in N^n$ tal que $p = \text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{a}/A)$.*

Demostración. Por una parte, es claro que si tenemos una extensión elemental \mathcal{N} de \mathcal{M} y $\bar{a} \in N^n$ tal que $p = \text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{a}/A)$, entonces $\text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{a}/A) \in S_n^{\mathcal{N}}(A) = S_n^{\mathcal{M}}(A)$. Para la otra dirección tomamos $p \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$. Por el Teorema 2.1.8 existe una extensión elemental \mathcal{N} de \mathcal{M} y $\bar{a} \in N$ tal que \bar{a} realiza p . Como p es un tipo completo, para cada \mathcal{L}_A - fórmula $\phi(\bar{v})$ una, y solo una entre $\phi(\bar{v})$ y $\neg\phi(\bar{v})$ está en p . Por ende, $\phi(\bar{v}) \in p$ si, y solo si, $\mathcal{N} \models \phi(\bar{a})$, lo cual equivale a que $\phi(\bar{v}) \in \text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{a}/A)$. En definitiva, concluimos que $p = \text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{a}/A)$. \square

Observación 2.1.11. El resultado anterior nos dice que los tipos completos de \mathcal{M} son exactamente aquellas propiedades de primer orden que puede presentar un elemento en alguna extensión elemental.

2.2. La topología de los tipos

Podemos dotar de manera natural al espacio de tipos completos $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ de una estructura de espacio topológico. Para cada \mathcal{L}_A -fórmula ϕ en variables libres v_1, \dots, v_n definimos

$$[\phi] = \{p \in S_n^{\mathcal{M}}(A) : \phi \in p\},$$

el conjunto de tipos completos que contienen a ϕ . Aplicando las definiciones se comprueba que para cualesquiera $\phi, \psi \in \mathcal{L}_A$ se cumple $[\phi \vee \psi] = [\phi] \cup [\psi]$, $[\phi \wedge \psi] = [\phi] \cap [\psi]$ y $S_n^{\mathcal{M}}(A) \setminus [\phi] = [\neg\phi]$.

Estas propiedades nos permiten definir una topología en $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ tomando los conjuntos $[\phi]$ como abiertos básicos. En efecto, tal y como se demuestra en [13, Teorema 5.3] es suficiente con comprobar que $S_n^{\mathcal{M}}(A) = [(\phi \wedge \neg\phi)]$ y $[\phi \wedge \psi] = [\phi] \cap [\psi]$.

Observación 2.2.1. Todo el desarrollo topológico realizado sobre $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ se puede generalizar para teorías completas T realizando la construcción anterior para $S_n(T)$.

Veamos que propiedades presenta esta topología.

Lema 2.2.2. *Sea $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ con la topología inducida por la familia de abiertos básicos anterior. Entonces:*

1. $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ es compacto.
2. $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ es totalmente separable, es decir, dados dos tipos p, q distintos se pueden encontrar dos entornos suyos U_p y U_q disjuntos y no vacíos, de manera que $S_n^{\mathcal{M}}(A) = U_p \cup U_q$.

Demostración. 1. Para demostrar la compacidad veremos que todo recubrimiento de $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ admite un subrecubrimiento finito. Supongamos que no, entonces existiría un recubrimiento por abiertos $C = \{[\phi_i(\bar{v})] : i \in I\}$ de $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ sin subrecubrimientos finitos. Definamos el conjunto de \mathcal{L}_A -fórmulas

$$\Gamma = \{\neg\phi_i(\bar{v}) : i \in I\}.$$

y veamos que es un tipo. Tomemos un subconjunto finito Δ de Γ , es decir, un subconjunto finito de índices $I_0 \subset I$. Como no existe un recubrimiento finito de C , existe un tipo p de manera que

$$p \notin \bigcup_{i \in I_0} [\phi_i].$$

Con lo cual $\phi_i(\bar{v}) \notin p$ para todo $i \in I_0$ y por ser este un tipo completo se tiene que $\bigwedge_{i \in I_0} \neg \phi_i(\bar{v}) \in p$. En particular, como p es un tipo, existe $\bar{a} \in M^n$ de manera que $\mathcal{M} \models \bigwedge_{i \in I_0} \neg \phi_i(\bar{a})$. Esto demuestra que Γ es un tipo en virtud de la Observación 2.1.2.

Por consiguiente Γ es un tipo y, por el Teorema 2.1.8, existe una extensión elemental \mathcal{N} de \mathcal{M} y un elemento $\bar{a} \in N^n$ de manera que $\Gamma \subset \text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{a}/A)$. Por lo cual, $\phi_i(\bar{v}) \notin \text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{a}/A)$ para todo $i \in I$, es decir:

$$\text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{a}/A) \in S_n^{\mathcal{M}}(A) \setminus \bigcup_{i \in I} [\phi_i(\bar{v})]$$

lo que supone una contradicción con el hecho de que C sea un recubrimiento de $S_n^{\mathcal{M}}(A)$.

2. Dados dos tipos $p \neq q$, ha de existir una \mathcal{L}_A -fórmula φ de manera que $\varphi \in p$ pero $\varphi \notin q$, es decir $\neg \varphi \in q$. En este caso, $[\varphi]$ y $[\neg \varphi]$ son los entornos que buscamos pues $S_n^{\mathcal{M}}(A) = [(\varphi \vee \neg \varphi)] = [\varphi] \cup [\neg \varphi]$ y $[\varphi] \cup [\neg \varphi] = \emptyset$. \square

En topología, a los espacios que cumplen estas dos propiedades se les llama *espacios de Stone*. Es por esto que esta topología se le conoce como la topología de Stone de $S_n^{\mathcal{M}}(A)$.

Nos centraremos ahora en el estudio de ciertos tipos que serán de especial relevancia en las siguientes secciones.

Definición 2.2.3. Decimos que $p \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$ es un *tipo aislado* si $\{p\}$ es un abierto de $S_n^{\mathcal{M}}(A)$.

Damos a continuación dos equivalencias a la definición de tipos aislados que utilizaremos indistintamente durante el resto del texto.

Proposición 2.2.4. Sea $p \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. p es un tipo aislado.
2. $\{p\} = [\phi(\bar{v})]$ para cierta \mathcal{L}_A -fórmula. En este caso decimos que $\phi(\bar{v})$ aísla p .
3. Existe una \mathcal{L}_A -fórmula $\phi(\bar{v}) \in p$ de manera que para toda \mathcal{L}_A -fórmula $\psi(\bar{v})$, se cumple que $\psi(\bar{v}) \in p$ si, y solo si,

$$\text{Th}_A(\mathcal{M}) \models \forall \bar{v} (\phi(\bar{v}) \rightarrow \psi(\bar{v})). \quad (\star)$$

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Tomemos un tipo aislado p , esto implica por definición que $\{p\}$ es un abierto de la topología. Por consiguiente, ha de existir una colección de fórmulas $\{\phi_i(\bar{v}) : i \in I\}$ tal que

$$\{p\} = \bigcup_{i \in I} [\phi_i(\bar{v})].$$

Con lo cual tiene que darse necesariamente que $\{p\} = [\phi_i(\bar{v})]$ para cierto $i \in I$.

(2) \Rightarrow (3) Sea $\{p\} = [\phi(\bar{v})]$ y tomemos una \mathcal{L}_A -fórmula $\psi(\bar{v})$. Supongamos, en primer lugar, que $\psi(\bar{v}) \in p$ y probemos que cumple (\star) . Si este no fuese el caso, tendríamos $\text{Th}_A(\mathcal{M}) \models \exists \bar{v} (\phi(\bar{v}) \wedge \neg \psi(\bar{v}))$, lo que quiere decir que existe un $\bar{a} \in M$ de manera que $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) \wedge \neg \psi(\bar{a})$. Sea $q = \text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A) \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$, por lo anterior se tiene que $\phi(\bar{v}) \in q$ y como $[\phi(\bar{v})]$ solo contiene a p , ha de ser $p = q$. Sin embargo, se cumple que $\neg \psi(\bar{v}) \in q = p$, lo cual es una contradicción.

Para la otra dirección supongamos que $\psi(\bar{v}) \notin p$. Por ser p un tipo completo, $\neg \psi(\bar{v}) \in p$ y, aplicando el argumento anterior, obtenemos que $\text{Th}_A(\mathcal{M}) \models \forall \bar{v} (\phi(\bar{v}) \rightarrow \neg \psi(\bar{v}))$. Obsérvese que $\phi(\bar{v}) \in p$ y, por tanto, $\phi(\bar{v})$ debe ser finitamente satisficible. Es decir, que existe un $\bar{a} \in M^n$ tal que $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$. Con lo cual, si (\star) fuese cierto tendríamos $\mathcal{M} \models \forall \bar{v} (\phi(\bar{v}) \rightarrow \psi(\bar{v}))$ y, puesto que también se tiene $\mathcal{M} \models \forall \bar{v} (\phi(\bar{v}) \rightarrow \neg \psi(\bar{v}))$, deducimos que $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$ y $\mathcal{M} \models \neg \psi(\bar{a})$, lo cual es una contradicción.

(3) \Rightarrow (1) Supongamos que para toda \mathcal{L}_A -fórmula $\psi(\bar{v})$ se cumple (\star) y probaremos que entonces $\{p\} = [\phi(\bar{v})]$. Claramente se tiene que $p \in [\phi(\bar{v})]$. Tomemos ahora otro $q \in [\phi(\bar{v})]$ y una \mathcal{L}_A -fórmula arbitraria $\psi(\bar{v})$. Si $\psi(\bar{v}) \in p$, entonces aplicando (\star) , obtenemos que $\psi(\bar{v}) \in q$. Por otro lado, si $\psi(\bar{v}) \notin p$, entonces $\neg \psi(\bar{v}) \in p$ y aplicando el argumento anterior se tiene que $\psi(\bar{v}) \notin q$. Por ende, concluimos que $p = q$ y, por lo tanto, p es el único tipo de $[\phi(\bar{v})]$. \square

Observación 2.2.5. La última equivalencia nos hace ver el interés que tienen los tipos aislados. En estos, toda la *información* que describe el tipo solo dependen de una única propiedad: la descrita por la fórmula que lo aísla.

Observación 2.2.6. La tercera de estas caracterizaciones no incluye en su enunciado que el tipo tenga que ser completo. Con lo cual, podemos extender la noción de ser aislado para tipos no completos imponiendo dicha equivalencia como una definición.

Gracias a este resultado podemos obtener algunos ejemplos de tipos aislados y las respectivas fórmulas que los aíslan.

Proposición 2.2.7. Sea \mathcal{M} una \mathcal{L} -estructura y $A \subset M$. Entonces, para f , un símbolo de función de aridad n y c , un símbolo de constante de \mathcal{L} se cumple lo siguiente:

1. Para cualesquiera $a_1, \dots, a_n \in A$ si $b = f^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n)$, entonces la \mathcal{L}_A -fórmula

$$\phi(x) : x = f(a_1, \dots, a_n)$$

aísla $\text{tp}(b/A)$.

2. Si $d = c^{\mathcal{M}}$ entonces $\psi(x) : x = c$ aísla $\text{tp}(d/\emptyset)$.

Demostración. 1. Probaremos que es aislado empleando la tercera equivalencia de la Proposición 2.2.4 con $\phi(x) : x = f(a_1, \dots, a_n)$. Por una parte, si una \mathcal{L}_A -fórmula $\theta(x)$ cumple (\star) , entonces, como $\mathcal{M} \models \phi(b)$, se sigue inmediatamente que $\theta(x) \in \text{tp}(b/A)$. Recíprocamente, supongamos que una \mathcal{L}_A -fórmula $\theta(x) \in \text{tp}(b/A)$ no cumple (\star) . Esto implica que

$$\text{Th}_A(\mathcal{M}) \models \exists x(\phi(x) \wedge \neg\theta(x)),$$

con lo cual podemos tomar un $c \in M$ satisfaciendo $\mathcal{M} \models \phi(c) \wedge \neg\theta(c)$. Como $\mathcal{M} \models \phi(c)$, es inmediato que $b = c$, con lo que $\mathcal{M} \not\models \theta(b)$ y, por tanto, $\theta(x) \notin \text{tp}(b/A)$.

2. La demostración para el caso de una constante c es análogo al anterior, pero sin necesidad de considerar parámetros de A en la fórmula ψ . \square

La Observación 2.2.5 nos dice que, para saber si un tipo aislado p se realiza, solo hay que fijarse en si se satisface la \mathcal{L}_A -fórmula $\phi(\bar{x})$ que lo aísla.

Proposición 2.2.8. Sea T una teoría completa, entonces un tipo aislado $p \in S_n(T)$ se realiza en cualquiera de sus modelos. En particular, cualquier $p \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$ aislado se realiza.

Demostración. Si $\phi(\bar{v})$ aísla al tipo p , entonces $T \cup \{\phi(\bar{v})\}$ es satisfacible. Por ser la teoría T completa se tiene $T \models \exists \bar{v}\phi(\bar{v})$, y, por lo tanto, para cada $\mathcal{M} \models T$ existe un $\bar{a} \in M^n$ que realiza p . \square

Por consiguiente, si lo que queremos es encontrar un modelo de una teoría que omita ciertos tipos, solo podremos elegir aquellos que no estén aislados. De hecho, el siguiente resultado nos dice que, en general, dada una colección numerable de ellos, podemos encontrar un modelo que los omita.

Teorema 2.2.9. (Teorema de Omisión de tipos) Sea \mathcal{L} un lenguaje numerable, y consideremos una \mathcal{L} -teoría T . Entonces, para una colección numerable X de tipos no aislados sobre \emptyset existe un modelo numerable $\mathcal{M} \models T$ que omita todos los tipos $p \in X$.

La demostración clásica de este resultado se basa en una construcción empleando Teorías de Henkin, parecida a la realizada en el Teorema de Compacidad. Por su extensión, esta prueba no se incluye en el texto y se remite a cualquier lector interesado a [5, Teorema 4.2.4].

Volviendo a la topología, estudiemos la relación entre los morfismos de \mathcal{L} -estructuras y las funciones continuas entre sus correspondientes espacios de tipos. Observamos que todo morfismo $f : A \rightarrow N$ parcialmente elemental induce un homeomorfismo entre los espacios de tipos $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ y $S_n^{\mathcal{N}}(f(A))$.

Teorema 2.2.10. Sea \mathcal{N} una \mathcal{L} -estructura y $f : A \rightarrow N$ parcialmente elemental, entonces $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ y $S_n^{\mathcal{N}}(f(A))$ son homeomorfos.

Demostración. Sea $p \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$ y definimos la función $\tilde{f} : S_n^{\mathcal{M}}(A) \rightarrow S_n^{\mathcal{N}}(f(A))$ como

$$\tilde{f}(p) = \{\phi(\bar{v}, f(\bar{a})) \in \mathcal{L}_{f(A)} : \phi(\bar{v}, \bar{a}) \in p\}.$$

Veamos en primer lugar que está bien definida, es decir, que $\tilde{f}(p) \in S_n^{\mathcal{N}}(f(A))$. Tomemos un subconjunto finito de $\tilde{f}(p)$ que será de la forma

$$\Delta = \{\phi_1(\bar{v}, f(\bar{a}_1)), \dots, \phi_m(\bar{v}, f(\bar{a}_m))\}$$

donde $\phi_1(\bar{v}, f(\bar{a}_1)), \dots, \phi_m(\bar{v}, f(\bar{a}_m)) \in p$. Como $p \cup \text{Th}_A(\mathcal{M})$ es satisfacible,

$$\mathcal{M} \models \exists \bar{v} \bigwedge_{i=1}^m \phi_i(\bar{v}, \bar{a}_i).$$

Por ser f parcialmente elemental se sigue que

$$\mathcal{N} \models \exists \bar{v} \bigwedge_{i=1}^m \phi_i(\bar{v}, f(\bar{a}_i)).$$

Con lo cual $\tilde{f}(p) \cup \text{Th}_{f(A)}(\mathcal{N})$ es finitamente satisfacible y, por ende, satisfacible. Para ver que $\tilde{f}(p)$ es completo procedemos como sigue. Si $\phi(\bar{v}, f(\bar{a})) \in \tilde{f}(p)$ hemos terminado. En caso contrario, $\phi(\bar{v}, \bar{a}) \notin p$ y, por ser p completo, $\neg\phi(\bar{v}, \bar{a}) \in p$.

A continuación, probaremos que \tilde{f} es biyectiva, continua y abierta para ver que es un homeomorfismo. Para la sobreyectividad consideremos $q \in \text{Th}_{f(A)}(\mathcal{N})$. Si tomamos $\phi(\bar{v}, \bar{b}) \in q$, tiene que existir $\bar{a} \in A^n$ tal que $f(\bar{a}) = \bar{b}$. Definiendo

$$p := \{\phi(\bar{v}, \bar{a}) : \phi(\bar{v}, f(\bar{a})) \in q\}$$

se prueba, de manera análoga a la anterior, que $p \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$ y $\tilde{f}(p) = q$. Para la inyectividad supongamos que $p \neq q$ para dos tipos de $S_n^{\mathcal{M}}(A)$. Entonces existe una \mathcal{L}_A -fórmula $\phi(\bar{v}, \bar{a})$ tal que $\phi(\bar{v}, \bar{a}) \in p$ y $\phi(\bar{v}, \bar{a}) \notin q$. En ese caso $\phi(\bar{v}, f(\bar{a}))$ estaría en $\tilde{f}(p)$ pero no en $\tilde{f}(q)$ y, por tanto, $\tilde{f}(p) \neq \tilde{f}(q)$. La continuidad se sigue de:

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{-1}([\phi(\bar{v}, f(\bar{a}))]) &= \{p \in S_n^{\mathcal{M}}(A) : \tilde{f}(p) \in [\phi(\bar{v}, f(\bar{a}))]\} = \{p \in S_n^{\mathcal{M}}(A) : \phi(\bar{v}, f(\bar{a})) \in \tilde{f}(p)\} \\ &= \{p \in S_n^{\mathcal{M}}(A) : \phi(\bar{v}, \bar{a}) \in p\} = [\phi(\bar{v}, \bar{a})] \end{aligned}$$

pues la contraimagen de toda abierto básico en $S_n^{\mathcal{N}}(f(A))$ es abierto en $S_n^{\mathcal{M}}(A)$. Por ser f una biyección, de lo anterior se sigue que $\tilde{f}([\phi(\bar{v}, \bar{a})]) = [\phi(\bar{v}, f(\bar{a}))]$ por lo cual \tilde{f} es también abierta. \square

Definición 2.2.11. Dado \mathcal{N} una \mathcal{L} -estructura y $f : A \rightarrow N$ parcialmente elemental denotamos al homeomorfismo inducido por f como $\tilde{f} : S_n^{\mathcal{M}}(A) \rightarrow S_n^{\mathcal{N}}(f(A))$ cuya expresión explícita es:

$$\tilde{f}(p) = \{\phi(\bar{v}, f(\bar{a})) \in \mathcal{L}_{f(A)} : \phi(\bar{v}, \bar{a}) \in p\}.$$

Corolario 2.2.12. Sea \mathcal{N} una \mathcal{L} -estructura y $f : A \rightarrow N$ parcialmente elemental, entonces $\phi(v, \bar{a})$ aísla $p \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$ si, y solo si, $\phi(v, f(\bar{a}))$ aísla $\tilde{f}(p)$ en $S_n^{\mathcal{N}}(f(A))$.

Demostración. Veamos una de las direcciones, siendo la otra análoga. Si $\phi(v, \bar{a})$ aísla $p \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$, entonces $[\phi(v, \bar{a})] = \{p\}$ y, por lo visto en el teorema anterior,

$$[\phi(\bar{v}, f(\bar{a}))] = \tilde{f}([\phi(\bar{v}, \bar{a})]) = \tilde{f}(\{p\}) = \{\tilde{f}(p)\}.$$

\square

Esta manera de asociar el espacio de tipos y los morfismos entre estructuras sirve también para relacionar los tipos que se realizan en las \mathcal{L} -estructuras isomorfas.

Proposición 2.2.13. Sean \mathcal{M} y \mathcal{N} dos \mathcal{L} -estructuras y $f : M \rightarrow N$ cierto isomorfismo entre ellas. Entonces para cualquier $A \subset M$ existe una biyección entre los tipos que realiza \mathcal{M} en $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ y los tipos que realiza $S_n(f(A))$ en $S_n^{\mathcal{N}}(f(A))$.

La demostración se sigue del hecho de que un tipo $p \in S_n(A)$ estará realizado por un elemento $\bar{a} \in M^n$ si, y solo si, $\tilde{f}(p) \in S_n^{\mathcal{N}}(f(A))$ está realizado por $f(\bar{a})$. Además, puesto que en las teorías completas T sabemos que $S_n(T) = S_n^{\mathcal{M}}(\emptyset)$, para cualquier modelo suyo \mathcal{M} , se obtiene inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 2.2.14. Sea T una teoría completa y sean \mathcal{M} y \mathcal{N} dos modelos isomorfos de T , entonces \mathcal{M} y \mathcal{N} realizan los mismos tipos de $S_n(T)$ para todo $n < \omega$.

Veamos ahora cómo se comportan el conjunto de tipos aislados dentro de nuestra topología. Observemos antes lo siguiente: dado un lenguaje numerable \mathcal{L} y un conjunto numerable A , el conjunto de \mathcal{L}_A -fórmulas distintas es numerable. Por consiguiente, $|S_n^{\mathcal{M}}(A)| \leq 2^{\aleph_0}$ pues solo podemos formar 2^{\aleph_0} conjuntos de \mathcal{L}_A -fórmulas. A continuación, veremos que en caso de que no se alcance esta cota, es decir, haya menos tipos completos de los posibles, los tipos aislados serán densos sobre $S_n^{\mathcal{M}}(A)$.

De hecho, este resultado se puede generalizar para un conjunto de parámetros $A \subset M$ arbitrario. En este caso, los tipos aislados serán densos sobre $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ si no existe un subconjunto A_0 de A numerable para el cual dicho máximo se alcance. En este sentido, es necesario el siguiente lema.

Lema 2.2.15. Sea $\phi(\bar{v})$ una \mathcal{L}_A -fórmula de manera que $[\phi(\bar{v})]$ es no vacía y no contiene ningún tipo aislado en $S_n^{\mathcal{M}}(A)$. Entonces existe una \mathcal{L}_A -fórmula $\psi(\bar{v})$ tal que $[\phi \wedge \psi]$ y $[\phi \wedge \neg\psi]$ son no vacíos y no contienen a su vez ningún tipo aislado.

Demostración. Consideremos algún tipo $p \in [\phi]$. Entonces, para cada \mathcal{L}_A -fórmula ψ , se tiene que entre $[\phi \wedge \psi]$ y $[\phi \wedge \neg\psi]$ al menos uno es no vacío, pues p está en alguno al ser este un tipo completo.

Supongamos ahora que para cada \mathcal{L}_A -fórmula ψ uno, y solo uno, entre $[\phi \wedge \psi]$ y $[\phi \wedge \neg\psi]$ es no vacío. Definamos $p' := \{\theta(\bar{v}) : [\phi \wedge \theta] \neq \emptyset\}$ y veamos que es un tipo completo. En efecto, para ver que es un tipo veamos que es finitamente satisficible. Sean $\theta_1, \dots, \theta_n \in p$ y supongamos por un momento que $[\phi \wedge \neg \bigwedge_{i=1}^n \theta_i] \neq \emptyset$. Entonces, aplicando las leyes de De Morgan

$$\left[\phi \wedge \neg \bigwedge_{i=1}^n \theta_i \right] = \left[\phi \wedge \bigvee_{i=1}^n \neg\theta_i \right] = \left[\bigvee_{i=1}^n \phi \wedge \neg\theta_i \right] = \bigcup_{i=1}^n [\phi \wedge \neg\theta_i],$$

y podemos suponer que existe cierto i tal que $[\phi \wedge \neg\theta_i]$ es no vacío. Sin embargo, por hipótesis, esto implica que $[\phi \wedge \neg\theta_i]$ lo cual contradice que $\theta_i \in p$. Para ver que es completo supongamos que existiese cierta fórmula θ cumpliendo $[\phi \wedge \theta] \neq \emptyset$ y $[\phi \wedge \neg\theta] \neq \emptyset$. Entonces,

$$\emptyset \neq [\phi \wedge \theta] \cap [\phi \wedge \neg\theta] = [\phi] \cap [\theta] \cap [\neg\theta] = \emptyset$$

lo que supone una contradicción.

Por ser p' completo para cada $\theta \in p'$, el conjunto $[\phi \wedge \neg\theta]$ es vacío, es decir, no existe un tipo completo que contenga a $\{\phi(\bar{v}) \wedge \neg\theta(\bar{v})\}$. Con lo cual, $\text{Th}_A(\mathcal{M}) \cup \{\phi(\bar{v}) \wedge \neg\theta(\bar{v})\}$ no es satisficible pues, en caso contrario, sabemos por la Proposición 2.1.4 que este estaría contenido en algún tipo completo. Tenemos entonces,

$$\begin{aligned} \text{Th}_A(\mathcal{M}) \not\models \exists \bar{v}(\phi(\bar{v}) \wedge \neg\theta(\bar{v})) &\iff \text{Th}_A(\mathcal{M}) \models \neg \exists \bar{v}(\phi(\bar{v}) \wedge \neg\theta(\bar{v})) \iff \\ &\iff \text{Th}_A(\mathcal{M}) \models \forall \bar{v} \neg(\phi(\bar{v}) \wedge \neg\theta(\bar{v})) \iff \text{Th}_A(\mathcal{M}) \models \forall \bar{v}(\phi(\bar{v}) \rightarrow \theta(\bar{v})). \end{aligned}$$

Por la Proposición 2.2.4 ϕ aislaría p' y $[\phi]$ contendría un tipo aislado, lo que supone una contradicción. Por último, como $[\phi]$ no contiene tipos aislados, tampoco los pueden tener $[\phi \wedge \psi]$, $[\phi \wedge \neg\psi]$ puesto que $[\phi \wedge \psi] \subset [\phi]$ y $[\phi \wedge \neg\psi] \subset [\phi]$. \square

Teorema 2.2.16. *Sea T una teoría completa en un lenguaje numerable \mathcal{L} y $A \subset \mathcal{M} \models T$. Si para todo subconjunto numerable $A_0 \subset A$ se cumple que $|S_n^{\mathcal{M}}(A_0)| < 2^{\aleph_0}$ entonces los tipos aislados son densos sobre $S_n^{\mathcal{M}}(A)$.*

Demostración. Para probar que los tipos aislados son densos probaremos que todo abierto básico contiene un tipo aislado. Supongamos que no, entonces existirá una \mathcal{L}_A -fórmula ϕ tal que $[\phi] \neq \emptyset$ no contiene ningún tipo aislado.

Para nuestra demostración vamos a emplear un árbol binario de fórmulas, es decir, vamos a construir una colección de fórmulas $(\phi_\sigma : \sigma \in 2^{<\omega})$ donde cada una está asociada con una colección finita de 0 y 1. A este árbol le vamos a pedir que satisfaga las siguientes propiedades:

1. Cada $[\phi_\sigma]$ es no vacío y no contiene tipos aislados.
2. Si $\sigma \subset \tau$ entonces $[\phi_\tau] \subset [\phi_\sigma]$.
3. Para $i \in \{0, 1\}$ se tiene $[\phi_{\sigma, i}] \subset [\neg\phi_{\sigma, 1-i}]$, o equivalentemente $[\phi_{\sigma, 0}] \cap [\phi_{\sigma, 1}] = \emptyset$.

Intuitivamente, lo que queremos conseguir con estas propiedades es que cada rama del árbol sea diferente y que cada una de ellas forme cadenas descendentes de abiertos básicos que no contienen tipos aislados.

Procedamos con la definición por recursión del árbol binario. Para el caso $\sigma = \emptyset$ tomamos $\phi_\sigma = \phi$ que, por hipótesis, cumple que $[\phi]$ es no vacío y no contiene tipos aislados. A continuación, para $\sigma \in 2^{<\omega}$ supongamos que $[\phi_\sigma]$ es no vacía y no contiene tipos aislados. Entonces, en virtud del lema anterior existe una \mathcal{L}_A fórmula ψ_σ de manera que $[\phi_\sigma \wedge \psi_\sigma]$ y $[\phi_\sigma \wedge \neg\psi_\sigma]$ son no vacíos y no contienen tipos aislados. Entonces definimos $\phi_{\sigma, 0} := \phi_\sigma \wedge \psi_\sigma$ y $\phi_{\sigma, 1} := \phi_\sigma \wedge \neg\psi_\sigma$.

Por construcción, esta definición satisface la primera propiedad. Por otro lado, la segunda, se sigue de que $[\phi_\sigma] \supset [\phi_\sigma \wedge \psi_\sigma]$ y $[\phi_\sigma] \supset [\phi_\sigma \wedge \neg\psi_\sigma]$. Por último, la tercera es inmediata de observar $[\phi_\sigma \wedge \psi_\sigma] \cap [\phi_\sigma \wedge \neg\psi_\sigma] = [\psi_\sigma] \cap [\neg\psi_\sigma] = \emptyset$.

Consideremos una función $f : \omega \rightarrow 2^4$. Por la construcción anterior tenemos que:

$$[\phi_{f|0}] \supseteq [\phi_{f|1}] \supseteq [\phi_{f|2}] \supseteq \dots$$

De esta manera, la familia de cerrados $\{[\phi_{f|n}] : n \in \omega\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Por tanto, al ser $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ un espacio compacto, la intersección de la familia será no vacía y podemos tomar

$$p_f \in \bigcap_{n=0}^{\infty} [\phi_{f|n}].$$

Consideremos ahora dos funciones diferentes $f \neq g$ como la anterior, entonces habrá de existir un m de manera que $f|m = g|m$ pero $f(m+1) \neq g(m+1)$. Con lo cual, por construcción tenemos que $[\phi_{f|m+1}] \cap [\phi_{g|m+1}] = \emptyset$ y deducimos que $p_f \neq p_g$.

En resumen, lo que acabamos de probar es que la función $f \mapsto p_f$ es una aplicación bien definida e inyectiva de 2^{\aleph_0} en $S_n^{\mathcal{M}}(A)$. Adicionalmente, observamos que en nuestra construcción no hemos hecho uso de todo A , sino tan solo de un subconjunto suyo A_0 correspondiente a las apariciones de parámetros en $(\phi_\sigma : \sigma \in 2^{<\omega})$ y ϕ . Como $2^{<\omega}$ es un conjunto numerable y en cada fórmula únicamente se usan un número finito de parámetros, tenemos que A_0 es numerable. Con lo cual, la imagen de la función anterior está contenida en $S_n^{\mathcal{M}}(A_0)$ y, por la inyectividad, concluimos que $|2^{\aleph_0}| = |S_n^{\mathcal{M}}(A_0)|$; lo cual supone una contradicción con nuestra hipótesis. \square

2.3. Modelos primos

Nuestro objetivo en esta sección será el de estudiar modelos *pequeños* de una teoría que contengan toda la información relevante de la misma. En el lenguaje de la teoría de modelos, lo que buscamos son condiciones para que exista un modelo de manera que para cualquier otro modelo de la teoría

⁴Emplearemos la interpretación conjuntista de los números naturales para simplificar la notación.

exista un monomorfismo elemental de este primero en el segundo. Durante el resto de la sección T será una \mathcal{L} -teoría completa con modelos infinitos.

Definición 2.3.1. Decimos que $\mathcal{M} \models T$ es un *modelo primo* de T si para cualquier otro $\mathcal{N} \models T$ existe un monomorfismo elemental de \mathcal{M} en \mathcal{N} .

Ejemplo 2.3.2. Veamos una ejemplificación de este concepto empleando resultados clásicos en teoría de modelos. Sea $T = \text{ACF}_0$ la teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados de característica 0, y tomemos $K \models \text{ACF}_0$. Si llamamos F a la clausura algebraica de \mathbb{Q} , sabemos que hay un monomorfismo de cuerpos de F en K , más precisamente, la extensión a la clausura de la inclusión de \mathbb{Q} en cualquier cuerpo de característica 0. Puesto que T es de modelos completos [5, Corolario 3.2.3], este monomorfismo es elemental. Es decir, F es un modelo primo de ACF_0 .

De manera muy parecida, puesto que la teoría de los cuerpos reales cerrados tiene eliminación de cuantificadores [10, Teorema 3.3.15], se puede probar que la clausura real de \mathbb{Q} es un modelo primo de dicha teoría.

Observación 2.3.3. Para un lenguaje numerable \mathcal{L} , si una teoría T con modelos infinitos tiene un modelo primo \mathcal{M} , este es numerable. En efecto, basta con tomar un modelo numerable de T , que existen por Löwenheim-Skolem descendente, y emplear que los monomorfismos son inyectivos.

Supongamos que T tiene un modelo primo \mathcal{M} y tomemos un tipo $p \in S_n(T)$ realizado por cierto $\bar{a} \in M^n$. Si p no fuese aislado, sabemos por el Teorema de Omisión de tipos que existiría cierto modelo $\mathcal{N} \models T$ que lo omite. Sin embargo, por ser \mathcal{M} primo, existe un monomorfismo elemental $j : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ y por ende $j(\bar{a})$ realizaría p , lo que supone una contradicción. Esto prueba que, en particular, para todo $\bar{a} \in M^n$, $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ ha de ser un tipo aislado. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 2.3.4. Decimos que $\mathcal{M} \models T$ es un *modelo atómico* de T si $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ es un tipo aislado para todo $\bar{a} \in M^n$.

Por ende, lo que hemos probado antes es que todo modelo primo es atómico. Por otra parte, dada una teoría en un lenguaje numerable, si un modelo atómico es primo, entonces por la Observación 2.3.3 debe ser numerable. De hecho, veamos que ser numerable es una condición suficiente.

Teorema 2.3.5. *Sea \mathcal{L} un lenguaje numerable y T una \mathcal{L} -teoría completa con modelos infinitos. Entonces, $\mathcal{M} \models T$ es primo si, y solo si, \mathcal{M} es numerable y atómico.*

Demostración. Que todo modelo primo es atómico y numerable ya ha quedado probado en los comentarios anteriores. Para ver el recíproco tomemos \mathcal{M} un modelo atómico y numerable. Sea $\mathcal{N} \models T$; nuestro objetivo será encontrar un monomorfismo elemental de \mathcal{M} en \mathcal{N} . Consideremos $m_0, m_1, \dots, m_n, \dots$ una enumeración de M y denotemos $\varphi_i(v_0, \dots, v_i)$ a la fórmula que aísla (m_0, \dots, m_i) , que ha de existir por ser \mathcal{M} atómico.

La idea general consistirá en construir una cadena de monomorfismos parcialmente elementales $f_0 \subset f_1 \subset \dots$ de \mathcal{M} en \mathcal{N} de manera que el dominio de f_i sea $\{m_0, \dots, m_{i-1}\}$. En caso de conseguirla, $f := \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$ será el morfismo que buscábamos.

Para ello, realizaremos una definición recursiva de los f_i . Comencemos considerando $f_0 = \emptyset$. Como T es completa $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ y f_0 es parcialmente elemental. Para el caso de f_{k+1} , supongamos que ya hemos definido f_k y sea $n_i = f_k(m_i)$ para $i < k$. Como $\mathcal{M} \models \varphi_k(m_0, \dots, m_k)$ y f_k es parcialmente elemental, se tiene

$$\mathcal{N} \models \exists v \varphi_k(n_0, \dots, n_{k-1}, v).$$

Llamaremos $n_k \in N$ al que cumpla $\mathcal{N} \models \varphi_k(n_0, \dots, n_k)$. Como φ_k aísla $\text{tp}^{\mathcal{M}}(m_0, \dots, m_k)$ y acabamos de ver que $\text{tp}^{\mathcal{N}}(n_0, \dots, n_k) \in [\varphi_k(v_0, \dots, v_k)]$ concluimos

$$\text{tp}^{\mathcal{M}}(m_0, \dots, m_k) = \text{tp}^{\mathcal{N}}(n_0, \dots, n_k).$$

Esto muestra que definiendo $f_{k+1} := f_k \cup \{m_k, n_k\}$ obtenemos nuevamente un monomorfismo parcialmente elemental con dominio $\{m_0, \dots, m_k\}$, tal y como vimos en la Proposición 2.1.7. \square

El resultado anterior nos propone una manera de saber cuándo un modelo es primo a través del estudio de sus tipos aislados. Es posible ir un poco más allá y obtener que la teoría tendrá un modelo primo si, y solo si, sus tipos aislados son densos sobre $S_n(T)$ para cualquier n .

Teorema 2.3.6. *Sea \mathcal{L} un lenguaje numerable y sea T una \mathcal{L} -teoría completa con modelos infinitos. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. T tiene un modelo primo.
2. T tiene un modelo atómico.
3. Los tipos aislados son densos en $S_n(T)$ para todo n .

Este resultado nos permite resumir la relación entre las nociones que se han estudiado hasta este punto del capítulo. Omitiremos, sin embargo, la demostración del mismo, pues excede en extensión los objetivos de este trabajo. Véase [5, Teorema 4.2.10].

Terminaremos la sección probando que, en caso de que haya un modelo primo, este es único salvo isomorfismo. Para ello, necesitaremos desarrollar la noción de modelo homogéneo.

Definición 2.3.7. Sea κ un cardinal infinito. Diremos que $\mathcal{M} \models T$ es κ -homogéneo si para cualesquiera $A \subset M$ con $|A| < \kappa$, $f : A \rightarrow M$ parcialmente elemental y $a \in M$, existe $f^* \supseteq f$ de manera que $f^* : A \cup \{a\} \rightarrow M$ es parcialmente elemental. Diremos que \mathcal{M} es homogéneo si es $|M|$ -homogéneo.

Observación 2.3.8. Ser homogéneo es una propiedad que se conserva a través de isomorfismos. En efecto, sean \mathcal{M} y \mathcal{N} dos \mathcal{L} -estructuras donde \mathcal{M} es homogénea y sea $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un isomorfismo. Entonces, dado $g : A \rightarrow \mathcal{N}$ parcialmente elemental y $a \in N$, la clave de la demostración está en definir la extensión como $h^* = f^{-1} \circ h \circ f$, donde h es la función que se obtiene al aplicar la homogeneidad de \mathcal{M} sobre $f \circ g \circ f^{-1}$ y $f^{-1}(a)$.

Realicemos una pequeña digresión para entender qué tienen de particular estos modelos. La definición de modelo homogéneo nos dice que podemos extender los automorfismos parcialmente elementales añadiendo cualquier elemento de M a su dominio. Esto nos lleva a la idea de que cualquier automorfismo parcialmente elemental puede ser extendido, utilizando inducción transfinita, a un automorfismo de todo M .

En particular, por la Proposición 2.1.7 (la cual usaremos de ahora en adelante sin hacer referencia), si $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{b})$ entonces $\bar{a} \rightarrow \bar{b}$ es parcialmente elemental y este podría ser extendido a un automorfismo de M . Es decir, en los modelos homogéneos los elementos con las mismas propiedades pueden transformarse unos en otros mediante automorfismos.

Proposición 2.3.9. *Si \mathcal{M} es atómico, entonces \mathcal{M} es \aleph_0 -homogéneo. En particular, los modelos primos de una teoría son homogéneos.*

Demostración. Sea \mathcal{M} un modelo atómico. Consideremos el monomorfismo parcialmente elemental $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ donde $\bar{a}, \bar{b} \in M$ y sea $c \in M$. Por ser \mathcal{M} atómico existe una fórmula $\phi(\bar{v}, w)$ que aísla $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}, c)$, con lo cual, como $\mathcal{M} \models \exists w \phi(\bar{a}, w)$ y $\bar{a} \mapsto \bar{b}$ es parcialmente elemental, $\mathcal{M} \models \exists w \phi(\bar{b}, w)$. Supongamos que $\mathcal{M} \models \phi(\bar{b}, d)$, entonces se tiene que la extensión que buscamos es $\bar{a}, c \mapsto \bar{b}, d$. \square

El interés general por los modelos homogéneos recae en que, en el caso numerable, se puede caracterizar cuándo dos de ellos son isomorfos. En general, para que dos modelos de una teoría T sean isomorfos es necesario que realicen los mismos tipos de $S_n(T)$. En el caso de modelos homogéneos numerables, esta condición es también suficiente.

Teorema 2.3.10. *Sea T una teoría completa en un lenguaje \mathcal{L} numerable. Supongamos que \mathcal{M} y \mathcal{N} son modelos numerables homogéneos de T y que \mathcal{M} y \mathcal{N} realizan los mismos tipos de $S_n(T)$ para $n \geq 1$. Entonces $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.*

Demostración. Construiremos un isomorfismo $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ empleando un argumento de *back and forth*. Crearemos una cadena $f_0 \subset f_1 \subset \dots$ de morfismos parcialmente elementales de subconjuntos finitos de \mathcal{M} en subconjuntos finitos de \mathcal{N} . Si denotamos por a_0, a_1, \dots , a la enumeración de M y b_0, b_1, \dots a la enumeración de N , queremos cerciorarnos de que $a_i \in \text{dom}(f_{2i+1})$ y $b_i \in \text{Im}(f_{2i+2})$. De esta manera, si tomamos $f := \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$ este será un morfismo parcialmente elemental y sobreyectivo de \mathcal{M} en \mathcal{N} , por lo tanto un isomorfismo.

Emplearemos recursión e inducción simple para realizar la prueba. Para el caso base definimos $f_0 = \emptyset$. Puesto que T es completo, se tiene que f_0 es parcialmente elemental. Para el paso inductivo supongamos que f_s es parcialmente elemental y cumple que si $s = 2i + 1$ entonces $a_i \in \text{dom}(f_s) =: \bar{a}$ y si $s = 2i + 2$ entonces $b_i \in \text{Im}(f_s) =: \bar{b}$. Realizaremos dos pasos de inducción que se irán intercalando según sea $s + 1$ par o impar.

Primeramente, si $s + 1 = 2i + 1$ entonces tomamos $p = \text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}, a_i)$. Como \mathcal{M} y \mathcal{N} realizan los mismos tipos, podemos encontrar $\bar{c}, d \in N$ de manera que $p = \text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{c}, d)$. Por una parte, se tiene que $\text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{c}) = \text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ sin más que suprimir la última variable de las fórmulas de p . Dado que $\text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{b}) = \text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ por ser f_s parcialmente elemental deducimos que $\text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{c}) = \text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{b})$.

Como \mathcal{N} es homogéneo, para el d anterior, podemos encontrar un $e \in \mathcal{N}$ de manera que $\bar{c}, d \mapsto \bar{b}, e$ sea parcialmente elemental. De aquí deducimos que $\text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{b}, e) = \text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{c}, d) = p = \text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}, a_i)$ y, por tanto, $\bar{b}, e \mapsto \bar{a}, a_i$ es parcialmente elemental. Nótese que esto último nos dice que extendiendo f_s como $f_{s+1} := f_s \cup \{(a_i, e)\}$ obtenemos un morfismo parcialmente elemental con a_i en su dominio.

Para el caso de $s + 1 = 2i + 2$ reiteramos los mismos pasos que en el caso anterior pero tomando $p = \text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{b}, b_i)$ y encontrando \bar{c}, d tal que $\text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{b}, b_i) = \text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{c}, d)$. De aquí deducimos $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{c}) = \text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a})$ y, empleando la homogeneidad de \mathcal{M} , obtenemos un $e \in M$ de manera que $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{c}, d) = \text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}, e)$. Concluimos que $f_{s+1} := f_s \cup \{(e, b_i)\}$ es la extensión elemental que contiene a b_i en su imagen. \square

Para finalizar la sección, empleemos el teorema anterior para probar que, en caso de existir, el modelo primo de una teoría es único.

Corolario 2.3.11. *Sea T una teoría completa en un lenguaje numerable. Entonces si \mathcal{M} y \mathcal{N} son modelos primos de T , se cumple que $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.*

Demostración. Primeramente, por el Teorema 2.3.5, \mathcal{M} y \mathcal{N} son modelos atómicos numerables. Como los tipos de $S_n(T)$ que se realizan en los modelos atómicos son por definición los tipos aislados, \mathcal{M} y \mathcal{N} realizan los mismos tipos. Por otra parte, por la Proposición 2.3.9, se tiene que \mathcal{M} y \mathcal{N} son modelos homogéneos numerables. Consecuentemente, en virtud del Teorema 2.3.10 concluimos que $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$. \square

2.4. Teorías ω -estables y extensión de modelos primos

En el Teorema 2.3.6 de la pasada sección observábamos que para que una teoría T tenga un modelo primo es necesario y suficiente que sus tipos aislados sean densos sobre $S_n(T)$. A su vez, probábamos en el Teorema 2.2.16 que esto último ocurría cuando los tipos completos de cualquier modelo de T no eran muy numerosos. En resumen, se tiene que las teorías sin *demasiados* tipos completos presentan un modelo primo. Esto motiva el distinguir aquellas teorías cuyos modelos tienen un número “controlado” de tipos completos.

Definición 2.4.1. Sea T una teoría completa en un lenguaje numerable y κ un cardinal arbitrario. Diremos que la teoría es κ -estable si para cada $\mathcal{M} \models T$ y $A \subset M$ con $|A| = \kappa$, se tiene que $|S_n^{\mathcal{M}}(A)| = \kappa$.

Por razones históricas nos referiremos a las teorías \aleph_0 -estable como ω -estables. Empleando el razonamiento que hemos realizado al comienzo del capítulo obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.4.2. *Sea T una \mathcal{L} -teoría completa en un lenguaje \mathcal{L} numerable. Entonces, si T es ω -estable se cumple que para todo $\mathcal{M} \models T$ y $A \subset M$, los tipos aislados en $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ son densos.*

Demostración. Por ser T ω -estable tenemos que para cualquier $\mathcal{M} \models T$ y $A_0 \subset A \subset M$ con A_0 numerable se cumple $|S_n^{\mathcal{M}}(A_0)| = \omega$. Por consiguiente, en virtud del Teorema 2.2.16, los tipos aislados son densos en $S_n^{\mathcal{M}}(A)$. \square

Corolario 2.4.3. *Toda teoría completa T sobre un lenguaje numerable que sea ω -estable tiene un modelo primo.*

Demostración. Puesto que la teoría T es completa, tomando cualquier modelo \mathcal{M} de ella se tiene que $T = \text{Th}(\mathcal{M})$ y, por ende, $S_n(T) = S_n(\text{Th}(\mathcal{M})) = S_n^{\mathcal{M}}(\emptyset)$. El resultado anterior con $A = \emptyset$ prueba que los tipos aislados en $S_n^{\mathcal{M}}(\emptyset)$ son aislados y, aplicando el Teorema 2.3.6, se tiene que T tiene un modelo primo. \square

Observación 2.4.4. La propiedad de ser ω -estable no es necesaria para que una teoría tenga un modelo primo. En efecto, tal y como vimos en el Ejemplo 2.3.2, la teoría de los cuerpos reales cerrados tiene un modelo primo y, sin embargo, cumple $|S_n(T)| = 2^{\aleph_0}$ tal y como se demuestra en [5, Ejemplo 4.3.11].

A pesar de la gran utilidad que supone la existencia de un modelo primo \mathcal{M} , cuando se trabaja con conjuntos de parámetros $A \subset M$, este no aporta suficiente información. Por ejemplo, dado $\mathcal{N} \models T$ y un morfismo parcialmente elemental $f : A \rightarrow \mathcal{N}$, nada asegura que el morfismo elemental $f^* : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, que existe por ser \mathcal{M} primo, vaya a ser una extensión de f . Por ello es necesario ampliar la noción de modelo primo para que no solo existan morfismos elementales a todos los modelos de T sino que, además, respeten las asignaciones sobre un conjunto de parámetro A .

Definición 2.4.5. Sea T una teoría y $A \subset \mathcal{M} \models T$. Diremos que \mathcal{M} es un modelo *primo sobre A* si para cada $\mathcal{N} \models T$ y $f : A \rightarrow \mathcal{N}$ parcialmente elemental, podemos encontrar $f^* : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un morfismo elemental que extiende a f .

Observación 2.4.6. La razón por la cual se sigue empleando el término *primo* para referirse a este tipo de modelos se basa en que estos son primos en una teoría extendida. En efecto, sea T una teoría completa, \mathcal{M} un modelo de T y $A \subset M$. Entonces, un modelo primo sobre A de la teoría T , no es más que un modelo primo de la teoría $\text{Th}_A(\mathcal{M})$. Para ver esto es suficiente con observar que \mathcal{N} es un modelo de $\text{Th}_A(\mathcal{M})$ si, y solo si, \mathcal{N} es un modelo de $\text{Th}(\mathcal{M}) = T$ y existe un monomorfismo parcialmente elemental $f : A \rightarrow \mathcal{N}$.

Seguidamente, probaremos que las teorías ω -estables tienen modelos primos sobre cualquier subconjunto A . Veamos antes un par de lemas previos para realizar la demostración.

Lema 2.4.7. *Sea T una teoría completa en un lenguaje numerable \mathcal{L} y $\mathcal{M} \models T$. Si $(\bar{a}, \bar{b}) \in M^{m+n}$ realiza un tipo aislado de $S_{n+m}(T)$ entonces \bar{a} realiza un tipo aislado en $S_n(T)$. De hecho, si $A \subset M$ y $(\bar{a}, \bar{b}) \in M^{m+n}$ realiza un tipo aislado de $S_{n+m}^{\mathcal{M}}(A)$ se tiene que $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A)$ es un tipo aislado.*

Demostración. Sea $\phi(\bar{v}, \bar{w})$ la \mathcal{L}_A -fórmula que aísla $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}, \bar{b}/A)$. Nuestro objetivo será probar que $\exists \bar{w} \phi(\bar{v}, \bar{w})$ aísla $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A)$. Por la Proposición 2.2.4, basta probar que para cualquier \mathcal{L}_A -fórmula $\psi(\bar{v})$ se cumple que $\psi(\bar{v}) \in \text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A)$ si, y solo si,

$$\text{Th}_A(\mathcal{M}) \models \forall \bar{v} (\exists \bar{w} \phi(\bar{v}, \bar{w}) \rightarrow \psi(\bar{v})). \quad (\dagger)$$

La implicación de derecha a izquierda es trivial pues se tiene por hipótesis que $\mathcal{M} \models \exists \bar{w} \phi(\bar{a}, \bar{w})$ y, por lo anterior, $\mathcal{M} \models \exists \bar{w} \phi(\bar{a}, \bar{w}) \rightarrow \psi(\bar{a})$. En particular, $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$ y, por tanto, $\psi(\bar{v}) \in \text{tp}(\bar{a}/A)$.

Para la otra implicación supongamos que no se cumple (\dagger) . Entonces ha de existir un $\bar{c} \in M^m$ tal que

$$\mathcal{M} \models \neg (\exists \bar{w} \phi(\bar{c}, \bar{w}) \rightarrow \psi(\bar{c})).$$

Con lo cual, existiría $\bar{d} \in M^n$ tal que $\mathcal{M} \models \phi(\bar{c}, \bar{d})$ y $\mathcal{M} \models \neg \psi(\bar{c})$. Por otra parte como $\psi(\bar{v}) \in \text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A) \subset \text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}, \bar{b}/A)$ y $\phi(\bar{v}, \bar{w})$ aísla a $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}, \bar{b}/A)$, sabemos que tiene que darse

$$\text{Th}_A(\mathcal{M}) \models \forall \bar{v} \forall \bar{w} (\phi(\bar{v}, \bar{w}) \rightarrow \psi(\bar{v})).$$

Pero esto supone una contradicción con la existencia de $(\bar{c}, \bar{d}) \in M^{n+m}$. \square

Lema 2.4.8. *Supongamos que $A \subset B \subset \mathcal{M} \models T$ y que todo $\bar{b} \in B^m$ realiza un tipo aislado en $S_m^{\mathcal{M}}(A)$. Entonces todo $\bar{a} \in M^n$ que realice un tipo aislado de $S_n^{\mathcal{M}}(B)$ también realiza un tipo aislado de $S_n^{\mathcal{M}}(A)$.*

Demostración. Sea $\phi(\bar{v}, \bar{w})$ una \mathcal{L} -fórmula y $\bar{b} \in B^m$ de manera que $\phi(\bar{v}, \bar{b})$ aísla $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/B)$. Consideremos ahora $\theta(\bar{w})$ una \mathcal{L}_A -fórmula aislando $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{b}/A)$. Nuestro objetivo será probar que $\phi(\bar{v}, \bar{w}) \wedge \theta(\bar{w})$ aísla $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}, \bar{b}/A)$ ya que en este caso, en virtud del lema anterior, obtendremos que $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A)$ es aislado.

En efecto, emplearemos la misma caracterización que en el lema anterior. La implicación de derecha a izquierda es inmediata pues nuevamente $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}, \bar{b}) \wedge \theta(\bar{b})$. Para la otra implicación tomemos $\psi(\bar{v}, \bar{w}) \in \text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}, \bar{b}/A)$. Como $\phi(\bar{v}, \bar{b})$ aísla $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/B)$, se tiene:

$$\text{Th}_A(\mathcal{M}) \models \forall \bar{v} (\phi(\bar{v}, \bar{b}) \rightarrow \psi(\bar{v}, \bar{b})).$$

Ahora bien, tenemos que $\forall \bar{v} (\phi(\bar{v}, \bar{w}) \rightarrow \psi(\bar{v}, \bar{w})) \in \text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{b}/A)$ y este tipo está aislado por $\theta(\bar{w})$, con lo cual

$$\text{Th}_A(\mathcal{M}) \models \forall \bar{w} (\theta(\bar{w}) \rightarrow \forall \bar{v} (\phi(\bar{v}, \bar{w}) \rightarrow \psi(\bar{v}, \bar{w}))),$$

o, equivalentemente,

$$\text{Th}_A(\mathcal{M}) \models \forall \bar{v} \forall \bar{w} (\theta(\bar{w}) \wedge \phi(\bar{v}, \bar{w}) \rightarrow \psi(\bar{v}, \bar{w})),$$

tal y como queríamos. \square

Teorema 2.4.9. *Sea T una \mathcal{L} -teoría completa y ω -estable sobre un lenguaje numerable y sea $A \subset \mathcal{M} \models T$. Entonces, existe $\mathcal{M}_0 \prec M$, una subextensión elemental que es prima sobre A . Además, \mathcal{M}_0 puede elegirse de manera que todos sus elementos realicen tipos aislados sobre A .*

Demostración. La idea será emplear recurrencia transfinita para construir un ordinal δ y una sucesión de conjuntos $(A_\alpha : \alpha \leq \delta)$ para definir el universo de \mathcal{M}_0 . En el caso base tomamos $A_0 = A$ y, si el ordinal α es límite, definimos $A_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} A_\beta$. Para el caso de un ordinal sucesor $\alpha + 1$ realizamos la siguiente distinción. Si algún elemento de $M \setminus A_\alpha$ realiza un tipo aislado sobre A_α , llamamos a ese elemento a_α y definimos $A_{\alpha+1} = A_\alpha \cup \{a_\alpha\}$. En caso contrario, llamamos al ordinal $\alpha = \delta$ y paramos la recurrencia⁵.

A continuación, veremos que por construcción A_δ es el universo de una cierta estructura que llamaremos \mathcal{M}_0 . En efecto, tal y como comentamos por la Proposición 1.3.3 un subconjunto arbitrario de \mathcal{M} será una subestructura si, y solo si, está cerrado por símbolos de función y contiene todas las constantes. Si, por ejemplo, A_δ no estuviese cerrado por símbolos de función, existiría $f \in \mathcal{L}$ y $a_1, \dots, a_n \in A_\delta$ de manera que $f^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_n) = b$ y $b \notin A_\delta$. Sin embargo, esto es una contradicción, puesto que en la Proposición 2.2.7 vimos que b realiza un tipo aislado. De manera análoga se llega

⁵Desde un punto de vista teórico, tendríamos que realizar una definición más fina de este proceso. En primer lugar, bien ordenamos el universo de M y llamamos γ al ordinal que tiene asociado. A continuación, realizamos la definición de ordinales sucesores $\alpha + 1$ en general, diciendo que si no existe el elemento con las propiedades que buscamos, entonces $A_\alpha = A_{\alpha+1}$. Finalmente, tomaremos δ como el ordinal más pequeño que sea igual a $A_{\gamma+1}$, que se corresponderá al primer eslabón donde se estabiliza la cadena; la existencia de este ordinal viene garantizada por el principio de buena ordenación de ordinales.

al mismo resultado en el caso de las constantes.

Seguidamente, veamos que $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}$ haciendo uso del test de Tarski-Vaught (Teorema 1.3.6). Supongamos que tenemos una \mathcal{L} -fórmula tal que $\mathcal{M} \models \exists v \phi(v, \bar{a})$, con $\bar{a} \in A_\delta^n$. Por la Proposición 2.4.2, por ser T una teoría ω -estable, los tipos aislados de $S_n^{\mathcal{M}}(A_\delta)$ son densos. Con lo cual, podemos encontrar un tipo aislado $p \in S_n^{\mathcal{M}}(A_\delta)$ tal que $\phi(x, \bar{a}) \in p$. Como todo tipo aislado p se realiza en los modelos de una teoría completa, existe $b \in M$ tal que $p = \text{tp}^{\mathcal{M}}(b/A_\delta)$ y, por tanto, $b \in A_\delta$. Concluimos por ende que $\mathcal{M} \models \phi(b, \bar{a})$ y, en virtud del Test de Tarski-Vaught, $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}$. Nótese que esto implica que para cualquier $\alpha < \delta$ se tiene que $\text{tp}^{\mathcal{M}_0}(a_\alpha/A_\alpha) = \text{tp}^{\mathcal{M}}(a_\alpha/A_\alpha)$.

A continuación, veamos que \mathcal{M}_0 es un modelo primo sobre A . Tomemos $\mathcal{N} \models T$ y $f : A \rightarrow \mathcal{N}$ parcialmente elemental. Probaremos usando inducción transfinita que existen morfismos $f = f_0 \subset \dots \subset f_\alpha \subset \dots \subset f_\delta$ donde $f_\alpha : A_\alpha \rightarrow \mathcal{N}$ es parcialmente elemental para cualquier $\alpha \leq \delta$.

El caso base de la inducción lo tenemos por hipótesis y, para el caso de ordinales límites, es suficiente con que consideremos $f_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} f_\beta$. Queda entonces por considerar el caso de un ordinal sucesor $\alpha + 1$, donde sabemos que f_α es parcialmente elemental. Consideremos la \mathcal{L}_{A_α} -fórmula $\phi(v, \bar{a})^6$ que aísla $\text{tp}^{\mathcal{M}_0}(a_\alpha/A_\alpha)$. Observamos que $\phi(v, \bar{a}) \in \text{tp}^{\mathcal{M}_0}(a_\alpha/A_\alpha)$, con lo cual $\mathcal{M}_0 \models \phi(a_\alpha, \bar{a})$. Esto implica que existe $b \in N$ de manera que $\mathcal{N} \models \phi(b, f_\alpha(\bar{a}))$ como consecuencia de $\mathcal{M}_0 \models \exists x \phi(x, \bar{a})$ y que f_α es parcialmente elemental. Lo único que nos queda por demostrar es que $f_{\alpha+1} = f_\alpha \cup \{(a_\alpha, b)\}$ es parcialmente elemental.

Supongamos que para una \mathcal{L} -fórmula $\psi(v, \bar{w})$ y $\bar{a}' \in A_\alpha^n$, se cumple que $\mathcal{M} \models \psi(a_\alpha, \bar{a}')$. Entonces:

$$\mathcal{M}_0 \models \psi(a_\alpha, \bar{a}') \iff \psi(v, \bar{a}') \in \text{tp}^{\mathcal{M}_0}(a_\alpha/A_\alpha) \iff \psi(v, f_\alpha(\bar{a}')) \in \tilde{f}_\alpha(\text{tp}^{\mathcal{M}_0}(a_\alpha/A_\alpha)),$$

donde recordemos \tilde{f}_α denota el homeomorfismo inducido por f_α . Por el Corolario 2.2.12, se tiene que $\phi(v, f_\alpha(\bar{a}))$ aísla $\tilde{f}_\alpha(\text{tp}^{\mathcal{M}_0}(a_\alpha/A_\alpha))$ en $S_1^{\mathcal{N}}(f_\alpha(A_\alpha))$. Por tanto, como $\mathcal{N} \models \phi(b, f_\alpha(\bar{a}))$ y $\psi(v, f_\alpha(\bar{a}'))$ es una $\mathcal{L}_{f_\alpha(A_\alpha)}$ -fórmula que pertenece al tipo que aísla $\phi(v, f_\alpha(\bar{a}))$ se tiene que $\mathcal{N} \models \psi(b, f_\alpha(\bar{a}'))$. Para la otra implicación basta con aplicar el proceso anterior para f_α^{-1} que es, a su vez, parcialmente elemental y está bien definida sobre $f_\alpha(A_\alpha)$. En particular, $f_\delta : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ es un morfismo elemental y se tiene que \mathcal{M}_0 es primo sobre A .

Para concluir el teorema es necesario demostrar que todo elemento de \mathcal{M}_0 aísla un tipo aislado sobre A . Para ello, procedemos por inducción transfinita. El caso base y el caso límite son consecuencias inmediatas de las hipótesis y las definiciones. Para el caso de un ordinal sucesor $\alpha + 1$, tenemos el siguiente esquema: $A \subset A_\alpha \subset \mathcal{M}_0$; donde todos los elementos de A_α aíslan tipos aislados sobre A . Como a_α realiza un tipo aislado sobre A_α podemos aplicar el Lema 2.4.8 y concluir que a_α también realiza un tipo aislado sobre A . \square

Por último, al igual que ocurre con los modelos primos, se puede demostrar que en las teorías ω -estables los modelos primos sobre A son isomorfos.

Teorema 2.4.10. *Sea T una teoría ω -estable. Supongamos que $\mathcal{M} \models T$ y $\mathcal{N} \models T$ son ambos modelos primos sobre A . Entonces existe $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, un isomorfismo que fija A punto a punto.*

Este resultado depende de resultados más profundos de los expuestos en el trabajo. Sin embargo, cualquier lector interesado puede encontrar el material necesario para entenderlo en [5, Teorema 4.2.22 y 6.4.8].

⁶Durante toda la demostración la aparición de las variables libres de las fórmulas no será necesaria, con lo cual serán omitidas para simplificar la notación.

Capítulo 3

Condiciones necesarias para la κ -categoricidad

3.1. Teorema de los dos cardinales de Vaught

En esta sección empezaremos a estudiar ciertas propiedades relacionadas con la categoricidad de una teoría. Nuestra búsqueda se centrará primeramente en encontrar condiciones necesarias para la existencia de la misma. Será con estos nuevos conceptos que las ideas de modelo primo y homogeneidad tomarán un papel dominante a la hora de demostrar sus propiedades. Recordemos que para una \mathcal{L} -estructura \mathcal{M} y una \mathcal{L} -fórmula $\phi(v_1, \dots, v_n)$ se define $\phi(\mathcal{M}) = \{\bar{x} \in M^n : \mathcal{M} \models \phi(\bar{x})\}$. Se trabaja siempre con un lenguaje numerable \mathcal{L} .

Definición 3.1.1. Sean $\kappa > \lambda \geq \aleph_0$. Diremos que una \mathcal{L} -teoría T tiene un (κ, λ) -modelo si existe $\mathcal{M} \models T$ y una $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ -fórmula tal que $|M| = \kappa$ y $|\phi(\mathcal{M})| = \lambda$.

El estudio de los (κ, λ) -modelos aparece de manera natural en el estudio de la categoricidad de una teoría ya que su existencia supone un impedimento para que esta pueda ser κ -categórica.

Proposición 3.1.2. Si una teoría T tiene un (κ, λ) -modelo entonces T no es κ -categórica.

Demostración. Consideremos $\mathcal{M} \models T$ y cierta \mathcal{L} -fórmula $\phi(v_1, \dots, v_n)$ tal que $|M| = \kappa$ y $|\phi(\mathcal{M})| = \lambda$ con $\lambda < \kappa$. Extendiendo nuestro lenguaje a $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{\bar{c}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ donde \bar{c}_α es una n -tupla de constantes $(c_\alpha^1, \dots, c_\alpha^n)$, podemos considerar una nueva \mathcal{L}' -teoría:

$$T' = T \cup \{\phi(\bar{c}_\alpha)\}_{\alpha < \kappa} \cup \{\bar{c}_\alpha \neq \bar{c}_\beta : \alpha \neq \beta\},$$

donde $\bar{c}_\alpha \neq \bar{c}_\beta$ quiere decir que al menos una de las componentes de la tupla es diferente. Veamos que T' es satisfacible. En efecto, dado $\Delta \subset T'$ finito, extendemos \mathcal{M} a una \mathcal{L}' -estructura interpretando las n -tuplas de constantes que aparecen en Δ como elementos diferentes de $\phi(\mathcal{M})$ (pues sabemos que este conjunto es infinito por hipótesis). Tomando ahora $\mathcal{N} \models T'$, podemos observarlo como una \mathcal{L} -estructura que seguirá cumpliendo $|\phi(\mathcal{N})| = \kappa$. Con lo cual, hemos encontrado dos modelos de T de cardinal κ no isomorfos, pues si lo fuesen también lo serían $\phi(\mathcal{N})$ y $\phi(\mathcal{M})$ pero esto es imposible pues no tienen el mismo cardinal. \square

Sin embargo, por sí mismo los (κ, λ) -modelos son un concepto demasiado general que apenas nos ayuda a conocer nuestra teoría. Es por esto que necesitamos un concepto más fuerte que proporcione mayor información al mismo tiempo que siga siendo un impedimento para la categoricidad. Esta misma cuestión es la que motivó a Vaught a emplear el concepto que definimos a continuación en [7]; aunque la terminología es posterior y se emplea en textos como [10].

Definición 3.1.3. Diremos que dos modelos \mathcal{M} y \mathcal{N} de T forman un *par de Vaught*, y lo denotaremos $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$, si $M \neq N$, $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ y existe una \mathcal{L}_M -fórmula $\phi(\bar{v})$ de manera que $\phi(\mathcal{M})$ es infinito y $\phi(\mathcal{M}) = \phi(\mathcal{N})$.

Observación 3.1.4. Observamos que la definición anterior nos dice que la existencia de un par de Vaught $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ implica que existe una \mathcal{L}_M -fórmula tal que $\phi(\bar{v})$ tiene infinitas realizaciones en M y ninguna en $N \setminus M$. En efecto, hay infinitas realizaciones por definición y dado cualquier $a \in N$ tal que $\mathcal{N} \models \phi(a)$ se cumple $a \in M$ pues $\phi(\mathcal{N}) = \phi(\mathcal{M})$.

Proposición 3.1.5. Si T tiene un (κ, λ) -modelo donde $\kappa > \lambda \geq \aleph_0$ entonces existe un par de Vaught $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ de modelos de T .

Demostración. Sea \mathcal{N} un (λ, κ) -modelo de T y llamemos ϕ a la \mathcal{L} -fórmula que cumple $|\phi(\mathcal{N})| = \lambda$. Como $\aleph_0 \leq \lambda$ podemos aplicar el Teorema de Löwenheim-Skolem descendente (1.3.8) con $X = \phi(\mathcal{N})$ y encontrar un subextensión elemental $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ de manera que $\phi(\mathcal{N}) \subset M$ y $|M| = \lambda$. Con lo cual, por una parte $\phi(\mathcal{M}) \subset \phi(\mathcal{N})$ pues \mathcal{M} es subestructura elemental de \mathcal{N} y, por otra parte, $\phi(\mathcal{N}) \subset \phi(\mathcal{M})$ puesto que $\phi(\mathcal{N}) \subset M$. Esto prueba que $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ es par de Vaught. \square

Observación 3.1.6. Añadiendo alguna hipótesis adicional podemos conseguir un recíproco del resultado anterior. En efecto, supongamos que existe un par de Vaught $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ tal que $|M| < |N| = \kappa$ y $|\phi(\mathcal{N})| = \lambda$ (siendo ϕ la \mathcal{L}_M -fórmula de la definición). Entonces como $\lambda = |\phi(\mathcal{N})| = |\phi(\mathcal{M})| \leq |M| < \kappa$, es inmediato ver que \mathcal{N} es un (κ, λ) -modelo.

Por lo tanto, establecida una vez la relación entre estos conceptos, pasemos a enunciar el teorema central de esta sección.

Teorema 3.1.7. (Teorema de los dos Cardinales de Vaught) Si una teoría tiene un par de Vaught, entonces tiene un (\aleph_1, \aleph_0) -modelo.

Este teorema es de gran utilidad para nuestro objetivo porque, combinado con la Proposición 3.1.2, nos dice que ninguna teoría \aleph_1 -categórica tiene pares de Vaught. En la siguiente sección, apoyándonos en este resultado, seremos capaces de generalizar esto último para todo cardinal no numerable.

Empezaremos por demostrar que si existe un par de Vaught en una teoría, entonces podemos encontrar otro par de Vaught donde sus modelos sean numerables. Veremos que en el contexto adecuado esto no es más que una aplicación del Teorema de Löwenheim-Skolem descendente.

Observación 3.1.8. Habitualmente consideramos el par de Vaught $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ como una dupla de modelos. Sin embargo, es posible considerar esta misma estructura viendo a \mathcal{N} como el modelo y a \mathcal{M} como a un subconjunto distinguido suyo.

En general, sea $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{U\}$, donde U es un símbolo de relación 1-ario. Entonces, si \mathcal{M}, \mathcal{N} son dos \mathcal{L} -estructuras tales que $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ podemos considerar $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ como una \mathcal{L}^* -estructura. En efecto, basta con tomar N como su universo, interpretar los símbolos de \mathcal{L} como en N e interpretar $U^{(\mathcal{N}, \mathcal{M})} := M$.

A continuación, veamos una manera de relacionar las \mathcal{L}^* -fórmulas de $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ con las \mathcal{L} -fórmulas de \mathcal{M} . Sea $\phi(v_1, \dots, v_n)$ una \mathcal{L} -fórmula, definimos la \mathcal{L}^* -fórmula $\phi^U(\bar{v})$, la *restricción de ϕ a U* , de manera inductiva como sigue:

1. Si ϕ es una fórmula atómica, entonces $\phi^U : U(v_1) \wedge \dots \wedge U(v_n) \wedge \phi(v)$.
2. Si ϕ es $\neg\psi$, entonces $\phi^U : \neg\psi^U$.
3. Si ϕ es $\psi \wedge \theta$, entonces $\phi^U : \psi^U \wedge \theta^U$.
4. Si ϕ es $\exists v \psi$, entonces $\phi^U : \exists v (U(v) \wedge \psi^U(v))$.

Empleando un sencillo argumento de inducción que omitimos, se prueba que para cualquier $\bar{a} \in M^n$ se cumple $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ si, y solo si, $(\mathcal{N}, \mathcal{M}) \models \phi^U(\bar{a})$.

De aquí en adelante, utilizaremos esta interpretación y las relaciones anteriores sin mencionarlas explícitamente. Continuemos estudiando algunas propiedades de estas nuevas \mathcal{L}^* -estructuras.

Proposición 3.1.9. *Sean \mathcal{M}, \mathcal{N} dos modelos de una \mathcal{L} -teoría T . Entonces si $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ se verifica que:*

1. *Dados dos modelos $\mathcal{N}', \mathcal{M}'$ de T , si $(\mathcal{N}, \mathcal{M}) \prec (\mathcal{N}', \mathcal{M}')$ entonces $\mathcal{M}' \prec \mathcal{N}'$, $\mathcal{M} \prec \mathcal{M}'$ y $\mathcal{N} \prec \mathcal{N}'$.*
2. *Dados dos modelos $\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0$ de T , si $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0) \prec (\mathcal{N}, \mathcal{M})$ entonces $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{N}_0$, $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}$ y $\mathcal{N}_0 \prec \mathcal{N}$.*

Demostración. 1. Sean \mathcal{M}, \mathcal{N} modelos de T cumpliendo $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ y tomemos dos modelos $\mathcal{N}', \mathcal{M}'$ cumpliendo $(\mathcal{N}, \mathcal{M}) \prec (\mathcal{N}', \mathcal{M}')$. Primeramente observemos que si tomamos $\bar{a} \in N^n$ y una fórmula $\psi(v_1, \dots, v_n)$ tal que $(\mathcal{N}, \mathcal{M}) \models \psi(\bar{a}) \wedge \bigwedge_{i=1}^n U(a_i)$ entonces se cumple que $\bar{a} \in M^n$ y $\mathcal{N} \models \psi(\bar{a})$. Con lo cual, como $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ obtenemos que $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})$, lo que equivale a $(\mathcal{N}, \mathcal{M}) \models \psi^U(\bar{a})$. Esto demuestra que para cualquier fórmula $\psi(v_1, \dots, v_n)$ se cumple

$$(\mathcal{N}, \mathcal{M}) \models \forall v \left(\left(\bigwedge_{i=1}^n U(v_i) \wedge \psi(\bar{v}) \right) \rightarrow \psi^U(\bar{v}) \right), \quad (*)$$

y puesto que $(\mathcal{N}, \mathcal{M}) \prec (\mathcal{N}', \mathcal{M}')$, esto también lo cumple $(\mathcal{N}', \mathcal{M}')$.

Para obtener que $\mathcal{M}' \prec \mathcal{N}'$ haremos usos del test de Tarski-Vaught. Con lo cual, consideremos una \mathcal{L} -fórmula $\theta(v, \bar{w})$ y $\bar{a} \in M'^n$ de manera que $\mathcal{N}' \models \exists v \theta(v, \bar{a})$. Puesto que $\bar{a} \in M'^n$, θ es una \mathcal{L} -fórmula y las interpretaciones de \mathcal{N}' y $(\mathcal{N}', \mathcal{M}')$ coinciden en \mathcal{L} deducimos que lo anterior implica que $(\mathcal{N}', \mathcal{M}') \models \bigwedge_{i=1}^k U(a_i) \wedge \exists v \theta(v, \bar{a})$. Entonces, aplicando (*) y la definición de la restricción de $\exists v \theta(v)$ a U obtenemos que $(\mathcal{N}', \mathcal{M}') \models \exists v (U(v) \wedge \theta(v, \bar{a}))$. Por lo tanto, existirá $c \in M'$ (ya que $(\mathcal{N}', \mathcal{M}') \models U(c)$) de manera que $(\mathcal{N}', \mathcal{M}') \models \theta(c, \bar{a})$. Como θ era una \mathcal{L} -fórmula, concluimos que $\mathcal{N}' \models \theta(c, \bar{a})$, lo que finaliza nuestra prueba.

Para obtener que $\mathcal{M} \prec \mathcal{M}'$ observamos, en primer lugar, que $M \subset M'$ pues para $a \in M$ se tiene $(\mathcal{N}, \mathcal{M}) \models U(a)$ si, y solo si, $(\mathcal{N}', \mathcal{M}') \models U(a)$. Por otro lado, dada una \mathcal{L} -fórmula $\phi(\bar{v})$ y $\bar{a} \in M^n$ se tiene

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) \iff (\mathcal{N}, \mathcal{M}) \models \phi^U(\bar{a}) \iff (\mathcal{N}', \mathcal{M}') \models \phi^U(\bar{a}) \iff \mathcal{M}' \models \phi(\bar{a}).$$

Esto prueba que \mathcal{M} es subestructura elemental de \mathcal{M}' .

Por último, $\mathcal{N} \prec \mathcal{N}'$ se obtiene como consecuencia de aplicar $(\mathcal{N}, \mathcal{M}) \prec (\mathcal{N}', \mathcal{M}')$ restringido a \mathcal{L} -fórmulas.

2. La prueba para este caso es análoga a la anterior pues $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0)$ también cumplirá (*) puesto que $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0) \prec (\mathcal{N}, \mathcal{M})$. □

Proposición 3.1.10. *Sea $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ es un par de Vaught de una \mathcal{L} -teoría T , si denotamos por ϕ a una \mathcal{L}_M -fórmula asociada a dicho par y $X \subset M$ al conjunto de parámetros de M que contiene ϕ , entonces se cumplen las siguiente afirmaciones:*

1. *Dados dos modelos $\mathcal{N}', \mathcal{M}'$ de T , si se cumple que $(\mathcal{N}, \mathcal{M}) \prec (\mathcal{N}', \mathcal{M}')$ vistas como \mathcal{L}^* -estructuras, entonces $(\mathcal{N}', \mathcal{M}')$ es un par de Vaught.*
2. *Dados dos modelos $\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0$ de T , si se cumple que $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0) \prec (\mathcal{N}, \mathcal{M})$ vistas como \mathcal{L}^* -estructuras y además $X \subset M_0$, entonces $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0)$ es un par de Vaught.*

Demostración. 1. Sea $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ un par de Vaught de T y tomemos $\mathcal{N}', \mathcal{M}'$ dos modelos de T cumpliendo $(\mathcal{N}, \mathcal{M}) \prec (\mathcal{N}', \mathcal{M}')$. Sea $\phi(v_1, \dots, v_n)$ la \mathcal{L}_M -fórmula del enunciado que sabemos tiene infinitas realizaciones en M y ninguna en $N \setminus M$ (véase la Observación 3.1.4). Esto implica que $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ verifican las siguientes sentencias:

- (1) $\exists \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k \left(\bigwedge_{i < j} (\bar{v}_i \neq \bar{v}_j) \wedge \bigwedge_{i=1}^k \phi(\bar{v}_i) \right) \quad k = 1, 2, \dots \quad (\text{Infinitas realizaciones})$
- (2) $\exists x \neg U(x) \quad (M \text{ y } N \text{ son distintos})$
- (3) $\forall \bar{v} (\phi(\bar{v}) \rightarrow \bigwedge_{i=1}^n U(v_i)) \quad (\text{Toda realizaci3n en } N, \text{ est3 en } M)$

Por ser $(\mathcal{N}', \mathcal{M}')$ una extensi3n elemental de $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$, estas tres sentencias tambi3n se verifican en $(\mathcal{N}', \mathcal{M}')$ lo que prueba que es un par de Vaught. En efecto, en virtud de la Proposici3n 3.1.9, sabemos que $\mathcal{M}' \prec \mathcal{N}'$ y, por otra parte, puesto que $M \subset M'$, se tiene que ϕ es una $\mathcal{L}_{M'}$ -f3rmula. Finalmente, se cumple que N' y M' son diferentes por (1), que $\phi(\mathcal{N}')$ es infinito por (2) y que $\phi(\mathcal{N}') = \phi(\mathcal{M}')$ por (3).

2. La demostraci3n de este aparatado es an3loga a la anterior, salvo en el paso donde se quiere demostrar que ϕ es una \mathcal{L}_{M_0} -f3rmula. Es aqu3 donde utilizamos la hip3tesis extra de que $X \subset M_0$ para asegurarnos de que los par3metros de M que aparecen en ϕ est3n a su vez contenidos en M_0 . \square

Corolario 3.1.11. *Si $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ es un par de Vaught de una teor3a T , entonces existe un par de Vaught $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0)$ donde N_0 es numerable.*

Demostraci3n. Puesto que $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ es un par de Vaught tomemos ϕ , una \mathcal{L}_M -f3rmula tal que $\phi(\mathcal{M})$ es infinito y $\phi(\mathcal{M}) = \phi(\mathcal{N})$ y denotemos como X al conjunto de par3metros de M que ocurren en la f3rmula. A continuaci3n, aplicando el Teorema de L3wenheim-Skolem descendente, podemos encontrar una \mathcal{L}^* -estructura $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0)$ numerable de manera que $X \subset M_0$ y $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0) \prec (\mathcal{N}, \mathcal{M})$. El resultado se sigue de aplicar el segundo apartado de la proposici3n anterior. \square

La siguiente proposici3n es el resultado clave para la demostraci3n de 3.1.7. Sin embargo, es necesario demostrar previamente los siguientes lemas.

Lema 3.1.12. *Sean $M_0 \prec N_0$ dos modelos numerables de una teor3a T . Entonces dado $\bar{a} \in M_0$ y $p \in S_n^{N_0}(\bar{a})$, existen un par de modelos numerables $(\mathcal{N}', \mathcal{M}')$ de manera que vistos como \mathcal{L}^* -estructura son una extensi3n elemental de $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0)$ y tales que \mathcal{M}' realiza p .*

Demostraci3n. Consideremos el conjunto de $\mathcal{L}_{N_0}^*$ -f3rmulas:

$$\Gamma(\bar{v}) = \{\phi^U(\bar{v}, \bar{a}) : \phi(\bar{v}, \bar{a}) \in p\} \cup \{\phi(m_1, \dots, m_n) : (\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0) \models \phi(m_1, \dots, m_n), \phi \in \mathcal{L}\},$$

y veamos que se trata de un tipo viendo que es finitamente realizable. Tomemos $\Delta \subset \Gamma$ un subconjunto finito, entonces este contendr3 ciertos $\phi_1^U, \dots, \phi_m^U$, tales que $\phi_1, \dots, \phi_m \in p$. Como p es un tipo de $S_n^{N_0}(\bar{a})$, este es finitamente satisfacible y, por tanto, $\mathcal{N}_0 \models \exists \bar{v} \bigwedge_{i=1}^m \phi_i(\bar{v}, \bar{a})$. Aplicando que $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{N}_0$ tenemos que $\mathcal{M}_0 \models \exists \bar{v} \bigwedge_{i=1}^m \phi_i(\bar{v}, \bar{a})$ y concluimos que $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0) \models \exists \bar{v} \bigwedge_{i=1}^m \phi_i^U(\bar{v}, \bar{a})$. Esto prueba que Δ es satisfacible pues el resto de f3rmulas que aparecen en Δ se satisfacen trivialmente en $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0)$ y no depende de la elecci3n de \bar{v} .

Por lo tanto, aplicando el Teorema 2.1.8 para la \mathcal{L}^* -estructura $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0)$ y el tipo Γ , deducimos que existe una extensi3n elemental $(\mathcal{N}', \mathcal{M}')$ donde Γ se realiza. De hecho, podemos tomar esta extensi3n numerable por la Observaci3n 3.1.11.

Llamemos $\bar{c} \in N'^n$ a la realizaci3n de Γ . Por una parte, tenemos que como $(x = x) \in p$, entonces su restricci3n a U pertenece a Γ y \bar{c} la satisface. Esto implica que $(\mathcal{N}', \mathcal{M}') \models U(\bar{c}) \wedge (\bar{c} = \bar{c})$ y por tanto $\bar{c} \in M'$. Por otro lado, dado $\chi(\bar{v}, \bar{a}) \in p$, se tiene que $(\mathcal{N}', \mathcal{M}') \models \chi(\bar{c}, \bar{a})$, como $\bar{c} \in M'$ deducimos que $\mathcal{M}' \models \chi(\bar{c}, \bar{a})$. En conclusi3n, p se realiza en \mathcal{M}' . \square

N3tese que el par $(\mathcal{N}', \mathcal{M}')$ que obtenemos como resultado del lema anterior cumple a su vez las propias hip3tesis del mismo en virtud de la Proposici3n 3.1.9. Con lo cual, para cada $\bar{a} \in M_0$ consideramos

$$F_{\bar{a}} = \{\text{tp}^{N_0}(\bar{a}, \bar{b}) : \bar{b} \in N_0\} \subset S_n^{N_0}(\bar{a}),$$

que es un conjunto numerable por serlo \mathcal{N}_0 . De esta manera $F := \bigcup_{\bar{a} \in M_0} F_{\bar{a}}$ será numerable y contendrá a todos los tipos que se realizan en N_0 con ciertos parámetros $\bar{a} \in M$.

A continuación, tomemos una enumeración de F y consideremos la siguiente construcción. Empezando por $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0)$ y aplicando el lema para el primer tipo de la enumeración podemos construir recursivamente una cadena elemental

$$(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0) \prec (\mathcal{N}_1, \mathcal{M}_1) \prec \cdots \prec (\mathcal{N}_k, \mathcal{M}_k) \prec \cdots,$$

de manera que \mathcal{M}_k realice los tipos de la enumeración que sean menores que k . Que la realización de los tipos se mantenga a través de la cadena es consecuencia de que los $(\mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y los $(\mathcal{M}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ formen una cadena respecto a la inclusión por ser las extensiones elementales.

Por último, si definimos $(\mathcal{N}^*, \mathcal{M}^*) = \bigcup_{k=0}^{\infty} (\mathcal{N}_k, \mathcal{M}_k) = (\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{N}_k, \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}_k)$, este par realizará todos los tipos de F , además de ser numerable, por lo que obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.1.13. *Sea $M_0 \prec N_0$ dos modelos numerables de una teoría T . Entonces podemos encontrar una extensión numerable $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0) \prec (\mathcal{N}^*, \mathcal{M}^*)$ de manera que para cualquier $\bar{a} \in M_0$ y $p \in S_n^{\mathcal{N}_0}(\bar{a})$ que se realice en N_0 , se cumpla que p se realiza en \mathcal{M}^* .*

Lema 3.1.14. *Sean $M_0 \prec N_0$ dos modelos numerables de una teoría T . Entonces dado $\bar{b} \in N_0$ y $p \in S_n^{\mathcal{N}_0}(\bar{b})$, existen un par de modelos numerables $(\mathcal{N}', \mathcal{M}')$ de manera que vistos como \mathcal{L}^* -estructura son una extensión elemental de $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0)$ y tales que \mathcal{N}' realiza p .*

Demostración. Dado $p \in S_n^{\mathcal{N}_0}(\bar{b})$, como restringidas a \mathcal{L} las estructuras \mathcal{N}_0 y $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0)$ coinciden, podemos entender p como un tipo (no necesariamente completo) de $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0)$. Con lo cual, haciendo uso combinado de la Proposición 2.1.8 y la Observación 2.1.9 obtenemos que existe una extensión numerable $(\mathcal{N}', \mathcal{M}')$ que realiza p . En particular, como el universo de $(\mathcal{N}', \mathcal{M}')$ es \mathcal{N}' , deducimos que p se realiza en \mathcal{N}' . \square

Proposición 3.1.15. *Sean $M_0 \prec N_0$ dos modelos numerables de una teoría T . Entonces podemos encontrar un par de modelos numerables $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0) \prec (\mathcal{N}, \mathcal{M})$ de manera que tanto \mathcal{M} como \mathcal{N} son homogéneos y realizan los mismos tipos sobre $S_n(T)$. En particular, por el Teorema 2.3.10 se tiene que $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.*

Demostración. Para obtener el resultado construiremos una cadena elemental de pares de modelos numerables

$$(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0) \prec (\mathcal{N}_1, \mathcal{M}_1) \prec \cdots,$$

de manera que para todo $i \in \mathbb{N}$ se cumpla lo siguiente:

- (1) Si $p \in S_n(T)$ se realiza en \mathcal{N}_{3i} , entonces p se realiza en \mathcal{M}_{3i+1} .
- (2) Si $\bar{a}, \bar{b}, c \in M_{3i+1}$ y $\text{tp}^{\mathcal{M}_{3i+1}}(\bar{a}) = \text{tp}^{\mathcal{M}_{3i+1}}(\bar{b})$, entonces existe $d \in M_{3i+2}$ de manera que $\text{tp}^{\mathcal{M}_{3i+2}}(\bar{a}, c) = \text{tp}^{\mathcal{M}_{3i+2}}(\bar{b}, d)$.
- (3) Si $\bar{a}, \bar{b}, c \in N_{3i+2}$ y $\text{tp}^{\mathcal{N}_{3i+2}}(\bar{a}) = \text{tp}^{\mathcal{N}_{3i+2}}(\bar{b})$, entonces existe $d \in N_{3i+3}$ de manera que $\text{tp}^{\mathcal{N}_{3i+3}}(\bar{a}, c) = \text{tp}^{\mathcal{N}_{3i+3}}(\bar{b}, d)$.

Veamos cómo podemos definir la cadena de manera recursivamente y de forma que se cumplan estas propiedades. Comenzamos observando que en todos los pasos inductivos, como $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0) \prec (\mathcal{N}_k, \mathcal{M}_k)$, se tiene que $\mathcal{N}_k \prec \mathcal{M}_k$. Con lo cual en el momento en el que aseguramos $(\mathcal{N}_k, \mathcal{M}_k) \prec (\mathcal{N}_{k+1}, \mathcal{M}_{k+1})$ se tiene que, aplicando la Proposición 3.1.9, $\mathcal{M}_{k+1} \prec \mathcal{N}_{k+1}$, $\mathcal{M}_k \prec \mathcal{M}_{k+1}$ y $\mathcal{N}_k \prec \mathcal{N}_{k+1}$. Este hecho lo emplearemos sin mencionarlo durante las siguientes demostraciones.

Para obtener (1) definimos $(\mathcal{N}_{3i+1}, \mathcal{M}_{3i+1}) := (\mathcal{N}^*, \mathcal{M}^*)$ donde $(\mathcal{N}^*, \mathcal{M}^*)$ es la extensión elemental que se obtiene como resultado de aplicar el Corolario 3.1.13 a $(\mathcal{N}_{3i}, \mathcal{M}_{3i})$. Observemos que esta cumple las hipótesis del corolario por ser, en particular, una extensión elemental de $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0)$.

De esta manera, tomemos un tipo arbitrario $p \in S_n(T)$ que se realice en \mathcal{N}_{3i} . Si llamamos $\bar{a} \in N_{3i}$ a dicha realización de p tenemos que $p = \text{tp}^{\mathcal{N}_{3i}}(\bar{a}) \in S_n^{\mathcal{N}_{3i}}(\bar{a})$. Con lo cual, por construcción se tiene que p se realiza en \mathcal{M}_{3i+1} tal y como queríamos.

A continuación, para (2) consideremos $\bar{a}, \bar{b}, c \in M_{3i+1}$ cumpliendo $\text{tp}^{\mathcal{M}_{3i+1}}(\bar{a}) = \text{tp}^{\mathcal{M}_{3i+1}}(\bar{b})$ y definamos el siguiente conjunto de \mathcal{L} -fórmulas:

$$q := \{\phi(\bar{b}, x) : \phi(\bar{a}, x) \in \text{tp}^{\mathcal{M}_{3i+1}}(\bar{a}, c)\} = \{\phi(\bar{b}, x) : \mathcal{M}_{3i+1} \models \phi(\bar{a}, c)\}.$$

Veamos que $q \in S_n^{\mathcal{N}_{3i+1}}(\bar{b}) = S_n^{\mathcal{M}_{3i+1}}(\bar{b})$ es un tipo probando que es finitamente satisfacible. En efecto, sean $\phi_1(\bar{b}, x), \dots, \phi_s(\bar{b}, x) \in q$, entonces tenemos que $\phi_1(\bar{a}, x), \dots, \phi_s(\bar{a}, x) \in \text{tp}^{\mathcal{M}_{3i+1}}(\bar{a}, c)$. Como c realiza todas las fórmulas obtenemos que $\mathcal{M}_{3i+1} \models \exists x \bigwedge_{j=1}^s \phi_j(\bar{a}, x)$ y aplicando que $\text{tp}^{\mathcal{M}_{3i+1}}(\bar{a}) = \text{tp}^{\mathcal{M}_{3i+1}}(\bar{b})$ obtenemos lo que queremos.

Aplicamos ahora el Lema 3.1.12 para $\mathcal{M}_{3i+1} \prec \mathcal{N}_{3i+1}$ y el tipo $q \in S_n^{\mathcal{N}_{3i+1}}(\bar{b})$ obtenemos que existe una extensión $(\mathcal{N}_{3i+2}, \mathcal{M}_{3i+2})$ de manera que q se realiza en \mathcal{M}_{3i+2} . Llamando $d \in M_{3i+2}$ al elemento tal que $q = \text{tp}^{\mathcal{M}_{3i+2}}(\bar{b}, d)$ se tiene por definición que $\text{tp}^{\mathcal{M}_{3i+2}}(\bar{b}, d) = \text{tp}^{\mathcal{M}_{3i+1}}(\bar{a}, c)$ y, puesto que $\mathcal{M}_{3i+1} \prec \mathcal{M}_{3i+2}$, concluimos que $\text{tp}^{\mathcal{M}_{3i+2}}(\bar{b}, d) = \text{tp}^{\mathcal{M}_{3i+2}}(\bar{a}, c)$.

Observamos que para que obtener (2) es necesario que el resultado se cumpla para cualesquiera $\bar{a}, \bar{b}, c \in M_{3i+1}$. Por lo tanto, puesto que hay una cantidad numerable de ternas $(\bar{a}, \bar{b}, c) \in M^n \times M^n \times M$, se puede emplear el desarrollo anterior para construir una cadena elemental de pares muy parecida a la que se lleva a cabo en el Corolario 3.1.11. Por último, tomando $(\mathcal{N}_{3i+2}, \mathcal{M}_{3i+2})$ como la unión de la cadena se obtiene lo deseado.

Para (3) es suficiente con realizar un argumento idéntico al anterior, solo que esta vez se define $(\mathcal{N}_{3i+3}, \mathcal{M}_{3i+3})$ haciendo uso del Lema 3.1.12.

Sea $(\mathcal{N}, \mathcal{M}) = \bigcup_{k=0}^{\infty} (\mathcal{N}_k, \mathcal{M}_k)$. Entonces $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ es un par de modelos numerables que por (1) realiza los mismos tipos de $S_n(T)$. Además, se tiene que \mathcal{M} y \mathcal{N} son modelos homogéneos de T . En efecto, en primer lugar notamos que como los $(\mathcal{M}_j)_{j < \omega}$ forman una cadena elemental los tipos de un elemento pueden considerarse en cualquier eslabón que los contenga. Sean $\bar{a}, \bar{b} \in M$ de manera que $\bar{a} \rightarrow \bar{b}$ es parcialmente elemental y tomemos cierto $c \in M$. Por construcción, existe un $k \in \mathbb{N}$ de forma que $\bar{a}, \bar{b}, c \in M_{3k+1}$, con lo cual, empleando (2) podemos encontrar $d \in M_{3k+2}$ de manera que $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}, c) = \text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{b}, d)$. Por lo tanto, se puede extender el morfismo parcialmente elemental $\bar{a} \rightarrow \bar{b}$ añadiendo c a su dominio y dándole como imagen d . Esto prueba la \aleph_0 -homogeneidad de \mathcal{M} . De la misma manera se prueba que \mathcal{N} es homogéneo empleando la propiedad (3). \square

Pasamos finalmente a la prueba del Teorema 3.1.7. Para ello partiremos de un par de Vaught suficientemente bueno que, pongamos, tiene asociado cierta fórmula ϕ . La idea consistirá en ir construyendo una cadena de pares de manera que las realizaciones de ϕ estén siempre en el modelo *pequeño* del par. De esta manera, lo que conseguiremos, eventualmente, es que nuestro modelo *grande* sea \aleph_1 y mientras que el conjunto de realizaciones de ϕ se mantiene numerable durante todo el proceso.

Demostración del Teorema 3.1.7. Supongamos que T tiene un par de Vaught. Primeramente, por el Corolario 3.1.11 la teoría presenta un par de Vaught $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0)$ numerable. Seguidamente, como $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{N}_0$, y ambos son numerables en virtud de la Proposición 3.1.15, podemos encontrar $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0) \prec (\mathcal{N}, \mathcal{M})$ de manera que \mathcal{M} y \mathcal{N} realicen los mismos tipos y sean homogéneos; con lo cual también cumplen $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$. Además se tiene que $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ es un par de Vaught por ser una extensión elemental de un par de Vaught. Con lo cual, tomemos cierta \mathcal{L}_M -fórmula ϕ de manera que tenga infinitas realizaciones en M y ninguna en $N \setminus M$.

Vamos a construir una cadena elemental de estructuras numerables $(\mathcal{N}_\alpha : \alpha < \omega_1)$ de forma que cada \mathcal{N}_α sea isomorfo a \mathcal{N} y $(\mathcal{N}_{\alpha+1}, \mathcal{N}_\alpha) \cong (\mathcal{N}, \mathcal{M})$. En particular, de esto último se desprende que ϕ no tiene ninguna realización en $\mathcal{N}_{\alpha+1} \setminus \mathcal{N}_\alpha$. En caso contrario, la imagen de dicha realización por el isomorfismo estaría en $N \setminus M$, pero sabemos que esto no puede darse.

Para la definición empleamos recurrencia transfinita. Para el caso base tomamos $\mathcal{N}_0 := \mathcal{N}$. Por otra parte, si α es un ordinal límite definimos $\mathcal{N}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{N}_\beta$. Observemos que \mathcal{N}_α es la unión

numerable de modelos isomorfos a \mathcal{N} con lo cual, como \mathcal{N} es homogéneo, empleando la Observación 2.3.8, se obtiene que \mathcal{N}_α es también homogéneo. De la misma manera, cualquier tipo que se realice en \mathcal{N}_α se realiza en particular en \mathcal{N} , con lo que ambos realizan los mismos tipos de $S_n(T)$. Por tanto, concluimos que $\mathcal{N} \cong \mathcal{N}_\alpha$.

Por último, para el paso inductivo consideremos $\mathcal{N}_\alpha \cong \mathcal{N}$. Puesto que por hipótesis $\mathcal{N} \cong \mathcal{M}$ deducimos que $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}_\alpha$ y denotemos por $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}_\alpha$ a dicho isomorfismo. Denotemos ahora por $Z := \{z_x : x \in N \setminus M\}$ a cierto conjunto de elementos que no pertenecen a \mathcal{N}_α y definamos $\mathcal{N}_{\alpha+1} := \mathcal{N}_\alpha \cup Z$. Tomando la función $H : N \rightarrow \mathcal{N}_{\alpha+1}$:

$$H(x) = \begin{cases} z_x & \text{si } x \in N \setminus M \\ h(x) & \text{si } x \in M \end{cases}$$

es inmediato comprobar que es una biyección. Por consiguiente, podemos emplear H para inducir una interpretación como \mathcal{L} -estructura en $\mathcal{N}_{\alpha+1}$. De hecho, esta nueva estructura $\mathcal{N}_{\alpha+1}$ es isomorfa a \mathcal{N} empleando el propio H . Por otra parte, $\mathcal{N}_{\alpha+1}$ es subestructura elemental de \mathcal{N}_α . En efecto, esto es consecuencia directa de que $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ y que H sea un isomorfismo que extienda a h . Por último, puesto que $H(M) = h(M) = \mathcal{N}_\alpha$, el isomorfismo H también puede entenderse como un \mathcal{L}^* -isomorfismo entre los pares $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ y $(\mathcal{N}_{\alpha+1}, \mathcal{N}_\alpha)$. Esto concluye el paso inductivo. El siguiente diagrama resume la construcción que acabamos de hacer.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N} & \xrightarrow{H} & \mathcal{N}_{\alpha+1} \\ \uparrow \iota & & \uparrow \iota \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{h} & \mathcal{N}_\alpha \end{array}$$

Definamos $\mathcal{N}^* = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathcal{N}_\alpha$. Por un lado se cumple que $|\mathcal{N}^*| = |\bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathcal{N}_\alpha| = \max(\aleph_0, \aleph_1) = \aleph_1$ pues \mathcal{N}_α es numerable para todo α y, por otro, si $\mathcal{N}^* \models \phi(\bar{a})$ entonces $\bar{a} \in M$. Si este no fuese el caso, como $\bar{a} \in \mathcal{N}^*$, tendría que haber un ordinal α de manera que $\bar{a} \in \mathcal{N}_\alpha$ pero $\bar{a} \notin \mathcal{N}_\beta$ para todo $\beta < \alpha$. Si $\alpha = 0$, hemos terminado pues no hay realizaciones de ϕ en $N \setminus M$. En caso contrario, podemos suponer que α es sucesor, pues si fuese límite, por definición, pertenecería a un \mathcal{N}_β con $\beta < \alpha$. Por tanto, llamando α' al predecesor de α , tenemos que $\bar{a} \notin \mathcal{N}_{\alpha'}$ y como $\mathcal{N}_{\alpha'+1} \prec \mathcal{N}^*$ se obtiene que \bar{a} es una realización de ϕ en $\mathcal{N}_{\alpha'+1} \setminus \mathcal{N}_{\alpha'}$. Sin embargo, por construcción, habíamos visto que esto no se cumplía para ningún α , lo que supone una contradicción.

Concluimos que \mathcal{N}^* es el (\aleph_1, \aleph_0) -modelo que estábamos buscando puesto que este es de cardinal \aleph_1 y acabamos de probar que $|\phi(\mathcal{M})| = \aleph_0$. □

Combinando los resultados de esta sección obtenemos el siguiente corolario el cual establece que tener un (κ, λ) -modelo es una obstrucción para la \aleph_1 -categoricidad de una teoría.

Corolario 3.1.16. *Si T es una teoría \aleph_1 -categórica, entonces T no presenta pares de Vaught. En particular, T no tiene (κ, λ) -modelos para $\kappa > \lambda \geq \aleph_0$.*

Demostración. Tomemos T una teoría \aleph_1 -categórica y supongamos que esta tuviese un par de Vaught. Entonces en virtud del Teorema 3.1.7, la teoría T tendría un (\aleph_1, \aleph_0) -modelo. Sin embargo, debido a la Proposición 3.1.2, se tiene que eso es último contradice la \aleph_1 -categoricidad de T . La segunda parte del resultado es una aplicación inmediata de la Proposición 3.1.5. □

Para finalizar la sección estudiaremos que, si la teoría es ω -estable, entonces se puede conseguir un recíproco del Teorema de Vaught.

Lema 3.1.17. *Sea T una teoría ω -estable y $\mathcal{M} \models T$ tal que $|\mathcal{M}| \geq \aleph_1$. Entonces existe una \mathcal{L}_M -fórmula $\phi(v)$ cumpliendo $|\phi(\mathcal{M})| \geq \aleph_1$ y tal que para cualquier otra \mathcal{L}_M -fórmula $\psi(v)$ se da o bien que $|\phi(\mathcal{M}) \cap \psi(\mathcal{M})| \leq \aleph_0$ o bien $|\phi(\mathcal{M}) \cap \neg\psi(\mathcal{M})| \leq \aleph_0$.*

Demostración. Supongamos que no fuese cierto el resultado. Entonces para cada \mathcal{L}_M -fórmula $\phi(v)$ tal que $|\phi(\mathcal{M})| \geq \aleph_1$ existiría una fórmula $\psi(v)$ de manera que tanto $\phi(\mathcal{M}) \cap \psi(\mathcal{M})$ como $\phi(\mathcal{M}) \cap \neg\psi(\mathcal{M})$ serían no numerables. A partir de aquí nuestro objetivo será construir un árbol binario (empleando las mismas técnicas que en el Teorema 2.2.16) para llegar a una contradicción con la ω -estabilidad.

Queremos conseguir un árbol binario con todas sus ramas distintas que cumpla que, sobre cada fórmula del mismo, se pueda aplicar nuestra hipótesis. Con lo cual, construyamos un árbol binario de fórmulas $(\phi_\sigma : \sigma < 2^{<\omega})$ de manera que para cada $\sigma \in 2^{<\omega}$ se cumpla que:

- (1) $|\phi_\sigma(\mathcal{M})| \geq \aleph_1$.
- (2) Si $\sigma \subset \tau$ entonces $\phi_\tau(\mathcal{M}) \subset \phi_\sigma(\mathcal{M})$.
- (3) $\phi_{\sigma,0}(\mathcal{M}) \cap \phi_{\sigma,1}(\mathcal{M}) = \emptyset$.

Comencemos tomando como primera fórmula $\phi_\emptyset : v = v$. Esta fórmula cumple claramente que $|\phi_\emptyset(\mathcal{M})| = |\mathcal{M}| \geq \aleph_1$ y, además, contiene a todo conjunto definible. Para el paso inductivo supongamos que $|\phi_\sigma(\mathcal{M})| \geq \aleph_1$. Si llamamos $\psi(v)$ a una fórmula asociada a ϕ_σ , por la hipótesis del primer párrafo de la demostración, basta con que definimos $\phi_{\sigma,0} = \phi(v) \wedge \psi(v)$ y $\phi_{\sigma,1} = \phi(v) \wedge \neg\psi(v)$. En efecto, la propiedad (1) en estas fórmulas se sigue por construcción. Por otra parte, (2) es consecuencia de que $(\phi_\sigma \wedge \psi)(\mathcal{M}) = \phi_\sigma(\mathcal{M}) \cap \psi(\mathcal{M})$ y $(\phi_\sigma \wedge \neg\psi)(\mathcal{M}) = \phi_\sigma(\mathcal{M}) \cap \neg\psi(\mathcal{M})$. Finalmente (3) proviene de que $\psi(\mathcal{M}) \cap \neg\psi(\mathcal{M}) = \emptyset$.

Consideremos una función $f : \omega \rightarrow 2$. Por la construcción anterior tenemos que:

$$\phi_{f|0}(\mathcal{M}) \supseteq \phi_{f|1}(\mathcal{M}) \supseteq \phi_{f|2}(\mathcal{M}) \supseteq \dots$$

Nuestro primer objetivo es demostrar que $p_f := \{\phi_{f|n} : n < \omega\}$ es un tipo. Para ello probaremos que es finitamente satisficible en \mathcal{M} . En efecto, dados $\phi_{f|n_1}, \dots, \phi_{f|n_m}$ llamemos $k := \max_{1 \leq i \leq m} (n_i)$. Entonces, puesto que los conjuntos forman una cadena descendente se tiene $\phi_{f|k}(\mathcal{M}) \subseteq \bigcap_{i=1}^m \phi_{f|i}(\mathcal{M})$ y claramente este último conjunto será no vacío pues $|\phi_{f|k}(\mathcal{M})| \geq \aleph_1$. Puesto que acabamos de probar que p_f es un tipo, definamos \bar{p}_f como el tipo completo que lo contiene (véase Proposición 2.1.4).

Consideremos ahora dos funciones diferentes $f \neq g$ como la anterior, entonces habrá de existir un m de manera que $f|m = g|m$ pero $f(m+1) \neq g(m+1)$. Con lo cual, por construcción tenemos que $\phi_{f|m+1}(\mathcal{M}) \cap \phi_{g|m+1}(\mathcal{M}) = \emptyset$ lo que quiere decir que $\phi_{f|m+1}$ y $\phi_{g|m+1}$ no pueden estar en el mismo tipo pues, en caso contrario, este no sería finitamente satisficible. Concluimos entonces que $\bar{p}_f \neq \bar{p}_g$, lo que implica que la función que asocia $f \rightarrow p_f$ es inyectiva.

Sea A la unión de los parámetros de las fórmulas $\phi_{\sigma,i}$ con $\sigma < 2^{<\omega}$ e $i \in \{0, 1\}$. De forma similar a como se argumentó en la Proposición 2.2.16, el conjunto A es numerable. Sin embargo, el párrafo anterior demuestra que $S_1(A)$ no es numerable, lo cual contradice la ω -estabilidad de T .

Finalmente, nótese que solo se puede dar una de las dos condiciones simultáneamente. En caso contrario, si para alguna \mathcal{L}_M -fórmula $\psi(v)$ se cumpliera $|\phi(\mathcal{M}) \cap \psi(\mathcal{M})| \leq \aleph_0$ y $|\phi(\mathcal{M}) \cap \neg\psi(\mathcal{M})| \leq \aleph_0$ entonces

$$\aleph_1 \leq |\phi(\mathcal{M})| = |\phi(v) \cap (\psi(\mathcal{M}) \cup \neg\psi(\mathcal{M}))| = |(\phi(\mathcal{M}) \cap \psi(\mathcal{M})) \cup (\phi(\mathcal{M}) \cap \neg\psi(\mathcal{M}))| \leq \aleph_0,$$

lo que supone una contradicción. □

Teorema 3.1.18. *Sea T una teoría ω -estable, $\mathcal{M} \models T$ y $|\mathcal{M}| \geq \aleph_1$. Entonces, existe una extensión elemental propia \mathcal{N} de \mathcal{M} de manera que si $\Gamma(\bar{w})$ es un tipo numerable sobre M que se realiza en \mathcal{N} , también es cierto que $\Gamma(\bar{w})$ se realiza en \mathcal{M} .*

Demostración. Consideremos la fórmula ϕ que se obtiene como resultado de aplicar el Lema 3.1.17. La idea será considerar el tipo p de todas las fórmulas que son ciertas para *casi todos* los elementos que satisfacen $\phi(v)$. Sea el conjunto de \mathcal{L}_M -fórmulas

$$p = \{\psi(v) \mid \psi \in \mathcal{L}_M : |\phi(\mathcal{M}) \cap \psi(\mathcal{M})| \geq \aleph_1\},$$

y veamos que este es un tipo. Sean $\psi_1, \dots, \psi_m \in p$, entonces para todo $i = 0, \dots, m$ se tiene $|\phi(\mathcal{M}) \cap \psi_i(\mathcal{M})| \geq \aleph_1$ y, por la definición de $\phi(v)$, se tiene que $|\phi(\mathcal{M}) \cap \neg\psi_i(\mathcal{M})| \leq \aleph_0$. Con lo cual, como

$$\bigcup_{i=1}^m (\phi(\mathcal{M}) \cap \neg\psi_i(\mathcal{M})) = \phi(\mathcal{M}) \cap \bigcup_{i=1}^m (\neg\psi_i(\mathcal{M})) = \phi(\mathcal{M}) \cap \left(\bigvee_{i=1}^m \neg\psi_i \right) (\mathcal{M}),$$

y la unión finita de conjuntos numerables es numerable, obtenemos que $|\phi(\mathcal{M}) \cap (\bigvee_{i=1}^m \neg\psi_i)(\mathcal{M})| \leq \aleph_0$. Por lo tanto, aplicando las leyes de De Morgan se tiene $|\phi(\mathcal{M}) \cap (\neg \bigwedge_{i=1}^m \psi_i)(\mathcal{M})| \leq \aleph_0$ y puesto que la disyunción en el Lema 3.1.17 era excluyente obtenemos $|\phi(\mathcal{M}) \cap (\bigwedge_{i=1}^m \psi_i)(\mathcal{M})| \geq \aleph_1$. En particular, $\bigwedge_{i=1}^m \psi_i(v) \in p$ y, por tanto, p es finitamente satisfacible (pues de hecho hay al menos \aleph_1 realizaciones). Por último, nuevamente por construcción, puesto que exactamente una de las fórmulas $\psi(v)$ y $\neg\psi(v)$ está en p , concluimos que p es un tipo completo sobre M .

Sea \mathcal{M}' una extensión elemental de \mathcal{M} que contenga a c , una realización de p . Por el Teorema 2.4.9, como la teoría es ω -estable, podemos encontrar $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}'$ un modelo primo sobre $M \cup \{c\}$ de forma que cada $\bar{a} \in N$ realiza un tipo aislado sobre $M \cup \{c\}$.

Sea ahora $\Gamma(\bar{w})$ un tipo numerable sobre \mathcal{M} que se realiza en \mathcal{N} y llamemos $b \in N$ a dicha realización. Por construcción, sabemos que existe una \mathcal{L}_M -fórmula $\theta(\bar{w}, v)$ de manera que $\theta(\bar{w}, c)$ aísla $\text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{b}/M \cup \{c\})$. En particular, $\mathcal{N} \models \theta(\bar{b}, c)$ lo que implica que $\exists \bar{w} \theta(\bar{w}, v) \in p$. Además, dada una \mathcal{L}_M -fórmula $\gamma(\bar{w}) \in \Gamma$, puesto que b realiza dicho tipo y $\theta(\bar{w}, c)$ aísla el tipo de b (con parámetros en $M \cup \{c\}$) aplicando la Proposición 2.2.4 se tiene que

$$\mathcal{N} \models \forall \bar{w} (\theta(\bar{w}, c) \rightarrow \gamma(\bar{w})).$$

En particular, esto equivale a que $\forall \bar{w} (\theta(\bar{w}, v) \rightarrow \gamma(\bar{w})) \in p$. Consideremos ahora el siguiente conjunto de \mathcal{L}_M -fórmulas

$$\Delta = \{\exists \bar{w} \theta(\bar{w}, v)\} \cup \{\forall \bar{w} (\theta(\bar{w}, v) \rightarrow \gamma(\bar{w})) : \gamma \in \Gamma\}.$$

Por lo que acabamos de ver $\Delta \subset p$, lo que implica, por una parte, que Δ es numerable y, por otra, que es un tipo (pues es, en particular, finitamente satisfacible). Notamos además que dada una realización suya, digamos c' , entonces $\mathcal{N} \models \exists \bar{w} \theta(\bar{w}, c')$. Así pues, si llamamos \bar{b}' al elemento que cumple $\mathcal{N} \models \theta(\bar{b}', c')$, este realizaría en particular Γ por el segundo conjunto de fórmulas de Δ . Lo único que faltaría por demostrar es que, de hecho, podemos tomar c' en M , pues entonces como $\mathcal{M} \prec \mathcal{M}'$ y $\mathcal{N} \models \exists \bar{w} \theta(\bar{w}, c')$, podríamos tomar un $\bar{b}' \in M$ con $\mathcal{M} \models \theta(\bar{b}', c')$ el cual realizaría Γ .

Sea $\delta_0(v), \delta_1(v), \dots$ una enumeración de Δ . Entonces, ya que para todo $n < \omega$ se cumple que $\bigwedge_{i=1}^n \delta_i(v) \in p$ aplicando nuevamente el Lema 3.1.17 se obtiene que $|\{x \in M : \mathcal{M} \models \phi(x) \wedge \neg(\delta_0(x) \wedge \dots \wedge \delta_n(x))\}| \leq \aleph_0$. Notese que si x no realiza Δ , es porque no realiza alguna de las δ_k , con lo cual

$$\{x \in M : \mathcal{M} \models \phi(x) \text{ y } x \text{ no realiza } \Delta\} \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \{x \in M : \mathcal{M} \models \phi(x) \wedge \neg(\delta_0(x) \wedge \dots \wedge \delta_n(x))\}.$$

En consecuencia, como el conjunto de la derecha es numerable para todo $n \in \omega$, el número de realizaciones de ϕ en M que no realizan Δ es numerable. Sin embargo, recordemos que por definición el número de realizaciones de ϕ en M es no numerable. Por consiguiente, concluimos que existe un $c' \in M$ de manera que realice Δ . \square

Teorema 3.1.19. *Supongamos que T es una teoría ω -estable la cual tiene un (\aleph_1, \aleph_0) -modelo. Entonces para $\kappa > \aleph_1$ existe un (κ, \aleph_0) -modelo de T .*

Demostración. Sea $\mathcal{M} \models T$ el (\aleph_1, \aleph_0) -modelo de T y denotemos por $\phi(\bar{v})$ a la fórmula tal que $|\phi(\mathcal{M})| = \aleph_0$.

Queremos ir construyendo una cadena elemental de modelos de manera que el universo se vaya haciendo cada vez más grande pero el conjunto $\phi(\mathcal{M})$ siga siendo el mismo. Es decir, dado $\kappa > \aleph_1$ busquemos construir una cadena elemental $(\mathcal{M}_\alpha : \alpha < \kappa)$ de forma que $\mathcal{M}_\alpha \subsetneq \mathcal{M}_{\alpha+1}$ y, sin embargo, cumpla que $\phi(\mathcal{M}_\alpha) = \phi(\mathcal{M}_0)$ para todo $\alpha < \kappa$.

Procedamos, como es habitual, por recursión transfinita tomando como caso base $\mathcal{M}_0 := \mathcal{M}$. Para el caso de un ordinal límite α tomamos $\mathcal{M}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{M}_\beta$. De esta manera, puesto que \mathcal{M}_α es una unión de modelos cumpliendo $\mathcal{M}_\beta \prec \mathcal{M}_\alpha$ y $\phi(\mathcal{M}_\beta) = \phi(\mathcal{M}_0)$ obtenemos $\phi(\mathcal{M}_\alpha) = \phi(\mathcal{M}_0)$. Por último, para el paso inductivo, tomamos un ordinal α y consideramos el conjunto de $\mathcal{L}_{\mathcal{M}_\alpha}$ -fórmulas:

$$\Gamma(v) = \{\phi(v)\} \cup \{v \neq m : m \in M_\alpha, \mathcal{M}_\alpha \models \phi(m)\}.$$

Observamos que $\Gamma(v)$ es un tipo sobre M_α , pues es finitamente satisfacible ya que por hipótesis se tiene que $|\phi(\mathcal{M}_\alpha)| = |\phi(\mathcal{M}_0)| = \aleph_0$. Además, se observa que Γ contiene tantas fórmulas como elementos $\phi(\mathcal{M}_\alpha)$ y que, por consiguiente, es un tipo numerable. Con lo cual, si definimos $\mathcal{M}_{\alpha+1}$ como la extensión propia que obtenemos como resultado de aplicar el Teorema 3.1.18 a \mathcal{M}_α (lo cual es posible pues $|\mathcal{M}_\alpha| \geq |\mathcal{M}_0| = \aleph_1$) se tiene que $\phi(\mathcal{M}_{\alpha+1}) = \phi(\mathcal{M}_0)$. En efecto, al ser $\Gamma(v)$ un tipo numerable sobre M_α que se omite en \mathcal{M}_α , por construcción, $\mathcal{M}_{\alpha+1}$ también ha de omitirlo. Por consiguiente, cualquier realización de ϕ en $\mathcal{M}_{\alpha+1}$ realmente se encuentra en \mathcal{M}_α y, por tanto, en \mathcal{M}_0 .

Tomando $\mathcal{N} = \bigcup_{\alpha < \kappa} \mathcal{M}_\alpha$, como la cadena de universos $(M_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ es estricta se sigue que $|\mathcal{N}| \geq \kappa$. Con lo cual, llamando \mathcal{N}' a la subextensión de tamaño κ que resulta de aplicar el Teorema de Löwenheim-Skolem descendente para $X = \phi(\mathcal{M}_0)$ obtenemos que \mathcal{N}' es un (κ, \aleph_0) -modelo de la teoría T . \square

3.2. Órdenes de indiscernibles

En esta sección nuestro objetivo será probar que las teorías κ -categóricas para κ no numerable son necesariamente ω -estables y no presentan pares de Vaught. Para conseguir esto haremos uso de los resultados que hemos desarrollado anteriormente, así como de una nueva noción: los órdenes indiscernibles.

Definición 3.2.1. Sea I un conjunto infinito y supongamos que $X = \{x_i : i \in I\}$ es un conjunto de elementos distintos de cierta \mathcal{L} -estructura \mathcal{M} . Diremos que X es un *conjunto indiscernible* si para cualesquiera i_1, \dots, i_m y j_1, \dots, j_m dos sucesiones de elementos distintos de I se tiene $\mathcal{M} \models \phi(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) \leftrightarrow \phi(x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$ para cualquier \mathcal{L} -fórmula ϕ con m variables libres.

Básicamente, los conjuntos indiscernibles son conjuntos de elementos de una estructura que no pueden diferenciarse unos de otros mediante fórmulas de primer orden. Veamos esta idea reflejada en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.2. Supongamos que F un cuerpo algebraicamente cerrado que tiene grado de trascendencia infinito. Consideremos x_1, x_2, \dots una sucesión infinita de elementos de F algebraicamente independientes. Sabemos que para cualesquiera dos sucesiones i_1, \dots, i_m y j_1, \dots, j_m podemos encontrar un automorfismo⁶ σ de F de manera que $\sigma(x_{i_k}) = x_{j_k}$ para $k = 1, \dots, m$. Esto demuestra que nuestra sucesión x_1, x_2, \dots es un conjunto indiscernible.

⁶Nótese como aquí el automorfismo habitual de cuerpos coincide por completo con la noción derivada en lógica de \mathcal{L} -automorfismo de estructuras en el lenguaje $\mathcal{L} = \{+, \cdot, -, 0, 1\}$ de los cuerpos.

Por lo tanto, parecería que toda estructura tendrá cierto conjunto indiscernible. Sin embargo, si uno toma $(A, <)$ un orden lineal infinito observa que en esta estructura no existe ningún conjunto indiscernible ni siquiera de tamaño 2. En efecto, basta con tomar $\phi(v_1, v_2) : (v_1 < v_2)$ ya que no se puede dar simultáneamente $a < b$ y $b < a$ para cualesquiera a y b elementos distintos de A . Curiosamente, este es el único impedimento que existe a este respecto.

Definición 3.2.3. Sea $(I, <)$ un conjunto ordenado y sea $(x_i : i \in I)$ una sucesión de elementos distintos de cierta \mathcal{L} -estructura \mathcal{M} . Diremos que $(x_i : i \in I)$ es una sucesión de *orden indiscernible respecto al orden* $(I, <)$ si para cualesquiera $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ y $j_1 < \dots < j_m$ dos sucesiones estrictamente crecientes de I se tiene $\mathcal{M} \models \phi(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) \leftrightarrow \phi(x_{j_1}, \dots, x_{j_m})$ para cualquier \mathcal{L} -fórmula ϕ con m variables libres. Si $(I, <)$ es isomorfo al ordinal (α, \in) , entonces diremos que el *tipo del orden* de la sucesión es α .

Observación 3.2.4. Si X es una sucesión de orden indiscernible respecto al orden $(I, <)$ para una cierta \mathcal{L} -estructura \mathcal{M} y $A \subset M$, definimos el conjunto de \mathcal{L}_A -fórmulas:

$$\text{tp}(X) = \{\phi(v_1, \dots, v_n) : \mathcal{M} \models \phi(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}), i_1 < \dots < i_n \in I, n < \omega\}.$$

Este conjunto es un tipo, pues es claramente finitamente satisficible, y lo llamaremos el *tipo del indiscernible* X sobre A .

Ejemplo 3.2.5. Para la \mathcal{L}_{ord} -estructura $(\mathbb{Q}, <)$ sabemos que dadas dos sucesiones cualesquiera $x_1 < \dots < x_m$ e $y_1 < \dots < y_m$ podemos encontrar un automorfismo $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ tal que $f(x_k) = y_k$ para $k = 1, \dots, m$ (véase [5, Lema 3.1.2]). Esto prueba que todo \mathbb{Q} es una sucesión de orden indiscernible. Esencialmente lo que acabamos de probar es que en el orden usual de \mathbb{Q} no hay ningún elemento (o conjunto finito de elementos) que destaque por encima de otro en lo que se refiere a sus propiedades respecto al orden.

El beneficio de esta definición ampliada es que ahora para cualquier teoría (con al menos un modelo infinito) y para cualquier orden lineal infinito $(I, <)$ vamos a poder encontrar un modelo para el cual exista una sucesión de orden indiscernible $(x_i : i \in I)$.

Teorema 3.2.6. *Sea T una teoría con modelos infinitos. Entonces para cualquier orden lineal infinito $(I, <)$, existe $\mathcal{M} \models T$ tal que esta contiene una sucesión de orden indiscernible respecto al orden $(I, <)$.*

La demostración de este resultado se puede encontrar en [5, Teorema 5.2.3], la cual se basa en un argumento de compacidad combinado con el Teorema de Ramsey (en su enunciado en términos de combinatoria infinita) [4, Teorema 9.1]. La demostración no se incluye en esta memoria porque excede los objetivos razonables del trabajo.

A continuación, vamos a introducir un tipo de teoría que se beneficia enormemente de la existencia de sucesiones de orden indiscernible.

Definición 3.2.7. Diremos que una \mathcal{L} -teoría tiene *funciones de Skolem integradas* si para cada \mathcal{L} -fórmula $\phi(v, w_1, \dots, w_n)$ existe un símbolo de función del lenguaje de manera que $T \models \forall \bar{w} ((\exists v \phi(v, \bar{w})) \rightarrow \phi(f(\bar{w}), \bar{w}))$. En otras palabras, existen suficientes símbolos de función en el lenguaje para recoger toda la información que tienen las fórmulas existenciales.

En muchas ocasiones las teorías con las que trabajamos no tienen ni siquiera símbolos de función, con lo que mucho menos pueden tener funciones de Skolem integradas. Sin embargo, es posible encontrar una teoría ampliada en un nuevo lenguaje extendido en el que sí las tengan.

Teorema 3.2.8. *Sea T una \mathcal{L} -teoría. Entonces existen $\mathcal{L}^* \supset \mathcal{L}$ y $T^* \supset T$ una \mathcal{L}^* -teoría de forma que T^* tiene funciones de Skolem integradas. Adicionalmente, dado $\mathcal{M} \models T$ podemos expandir \mathcal{M} a una \mathcal{L}^* -estructura \mathcal{M}^* de forma que $\mathcal{M}^* \models T^*$. Por último, la elección del lenguaje se puede hacer de manera que $|\mathcal{L}^*| = |\mathcal{L}| + \aleph_0$. La teoría T^* se conoce como la “Skolemización” de la teoría T .*

Demostración. La demostración se omite pues en extensión excede la longitud razonable del trabajo. La prueba detallada puede encontrarse en [5, Lema 2.3.6].

No obstante, veamos cómo se construyen el nuevo lenguaje \mathcal{L}^* y la teoría T^* sin llegar a probar que efectivamente tiene las propiedades del enunciado. En efecto, la demostración consiste en construir una cadena de lenguajes $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \dots$ y una cadena de \mathcal{L}_i -teorías $T = T_0 \subseteq T_1 \subseteq \dots$

Para el caso del lenguaje, estos se definen recursivamente como

$$\mathcal{L}_{i+1} := \mathcal{L}_i \cup \{f_\phi : \phi(v, w_1, \dots, w_n) \text{ una } \mathcal{L}_i\text{-fórmula}, n = 1, 2, \dots\},$$

donde f_ϕ es un símbolo de función de aridad n . Para precisar las \mathcal{L}_i -teoría T_i , en primer lugar se considera para cada \mathcal{L}_i -fórmula $\phi(v, \bar{w})$ la sentencia

$$\Psi_\phi : \forall \bar{w} ((\exists v \phi(v, \bar{w})) \rightarrow \phi(f_\phi(\bar{w}), \bar{w})),$$

y, seguidamente, se definen recursivamente las teorías empleando

$$T_{i+1} := T_i \cup \{\Psi_\phi : \phi(v, \bar{w}) \text{ una } \mathcal{L}_i\text{-fórmula}\}.$$

Finalmente, el lenguaje y la teoría buscadas serán $\mathcal{L}^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_i$ y $T^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} T_i$. \square

Lo primero que hacemos notar respecto a estas teorías es que cualquier secuencia de orden indiscernible para una \mathcal{L}^* -estructuras también lo será para su respectiva restricción a \mathcal{L} . Adicionalmente, para poder trabajar con estructuras que tengan sucesiones de orden indiscernible introducimos el siguiente concepto.

Definición 3.2.9. Sea T^* la Skolemización de una teoría T y sea $\mathcal{M}^* \models T^*$. Entonces para $X \subset M^*$, definimos la *envoltura de Skolem* de X como la \mathcal{L}^* -subestructura de \mathcal{M}^* generada por X y la denotamos por $\mathcal{H}(X)$.

Observación 3.2.10. Veamos que $\mathcal{H}(X)$ es una subestructura elemental de \mathcal{M}^* como consecuencia de que la teoría T^* tenga funciones de Skolem integradas. En efecto, consideremos, con el fin de aplicar Tarski-Vaught, cierta \mathcal{L}^* -fórmula $\phi(v, \bar{w})$ y ciertos $a_1, \dots, a_n \in H(X)$ de manera que $\mathcal{M}^* \models \exists x \phi(x, \bar{a})$. Por construcción de T^* sabemos que ha de existir un símbolo de función f de manera que $\mathcal{M}^* \models \phi(f^{\mathcal{M}^*}(\bar{a}), \bar{a})$. Puesto que $\mathcal{H}(X)$ es una estructura, esta está cerrada por símbolos de función lo que implica que $f^{\mathcal{M}^*}(\bar{a}) = f^{\mathcal{H}(X)}(\bar{a}) \in \mathcal{H}(X)$.

Como ya hemos comentado, el empleo de las sucesiones indiscernibles respecto a un orden tienen múltiples aplicaciones en las teorías con funciones de Skolem integradas. Asimismo, aunque la teoría no posea esta propiedad, se puede extraer información relevante de su Skolemización. Por ejemplo, si tomamos T una \mathcal{L} -teoría arbitraria y T^* su Skolemización, se puede probar que en T^* existen modelos con un número arbitrariamente grande de automorfismos. De esta manera, restringiendo esos modelos a su interpretación en \mathcal{L} podemos deducir este mismo resultado para nuestra teoría original T .

Otra de las aplicaciones interesantes que presenta este método es el de poder encontrar modelos arbitrariamente grandes con un número reducido de tipos completos.

Teorema 3.2.11. *Sea \mathcal{L} un lenguaje numerable y T una \mathcal{L} -teoría con un modelo infinito. Entonces, para todo $\kappa \geq \aleph_0$, existe un $\mathcal{M} \models T$ con $|\mathcal{M}| = \kappa$ de manera que si $A \subset M$, entonces \mathcal{M} realiza a lo sumo $A + \aleph_0$ tipos en $S_n^{\mathcal{M}}(A)$.*

Demostración. Realizaremos la demostración solamente para 1-tipos, siendo el caso general análogo. Sean T^* la Skolemización de T y \mathcal{L}^* el lenguaje extendido para el cual T^* tiene funciones de Skolem integradas. Sea $\mathcal{N}^* \models T^*$ un modelo que contiene una sucesión de orden indiscernible I respecto del orden $(\kappa, <)$, y denotemos $\mathcal{M}^* := \mathcal{H}(I)$ que sabemos es un modelo de T^* por la Observación 3.2.10. De ahora en adelante identificaremos el elemento $x \in I$ con su índice en κ . De esta forma,

dados $x_\alpha, x_\beta \in I$ con $\alpha, \beta < \kappa$, si escribimos $i_\alpha < i_\beta$ queremos decir que $\alpha < \beta$. Llamaremos $\mathcal{M} = \mathcal{M}^*|_{\mathcal{L}}$ que es, por la construcción de T^* del Teorema 3.2.8, un modelo de T y, por simplicidad, nos referiremos al universo de ambas estructuras como M . Además, puesto que $|\mathcal{L}^*| = |\mathcal{L}| + \aleph_0 = \aleph_0$ sabemos que $|M| = |\mathcal{H}(I)| = \kappa$. Veamos que \mathcal{M} es el modelo que satisface las condiciones del enunciado.

Nótese que por la definición de $\mathcal{H}(I)$, para cada $m \in M$ existe un término $t_m \in \mathcal{L}^*$ y una tupla finita \bar{x}_m de elementos en I tal que $m = t_m(\bar{x}_m)$. De hecho, podemos suponer que los elementos de la k -tupla $\bar{x}_m = (x_1, \dots, x_k)$ está ordenada, es decir, que $x_1 < \dots < x_k$ (según el orden κ de la secuencia indiscernible). Fijemos un subconjunto $A \subset M$ y probemos que \mathcal{M} realiza a lo sumo $A + \aleph_0$ tipos en $S_1^{\mathcal{M}}(A)$. Para ello, en primer lugar consideremos

$$X = \{x \in I : x \text{ aparece en algún } \bar{x}_a \text{ para cierto } a \in A\},$$

el cual satisface que $|X| \leq |A| + \aleph_0$, al ser las tuplas \bar{x}_a finitas.

A continuación, definimos una relación de equivalencia en las tuplas finitas ordenadas de I . Dadas dos k -tuplas ordenadas \bar{y} y \bar{z} de elementos en I , diremos que $\bar{y} \sim_X \bar{z}$ si para todo $x \in X$ y todo $i = 1, \dots, k$ se cumple:

$$y_i < x \iff z_i < x \quad \& \quad y_i = x \iff z_i = x.$$

En otras palabras, dos k -tuplas estarán relacionadas si son indiscernibles respecto al orden restringido a los elementos que aparecen en X . El motivo por el que nos restringimos a X es porque en este se encuentran los únicos elementos que importan a efectos de los parámetros de A .

Esto nos permite demostrar que, dados dos elementos $b, c \in M$ tales que $b = t_b(\bar{y})$ y $c = t_c(\bar{z})$ si $\bar{y} \sim_X \bar{z}$, entonces b y c realizan el mismo tipo en $S_1^{\mathcal{M}}(A)$. En efecto, sea $\bar{a} = (a_1, \dots, a_l) \in A^l$ y sea $\phi(w, \bar{a})$ una \mathcal{L} -fórmula. Puesto que las sucesiones $\bar{y} = (y_i)_{i < l}$ y $\bar{z} = (z_i)_{i < l}$ son indiscernibles respecto a $\bar{x}_{a_1}, \dots, \bar{x}_{a_l}$ se tiene, aplicando la definición de orden indiscernible, que

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \phi(b, a_1, \dots, a_l) &\iff \mathcal{M} \models \phi(t_b(y_1, \dots, y_l), t_{a_1}(\bar{x}_{a_1}), \dots, t_{a_l}(\bar{x}_{a_l})) \\ &\iff \mathcal{M} \models \phi(t_c(z_1, \dots, z_l), t_{a_1}(\bar{x}_{a_1}), \dots, t_{a_l}(\bar{x}_{a_l})) \\ &\iff \mathcal{M} \models \phi(c, a_1, \dots, a_l). \end{aligned}$$

Con lo cual, lo único que queda para terminar nuestro teorema es demostrar que el número de clases de equivalencia es menor o igual que $|A| + \aleph_0$. Para ello, dado $y \in I \setminus X$ definimos $C_y := \{x \in X : x < y\}$ y lo llamamos el *corte* de y . Notemos, primeramente, que el tamaño de clases de equivalencias es a lo sumo el de cortes diferentes.

En efecto, consideremos $\mathcal{C} = \{C_y : y \in I \setminus X\}$ el conjunto de todos los cortes. Sea \mathcal{O}^k el conjunto de k -tuplas ordenadas de I y definamos la aplicación $f : \mathcal{O}^k / \sim_X \rightarrow (\mathcal{C} \sqcup X)^k$ tal que

$$f([\bar{y}]_X) = f([y_1, \dots, y_n]_X) = \begin{cases} y_i & , \text{si } y_i \in X. \\ C_{y_i} & , \text{si } y_i \notin X. \end{cases}$$

que asigna a cada elemento de la clase, o bien el propio elemento de X o bien su respectivo corte.

Esta función está bien definida pues dados $\bar{y} \sim_X \bar{z}$, se tiene que si $y_i \in X$ entonces $z_i = y_i$ por definición. Por otro lado, si $y_i \notin X$, se tiene $z_i \notin X$ y, por definición, $y_i < x$ si, y solo si, $z_i < x$. En este caso $C_{z_i} = C_{y_i}$ y la imagen de la clase está unívocamente definida. Adicionalmente, dándole la vuelta a los argumentos que acabamos de esbozar, se sigue que la función es también inyectiva. Esto muestra que $|\mathcal{O}^k / \sim_X| = |f(\mathcal{O}^k / \sim_X)| \leq |(\mathcal{C} \sqcup X)^k| = |(\mathcal{C} \sqcup X)|^k = (|C| + |X|)^k$ donde se ha empleado que el producto cartesiano de un conjunto es equipotente al propio conjunto.

Para terminar el argumento acotemos el número de cortes. Si $I = X$, entonces $\mathcal{C} = \{\emptyset\}$. En otro caso, se tiene que $X \subsetneq I$ y construimos una nueva función $g : \mathcal{C} \rightarrow X \cup \{\emptyset\}$ definida de la siguiente manera. Dado un corte no vacío C_y , si $\{i \in X : i > C_y\}$ es vacío, entonces definimos $g(C_y) := \emptyset$. En caso de que $\{i \in X : i > C_y\}$ no sea vacío, entonces $g(C_y) := \inf\{i \in X : i > C_y\}$ (el cual existe y es

único porque el orden en I inducido por κ es un buen orden). Por último, si C_y es vacío, definimos $g(C_y)$ como el ínfimo de X .

Veamos que g es inyectiva. En primer lugar, si $g(C_y) = \emptyset$, se tiene por definición que $\{i \in X : i > C_y\} = \emptyset$ y, por la convexidad del conjunto C_y , deducimos que $C_y = X$. Si $g(C_y)$ es igual al ínfimo de X , entonces, es claro que $C_y = \emptyset$, ya que si $C_y \neq \emptyset$, el ínfimo del conjunto $\{i \in X : i > C_y\}$ no podría ser el ínfimo de X . En el caso restante, dados $C_y \neq C_z$ con $y, z \in I \setminus X$, si suponemos sin pérdida de generalidad que $y < z$, entonces existe cierto $x_0 \in X$ tal que $y < x_0 < z$. En particular, se tiene

$$\inf\{i \in X : i > C_y\} < x_0 < \inf\{i \in X : i > C_z\}$$

y, por tanto, $\inf\{i \in X : i > C_y\} \neq \inf\{i \in X : i > C_z\}$. Por consiguiente, como g es inyectiva, deducimos que $|\mathcal{C}| \leq |X| + 1$. Reuniendo todo lo que se ha probado resulta que

$$|\mathcal{O}^k / \sim_X| \leq |\mathcal{C}| + |X| \leq |X| + 1 + |X| = |X| \leq |A| + \aleph_0.$$

En definitiva, se obtiene que, como máximo, puede haber $|A| + \aleph_0$ tipos que se realizan en el modelo \mathcal{M} . □

Empleando este teorema se podrá probar que las teorías κ -categóricas son ω -estables y no presentan pares de Vaught. Como veremos en la siguiente sección, esto se corresponde con una de las dos direcciones en el Teorema de Baldwin y Lachlan (Teorema 4.2.6)

Teorema 3.2.12. *Sea T es una teoría completa en un lenguaje numerable con modelos infinitos y sea $\kappa \geq \aleph_1$. Entonces si T es κ -categórica, se tiene que T es ω -estable y no tiene pares de Vaught. En particular, T tampoco presenta (κ, λ) -modelos con $\kappa > \lambda \geq \aleph_0$.*

Demostración. Si T no fuese ω -estable, entonces podríamos encontrar $\mathcal{M} \models T$ y $A \subset M$ numerable de manera que $|S_n^{\mathcal{M}}(A)| > \aleph_0$. Podemos suponer que \mathcal{M} es numerable empleando el Teorema de Löwenheim-Skolem para el subconjunto A , pues recordemos que los tipos completos son los mismos en cualquier subestructura elementalmente equivalente. A continuación, queremos encontrar una extensión elemental de \mathcal{M} realizando al menos \aleph_1 tipos de $S_n^{\mathcal{M}}(A)$. Para ello, construyamos una cadena elemental $(\mathcal{M}_\alpha : \alpha < \omega_1)$ de modelos numerables de T aplicando recursión transfinita. En primer lugar, sea $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una colección de cardinal \aleph_1 de tipos de $S_n^{\mathcal{M}}(A)$. Como caso base tomamos $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$ y para α ordinal límite definimos $\mathcal{M}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{M}_\beta$. Para el paso inductivo definimos $\mathcal{M}_{\alpha+1}$ como la extensión elemental numerable de \mathcal{M}_α que realiza p_α . Considerando $\mathcal{M}^* = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \mathcal{M}_\alpha$ es claro que este cumple lo que queremos y que, además, tiene cardinal \aleph_1 . Como $\kappa \geq \aleph_1$, por Löwenheim-Skolem ascendente podemos tomar una extensión elemental \mathcal{N}_1 de \mathcal{M} con cardinal κ . Nótese que en particular, \mathcal{N}_1 realiza una cantidad no numerable de tipos sobre A .

Por otra parte, por el Teorema 3.2.11 existe un modelo \mathcal{N}_2 de T de cardinalidad κ de manera que \mathcal{N}_2 realiza, a lo sumo, una cantidad numerable de tipos de $S_n^{\mathcal{N}_2}(B)$ si B es numerable. Suponiendo ahora que T fuese κ -categórica, entonces habría de existir un isomorfismo $f : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$. Aplicando la Proposición 2.2.13 obtenemos que los tipos que realiza \mathcal{N}_1 sobre $S_n^{\mathcal{N}_1}(A)$ y los tipos que realiza \mathcal{N}_2 sobre $S_n^{\mathcal{N}_2}(f(A))$ están en biyección. Sin embargo, esto es imposible pues el primero es no numerable y el segundo es numerable. Esto prueba que T es ω -estable.

Pasemos a demostrar que T no tiene pares de Vaught. Aplicando el Teorema de los dos cardinales de Vaught deducimos que existe un (\aleph_1, \aleph_0) -modelo. Por tanto, como T es ω -estable por el argumento anterior, deducimos por el Teorema 3.1.19 que existe un (κ, \aleph_0) -modelo. Sin embargo, esto es imposible pues contradice la Proposición 3.1.2. □

Capítulo 4

El Teorema de Morley

4.1. Conjuntos fuertemente minimales

En este capítulo, el último del trabajo, se recopilan todos los resultados y conceptos definidos hasta ahora, así como algunos conceptos nuevos como el de minimalidad fuerte para construir la prueba al Teorema de Morley.

Como se comentó en la introducción, los ejemplos canónicos de teorías κ -categóricas para cardinales κ no numerables son la teoría de los espacios vectoriales sobre un cuerpo numerable y la teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados. La idea principal de esta primera sección será generalizar, al ámbito de la lógica matemática, los instrumentos teóricos que se usan habitualmente en el estudio de estas teorías.

Concretamente, nos interesa conseguir un análogo de la idea de dimensión. Buscamos una herramienta que permita caracterizar cuándo dos modelos son isomorfos, como ocurre, por ejemplo, con los espacios vectoriales de dimensión infinita. Sin embargo, para poder conseguir este tipo de teoremas nos tendremos que restringir a cierto tipo de teorías (las fuertemente minimales).

Supondremos durante todo el capítulo que estamos trabajando con un lenguaje numerable \mathcal{L} .

Definición 4.1.1. Dada una \mathcal{L} -estructura \mathcal{M} , diremos que $X \subset M^n$ es un *conjunto definible* si existe una \mathcal{L} -fórmula $\phi(\bar{v}, \bar{w})$ y un $\bar{b} \in M^m$ de manera que $X = \{a \in M^n : \mathcal{M} \models \phi(\bar{a}, \bar{b})\}$. En este caso diremos que $\phi(\bar{v}, \bar{w})$ *define* X . Si $A \subset M$, diremos que X es *A-definible* si existe una \mathcal{L} -fórmula $\psi(\bar{v}, \bar{w})$ y un $\bar{b} \in A^m$ de manera que $X = \{a \in M^n : \mathcal{M} \models \psi(\bar{a}, \bar{b})\}$.

Observación 4.1.2. Dados una \mathcal{L} -estructura \mathcal{M} , una \mathcal{L} -fórmula $\phi(\bar{v}, \bar{w})$ y $\bar{a} \in M$ para simplificar la notación de ahora en adelante escribiremos $\phi(\mathcal{M}, \bar{a}) := \{\bar{y} \in M^n : \mathcal{M} \models \phi(\bar{y}, \bar{a})\}$.

Definición 4.1.3. Sea \mathcal{M} una \mathcal{L} -estructura y sea $D \subseteq M^n$ un conjunto definible infinito. Diremos que D es un conjunto *minimal* en \mathcal{M} si para cada conjunto definible $Y \subseteq D$ se tiene que o bien Y es finito o bien $D \setminus Y$ es finito. Si $\phi(\bar{v}, \bar{a})$ es la fórmula (con posibles parámetros de M) que define D , diremos que $\phi(\bar{v}, \bar{a})$ es *minimal*.

Adicionalmente, diremos que D es *fuertemente minimal* si D sigue siendo minimal en cualquier extensión elemental \mathcal{N} de \mathcal{M} . Análogamente, diremos que una fórmula $\phi(\bar{v}, \bar{a})$ es *fuertemente minimal* si define un conjunto minimal en cualquier extensión elemental de \mathcal{M} .

Por último, diremos que una teoría T es *fuertemente minimal* si todo modelo \mathcal{M} de T es fuertemente minimal.

Observación 4.1.4. 1. Sea T una \mathcal{L} -teoría y sea $\mathcal{M} \models T$. Consideremos $\psi(\mathcal{M}) \subseteq M$ un conjunto fuertemente minimal donde $\psi(\bar{v}, \bar{a})$ tiene parámetros en $A_0 \subset M$ y veamos que la propiedad de ser fuertemente minimal no depende del modelo \mathcal{M} que se tome, sino solamente del tipo de A_0 . En otras palabras, veamos que dado cualquier otro modelo \mathcal{N} de T tal que exista un monomorfismo parcial

$f : A_0 \rightarrow \mathcal{N}$ verifica que $\psi(\mathcal{N})$ también es fuertemente minimal. En efecto, para cualquier fórmula $\phi(v, w) \in \mathcal{L}$ se cumple que

$$\Sigma_\phi(\bar{w}) := \{\exists^{>k} \bar{v}(\psi(\bar{v}, \bar{a}) \wedge \phi(\bar{v}, \bar{w})) \wedge \exists^{>k} v(\psi(\bar{v}, \bar{a}) \wedge \neg\phi(\bar{v}, \bar{w})) : k = 0, 1, \dots\}$$

es un conjunto de \mathcal{L} -fórmulas sobre A_0 que no puede ser realizado en ninguna extensión elemental de \mathcal{M} , por ser $\phi(\mathcal{M})$ fuertemente elemental. Con lo cual, $\Sigma_\psi(\bar{w})$ no puede ser un tipo, pues contradiría la Proposición 2.1.8 y, por tanto, alguna de sus fórmulas es inconsistente con $\text{Th}_{A_0}(\mathcal{M})$. En particular, para cada \mathcal{L} -fórmula $\phi(v, w)$ existe un número natural k_ϕ tal que

$$\mathcal{M} \models \forall \bar{w}(\exists^{\leq k_\phi} \bar{v}(\psi(\bar{v}, \bar{a}) \wedge \phi(\bar{v}, \bar{w})) \vee \exists^{\leq k_\psi} \bar{v}(\psi(\bar{v}, \bar{a}) \wedge \neg\phi(\bar{v}, \bar{w}))).$$

Esta es una fórmula con parámetros en A_0 por lo que también \mathcal{N} la satisface, lo que implica que $\psi(\mathcal{N})$ es fuertemente minimal.

2. En general, durante el capítulo trabajaremos con una fórmula minimal $\phi(\bar{v}, \bar{a}_0)$ definida en cierto modelo \mathcal{M} de manera que ϕ tenga parámetros $A_0 \subset M$. Sin embargo, tal y como se ha demostrado en la primera parte de la observación, ϕ podría haber sido definida usando cualquier otro modelo \mathcal{N} que contuviese una copia “adecuada” de A_0 , es decir, tal que exista $\bar{b}_0 \in N^n$ cumpliendo $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}_0) = \text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{b}_0)$.

Con lo cual, cuando se esté trabajando con dos modelos \mathcal{N}_1 y \mathcal{N}_2 realizaremos un abuso de lenguaje diciendo que A_0 está contenido en ambos. Con esto, lo que realmente se quiere expresar es que existen $\bar{a}_i \in N_i$, de manera que $\phi(\mathcal{N}_i, \bar{a}_i)$ es fuertemente minimal con $i = 1, 2$ y $\text{tp}^{\mathcal{N}_1}(\bar{a}_1) = \text{tp}^{\mathcal{N}_2}(\bar{a}_2)$.

Como ocurre en cualquier parte del Álgebra, necesitaremos lo primero de todo una noción de independencia. Así, procediendo de manera similar a como se hace en Álgebra Conmutativa, empecemos por definir qué se entiende por elemento algebraico sobre un conjunto.

Definición 4.1.5. Sea \mathcal{M} una \mathcal{L} -estructura y $A \subset M$. Diremos que un elemento $b \in M$ es *algebraico* sobre A si existe una \mathcal{L} -fórmula $\phi(v, \bar{w})$ y un $\bar{a} \in A$ de manera que $\mathcal{M} \models \phi(b, \bar{a})$ y $\phi(\mathcal{M}, \bar{a}) := \{y \in M : \mathcal{M} \models \phi(y, \bar{a})\}$ es finito.

Definimos la *clausura algebraica de A* como el conjunto de todos los elementos de M algebraicos sobre A y la denotaremos por $\text{acl}(A)$. Dado un conjunto $D \subset M$ definible sobre $A_0 \subset M$, definimos

$$\text{acl}_D(A) := \text{acl}(A \cup A_0) \cap D.$$

Omitiremos el subíndice D cuando este se entienda por el contexto.

Observación 4.1.6. 1. Sea $D \subset M$ un conjunto fuertemente minimal definido con parámetros A_0 . Entonces, es fácil comprobar que para cualquier $A \subset M$ se cumple que $x \in \text{acl}_D(A)$ si, y solo si, $x \in D$ y existe una fórmula $\phi(w, \bar{a})$ con parámetros en $A \cup A_0$ tal que $\mathcal{M} \models \phi(x, \bar{a})$ y que tiene un número finito de realizaciones en D .

2. Si D está definido sobre un conjunto A_0 entonces es posible considerar los parámetros A_0 , como constantes en el lenguaje \mathcal{L}_{A_0} . De esta manera, si se trabaja en este nuevo lenguaje, D es un conjunto definible sin parámetros. Asimismo, puesto que ya no es necesario considerar los parámetros de A_0 , la clausura algebraica $\text{acl}_{\mathcal{L}_{A_0}}(A) \cap D$ que obtenemos empleando \mathcal{L}_{A_0} -fórmulas coincide con la clausura $\text{acl}_D(A)$ que hemos definido anteriormente.

Ejemplo 4.1.7. En un cuerpo algebraicamente cerrado K la noción de teoría de modelos de clausura algebraica coincide con la usual de la teoría de cuerpos. Más específicamente, dado $A \subset K$ se tiene que $a \in \text{acl}(A)$ si, y solo si, a es algebraico sobre el subcuerpo de K generado por A (véase [5, Proposición 3.2.15]).

De aquí en adelante va a interesar restringir nuestro estudio a las clausuras algebraicas que se encuentren definidas sobre conjuntos fuertemente minimales. Una de las principales razones es la siguiente propiedad conocida como principio del intercambio.

Proposición 4.1.8. (Principio del intercambio) Supongamos que $D \subset M$ es minimal y sean $A \subset D$ y $a, b \in D$. Entonces, si $a \in \text{acl}_D(A \cup \{b\}) \setminus \text{acl}_D(A)$, se cumple $b \in \text{acl}_D(A \cup \{a\})$.

Demostración. Por la Observación 4.1.6.2 podemos asumir que D es definible sin parámetros y trabajar con \mathcal{L}_{A_0} -fórmulas. Supongamos que $a \in \text{acl}(A \cup \{b\}) \setminus \text{acl}(A)$, entonces, existirá cierta fórmula $\phi(x, y)$ con parámetros en A , de manera que $\mathcal{M} \models \phi(a, b)$ y tal que $|\{x \in D : \mathcal{M} \models \phi(x, b)\}| = n$. Sea $\psi(w)$ una fórmula que exprese justamente que $\{x \in D : \mathcal{M} \models \phi(x, b)\}$ tiene exactamente n elementos. Llamando a la fórmula que define D , esta puede expresarse como

$$\psi(w) : D(w) \wedge \exists x_1, \dots, x_n \left(\left(\bigwedge_{i=1}^n D(x_i) \wedge \phi(x_i, w) \right) \wedge \forall z \left(D(z) \wedge \phi(z, w) \rightarrow \left(\bigvee_{i=1}^n z = x_i \right) \right) \right).$$

Probaremos que $\psi(w) \wedge \phi(a, w)$ es la fórmula que hace a b algebraico sobre $A \cup \{a\}$. Por consiguiente, lo único que tenemos que demostrar es que $\{w \in D : \psi(w) \wedge \phi(a, w)\}$ es finito, así que supongamos que este no fuese el caso. Por ser D minimal la única posibilidad es que $\{w \in D : \psi(w) \wedge \phi(a, w)\}$ sea cofinito y, por ende, podemos suponer que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|D \setminus \{w \in D : \psi(w) \wedge \phi(a, w)\}| = k$. Consideremos, siguiendo el mismo método realizado arriba, $\chi(x)$ una fórmula que exprese que $D \setminus \{w \in D : \psi(w) \wedge \phi(x, w)\}$ tiene exactamente k elementos.

Observamos que $\chi(x)$ define un conjunto cofinito. En caso contrario, como χ viene definida únicamente parámetros de A y puesto que $\mathcal{M} \models \chi(a)$ llegaríamos a que $a \in \text{acl}(A)$, lo que supone una contradicción. Con lo cual, como D es minimal, $\chi(x)$ define un conjunto cofinito.

Sean $a_1, \dots, a_{n+1} \in D$ distintos tales que $\mathcal{M} \models \chi(a_i)$ para todo $i = 1, \dots, n+1$ y definamos $B_i = \{w \in D : \phi(a_i, w) \wedge \psi(w)\}$. Por hipótesis, los B_i son cofinitos y excluyen exactamente k elementos, con lo cual, tomando $B = \bigcap_{i=1}^{n+1} B_i$, este será un conjunto no vacío ya que excluye como mucho $k \cdot (n+1)$ elementos de D . Sea $\hat{b} \in B$, entonces $\mathcal{M} \models \phi(a_i, \hat{b})$ para cada $i = 1, \dots, n+1$ lo que implica que $|\{x \in D : \mathcal{M} \models \phi(x, \hat{b})\}| \geq n+1$. Sin embargo, esto supone una contradicción con el hecho de que $\mathcal{M} \models \psi(\hat{b})$. \square

Ya tenemos las herramientas suficientes para definir una noción de independencia que generalice el concepto de independencia lineal, en espacios vectoriales; y el concepto de algebraicamente independiente, en el caso de los cuerpos algebraicamente cerrados. De ahora en adelante \mathcal{M} será un modelo arbitrario de T y D es un conjunto fuertemente minimal en M .

Definición 4.1.9. Sea T una \mathcal{L} -teoría y sea \mathcal{M} un modelo de T . Sea $D \subset M$ un conjunto fuertemente minimal definido sobre A_0 . Decimos que $A \subset D$ es *independiente sobre A_0* si $a \notin \text{acl}_D(A \setminus \{a\})$ para todo $a \in A$. Además, dado $C \subset D$ diremos que A es *independiente de C sobre A_0* si $a \notin \text{acl}_D((C \cup A) \setminus \{a\})$ para todo $a \in A$.

A continuación, veamos qué relación existe entre los elementos independientes en los distintos modelos de una teoría. El siguiente resultado establece que si existe una fórmula minimal con parámetros en A_0 , entonces los elementos independientes sobre A_0 tienen el mismo tipo sobre A_0 .

Teorema 4.1.10. Sea T una \mathcal{L} -teoría completa y sea $\phi(v)$ una fórmula fuertemente minimal definida sobre A_0 . Sean $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$ dos modelos que contienen a A_0 . Dados $a_1, \dots, a_n \in \phi(\mathcal{M})$ y $b_1, \dots, b_n \in \phi(\mathcal{N})$ elementos independientes sobre A_0 , se cumple que $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A_0) = \text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{b}/A_0)$.

Demostración. Por la Observación 4.1.6. 2. podemos suponer que estamos trabajando en el lenguaje \mathcal{L}_{A_0} y que, por tanto, ϕ está definida sin parámetros. Probamos por inducción el teorema. Para el caso base, suponemos que tenemos dos elementos $a \in \phi(\mathcal{M})$ y $b \in \phi(\mathcal{N})$ ambos independientes sobre \emptyset . Es decir, tenemos $a \in \phi(\mathcal{M}) \setminus \text{acl}(\emptyset)$ y $b \in \phi(\mathcal{N}) \setminus \text{acl}(\emptyset)$.

Consideremos una fórmula $\psi(v) \in \text{tp}^{\mathcal{M}}(a)$ o, lo que es lo mismo, tal que $\mathcal{M} \models \psi(a)$. Nótese que $(\phi \wedge \psi)(\mathcal{M})$ debe ser infinito pues, en caso contrario, a sería algebraico sobre \emptyset . En particular, puesto que ϕ es fuertemente minimal, $\phi(\mathcal{M})$ es minimal, lo que implica que $\phi(\mathcal{M}) \setminus (\phi(\mathcal{M}) \cap \psi(\mathcal{M})) = \phi(\mathcal{M}) \setminus \psi(\mathcal{M})$ tiene que ser finito. Esto último lo podemos escribir como

$$\mathcal{M} \models \exists x_1, \dots, x_n \left(\left(\bigwedge_{i=1}^k \phi(x_i) \wedge \neg \psi(x_i) \right) \wedge \forall z \left(\phi(z) \wedge \neg \psi(z) \rightarrow \left(\bigvee_{i=1}^k z = x_i \right) \right) \right),$$

para cierto $k \in \mathbb{N}$. Esta fórmula no tiene parámetros y, por ende, al ser T una teoría completa, también se tiene que

$$\mathcal{N} \models \exists x_1, \dots, x_n \left(\left(\bigwedge_{i=1}^k \phi(x_i) \wedge \neg \psi(x_i) \right) \wedge \forall z \left(\phi(z) \wedge \neg \psi(z) \rightarrow \left(\bigvee_{i=1}^k z = x_i \right) \right) \right).$$

Esto quiere decir que $\phi(\mathcal{N}) \setminus \psi(\mathcal{N})$ es finito. Con lo cual, si $b \in \phi(\mathcal{N}) \setminus \psi(\mathcal{N})$, entonces b sería algebraico sobre \emptyset , pero esto no puede ocurrir por hipótesis. Concluimos, por consiguiente, que $b \in \psi(\mathcal{N})$ y $\psi(b) \in \text{tp}^{\mathcal{N}}(b)$. Para la otra dirección simplemente es suficiente repetir el argumento cambiando \mathcal{N} por \mathcal{M} y a por b .

Para el paso inductivo, supongamos que tenemos $a_1, \dots, a_{n+1} \in \phi(\mathcal{M})$ y $b_1, \dots, b_{n+1} \in \psi(\mathcal{N})$ donde ambos conjuntos son independientes sobre \emptyset y que el resultado es cierto para n elementos independientes sobre \emptyset . Entonces, denotando $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ y $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n)$, se tiene que $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{b})$. Tomemos, cierta fórmula $\psi(\bar{w}, v)$ sin parámetros de manera que $\mathcal{M} \models \psi(\bar{a}, a_{n+1})$. Puesto que a_{n+1} es independiente sobre \emptyset , $a_{n+1} \notin \text{acl}(\{\bar{a}\})$ y, repitiendo el mismo argumento que en el caso base, llegamos a que el conjunto $\phi(\mathcal{M}) \cap \psi(\bar{a}, \mathcal{M})$ es infinito. Nuevamente, por ser ϕ fuertemente minimal, deducimos que $\phi(\mathcal{M}) \setminus \psi(\bar{a}, \mathcal{M})$ es finito. Si se expresa este enunciado como una fórmula de primer orden tal que

$$\mathcal{M} \models \exists x_1, \dots, x_n \left(\left(\bigwedge_{i=1}^k \phi(x_i) \wedge \neg \psi(\bar{a}, x_i) \right) \wedge \forall z \left(\phi(z) \wedge \neg \psi(\bar{a}, z) \rightarrow \left(\bigvee_{i=1}^k z = x_i \right) \right) \right)$$

se observa que esta no es más que una \mathcal{L} -fórmula $\gamma(\bar{v})$ cumpliendo $\mathcal{M} \models \gamma(\bar{a})$. Con lo cual, como sabemos que $\bar{a} \rightarrow \bar{b}$ es un morfismo parcialmente elemental, por hipótesis de inducción, se tiene que dicho enunciado es también cierto en \mathcal{N} donde se sustituye \bar{a} por \bar{b} . Por lo tanto, $\phi(\mathcal{N}) \setminus \psi(\bar{b}, \mathcal{N})$ es un conjunto finito y como b_{n+1} no es algebraico sobre $\{\bar{b}\}$ se llega, empleando el mismo procedimiento que antes, a que $b_{n+1} \in \psi(\bar{b}, \mathcal{N})$. Concluimos que $\psi(\bar{w}, v) \in \text{tp}^{\mathcal{N}}(\bar{b}, b_{n+1})$, lo que termina el paso inductivo. \square

Como consecuencia inmediata del teorema, deducimos que los conjuntos infinitos de elementos independientes son de hecho conjuntos de indiscernibles (véase Definición 3.2.1).

Corolario 4.1.11. *Sea T una \mathcal{L} -teoría completa y sea $\phi(v)$ un fórmula fuertemente minimal definida sobre A_0 . Sean $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$ dos modelos que contienen a A_0 . Sea $B \subset \phi(\mathcal{M})$ independiente sobre A_0 y sea $C \subset \phi(\mathcal{N})$ independiente sobre A_0 . Entonces B y C son conjuntos indiscernibles con, además, el mismo tipo sobre A_0 .*

Si observamos atentamente este último corolario, lo que está diciendo es que la única manera de diferenciar dos conjuntos independientes de D es mediante su cardinalidad. Esta idea no es nueva, pues ocurre lo mismo, por ejemplo, en los espacios vectoriales. Esto nos conduce de manera natural a la idea de base.

Definición 4.1.12. *Sea D un conjunto fuertemente minimal y sea $Y \subset D$. Decimos que un subconjunto $B \subset Y$ es base de Y si B es independiente sobre A_0 y $\text{acl}_D(B) = \text{acl}_D(Y)$.*

Otra manera de entender las bases es como conjuntos maximales independientes, donde maximal significa que no hay ningún otro conjunto independiente que lo contenga estrictamente. Por lo tanto, imitando el mismo argumento que en el Teorema de Hamel sobre las bases de un espacio vectorial, llegamos a que todo subconjunto de un conjunto fuertemente minimal tiene una base. Además, cualquier base que cojamos tiene necesariamente la misma cardinalidad. Resumimos esta información en el siguiente lema.

Lema 4.1.13. *Sea D un conjunto fuertemente minimal definido con parámetros sobre A_0 y sean $A, B \subset D$ dos conjuntos independientes sobre A_0 . Entonces dado $Y \subseteq D$ se cumple*

1. *Existe una base de Y .*
2. *Si A y B son bases para Y , entonces $|A| = |B|$.*

La demostración del segundo resultado se encuentra en [5, Lema 6.1.9] y hace uso del principio del intercambio. Esto permite pasar, finalmente, a la noción de dimensión para un subconjunto de un conjunto fuertemente minimal.

Definición 4.1.14. *Sea D un conjunto fuertemente minimal. Dado $Y \subset D$, definimos la *dimensión* de Y como la cardinalidad de cualquier base de Y . Escribiremos $\dim(Y)$ para denotar a la dimensión de Y .*

Observación 4.1.15. *Veamos que si D es no numerable, $\dim(D) = |D|$. En efecto, tomemos una base cualquiera B de D y supongamos que $|B| < |D|$. Por una parte sabemos por la definición de clausura algebraica, que en $\text{acl}_D(B)$ puede haber tantos elementos como \mathcal{L}_B -fórmulas. Puesto que $|\mathcal{L}_B| = |\mathcal{L}| + |B|$ y el lenguaje es numerable, obtenemos que $\aleph_0 + |B| \geq |\text{acl}_D(B)|$. Ahora bien, puesto que $\text{acl}_D(B) = \text{acl}_D(D)$ y $\text{acl}_D(D) = D$ (pues todo $d \in D$ es algebraico sobre D mediante la fórmula $v = d$), llegamos a que $|D| = |\text{acl}_D(B)| \leq \aleph_0 + |B| < |D|$. Contradicción.*

Pasemos al último resultado de la sección, donde se demuestra que bajo las mismas condiciones del Teorema 4.1.10, si además $\phi(\mathcal{M})$ y $\phi(\mathcal{N})$ tienen la misma dimensión, entonces se puede encontrar una biyección parcialmente elemental entre ellos.

Lema 4.1.16. *Sea \mathcal{M} una \mathcal{L} -estructura, $A \subseteq M$ y $b \in M$. Entonces se verifican los siguientes enunciados:*

1. *Si una \mathcal{L}_A -fórmula $\phi(x)$ no aísla $\text{tp}^{\mathcal{M}}(b/A)$, entonces existe $\psi(x) \in \text{tp}^{\mathcal{M}}(b/A)$ de manera que $(\psi \wedge \phi)(\mathcal{M}) \subsetneq \phi(\mathcal{M})$.*
2. *Si b es algebraico sobre A , entonces $\text{tp}^{\mathcal{M}}(b/A)$ es un tipo aislado.*

Demostración. 1. Sea $\phi(x)$ una \mathcal{L}_A -fórmula que no aísla $\text{tp}^{\mathcal{M}}(b/A)$ y supongamos por contradicción que el resultado fuese falso. Entonces, para toda \mathcal{L}_A -fórmula $\psi(y) \in \text{tp}^{\mathcal{M}}(b/A)$ se tendría que $(\psi \wedge \phi)(\mathcal{M}) = \phi(\mathcal{M})$. En otras palabras, toda realización en \mathcal{M} de ϕ sería, en particular, una realización de ψ . Con lo cual, $\mathcal{M} \models \forall w(\phi(w) \rightarrow \psi(w))$ para cualquier \mathcal{L}_A -fórmula. Sin embargo, en virtud de la Proposición 2.2.4, esto contradice el hecho de que ϕ no aísla $\text{tp}^{\mathcal{M}}(b/A)$.

2. Sea $b \in M$ algebraico sobre $A \subset M$. Entonces existe una \mathcal{L}_A -fórmula $\phi(w)$ tal que $\mathcal{M} \models \phi(b)$ y tal que $\psi(\mathcal{M})$ es finito. Si se tiene que $\psi(w)$ aísla $\text{tp}^{\mathcal{M}}(b/A)$, la demostración ha terminado. En caso contrario, por la primera parte del lema, existe una \mathcal{L}_A -fórmula $\psi \in \text{tp}^{\mathcal{M}}(b/A)$ tal que $(\psi \wedge \phi)(\mathcal{M}) \subsetneq \phi(\mathcal{M})$. Como $\phi(\mathcal{M})$ es un conjunto finito, esto, en particular, implica que $|(\psi \wedge \phi)(\mathcal{M})| < |\phi(\mathcal{M})|$.

Puesto que $(\psi \wedge \phi)(w) \in \text{tp}^{\mathcal{M}}(b/A)$, se puede repetir el proceso anterior un número finito de veces hasta encontrar una fórmula que aísla $\text{tp}^{\mathcal{M}}(b/A)$ o hasta obtener una \mathcal{L}_A -fórmula $\gamma(w)$ cuya única realización sea b . En ese caso, γ sería la fórmula que aísla $\text{tp}^{\mathcal{M}}(b/A)$ ya que, para cualquier fórmula $\chi(w)$, se cumpliría que $\chi(w) \in \text{tp}^{\mathcal{M}}(b/A)$ si, y solo si, $\mathcal{M} \models \forall w(\gamma(w) \rightarrow \chi(w))$. \square

Antes de empezar el Teorema 4.1.17 es necesario introducir la siguiente notación. Dadas dos \mathcal{L} -estructuras \mathcal{M} y \mathcal{N} con un subconjunto común A y M_0 un subconjunto de M (no necesariamente una \mathcal{L} -estructura), se dice que $f : M_0 \rightarrow N$ es un monomorfismo *parcial A -elemental* si es parcialmente elemental aplicado a \mathcal{L}_A -fórmulas. Equivalentemente, esto significa que f puede extenderse a un monomorfismo parcialmente elemental $f^* : M_0 \cup A \rightarrow N$ tal que $f^*|_A = \text{id}_A$. Es inmediato observar que un monomorfismo es parcialmente elemental en \mathcal{L}_A si, y solo si, es parcial A -elemental en \mathcal{L} .

Teorema 4.1.17. *Sea T una \mathcal{L} -teoría completa y sea $\phi(v)$ un fórmula fuertemente minimal definida sobre A_0 . Sean $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$ dos modelos que contienen a A_0 . Si $\dim(\phi(\mathcal{M})) = \dim(\phi(\mathcal{N}))$ entonces existe un monomorfismo parcialmente A_0 -elemental y biyectivo $f : \phi(\mathcal{M}) \rightarrow \phi(\mathcal{N})$.*

Demostración. Sean B y C dos bases de $\phi(\mathcal{M})$ y $\psi(\mathcal{N})$ respectivamente. Puesto que $|B| = |C|$, podemos encontrar una biyección $f : B \rightarrow C$. De hecho, puesto que B y C son bases, en virtud del Corolario 4.1.11 estos son conjuntos de indiscernibles con el mismo tipo sobre A_0 . Entonces, dada una \mathcal{L}_{A_0} -fórmula $\psi(v_1, \dots, v_n)$ y $b_1, \dots, b_n \in B$ se tiene que

$$\mathcal{M} \models \psi(b_1, \dots, b_n) \iff \mathcal{N} \models \psi(f(b_1), \dots, f(b_n))$$

y, por tanto, f es un monomorfismo parcialmente A_0 -elemental y biyectivo. De aquí en adelante, para simplificar el argumento supondremos que el lenguaje \mathcal{L} con el que se trabaja es \mathcal{L}_{A_0} .

Consideremos el conjunto

$$I := \{g : B' \rightarrow C' : B \subseteq B' \subseteq \phi(\mathcal{M}), C \subseteq C' \subseteq \phi(\mathcal{N}), f \subseteq g \text{ parcial } A_0\text{-elemental y biyectivo}\}$$

el cual es no vacío pues f pertenece a él. Estableciendo la inclusión como orden parcial en I , se puede probar rutinariamente que toda cadena tiene una cota superior tomando la unión de los dominios y las imágenes, así como de las propias funciones. Con lo cual, empleando el Lema de Zorn, el conjunto I tiene un elemento maximal $g : B' \rightarrow C'$ con $B' \subseteq \phi(\mathcal{M})$ y $C' \subseteq \phi(\mathcal{N})$. Supongamos que existe $b \in \phi(\mathcal{M}) \setminus B'$, entonces puesto que $\phi(\mathcal{M}) = \text{acl}(\phi(\mathcal{M})) = \text{acl}(B)$, b es algebraico sobre B y, por ende, sobre B' pues $B \subset B'$.

Por el lema anterior, sabemos que existe una $\mathcal{L}_{B'}$ -fórmula $\psi(v, \bar{d})$ que aísla $\text{tp}^{\mathcal{M}}(b/B')$. En particular, $\mathcal{M} \models \exists v (\psi(v, \bar{d}) \wedge \phi(v))$ y, por ser g parcial A_0 -elemental, $\mathcal{N} \models \exists v (\psi(v, g(\bar{d})) \wedge \phi(v))$. Es decir, existe $c \in \phi(\mathcal{N})$ de manera que $\mathcal{N} \models \psi(c, g(\bar{d}))$.

A continuación, se muestra, siguiendo un argumento muy parecido al llevado a cabo en el Teorema 2.4.9, que se puede extender g a un nuevo morfismo parcial A_0 -elemental si mandamos b a c . En efecto, supongamos que para una $\mathcal{L}_{B'}$ -fórmula $\varphi(w, \bar{d}')$ se cumple que $\mathcal{M} \models \varphi(b, \bar{d}')$. Entonces,

$$\mathcal{M} \models \varphi(b, \bar{d}') \iff \varphi(v, \bar{d}') \in \text{tp}^{\mathcal{M}}(b/B') \iff \varphi(v, g(\bar{d}')) \in \tilde{g}(\text{tp}^{\mathcal{M}}(b/B'))$$

donde \tilde{g} denota el homeomorfismo inducido por g . Por el Corolario 2.2.12 se tiene que $\psi(v, g(\bar{d}))$ aísla $\tilde{g}(\text{tp}^{\mathcal{M}}(b/B'))$ en $S_1^{\mathcal{N}}(C')$. Por tanto, como $\mathcal{N} \models \psi(c, g(\bar{d}))$ y $\varphi(v, g(\bar{d}'))$ es una $\mathcal{L}_{C'}$ -fórmula que pertenece al tipo que aísla $\psi(v, g(\bar{d}))$, se tiene que $\mathcal{N} \models \varphi(c, g(\bar{d}'))$. Para la otra implicación es aplicar el proceso anterior para g^{-1} que es, a su vez, parcial A_0 -elemental y está bien definida sobre C' .

No obstante, esta última construcción contradice la maximalidad de g' . Con lo cual, $\phi(\mathcal{M}) = B'$. Mediante un argumento, análogo haciendo uso de g^{-1} , llegamos también a que $\phi(\mathcal{N}) = C'$. En definitiva, g' es el monomorfismo parcial A_0 -elemental y biyectivo que buscábamos. \square

Finalmente, se tiene que si una teoría es fuertemente minimal dos modelos son isomorfos si y solo tienen la misma dimensión.

Corolario 4.1.18. *Sea T una teoría fuertemente minimal. Entonces si $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$, se tiene que $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ si, y solo si, $\dim(\mathcal{M}) = \dim(\mathcal{N})$.*

Demostración. En primer lugar, observemos que en una teoría fuertemente minimal, la fórmula $\phi : v = v$ es fuertemente minimal. Con lo cual, para cualesquiera dos modelos $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$ que tengan la misma dimensión, puesto que ϕ no tiene parámetros y $\phi(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$ y $\phi(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ se cumple, empleando el Teorema 4.1.17, que existe un morfismo parcial elemental y biyectivo $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, es decir, un isomorfismo.

Para la otra dirección, nótese que es suficiente con probar que en las teorías fuertemente minimales los isomorfismos mandan bases a bases. En efecto, sean $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$ y sea $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ un isomorfismo, entonces el resultado se sigue de que $a \in M$ es algebraico sobre $A \subset M$ si, y solo si, $f(a)$ es algebraico sobre $f(A)$. \square

4.2. El Teorema de Baldwin y Lachlan

Una vez hecha la discusión pertinente sobre la idea de dimensión, es necesario combinarla con el resto de conceptos que hemos estudiado en los capítulos anteriores para poder llegar al último resultado importante antes de la demostración del Teorema de Morley. En particular, nuestro objetivo será demostrar que en las teorías ω -estables sin pares de Vaught existen fórmulas fuertemente minimales.

Empecemos por ver que en teorías ω -estables hay fórmulas minimales.

Proposición 4.2.1. *Sea T una teoría ω -estable con modelos infinitos. Entonces dado $\mathcal{M} \models T$ existe una fórmula minimal en \mathcal{M} .*

Demostración. Sea T una teoría ω -estable y supongamos que no existe ninguna fórmula minimal en $\mathcal{M} \models T$. Construyamos un árbol binario de fórmulas $(\phi_\sigma : \sigma < 2^{<\omega})$ de manera que para cada $\sigma \in 2^{<\omega}$ se cumpla que:

- (1) $\phi_\sigma(\mathcal{M})$ es infinito.
- (2) Si $\sigma \subset \tau$ entonces $\phi_\tau(\mathcal{M}) \subset \phi_\sigma(\mathcal{M})$.
- (3) $\phi_{\sigma,0}(\mathcal{M}) \cap \phi_{\sigma,1}(\mathcal{M}) = \emptyset$.

Para ello procedemos por recursión. Para el caso base tomamos $\phi_\emptyset : v = v$, puesto que $|\phi_\emptyset| = |M| \geq \aleph_0$ pues T es completa y tiene modelos infinitos. A continuación, consideramos $\sigma \in 2^{<\omega}$ tal que $\phi_\sigma(\mathcal{M})$ sea un conjunto infinito. Puesto que $\phi_\sigma(\mathcal{M})$ no es minimal existe una fórmula $\psi(v)$ con parámetros en M tal que $\psi(\mathcal{M}) \subset \phi_\sigma(\mathcal{M})$ y de forma que $\psi(\mathcal{M})$ y $\phi_\sigma(\mathcal{M}) \setminus \psi(\mathcal{M})$ son ambos infinitos. Con lo cual, por una parte tenemos que $(\phi_\sigma \wedge \psi)(\mathcal{M})$ es infinito pues $(\phi_\sigma \wedge \psi)(\mathcal{M}) = \phi_\sigma(\mathcal{M}) \cap \psi(\mathcal{M}) = \psi(\mathcal{M})$. Por otra parte, se tiene que $\phi_\sigma(\mathcal{M}) \setminus \psi(\mathcal{M}) = (\phi_\sigma \wedge \neg\psi)(\mathcal{M})$ y, por tanto, $(\phi_\sigma \wedge \neg\psi)(\mathcal{M})$ es también infinito. Con lo cual, definiendo $\phi_{\sigma,0} = \phi_\sigma \wedge \psi$ y $\phi_{\sigma,1} = \phi_\sigma \wedge \neg\psi$ se cumple la propiedad (1) y como ya se ha probado en varias ocasiones, el definir así las fórmulas recursivamente nos da inmediatamente (2) y (3).

Tal y como se realiza en el Lema 3.1.17, se puede construir una función inyectiva de 2^ω a $S_1(M)$, asociando a cada $f : \omega \rightarrow 2$ un tipo completo que contenga $p_f = \{\phi_{f|n} : n < \omega\}$. Además, denotando A como la unión de los parámetros de las fórmulas $\phi_{\sigma,i}$ con $\sigma \in 2^{<\omega}$ e $i \in \{0,1\}$, se obtiene, de manera similar a como se hizo en la Proposición 2.2.16, que el conjunto A es numerable. Con lo cual, la función inyectiva anterior tiene como imagen $S_1(A)$, lo que implica que este es un conjunto no numerable. Sin embargo, como A es numerable, esto contradice la ω -estabilidad de T . \square

A continuación, demostraremos que en una teoría sin pares de Vaught, cualquier fórmula minimal es fuertemente minimal. El punto clave de la demostración es el siguiente lema que nos dice que, si una teoría no presenta pares de Vaught, entonces se puede expresar “existen infinitos elementos” con una única sentencia de primer orden.

Lema 4.2.2. Sea T una \mathcal{L} -teoría sin pares de Vaught. Tomemos $\mathcal{M} \models T$ y sea $\phi(\bar{v}, \bar{w})$ una fórmula con parámetros en A_0 . Entonces, existe un número n de manera que si $\bar{a} \in M$ y $|\phi(\mathcal{M}, \bar{a})| > n$, entonces $\phi(\mathcal{M}, \bar{a})$ es infinito.

Demostración. Sea \mathcal{M} un modelo de T y $\phi(\bar{v}, \bar{w})$ una \mathcal{L} -fórmula con parámetros en A_0 y supongamos que el resultado no fuese cierto. En ese caso, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\bar{a}_n \in M$ de manera que $\phi(\mathcal{M}, \bar{a}_n)$ es un conjunto finito de al menos tamaño n . Sea $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{U\}$ el mismo lenguaje que se considera en la Observación 3.1.8 y definamos $\Gamma(w_1, \dots, w_m)$ como el siguiente conjunto de \mathcal{L}^* -fórmulas:

$$(1) \quad \exists \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \left(\bigwedge_{i < j} \bar{v}_i \neq \bar{v}_j \wedge \bigwedge_{i=1}^n \phi(\bar{v}_i, \bar{w}) \right) \text{ para todo } n = 1, 2, \dots$$

(Existen infinitas \bar{v} satisfaciendo $\phi(\bar{v}, \bar{w})$)

$$(2) \quad \forall \bar{v} \left(\phi(\bar{v}, \bar{w}) \rightarrow \bigwedge_{i=1}^m U(v_i) \right) \quad (\text{Todas las realizaciones } \bar{v} \text{ de } \phi(\bar{v}, \bar{w}) \text{ están en } U)$$

$$(3) \quad \bigwedge_{i=1}^m U(w_i) \quad (\bar{w} \text{ está en } U)$$

$$(4) \quad \exists x \neg U(x) \quad (U \text{ es un subconjunto propio})$$

Sea \mathcal{N} una extensión elemental de \mathcal{M} y probemos que $\Gamma(\bar{w})$ es un tipo de $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$. Sea $\Delta(\bar{w}) \subset \Gamma(\bar{w})$ un subconjunto finito, entonces existe un $k \in \mathbb{N}$ de forma que para que $\bar{a} \in M$ satisfaga Δ solo hay que asegurar que $\phi(\mathcal{M}, \bar{a})$ tiene como mínimo k elementos. Con lo cual, si se toma \bar{a}_k como realización, esta cumple (1) y (3). Al ser (4) cierto por construcción, solo queda (2) por probar.

Si denotamos ℓ al cardinal del conjunto finito $\phi(\mathcal{M}, \bar{a}_k)$, entonces es fácil encontrar una fórmula de primer orden con parámetros en \bar{a}_k que expresa que $\phi(v, \bar{a}_k)$ tiene exactamente ℓ elementos. Como esa fórmula se satisface en \mathcal{M} , entonces también lo hace en \mathcal{N} y, por tanto, $\phi(\mathcal{M}, \bar{a}_k) = \phi(\mathcal{N}, \bar{a}_k)$. Esto termina de probar que $\Gamma(\bar{w})$ es un tipo de $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$.

Tomemos una extensión elemental $(\mathcal{N}', \mathcal{M}')$ de $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ que tenga cierta realización \bar{a} de Γ . Como $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ y $(\mathcal{N}, \mathcal{M}) \prec (\mathcal{N}', \mathcal{M}')$, por la Proposición 3.1.9 y por (4) se cumple que \mathcal{M}' es una subextensión propia de \mathcal{N}' . Por un lado, aplicando (2) se tiene que $\phi(\mathcal{M}, \bar{a})$ es infinito y, por otro, empleando (3), se tiene que $\phi(\mathcal{M}, \bar{a}) = \phi(\mathcal{N}, \bar{a})$. Con lo cual, si se considera $\phi(\bar{w}, \bar{a})$ como una $\mathcal{L}_{\mathcal{M}'}$ -fórmula se tiene que el par $(\mathcal{N}', \mathcal{M}')$ es un par de Vaught. Esto supone una contradicción. \square

Teorema 4.2.3. Si T no tiene pares de Vaught, entonces toda fórmula minimal es fuertemente minimal.

Demostración. Sea $\mathcal{M} \models T$ y consideremos una fórmula minimal $\phi(\bar{v})$ de \mathcal{M} con posibles parámetros. Supongamos que $\phi(\bar{v})$ no fuese fuertemente minimal, entonces existiría una extensión elemental \mathcal{N} de manera que $\phi(\mathcal{N})$ no es minimal. Esto implica que existe una \mathcal{L} -fórmula $\psi(\bar{v}, \bar{w})$ y un $\bar{b} \in N$ de manera que $\psi(\mathcal{N}, \bar{b}) \subset \phi(\mathcal{N})$ y tal que, tanto $\psi(\mathcal{N}, \bar{b})$ como $\phi(\mathcal{N}) \setminus \psi(\mathcal{N}, \bar{b})$, son dos conjuntos infinitos.

Como T no tiene pares de Vaught, en virtud del Lema 4.2.2, existe un número natural n tal que para todo $\bar{a} \in M$ se tiene que $\phi(\mathcal{M}) \cap \psi(\mathcal{M}, \bar{a})$ es infinito si, y solo si, $|\phi(\mathcal{M}) \cap \psi(\mathcal{M}, \bar{a})| > n$, y $\phi(\mathcal{M}) \wedge \neg \psi(\mathcal{M}, \bar{a})$ es infinito si, y solo si, $|\phi(\mathcal{M}) \wedge \neg \psi(\mathcal{M}, \bar{a})| > n$ (obsérvese que esto es consecuencia de aplicar el lema para ambas fórmulas y coger el máximo). Por otro lado, como $\phi(\bar{v})$ es minimal se tiene que para todo $\bar{a} \in M$ o bien $\phi(\mathcal{M}) \cap \psi(\mathcal{M}, \bar{a})$ o bien $\phi(\mathcal{M}) \cap \neg \psi(\mathcal{M}, \bar{a})$ es finito, es decir, por el lema se da $|\phi(\mathcal{M}) \cap \psi(\mathcal{M}, \bar{a})| \leq n$ o bien $|\phi(\mathcal{M}) \cap \neg \psi(\mathcal{M}, \bar{a})| \leq n$. Esto se puede expresar como una sentencia de primer orden de la siguiente forma esquemática

$$\mathcal{M} \models \forall \bar{w} (|\phi(\mathcal{M}) \cap \psi(\mathcal{M}, \bar{w})| \leq n \vee |\phi(\mathcal{M}) \cap \neg \psi(\mathcal{M}, \bar{w})| \leq n).$$

Puesto que \mathcal{N} es extensión elemental de \mathcal{M} , esta sentencia también se cumple en \mathcal{N} . Sin embargo, esto es imposible pues habíamos visto que tanto $\phi(\mathcal{N}) \cap \psi(\mathcal{N}, \bar{b})$ como $\phi(\mathcal{N}) \cap \neg\psi(\mathcal{N}, \bar{b})$ eran conjuntos infinitos. \square

Recopilando estos resultados llegamos inmediatamente al resultado deseado.

Corolario 4.2.4. *Sea T una teoría ω -estable y sin pares de Vaught, entonces para cualquier $\mathcal{M} \models T$ existe una fórmula fuertemente minimal con parámetros en M . En particular, existe una fórmula fuertemente minimal con parámetros en M_0 , el modelo primo de T .*

Finalmente, detallemos los pasos a seguir para conseguir probar el Teorema de Caracterización de teorías categóricas en cardinales no numerables de Baldwin y Lachan. Recordemos que se necesita demostrar que para que una teoría sea κ -categórica es suficiente que sea ω -estable y no tenga pares de Vaught, pues la otra dirección la probamos en el Teorema 3.2.12. Para ello, se emplea como resultado central el Teorema 4.1.17. En primer lugar, se encuentra una fórmula fuertemente minimal sobre el modelo primo de la teoría. Seguidamente se toman dos modelos de la misma cardinalidad y se construye su respectivo isomorfismo parcial. Finalmente, se extiende a un isomorfismo empleando el siguiente lema.

Lema 4.2.5. *Sea T una teoría sin pares de Vaught, $\mathcal{M} \models T$ y $\phi(\bar{v})$ una fórmula con parámetros en A_0 tal que $\phi(\mathcal{M})$ es infinito. Entonces, ninguna subextensión elemental propia \mathcal{N} de \mathcal{M} contiene a $\phi(\mathcal{M}) \cup A_0$. Adicionalmente, si T es ω -estable, \mathcal{M} es primo sobre $\phi(\mathcal{M}) \cup A_0$.*

Demostración. Supongamos que existiese una subextensión elemental propia \mathcal{N} de \mathcal{M} que contuviese a A_0 y a $\phi(\mathcal{M})$. Entonces, ϕ sería una $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}$ -fórmula cumpliendo $\phi(\mathcal{N}) = \phi(\mathcal{M})$ y tal que $\phi(\mathcal{M})$ es infinito, es decir, que $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ sería un par de Vaught. No obstante, esto es imposible por hipótesis.

Si, adicionalmente, la teoría T es ω -estable, entonces por el Teorema 2.4.9 existe $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ un modelo primo sobre $\phi(\mathcal{M}) \cup A_0$. Puesto que T no tiene pares de Vaught, tiene que darse $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ y, por lo tanto, \mathcal{M} es primo sobre $\phi(\mathcal{M}) \cup A_0$. \square

Teorema 4.2.6. (de Baldwin-Lachan) *Sea T una teoría completa en un lenguaje numerable con infinitos modelos, y sea κ un cardinal no numerable. Entonces T es κ -categórica si, y solo si, T es ω -estable y no tiene pares de Vaught.*

Demostración. Si T es κ -categórica, entonces por el Teorema 3.2.12 es ω -estable y no tienen pares de Vaught. Con lo cual, solo queda por demostrar una de las direcciones.

Sea T una teoría ω -estable y sin pares de Vaught. Puesto que T es ω -estable, la teoría tiene un modelo primo \mathcal{M}_0 . Por el Teorema 4.2.4 existe una fórmula fuertemente minimal $\phi(\bar{v})$ sobre un conjunto finito de parámetros A_0 de M_0 .

Sean \mathcal{M} y \mathcal{N} dos modelos de T de cardinal $\kappa \geq \aleph_1$. Nótese que puesto que los parámetros de ϕ se encuentran en el modelo primo, empleando lo visto en la Observación 4.1.4, se puede suponer que A_0 está contenido en \mathcal{M} y \mathcal{N} . A continuación, como T no tiene ningún par de Vaught, tampoco tiene ningún (κ, λ) -modelo con $\kappa > \lambda \geq \aleph_0$, lo que en particular implica que $|\phi(\mathcal{M})| = |\phi(\mathcal{N})| = \kappa$. Aplicando la Observación 4.1.15 se obtiene que $\dim(\phi(\mathcal{M})) = \kappa = \dim(\phi(\mathcal{N}))$ pues $\kappa \geq \aleph_1$. Con lo cual, aplicando el Teorema 4.1.17 se tiene que existe un monomorfismo parcialmente A_0 -elemental y biyectivo $f : \phi(\mathcal{M}) \rightarrow \phi(\mathcal{N})$ o, equivalentemente, un monomorfismo parcialmente elemental $f^* : \phi(\mathcal{M}) \cup A_0 \rightarrow \phi(\mathcal{N}) \cup A_0$.

Aplicando el Lema 4.2.5, se sabe que \mathcal{M} es primo sobre $\phi(\mathcal{M}) \cup A_0$, con lo que existe un monomorfismo elemental $\tilde{f} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ que extiende a f^* . Empleando que f es elemental se tiene que $\tilde{f}(\mathcal{M})$ es una subestructura de \mathcal{N} que, además, contiene a $\phi(\mathcal{N}) \cup A_0$ por ser \tilde{f} una extensión de f^* . No obstante, de nuevo por el Lema 4.2.5 esto implica que $\tilde{f}(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$ o, en otras palabras, que \tilde{f} es sobreyectiva. En conclusión, \tilde{f} es una función biyectiva y elemental, esto es, un isomorfismo. \square

El Teorema de Morley se obtiene como una consecuencia inmediata del resultado anterior.

Teorema 4.2.7. (de Morley) Si T es una teoría κ -categórica para algún cardinal no numerable κ , entonces T es λ -categórica para todos los cardinales no numerables λ .

Bibliografía

- [1] J. T. Baldwin and A. H. Lachlan. On strongly minimal sets. *The Journal of Symbolic Logic*, 36(1):79–96, 1971.
- [2] J. W. Dawson. The compactness of first-order logic:from gödel to lindström. *History and Philosophy of Logic*, 14:15–37, 1993.
- [3] G. Hamel. Eine basis aller zahlen und die unstetigen lösungen der funktionalgleichung: $f(x + y) = f(x) + f(y)$. *Mathematische Annalen*, 60:459–462, 1905.
- [4] T. Jech. *Set theory. The Third Millennium Edition, revised and expanded*. Springer, 2003.
- [5] D. Marker. *Model Theory: an introduction*. Springer, New York, 2001.
- [6] M. Morley. Categoricity in power. *Transactions of the American Mathematical Society*, 114(2):514–538, 1965.
- [7] M. Morley and R. Vaught. Homogeneous universal models. *Mathematica Scandinavica*, 11(1):37–57, 1962.
- [8] D. Palacín. Apuntes de lógica matemática, Marzo 2023.
- [9] E. Steinitz. Algebraische theorie der körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 137:167–309, 1910.
- [10] K. Tent and M. Ziegler. *A Course in Model Theory*. Lecture Notes in Logic. Cambridge University Press, 2012.
- [11] R. L. Vaught. Applications of the löwenheim–skolem–tarski theorem to problems of completeness and decidability. 1954.
- [12] O. Veblen. A system of axioms for geometry. *Transactions of the American Mathematical Society*, 5:343–384, 1904.
- [13] S. Willard. *General Topology*. Dover, 2004.
- [14] J. Łoś. On the categoricity in power of elementary deductive systems and some related problems. *Colloquium Mathematicae*, 3(1):58–62, 1954.