ANÁLISIS DE VARIABLE REAL

Facultad de Ciencias Matemáticas. UCM

José María Martínez Ansemil

(ansemil@mat.ucm.es)

Todo lo que es afirmado sin prueba puede ser negado sin prueba.

Euclides
(ca. 325 a.C.-ca. 265 a.C.)

Este Manual se ha preparado para su utilización por los alumnos de la asignatura Análisis de Variable Real de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid. En él se desarrollan los temas del programa de esa asignatura siguiendo fundamentalmente el libro de R. G. Bartle y D. R. Sherbert "Introducción al Análisis Matemático de una Variable". Ed. Limusa.

Se trata de una versión provisional del Manual que seguramente tendrá bastantes errores y erratas. Se agradece cualquier comentario que ayude a mejorarlo.

Madrid, 26 de Octubre de 2017.

El autor

Índice general

Capítulo 0

Preliminares

Comenzamos el curso recordando notaciones y resultados básicos que, aunque se suponen conocidos, conviene revisar.

0.1. Operaciones con conjuntos

Para indicar que un elemento x **pertenece** a un conjunto A usaremos la notación $x \in A$, y para indicar que un elemento y **no pertenece** al conjunto A escribiremos $y \notin A$. Se dice que un conjunto A está contenido en un conjunto B si para todo $x \in A$ se verifica que $x \in B$. Cuando esto ocurra escribiremos $A \subset B$. Obsérvese que puede suceder que $A = B$, esto es, que A y B tengan los mismos elementos.

Los conjuntos se pueden intersecar y unir. Así, la **intersección** y la **unión** de dos conjuntos A y B se define por

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x : x \in A \quad \text{y} \quad x \in B\} \\ A \cup B &= \{x : x \in A \quad \text{o} \quad x \in B\} \end{aligned}$$

respectivamente. Nótese que los elementos de $A \cap B$ son los elementos que pertenecen a la vez al conjunto A y al conjunto B. Mientras que los elementos de $A \cup B$ son los elementos que pertenecen al conjunto A, al conjunto B o a ambos. El conjunto que no tiene elementos se llama el **conjunto vacío** y se representa por $\emptyset$. Si A y B no son ambos vacíos, esto es, tienen algún elemento, entonces $A \cup B$ nunca es vacío, pero $A \cap B$ puede serlo, en este caso se dice que los conjuntos son **disjuntos**. Ejemplo, los conjuntos $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3\}$ son disjuntos.

Las operaciones de intersección y unión de conjuntos tienen las siguientes propiedades cuya demostración es muy sencilla y no haremos aquí:

1. Propiedad de idempotencia:

$$A \cap A = A \ \text{ y } \ A \cup A = A.$$

2. Propiedad conmutativa:

$$A \cap B = B \cap A \ \text{ y } \ A \cup B = B \cup A.$$

3. Propiedad asociativa:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \ \text{ y } \ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

4. Propiedad distributiva:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \ \text{ y } \ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Cuando se trata de una cantidad finita de conjuntos $A_1, ..., A_k$ su intersección se denota por $\cap_{j=1}^k A_j$ y su unión por $\cup_{j=1}^k A_j$ y son, respectivamente,

$$\cap_{j=1}^k A_j = \{x : x \in A_j \text{ para todo } j = 1, ..., k\}$$

y

$$\cup_{j=1}^k A_j = \{x : x \in A_j \text{ para algún } j = 1, ..., k\}.$$

También puede hablarse de intersección o unión infinita de conjuntos: Dado un conjunto J y por cada $j \in J$ un conjunto A_j, se denota por $\cap_{j\in J} A_j$ al conjunto formado por los elementos que pertenecen a todos los A_j, y se denota por $\cup_{j\in J} A_j$ al conjunto formado por los elementos que están en alguno (varios o todos) los A_j.

Otra operación que consideraremos entre conjuntos es la de hallar el **complementario** de un conjunto respecto a otro. Se define así: Si A y B son dos conjuntos se define el complementario de B con respecto a A, y se denota por $A \backslash B$, como el conjunto formado por elementos de A que no pertenecen a B. Nótese que puede que $A \backslash B$ sea vacío, lo que ocurre si y sólo si $A \subset B$. Las siguientes igualdades, conocidas como Leyes de De Morgan (Augustus De Morgan, Inglaterra, 1806–1871), relacionan las tres operaciones que hemos definido entre conjuntos:

1. $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$
2. $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.

Finalmente definimos el **producto cartesiano** $A \times B$ de dos conjuntos A y B como el conjunto de los pares (x, y) donde $x \in A$ e $y \in B$. Esto es,

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, \ y \in B\}.$$

Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{4, 6\}$ entonces $A \times B = \{(1, 4), (2, 4), (1, 6), (2, 6)\}$.

0.2. Funciones

Un concepto clave en este curso será el concepto de función (o aplicación). El significado de este concepto ha ido variando a lo largo del tiempo. En el s. XIX el término función se usaba como sinónimo de fórmula. Por ejemplo, $f(x) = x^2+3x-5$ era una función, pero hoy en día el concepto de función abarca más casos que ese. También se llama función a la correspondencia que asigna a cada número real x su valor absoluto; que es el propio x, si x es mayor o igual que 0 y su opuesto si x es menor que 0 y también es una función la correspondencia que asigna a cada número natural su cuadrado si el número es par y su cubo si es impar. De hecho ahora se entiende como **función** (o **aplicación**) cualquier correspondencia que aplique los elementos de un conjunto A en otro conjunto B (claro que algunas correspondencias se pueden definir por una fórmula, pero acabamos de ver que eso no ocurre siempre). Damos ahora un par de ejemplos de funciones: Si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{4, 6\}$ la correspondencia $1 \mapsto 4$ y $2 \mapsto 4$ es una función definida en el conjunto A y con valores en B. Nótese que no hace falta que todos los valores de B sean alcanzados por la correspondencia, pero lo que sí debe ocurrir es que a todo elemento de A se le asigne uno y sólo uno de B. Por supuesto que la correspondencia $1 \mapsto 4$ y $2 \mapsto 6$ también es una función de A en B. Para indicar que f es una función entre A y B se usará la notación $f : A \to B$.

Dada una función $f : A \to B$, diremos que A es el **dominio** de f y que $\{f(x) : x \in A\}$ es la **imagen** (o el **rango**) de f, y lo denotaremos por $f(A)$. Ya hemos comentado que puede ocurrir que la imagen de f sea un subconjunto propio de B, es decir, un subconjunto de B que no contenga todos los elementos de B.

Si tenemos una función $f : A \to B$ y consideramos un subconjunto E de A, definiremos su imagen $f(E)$ como el subconjunto de B formado por los elementos de la forma $f(x)$ con $x \in E$. Esto es,

$$f(E) = \{f(x) : x \in E\}.$$

Dado un subconjunto H de B definimos $f^{-1}(H)$ como el subconjunto de A formado por aquellos $x \in A$ tales que $f(x) \in H$. Esto es,

$$f^{-1}(H) = \{x \in A : f(x) \in H\}.$$

Este conjunto se llama la **preimagen (o imagen inversa)** de H por f. Nótese que no hemos definido f^{-1} (lo que sería la "función inversa" de f), lo que hemos definido es el conjunto $f^{-1}(H)$. Veamos algunos ejemplos para facilitar la comprensión de esta definición: Si usamos el ejemplo anterior de la función f definida entre $A = \{1, 2\}$ y $B = \{4, 6\}$ por la correspondencia $1 \mapsto 4$ y $2 \mapsto 4$ y tomamos $H = \{4\}$, entonces $f^{-1}(H) = \{1, 2\}$, si tomamos $H = \{6\}$, entonces $f^{-1}(H) = \emptyset$ y si tomamos $H = \{4, 6\}$, entonces $f^{-1}(H) = \{1, 2\}$. Si la función f viene dada por la correspondencia $1 \mapsto 4$ y $2 \mapsto 6$ entonces $f^{-1}(\{4\}) = \{1\}$, $f^{-1}(\{6\}) = \{2\}$ y $f^{-1}(\{4, 6\}) = \{1, 2\}$. Siempre ocurre que $f^{-1}(B) = A$ pero no siempre $f^{-1}(f(E))$ coincide con E. Por ejemplo, si f viene dada por la correspondencia $1 \mapsto 4$ y $2 \mapsto 4$ y $E = \{1\}$, entonces $f(E) = \{4\}$ y

$f^{-1}(f(E)) = \{1,2\} \neq E$. Tampoco ocurre siempre que $f(f^{-1}(H)) = H$, por ejemplo, si $f : A \to B$ verifica que $f(A) \neq B$, entonces $f^{-1}(B) = A$, pero $f(f^{-1}(B)) = f(A) \neq B$.

Nos interesa destacar unos tipos especiales de funciones: las funciones **inyectivas**, las **sobreyectivas** (a veces se usa el término **suprayectivas**) y las **biyectivas**. Una función $f : A \to B$ es inyectiva si siempre que consideremos dos elementos (distintos) x_1 y x_2 de A se verifica que $f(x_1) \neq f(x_2)$, y es sobreyectiva si para todo $y \in B$ existe (al menos) un $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Cuando una función es a la vez inyectiva y sobreyectiva diremos que es biyectiva. En los ejemplos anteriores la función $f : \{1,2\} \to \{4,6\}$ dada por la correspondencia $1 \mapsto 4$ y $2 \mapsto 4$ no es inyectiva ni sobreyectiva y la dada por la correspondencia $1 \mapsto 4$ y $2 \mapsto 6$ es inyectiva y sobreyectiva y por lo tanto biyectiva. La función definida de $\{1,2\}$ en $\{4,6,8\}$ por la correspondencia $1 \mapsto 4,\ 2 \mapsto 6$, es inyectiva pero no sobreyectiva y la dada de $\{1,2,3\}$ en $\{4,6\}$ por la correspondencia $1 \mapsto 4,\ 2 \mapsto 6$ y $3 \mapsto 4$ es sobreyectiva pero no inyectiva.

Cuando tenemos una función inyectiva f de A en B podemos definir una función de la imagen de f con valores en A, asignado a cada punto y de la imagen de f el único $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Esta nueva función se denotará por f^{-1} y se llama la función inversa de f. Debe observarse que si f es una función biyectiva de A en B entonces para todo subconjunto $H \subset B$ la imagen de H por f^{-1} es exactamente el conjunto $f^{-1}(H)$ al que hemos llamado anteriormente la preimagen de H por f. Esto es, en el caso en que f sea biyectiva, coinciden la preimagen de H por f y la imagen de H por f^{-1}. Veámoslo: si $x \in \{x : f(x) \in H\}$ (el conjunto preimagen), entonces $f(x) \in H$; como al ser f inyectiva, $f^{-1}(f(x)) = x$, se tiene así que x es $f^{-1}(y)$ siendo precisamente $y = f(x)$ que pertenece a H. Recíprocamente, si $x = f^{-1}(y)$ con $y \in H$ entonces $f(x) = y$ (por la definición de la función f^{-1}), luego $x \in f^{-1}(H)$.

Cuando una función f es inyectiva su función inversa (definida en la imagen de f) es también inyectiva. En efecto, si cogemos dos puntos distintos y_1 e $y_2 \in f(A)$ entonces existen x_1 y $x_2 \in A$ tales que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, necesariamente x_1 es distinto de x_2 pues en caso contrario $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$ y hemos supuesto que $y_1 \neq y_2$. Dado que $x_1 = f^{-1}(y_1)$ y $x_2 = f^{-1}(y_2)$ se tiene que $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$.

También sucede que cuando f es inyectiva $(f^{-1})^{-1} = f$. En efecto, para cada $x \in A$, se tiene que $(f^{-1})^{-1}(x)$ es el único punto (nótese que f^{-1} es inyectiva) y de $f(A)$ tal que $f^{-1}(y) = x$, pero claro, ese y procede de un elemento de A y ese elemento no puede ser otro que x pues si $f^{-1}(y) = x$ es por que $f(x) = y$ (por la propia definición de la función f^{-1}), entonces $(f^{-1})^{-1}$ y f toman el mismo valor en x, a saber, el y.

Algunas veces las funciones pueden componerse, éste es el caso cuando $f : A \to B$, $g : C \to D$ y el rango de f está contenido en C, esto es, $f(A) \subset C$. Se llama **composición** de las funciones f y g a la función $g \circ f : A \to D$ definida por

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \text{ para los elementos } x \text{ de } A.$$

Obsérvese que lo que se hace es aplicar la función g a lo que resultó al aplicar f a x. Cuando uno considera un subconjunto H de D resulta que

$$(g \circ f)^{-1}(H) = f^{-1}(g^{-1}(H)).$$

En efecto, si $x \in (g \circ f)^{-1}(H)$ entonces $g \circ f(x) \in H$, lo que implica que $f(x) \in g^{-1}(H)$ pues $g(f(x)) = g \circ f(x) \in H$, y esto nos dice que $x \in f^{-1}(g^{-1}(H))$. Por otra parte, si $x \in f^{-1}(g^{-1}(H))$ entonces $f(x) \in g^{-1}(H)$ y esto quiere decir que $g \circ f(x) = g(f(x)) \in H$, es decir, $x \in (g \circ f)^{-1}(H)$.

Si en particular f y g son biyectivas, entonces $f \circ g$ es biyectiva y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

0.3. Inducción matemática

Aunque ya se ha visto lo que es la inducción matemática en la asignatura de Matemáticas Básicas no vendrá mal profundizar un poco aquí, pues será utilizada con frecuencia en el curso.

Supondremos conocido el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales: $1, 2, 3...$ y admitiremos, como axioma, que ese conjunto tiene el llamado **Principio de buena ordenación: todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene un elemento menor o igual que todos los demás**. De este principio obtendremos el siguiente **principio de inducción matemática**:

Teorema 0.1 ***(PI)*** *Si S es un subconjunto de $\mathbb{N}$ que tiene las propiedades:*

(a) $1 \in S$.

(b) Si $k \in S$ también $k+1 \in S$ (esta condición se llama hipótesis de inducción).

Entonces $S = \mathbb{N}$.

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que $S \neq \mathbb{N}$. Entonces el conjunto $\mathbb{N} \backslash S$ no es vacío y por lo tanto, por el Principio de buena ordenación, tiene un elemento menor que todos los demás, llamémosle m. Dado que $1 \in S$ necesariamente $m \neq 1$ y entonces $m > 1$, luego $m-1$ es un número natural menor que m y necesariamente debe pertenecer a S pues m es el menor de los que no pertenecen. Ahora bien, por la segunda de las hipótesis resulta que para $k = m-1$, $k+1 = m-1+1 = m$ debe pertenecer a S lo que es absurdo, luego $\mathbb{N} \backslash S = \emptyset$, esto es, $S = \mathbb{N}$. $\square$

El principio de inducción matemática suele usarse mucho de la siguiente manera: Si para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene una proposición $P(n)$ relativa a n y sucede que:

1. $P(1)$ es verdadera,

2. Si $P(k)$ es verdadera también lo es $P(k+1)$.

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Esto se obtiene del principio de inducción matemática considerando

$$S = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ es verdadera}\}.$$

Un ejemplo podría ser la propiedad $P(n)$:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Nota 0.2 *Puede ocurrir que una cierta proposición no se verifique para $n = 1$ o incluso para varios $n \geq 1$, pero si existe n_0 tal que $P(n_0)$ es verdadera y $P(k+1)$ es verdadera cuando lo es $P(k)$, y esto ocurre para todo $k \geq n_0$, entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq n_0$ (la demostración es análoga a la anterior). Por ejemplo, esto ocurre con la desigualdad $2^{n-1} < n!$ que es válida para todo $n \geq 3$ pero no para $n = 1$ y $n = 2$. Otro ejemplo es el siguiente: Dado $n - 0$*

Algunas veces se necesita un principio de inducción que, aparentemente es más fuerte que el que estamos considerando y, de hecho se llama **principio de inducción fuerte**, lo enunciamos a continuación y vemos como realmente es equivalente a nuestro principio de inducción.

Principio de inducción completa (o fuerte) (PIC). Sea S un subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que:

(a) $1 \in S$

(b) Si $\{1, 2, ..., k\} \subset S$ también $k + 1 \in S$.

Entonces $S = \mathbb{N}$.

Veamos la equivalencia entre ambos principios:
PI $\Longrightarrow$ **PIC**. Si $\{1, 2, ..., k\} \subset S$ en particular $k \in S$ lo que (por la **PI**) implica que $k + 1 \in S$.
PIC $\Longrightarrow$ **PI**. Supongamos que $k \in S$, tenemos que ver que $k + 1 \in S$. Ahora bien, si $k = 1$ entonces $k + 1 = 2$ pertenece a S por la **PIC**, pues $\{1\} \subset S$; si $k = 2$ entonces $k+1 = 3 \in S$ por la **PIC**, pues $\{1, 2\} \subset S$, después de un número finito de pasos llegamos a que $\{1, 2, ..., k\} \subset S$. Vemos entonces que la **PIC** implica que para todo k se tiene que $\{1, 2, ..., k\} \subset S$ y entonces (por la **PIC**) $k + 1 \in S$.

Veamos un ejemplo de aplicación del **PIC:** Consideremos los números reales $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, y por cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$. Vamos a demostrar, usando el

PIC, que $1 \leq x_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si S es el conjunto de los n tales que x_n tiene esa propiedad, es claro que $1 \in S$. Supongamos que para un cierto $k \geq 2$ se tiene que $\{1, ..., k\} \subset S$. Como

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)$$

y $\{k-1, k\} \subset S$ resulta que, por una parte, x_k y x_{k-1} son ambos menores o iguales que 2, entonces también lo es x_{k+1}, pues $\frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k) \leq \frac{1}{2}(2+2) = 2$. Por otra parte, x_{k-1} y x_k son ambos mayores o iguales que 1, entonces también lo es x_{k+1}, pues $\frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k) \geq \frac{1}{2}(1+1) = 1$. Obsérvese que en este caso no basta con conocer que k pertenece a S para poder garantizar que $k+1$ también pertenece a S, hemos usado que también $k-1 \in S$.

Nota 0.3 *El **PIC** implica el Principio de buena ordenación. En efecto: Sea S un subconjunto de $\mathbb{N}$ y supongamos que S no contiene un elemento menor o igual que los demás. Vamos a comprobar que ese conjunto es vacío. En efecto, el 1 no pertenece a S, pues en caso contrario S tendría un menor elemento (el 1), luego $1 \in \mathbb{N} \backslash S$. Si suponemos ahora que para un cierto k, $\{1, ..., k\}$ está contenido en $\mathbb{N} \backslash S$, entonces $k+1$ pertenece a $\mathbb{N} \backslash S$, pues de lo contrario $k+1$ sería el menor elemento de S. Concluimos entonces que $\mathbb{N} \backslash S = \mathbb{N}$ (aplicado a $\mathbb{N} \backslash S$) y por lo tanto S es vacío.*

*Dado que el Principio de buena ordenación implica el **PI** y que el **PI** implica el **PIC**, concluimos que estos tres principios son equivalentes.*

0.4. Conjuntos infinitos

Se dirá que un conjunto es **finito** cuando o bien es vacío o bien existe una aplicación biyectiva entre él y un subconjunto de $\mathbb{N}$ de la forma $\{1, ..., n\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Cuando el conjunto no sea vacío y no exista una tal biyección se dirá que el conjunto es **infinito**. Los conjuntos $\{1, 3, 5\}$ y $\{2, 4, 5, 8, 10\}$ son finitos. La correspondencia $1 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 2$ y $5 \mapsto 3$ establece una biyección entre $\{1, 3, 5\}$ y $\{1, 2, 3\}$, la correspondencia $2 \mapsto 1$, $4 \mapsto 2,\ 5 \mapsto 3,\ 8 \mapsto 4, 10 \mapsto 5$ establece una biyección entre $\{2, 4, 5, 8, 10\}$ y $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Se dirá que un conjunto es **numerable** si es finito o, de no serlo, existe una aplicación biyectiva entre él y $\mathbb{N}$. El conjunto de los números naturales pares es numerable, la correspondencia $2n \mapsto n$ establece una aplicación inyectiva (incluso biyectiva) entre el conjunto de los naturales pares y el de todos los números naturales. También es numerable el conjunto de los números enteros, basta considerar la correspondencia $0 \mapsto 1,\ 1 \mapsto 2,\ -1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 4,\ -2 \mapsto 5...$, esto es, $0 \mapsto 1$, $n \mapsto 2n$, y $-n \mapsto 2n+1$. Todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable.

Proposición 0.4 *La unión de una colección finita de conjuntos finitos es un conjunto finito. La unión de una colección numerable de conjuntos numerables es un conjunto numerable.*

Demostración. Sea $\{B_1, ..., B_m\}$ una colección finita de conjuntos finitos que supondremos disjuntos dos a dos (de no ser así la unión de la colección dada está contenida en una unión de conjuntos finitos disjuntos dos a dos). Entonces tenemos, por cada j, una aplicación biyectiva (usaremos el símbolo $\leftrightarrow$) entre B_j y $\{1, ..., n_j\}$ para un cierto $n_j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} B_1 & \leftrightarrow & \{1, ..., n_1\} \\ B_2 & \leftrightarrow & \{1, ..., n_2\} \leftrightarrow \{n_1 + 1, n_1 + 2, ..., n_1 + n_2\} \\ & & k \quad \mapsto \quad n_1 + k \end{array}$$

con lo que podemos definir una aplicación biyectiva:

$$B_1 \cup B_2 \to \{1, ..., n_1, n_1 + 1, ..., n_1 + n_2\}.$$

Reiterando el proceso tendremos al final una aplicación biyectiva entre $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_m$ y $\{1, ..., n_1, n_1 + 1, ..., n_1 + n_2, n_1 + n_2 + 1, ..., n_1 + \cdots + n_m\}$.

Si ahora tenemos una colección $\{B_1, B_2, ..., B_k, ...\}$ de conjuntos numerables, que supondremos disjuntos dos a dos (por la misma razón de antes), entonces

$$\begin{array}{rcl} B_1 & = & \{b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, ...\} \\ B_2 & = & \{b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, ...\} \\ \cdots & = & \cdots \\ B_k & = & \{b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, ...\} \\ \cdots & = & \cdots \end{array}$$

donde $b_j^{(k)}$ es el elemento de B_k que se corresponde con j mediante una biyección prefijada entre B_k y $\mathbb{N}$ (alguno o todos los conjuntos $\{b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, ...\}$ pueden ser finitos). Pues bien, la correspondencia

$$\begin{array}{rcl} b_1^{(1)} & \mapsto & 1 \\ b_2^{(1)} & \mapsto & 2 \\ b_1^{(2)} & \mapsto & 3 \\ b_3^{(1)} & \mapsto & 4 \\ b_2^{(2)} & \mapsto & 5 \\ b_1^{(3)} & \mapsto & 6 \\ b_4^{(1)} & \mapsto & 7 \\ \cdots & \mapsto & \cdots \end{array}$$

establece una aplicación inyectiva entre $\cup_{j=1}^{\infty} B_j$ y $\mathbb{N}$. En el siguiente diagrama puede verse fácilmente como se construye la correspondencia anterior:

$$\begin{tikzcd}
b_1^{(1)} \arrow[r] & b_2^{(1)} \arrow[dl] & b_3^{(1)} \arrow[dl] & b_4^{(1)} \arrow[dl] & \cdots \\
b_1^{(2)} \arrow[urr] & b_2^{(2)} \arrow[dl] & b_3^{(2)} \arrow[dl] & b_4^{(2)} & \cdots \\
b_1^{(3)} \arrow[uurrr] & b_2^{(3)} \arrow[dl] & b_3^{(3)} & b_4^{(3)} & \cdots \\
b_1^{(4)} \arrow[uuurrrr] & b_2^{(4)} & b_3^{(4)} & b_4^{(4)} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{tikzcd}$$

□

De esta propiedad se deduce que el conjunto de los números racionales es también numerable, basta considerar que ese conjunto es la unión numerable de los conjuntos numerables disjuntos dos a dos:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \left\{0, \frac{1}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1}, \ldots\right\} \\
B_2 &= \left\{\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{-5}{2}, \ldots\right\} \\
B_3 &= \left\{\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{-7}{3}, \ldots\right\} \\
\cdots &= \cdots
\end{aligned}$$

El conjunto de los números reales no es numerable, pero eso lo veremos más adelante.

Pasamos ahora a hacer un estudio de ese conjunto de números y de sus propiedades.

Capítulo 1

El cuerpo de los números reales

Todos conocemos bien el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales: $1, 2, 3...$, el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros $0, -1, 1, -2, 2...$ y el conjunto $\mathbb{Q}$ de los racionales, que son los pares de números enteros, en los que la segunda componente no es 0, identificando dos de tales pares (m, n) y (m', n') cuando $nm' = m'n$. Es habitual representar el par (m, n) en la forma $\frac{m}{n}$.

Si sólo consideramos este tipo de números la ecuación $x^2 = 2$ no tiene solución. En efecto, supongamos que existe un número racional $\frac{m}{n}$ tal que $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Podemos suponer que m y n son ambos mayores que 0, de no ser así cambiamos el o los que sean menores que 0 por sus opuestos, su cuadrado va a ser el mismo, y que m y n son primos entre sí, es decir, $mcd(m, n) = 1$, de no ser así cambiamos m y n por $\frac{m}{mcd(m,n)}$ y $\frac{n}{mcd(m,n)}$ respectivamente, y estos nuevos números enteros ya tienen esa propiedad y definen el mismo número racional que $\frac{m}{n}$.

Si $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ entonces $m^2 = 2n^2$ lo que nos dice que m^2 es un número par y por lo tanto también lo es m, pues si suponemos que $m = 2p - 1$ para un cierto $p \in \mathbb{N}$ entonces

$$m^2 = (2p - 1)^2 = 4p^2 - 4p + 1$$

y resulta que m^2 es impar y hemos visto que es par. Ahora bien, por ser m par es de la forma $m = 2q$ y entonces $(2q)^2 = 2n^2$ lo que implica que $n^2 = 2q^2$ y por lo tanto que n^2 es par. Acabamos de ver que si el cuadrado de un número es par, también es par el número, luego n es par lo que es imposible al ser $mcd(m, n) = 1$. Llegamos entonces a un absurdo y por lo tanto no pueden existir m y n enteros, tales que $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$.

Lo anterior muestra la necesidad de ampliar el conjunto de los números racionales y surgen así los llamados *números reales*. Con ellos se podrán resolver ecuaciones como la anterior.

Pero, ni siquiera con estos números se podrán resolver todas las ecuaciones polinómicas, incluso sencillas, como la $x^2 + 1 = 0$. Ello motivó la introducción de los llamados *números complejos* de los que hablaremos un poco más adelante.

Nosotros vamos a introducir aquí los números reales de forma axiomática.

1.1. Introducción axiomática de los números reales

El conjunto de los números reales, al que denotaremos por $\mathbb{R}$, es un conjunto en el que hay dos operaciones entre sus elementos, denotadas por $+$ y $\cdot$, y llamadas **adición** y **multiplicación** respectivamente, que verifican tres bloques de axiomas. El primero de ellos contiene nueve axiomas que lo dotan de estructura de cuerpo, el segundo consta de tres axiomas que definen en él una estructura de orden total y el tercero contiene un único axioma que supone la existencia de *supremo* de cualquier conjunto *acotado superiormente*[1] de números reales.

1.1.1. Axiomas de cuerpo:

C1: `Conmutatividad de la adición`: $a + b = b + a$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

C2: `Asociatividad de la adición`: $a + (b + c) = (a + b) + c$ para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

C3: `Existencia de elemento neutro para la adición`: Existe un elemento en $\mathbb{R}$, que denotaremos por 0, tal que $a + 0 = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Nótese que por $(C1)$ también $0 + a = a$.

C4: `Existencia de elemento opuesto para cada elemento`: Para cada $a \in \mathbb{R}$ existe un elemento en $\mathbb{R}$, que denotaremos por $-a$, tal que $a + (-a) = 0$. Nótese que por $(C1)$ también $(-a) + a = 0$.

C5: `Conmutatividad de la multiplicación`: $a \cdot b = b \cdot a$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

C6: `Asociatividad de la multiplicación`: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

C7: `Existencia de elemento neutro para la multiplicación`: Existe un elemento en $\mathbb{R}$, que denotaremos por 1, que es diferente del 0 (neutro para la adición), tal que $a \cdot 1 = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Nótese que por $(C5)$ también $1 \cdot a = a$.

C8: `Existencia de elemento inverso para la multiplicación`: Para cada $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, existe un elemento en $\mathbb{R}$, que denotaremos por $\frac{1}{a}$, tal que $a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1$. Nótese que por $(C5)$ también $\left(\frac{1}{a}\right) \cdot a = 1$. A veces se denotará por a^{-1} al inverso de a.

C9: `Distributividad de la multiplicación respecto a la adición`: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

[1]Los conceptos de *supremo* y conjunto *acotado superiormente* se introducirán más adelante.

Cuando no haya peligro de confusión se suprimirá el punto de la multiplicación y se escribirá ab en lugar de $a \cdot b$ y escribiremos $a - b$ para representar a $a + (-b)$.

A partir de estos axiomas ya podemos deducir algunas propiedades interesantes del conjunto de los números reales, como son las que se dan en las siguientes proposiciones:

Proposición 1.1 *(i) Si para $x, a \in \mathbb{R}$ se verifica que $a + x = a$ entonces $x = 0$. En particular el elemento neutro de la adición es único.*

(ii) Si para $x, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, se verifica que $bx = b$ entonces $x = 1$. En particular el elemento neutro de la multiplicación es único.

Demostración. Dados x, a en las condiciones de (i),

$$\begin{aligned} x &\overset{C3}{=} x + 0 \overset{C4}{=} x + (a - a) \overset{C2}{=} (x + a) - a \\ &\overset{C1}{=} (a + x) - a \overset{Hip.}{=} a - a \overset{C4}{=} 0. \end{aligned}$$

Dados x, b en las condiciones de (ii),

$$\begin{aligned} x &\overset{C7}{=} x \cdot 1 \overset{C8}{=} x\left(b\frac{1}{b}\right) \overset{C6}{=} (xb)\frac{1}{b} \\ &= (bx)\frac{1}{b} \overset{Hip.}{=} b\frac{1}{b} \overset{C8}{=} 1. \end{aligned}$$

□

Proposición 1.2 *Cada $a \in \mathbb{R}$ tiene un único elemento opuesto y cada $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, tiene un único elemento inverso.*

Demostración. Dado $a \in \mathbb{R}$ sea $b \in \mathbb{R}$ tal que $a + b = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} b &\overset{C3}{=} b + 0 \overset{C4}{=} b + (a - a) \overset{C2}{=} (b + a) - a \\ &\overset{C1}{=} (a + b) - a \overset{Hip.}{=} 0 - a \overset{C3}{=} -a. \end{aligned}$$

Sea ahora $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ y sea $b \in \mathbb{R}$ tal que $ab = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} b &\overset{C7}{=} b \cdot 1 \overset{C8}{=} b\left(a\frac{1}{a}\right) \overset{C6}{=} (ba)\frac{1}{a} \\ &\overset{C5}{=} (ab)\frac{1}{a} \overset{Hip.}{=} 1 \cdot \frac{1}{a} \overset{C7}{=} \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

□

Proposición 1.3 *Para todo $a \in \mathbb{R}$ se verifica:*

(i) $a \cdot 0 = 0$.

(ii) $(-1)a = -a$.

(iii) $-(-a) = a$.

(iv) $(-1)(-1) = 1$.

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces,

(i) $a \overset{C7}{=} a \cdot 1 \overset{C3}{=} a(1+0) \overset{C9}{=} a \cdot 1 + a \cdot 0 \overset{C7}{=} a + a \cdot 0$ y se sigue de (i) de la proposición 1.1 que $a \cdot 0 = 0$.

(ii) $0 \overset{(i)}{=} a \cdot 0 \overset{C4}{=} a(1-1) \overset{C9}{=} a \cdot 1 + a(-1) \overset{C7}{=} a + a(-1) \overset{C5}{=} a + (-1)a$ y entonces, por (i) de la proposición 1.2 se tiene que $(-1)a = -a$.

(iii) Como $-a + a = 0$ tenemos que a es el elemento opuesto de $-a$, pero éste es $-(-a)$, luego por la unicidad del opuesto ((i) de la proposición 1.2) se tiene que $-(-a) = a$.

(iv) $(-1)(-1) \overset{(ii)}{=} -(-1) \overset{(iii)}{=} 1$.

□

Proposición 1.4 *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) Si $a \neq 0$ entonces $\frac{1}{a} \neq 0$ y $(\frac{1}{a})^{-1} = a$.

(ii) Si $a + b = a + c$ entonces $b = c$.

(iii) Si $ab = ac$ y $a \neq 0$ entonces $b = c$.

(iv) Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$ (pueden ser los dos 0).

Demostración.

(i) Si $a \neq 0$ sabemos (C8) que existe $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ tal que $a\frac{1}{a} = 1$. Si $\frac{1}{a}$ fuese 0 entonces $a\frac{1}{a}$ sería 0 por (i) de la proposición 1.3, lo que lleva al absurdo de que $1 = 0$. Por otra parte, al ser $\frac{1}{a} \neq 0$ existe (C8) $(\frac{1}{a})^{-1}$ verificándose que $\frac{1}{a}(\frac{1}{a})^{-1} = 1$. Como $\frac{1}{a}a = 1$ y el inverso de $\frac{1}{a}$ es único (proposición 1.1), necesariamente $a = (\frac{1}{a})^{-1}$.

(ii) $b = b + 0 = b + (a - a) = (b + a) - a = (a + b) - a = (a + c) - a = (c + a) - a = c + (a - a) = c$.

(iii) $b = 1 \cdot b = (\frac{1}{a}a)b = \frac{1}{a}(ab) = \frac{1}{a}(ac) = (\frac{1}{a}a)c = 1 \cdot c = c$.

(iv) Si $ab = 0$ y suponemos, por ejemplo, que $a \neq 0$, entonces

$$b = 1b = (\frac{1}{a}a)b = \frac{1}{a}(ab) = \frac{1}{a}0 = 0.$$

Por supuesto que si suponemos que $b \neq 0$ el mismo razonamiento demuestra que $a = 0$.

□

Nota 1.5 *Debe comprobarse que todas las igualdades que se han utilizado para probar (ii), (iii) y (iv) están justificadas, algunas por tratarse de axiomas y las otras por haberse obtenido en las proposiciones anteriores.*

Nota 1.6 *Dados $a \in \mathbb{R}$ y un número natural n denotaremos por a^n al elemento de $\mathbb{R}$ definido por: $a^n = a$ si $n = 1$ y $a^n = aa^{n-1}$ si $n > 1$. Suele adoptarse el convenio $a^0 = 1$. En lugar de $(\frac{1}{a})^n$ escribiremos con frecuencia a^{-n}.*

Proposición 1.7 *Para cualesquiera a, b, $c \in \mathbb{R}$, siendo $a \neq 0$, la ecuación $ax + b = c$ tiene como solución única al número real $x = \frac{c-b}{a}$.*

Demostración. La ecuación $ax + b = c$ equivale a $ax = c - b$, que a su vez equivale a que $x = \frac{c-b}{a}$. □

Podemos considerar al conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ como un subconjunto de $\mathbb{R}$ identificando el número natural n con la suma $1 + \overset{n}{\cdots} + 1$, siendo 1 el elemento neutro para la multiplicación de números reales. También podemos considerar a $\mathbb{Z}$ como subconjunto de $\mathbb{R}$ identificando el 0 de $\mathbb{Z}$ con el elemento neutro de la adición de números reales y los enteros de la forma $-n$ con el opuesto del natural n. El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales puede identificarse con el subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por aquellos elementos de $\mathbb{R}$ que se puedan escribir de la forma $\frac{a}{b}$ para algún a y $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, identificando $\frac{a}{b}$ con $\frac{c}{d}$ si $ad = bc$.

1.1.2. Relación de orden en $\mathbb{R}$

Introducimos en $\mathbb{R}$ una relación de orden entre sus elementos de forma axiomática.

Axioma de orden: Existe un subconjunto no vacío P de $\mathbb{R}$, al que llamaremos *conjunto de los números reales positivos*, que verifica las siguientes propiedades:

O1: Si a y b pertenecen a P, entonces $a + b \in P$.

O2: Si a y b pertenecen a P, entonces $ab \in P$.

O3: Para todo $a \in \mathbb{R}$ se verifica una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

$$a \in P, \quad -a \in P \quad \text{o} \quad a = 0.$$

Esta última condición se llama *propiedad de tricotomía*.

A partir del conjunto de los números positivos se define el de los números negativos N como el conjunto formado por los $-a$, $a \in P$. Por el axioma de tricotomía resulta que $\mathbb{R} = P \cup N \cup \{0\}$ siendo además estos conjuntos disjuntos dos a dos. Para indicar que $a \in P$ se suele escribir $a > 0$.

Definición 1.8 *En el conjunto de los números reales definimos las relaciones* $<$, $>$, $\leq$ *y* $\geq$ *de la siguiente manera: Dados* $a, b \in \mathbb{R}$, *escribiremos* $a > b$ *o también* $b < a$ *si* $a - b \in P$. *Si* $a - b \in P \cup \{0\}$ *entonces escribiremos* $a \geq b$ *o* $b \leq a$. *Escribiremos* $a < b < c$ *para indicar que* $a < b$ *y* $b < c$, $a \leq b < c$ *para indicar que* $a \leq b$ *y* $b < c$, *etc.*

Utilizando las anteriores relaciones los axiomas de orden pueden escribirse así:

O1: Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a + b > 0$.

O2: Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $ab > 0$.

O3: Para todo $a \in \mathbb{R}$ se verifica una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

$$a > 0, \quad -a > 0 \quad \text{o} \quad a = 0.$$

Vamos ahora a obtener algunas consecuencias de estos axiomas.

Proposición 1.9 *(i) Si* $a \geq 0$ *y* $b \geq 0$ *entonces* $a + b \geq 0$.

(ii) Si $a \geq 0$ *y* $b \geq 0$ *entonces* $ab \geq 0$.

(iii) Si $a \geq 0$ *y* $a \leq 0$ *entonces* $a = 0$.

Demostración.

(i) Estudiemos por separado las distintas posibilidades que hay para a y b.

1. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces por $(O1)$ se tiene que $a + b > 0$ y por lo tanto $a + b \geq 0$.
2. Si $a = 0$ y $b > 0$, entonces $a + b = 0 + b = b > 0$ y por lo tanto $a + b \geq 0$.
3. Si $a > 0$ y $b = 0$, entonces $a + b = a + 0 = a > 0$ y por lo tanto $a + b \geq 0$.
4. Si $a = 0$ y $b = 0$, entonces $a + b = 0 + 0 = 0$ y por lo tanto $a + b \geq 0$.

(ii) Hagamos lo mismo que en (i).

1. Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces por $(O2)$ se tiene que $ab > 0$ y por lo tanto $ab \geq 0$.
2. Si $a = 0$ y $b > 0$, entonces $ab = 0b = 0$ y por lo tanto $ab \geq 0$.
3. Si $a > 0$ y $b = 0$, entonces $ab = a0 = 0$ y por lo tanto $ab \geq 0$.
4. Si $a = 0$ y $b = 0$, entonces $ab = 0 \cdot 0 = 0$ y por lo tanto $ab \geq 0$.

(iii) Si a fuese distinto de 0 entonces $a > 0$ y así a pertenecería a P, pero como también $a < 0$, a pertenecería a N lo que es imposible por el axioma de tricotomía.

□

Proposición 1.10 *Las relaciones $<$ y $\leq$ entre los elementos de $\mathbb{R}$ tienen las siguientes propiedades:*

(i) $<$ *es antirreflexiva: cualquiera que sea $a \in \mathbb{R}$ nunca se verifica que $a < a$.*

(ii) $<$ *es transitiva: si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.*

(iii) $\leq$ *es reflexiva: cualquiera que sea $a \in \mathbb{R}$ se verifica que $a \leq a$.*

(iv) $\leq$ *es antisimétrica: si para $a, b \in \mathbb{R}$ se verifica que $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.*

(v) $\leq$ *es transitiva: si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.*

Demostración.

(i) Si $a < a$ entonces $a - a > 0$, pero $a - a = 0$.

(ii) Si $a < b$ entonces $b - a > 0$ y si $b < c$ entonces $c - b > 0$. De $(O1)$ se sigue que $(b - a) + (c - b) = c - a > 0$ y por lo tanto $a < c$.

(iii) Dado que $a - a = 0$ se tiene que $a \leq a$.

(iv) Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $b - a \geq 0$ y $b - a \leq 0$, luego por el apartado (iii) de la Proposición 1.9 tenemos que $b - a = 0$, esto es, $b = a$.

(v) Si $a \leq b$ entonces $b - a \geq 0$ y si $b \leq c$ entonces $c - b \geq 0$ y sabemos por el apartado (i) de la proposición anterior que $(b - a) + (c - b) = c - a \geq 0$ lo que nos dice que $a \leq c$.

$\square$

Nota 1.11 *Las relaciones $>$ y $\geq$ tienen también las propiedades descritas en la proposición anterior.*

Nota 1.12 *Cuando una relación entre elementos de un conjunto verifica las propiedades (iii), (iv) y (v) de la proposición anterior, se dice que la relación $\leq$ es de orden. Obsérvese que en este caso se trata de un orden total, pues dados cualesquiera elementos a y b de $\mathbb{R}$ siempre $a \leq b$ o $b \leq a$, pues $b - a \in \mathbb{R} = P \cup N \cup \{0\}$.*

Proposición 1.13 *(i) Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se verifica que $a^2 > 0$.*

(ii) $1 > 0$.

(iii) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $n > 0$.

Demostración.

(i) Por el axioma de tricotomía, como a no es 0 debe ocurrir una de las siguientes situaciones: $a > 0$ o $a < 0$. Ahora bien, si $a > 0$ entonces $a^2 = aa > 0$ por $(O2)$. Si $a < 0$ entonces $-a > 0$ lo que implica que $(-a)(-a) > 0$ (por $(O2)$), pero

$$(-a)(-a) = (-1)a(-1)a = (-1)(-1)aa = aa$$

(la última igualdad es el apartado (iv) de la proposición 1.3), y por lo tanto $aa > 0$.

(ii) Como $1 \neq 0$ y $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$, se sigue de (i) que $1 > 0$.

(iii) Usaremos el método de inducción: Si $k = 1$ el resultado es cierto (por (ii)) si suponemos que dado $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $k > 0$, entonces $k + 1 > 0$ por $(O1)$.

□

La siguiente proposición nos da diversas propiedades que relacionan el orden con las operaciones de adición y multiplicación en $\mathbb{R}$.

Proposición 1.14 *Sean a, b, c, $d \in \mathbb{R}$. Se verifica:*

(i) Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.

(ii) Si $a > b$ y $c > d$, entonces $a + c > b + d$.

(iii) Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ca > cb$.

(iv) Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ca < cb$.

(v) Si $a > 0$, entonces $\frac{1}{a} > 0$.

(vi) Si $a < 0$, entonces $\frac{1}{a} < 0$.

(vii) Si $0 < a < b$, entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Demostración.

(i) Si $a > b$ entonces $a - b > 0$. Como $(a + c) - (b + c) = a - b > 0$ resulta que $a + c > b + c$.

(ii) Si $a > b$ entonces $a - b > 0$, y como también $c - d > 0$, se tiene que $(a+c)-(b+d) = (a - b) + (c - d) > 0$, esto es $a + c > b + d$.

(iii) Si $a > b$ entonces $a - b > 0$. Como también $c > 0$, el axioma $(O2)$ nos da que $(a - b)c > 0$, lo que implica que $ca - cb = (a - b)c > 0$.

(iv) Si $a > b$ entonces $a - b > 0$. Como $c < 0$, $-c > 0$ y así $cb - ca = (a - b)(-c) > 0$, es decir, $cb > ca$.

(v) Si $a > 0$ entonces, en particular $a \neq 0$, y por lo tanto existe $\frac{1}{a}$ y éste es distinto de 0. Si $\frac{1}{a}$ fuese < 0 se tendría (por (iv)) que $1 = a(\frac{1}{a}) < 0$ lo que es absurdo, luego $\frac{1}{a} > 0$.

(vi) Si $a < 0$ y $\frac{1}{a} > 0$, entonces $-1 = (-a)(\frac{1}{a}) > 0$ $(O2)$ lo que es absurdo pues $1 > 0$, en consecuencia $\frac{1}{a} < 0$ pues $\frac{1}{a} \neq 0$.

(vii) Como $ab > 0$ resulta (por (iii)) que $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ si y sólo si $\frac{ab}{a} > \frac{ab}{b}$, y esto es cierto pues esto es equivalente a que $b > a$ lo que se verifica por hipótesis.

□

Nota 1.15 *Dado que todo natural n es mayor que 0 y que para cada m también natural, $\frac{1}{m} > 0$, entonces $\frac{n}{m} > 0$ y resulta así que los números racionales $\frac{n}{m}$, con n y m mayores que 0, son mayores que 0.*

Proposición 1.16 *Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, entonces $a < \frac{1}{2}(a+b) < b$.*

Demostración. Por (i) de la proposición 1.14 se sigue que:

$$2a = (1+1)a = a + a < a + b$$

y que

$$a + b < b + b = 2b.$$

Como $2 > 0$ se tiene que $\frac{1}{2} > 0$ y entonces

$$a = \frac{1}{2}2a < \frac{1}{2}(a+b) < \frac{1}{2}2b = b.$$

□

Corolario 1.17 *Si $b \in \mathbb{R}$ y $b > 0$, entonces $0 < \frac{1}{2}b < b$.*

Demostración. Si tomamos $a = 0$ en la proposición anterior deducimos directamente el resultado. □

Obtenemos ahora un par de proposiciones que serán utilizadas varias veces a lo largo del curso y que, en principio, son un poco sorprendentes.

Proposición 1.18 *Si dado un real a, éste verifica que $0 \leq a \leq \varepsilon$ cualquiera que sea el real positivo ε, entonces $a = 0$.*

Demostración. Si suponemos que $a > 0$ el corolario anterior (considerando como a el 0 y como b el a) nos da que

$$0 < \frac{1}{2}a < a.$$

Pero entonces no es cierto que $a \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, basta considerar $\varepsilon = \frac{1}{2}a$. Luego, necesariamente $a = 0$. □

Proposición 1.19 *Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \leq b + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $a \leq b$.*

Demostración. El que $a \leq b + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ nos da que $a - b \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Si ocurriese que $a > b$ entonces $0 < a - b \leq \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, pero esto no es posible, por la proposición anterior. □

Nota 1.20 *El axioma (02) nos dice que el producto de dos reales positivos es un real positivo, la proposición que sigue nos dice que puede que el producto de dos reales sea positivo sin que lo sean éstos.*

Proposición 1.21 *Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $ab > 0$ entonces se da una de las siguientes situaciones:*

(i) $a > 0$ *y* $b > 0$.

(ii) $a < 0$ *y* $b < 0$.

(iii) Si $a > 0, b \geq 0$ *y* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $a > b$ *si y sólo si* $a^n > b^n$.

Demostración.

(i) Al ser $ab > 0$ se tiene que $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Si $a > 0$, entonces $\frac{1}{a} > 0$ (Proposició 1.14, (vi)) y, en consecuencia

$$b = 1 \cdot b = (\frac{1}{a}a)b = \frac{1}{a}(ab) > 0.$$

Si $a < 0$, entonces $\frac{1}{a} < 0$ (Proposición 1.14, (vii)) y así,

(ii)

$$b = 1 \cdot b = (\frac{1}{a}a)b = \frac{1}{a}(ab) < 0.$$

(iii) Se verifica que $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$ (lo que se comprueba haciendo el producto de la derecha). Si $a > b$, $a - b > 0$, y al ser $a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1} > 0$ (pues $a > 0$ y $b \geq 0$), resulta que el producto de ellos es positivo por lo que $a^n - b^n > 0$, eso es, $a^n > b^n$. Si ahora suponemos que $a^n - b^n > 0$, al ser $a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1} > 0$ se sigue de (ii) que $a - b > 0$, esto es, $a > b$.

□

Corolario 1.22 *Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $ab < 0$ entonces se da una de las siguientes situaciones:*

(i) $a < 0$ *y* $b > 0$.

(ii) $a > 0$ *y* $b < 0$.

Demostración. Si $ab < 0$ entonces $(-a)b > 0$ y se sigue de la proposición anterior que o bien $-a > 0$ y $b > 0$ o bien $-a < 0$ y $b < 0$ lo que nos da el resultado. □

Vamos a obtener ahora una desigualdad clásica entre números reales que se usa con frecuencia, es la desigualdad de Bernoulli:

Proposición 1.23 (Desigualdad de Bernoulli) *(Jacob I Bernoulli, Suiza, 1654-1705). Para todo $a > -1$ se verifica que $(1+a)^n \geq 1 + na$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Utilizaremos el método de inducción. Para $n = 1$ la desigualdad es cierta, pues $(1 + a) = 1 + a$. Supongamos que la desigualdad de Bernoulli es verdadera para un cierto $k \in \mathbb{N}$ y probemos que también es cierta para $k + 1$. Dado que estamos suponiendo que $(1 + a)^k \geq 1 + ka$, resulta que

$$\begin{aligned}(1+a)^{k+1} &= (1+a)^k(1+a) \geq (1+ka)(1+a)\\ &= 1+(k+1)a+ka^2 \geq 1+(k+1)a\end{aligned}$$

(téngase en cuenta que al ser $a > -1$ se tiene que $(1+a) > 0$ y esto justifica la desigualdad de la primera línea de la anterior cadena de igualdades y desigualdades). □

Introducimos ahora el concepto de valor absoluto de un número real y vemos algunas de su propiedades.

Definición 1.24 *Se define el valor absoluto de un número real a como el propio a si $a \geq 0$ y como $-a$ si $a < 0$. Suele usarse la notación $|a|$ para representar el valor absoluto del número real a. Recordamos que por el axioma de tricotomía, todo $a \in \mathbb{R}$ verifica una de esas condiciones.*

Nota 1.25 *Obseérvese que siempre $|a| \geq 0$.*

Obtenemos ahora algunas propiedades del valor absoluto que usaremos a lo largo del curso.

Proposición 1.26 *(i) $|a| = 0$ si y sólo si $a = 0$.*

(ii) $|-a| = |a|$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(iii) $|ab| = |a||b|$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

(iv) $|\frac{1}{a}| = \frac{1}{|a|}$ para todo $a \neq 0$.

(v) Si $c \geq 0$ entonces $|a| \leq c$ si y sólo si $-c \leq a \leq c$.

(vi) $-|a| \leq a \leq |a|$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Demostración.

(i) Supongamos que $|a| = 0$. Si $a \neq 0$ entonces $-a$ también es distinto de 0 por lo que $|a| \neq 0$, pues $|a| = a$ o $|a| = -a$. Por otra parte, por la propia definición del valor absoluto, si $a = 0$, entonces $|a| = 0$.

(ii) Si $a = 0$ entonces $|0| = 0 = |-0|$. Si $a > 0$ entonces $-a < 0$ por lo que $|a| = a$ y $|-a| = -(-a) = a$. Si $a < 0$ entonces $-a > 0$ y $|a| = -a$ y $|-a| = -a$.

(iii) La igualdad es obvia si alguno de los números es 0. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $ab > 0$ y por lo tanto $|ab| = ab = |a||b|$. Si $a > 0$ y $b < 0$ entonces $ab < 0$ por lo que $|ab| = -ab = a(-b) = a|b| = |a||b|$. Los casos que faltan son similares a éstos.

(iv) $|\frac{1}{a}||a| = \left|\frac{1}{a}a\right| = |1| = 1$, la unicidad del inverso para el producto nos da el resultado.

(v) Si $|a| \leq c$. Si $a \geq 0$ se tiene que $a \leq c$ y como $-c \leq 0$ tenemos que $-c \leq a \leq c$. Si $a < 0$, entonces $-a = |a| \leq c$ y así $a \geq -c$ (Proposición 1.14, (iv)) y desde luego $a < c$. Recíprocamente, si se tiene que $-c \leq a \leq c$ entonces tanto a como $-a$ son menores o iguales que c pues el que $-c \leq a$ implica que $-a \leq c$. En consecuencia $|a| \leq c$.

(vi) Lo que hay que probar es un caso particular de (v) tomando $c = |a|$.

□

La siguiente propiedad del valor absoluto es la llamada *propiedad triangular* y será de gran utilidad en lo que sigue.

Proposición 1.27 *Para cualesquiera a y $b \in \mathbb{R}$ se verifica que*

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Demostración. Dado que por (v) de la proposición anterior se tiene que

$$-|a| \leq a \leq |a| \text{ y } -|b| \leq b \leq |b|$$

se deduce de la proposición 1.9, (ii) que

$$-(|a| + |b|) = -|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$$

y entonces, por la propiedad (v) de la proposición anterior se tiene que $|a + b| \leq |a| + |b|$ de donde se sigue lo que queremos. □

Esta desigualdad da lugar a otras dos que también serán muy usadas más adelante.

Proposición 1.28 *Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que:*

(i) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

(ii) $|a-b| \leq |a|+|b|$.

Demostración.

(i) Dado que $a=(a-b)+b$ la desigualdad del triángulo nos da que

$$|a| \leq |a-b|+|b|$$

y por lo tanto $|a|-|b| \leq |a-b|$. Análogamente $b=(b-a)+a$ y entonces

$$|b| \leq |b-a|+|a|$$

y en consecuencia $-(|a|-|b|)=|b|-|a| \leq |b-a|=|a-b|$, esto, junto con la desigualdad $|a|-|b| \leq |a-b|$ nos da el resultado.

(ii) Se sigue de la desigualdad triangular:

$$|a-b|=|a+(-b)| \leq |a|+|-b|=|a|+|b|.$$

□

1.1.3. El axioma del supremo en $\mathbb{R}$

En esta sección daremos el axioma que nos falta para completar la introducción axiomática de $\mathbb{R}$. Los axiomas de cuerpo y de orden que hemos introducido los verifica $\mathbb{Q}$. Necesitamos unas definiciones previas.

Definición 1.29 *Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}$*

(i) Se dice que $u \in \mathbb{R}$ es una cota superior de S si se verifica que $a \leq u$ para todo $a \in S$.

(ii) Se dice que $w \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de S si se verifica que $w \leq a$ para todo $a \in S$.

No todo subconjunto tiene cotas superiores, por ejemplo el conjunto de los números reales mayores que 0. Tampoco tiene cotas inferiores, por ejemplo el conjunto de los números reales menores que 0. El conjunto $\mathbb{R}$ no tiene cotas ni superiores ni inferiores. Lo que sí ocurre es que si un conjunto S tiene una cota superior u entonces cualquier número real mayor que u es una cota superior de S. Lo análogo ocurre para las cotas inferiores, cualquier número real menor que una cota inferior es cota inferior.

Cuando un conjunto tiene una cota superior (y por lo tanto infinitas) se dice que el conjunto está *acotado superiormente*, y cuando tiene una cota inferior (y por lo tanto infinitas) se dice que el conjunto está *acotado inferiormente*. Cuando un conjunto está acotado superior e inferiormente se dice que es un *conjunto acotado*.

Definición 1.30 *Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente. Se dice que $u \in \mathbb{R}$ es el supremo de S si*

(i) u es una cota superior de S, y

(ii) si v es cualquier otra cota superior, entonces $u < v$.

La condición (ii) también puede enunciarse así: Si $v < u$ entonces existe $s \in S$ tal que $s > v$. El supremo de un conjunto S, cuando existe, se suele denotar por $\sup S$. Cuando el supremo de un conjunto pertenece al conjunto se dice que ese supremo es un **máximo**.

De forma análoga se define el ínfimo para conjuntos acotados inferiormente:

Definición 1.31 *Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente. Se dice que $w \in \mathbb{R}$ es el ínfimo de S si*

(i) w es una cota inferior de S, y

(ii) si t es cualquier otra cota inferior, entonces $t < w$.

La condición (ii) también puede enunciarse así: Si $t > w$ entonces existe $s \in S$ tal que $s < t$. El ínfimo de un conjunto S, cuando existe, se suele denotar por $\inf S$. Cuando el ínfimo de un conjunto pertenece al conjunto se dice que ese ínfimo es un **mínimo**.

Nota 1.32 *El supremo de un conjunto, si existe, es necesariamente único. Lo mismo ocurre con el ínfimo. En efecto, si u y u' (distintos) verificasen ambos las condiciones de la definición de supremo entonces por (ii) de la definición de supremo aplicada a u tomando $v = u'$se tendría que $u < u'$ y aplicada a u' tomando $v = u$ se tendría que también $u' < u$ lo que es absurdo. Un argumento similar se aplica para obtener la unicidad del ínfimo.*

Nota 1.33 *No se puede probar la existencia de supremo de un conjunto acotado superiormente (ni la de ínfimo de un conjunto acotado inferiormente) con los axiomas y propiedades que tenemos hasta ahora, necesitamos introducir un axioma que lo garantice.*

Podemos ya enunciar el **Axioma del supremo:**

S: Todo conjunto no vacío acotado superiormente tiene supremo.

Observamos que de este axioma se deduce que todo conjunto S acotado inferiormente tiene ínfimo, basta considerar el conjunto $-S$ formado por los opuestos de los elementos de S, este conjunto está acotado superiormente, pues si w es una cota inferior de S, entonces $-w$ es una cota superior de $-S$ y si u es el supremo de $-S$ se verifica que $-u$ es el ínfimo de S. Además se verifica que $infS = -sup(-S)$ y que $inf(-S) = -sup(S)$.

A estas alturas alguien puede preguntarse, ¿pero existe un conjunto en el que se cumplan todos los axiomas anteriores?, pues sí, y hay varias formas de construirlo. Más adelante comentaremos un poco una de ellas.

Algunas aplicaciones del axioma del supremo

Comenzamos con la llamada propiedad de Arquímedes que garantiza que dado cualquier número real siempre existe un número natural mayor que él. Esto que nos puede parecer obvio no se deduce de las propiedades algebraicas de $\mathbb{R}$, se deduce del axioma del supremo como vemos a continuación.

Proposición 1.34 (Propiedad de Arquímedes) *(Siracusa, s. III a.C.). Dado cualquier número real x existe un número natural n_x tal que $n_x > x$. Denotamos a un tal natural por n_x para que quede claro que, en principio, ese número depende de x.*

Demostración. Si suponemos que existe un número real x que es mayor o igual que cualquier número natural, entonces $\mathbb{N}$ sería un conjunto superiormente acotado y, por el axioma del supremo, $\mathbb{N}$ tendría supremo en $\mathbb{R}$, denotémoslo por u. Entonces, como $u - 1 < u$, resulta que $u - 1$ no puede ser cota superior de $\mathbb{N}$ y entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $u - 1 < m$. Esto nos da que $u < m + 1$ y como $m + 1 \in \mathbb{N}$ esto nos dice que u no es cota superior de $\mathbb{N}$ y lo es, por ser su supremo. Llegamos así a un absurdo y por lo tanto se verifica la propiedad de Arquímedes. $\square$

Nota 1.35 *Hay varias formas de expresar esta propiedad, obtenemos algunas de ellas en el siguiente corolario.*

Corolario 1.36 *Para cualesquiera reales x e y mayores que 0 se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < ny$.

(ii) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < y$.

(iii) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq x < n$.

Demostración.

(i) Si aplicamos la Propiedad Arquimediana a $\frac{x}{y}$ obenemos que existe n tal que $n > \frac{x}{y}$ por lo que $yn > x$ (téngase en cuenta que $y > 0$), esto es, $x < ny$.

(*ii*) Si tomamos como x el número natural 1 resulta que existe n tal que $1 < ny$ y entonces $\frac{1}{n} < y$.

(*iii*) Por la propiedad arquimediana se tiene que $\{m \in \mathbb{N} : x < m\}$ es no vacío. Este conjunto tiene un elemento n que es menor o igual que todos los demás (Principio de buena ordenación de $\mathbb{N}$). Nótese que $n > x$ y que $n - 1 \leq x$. Entonces

$$n - 1 \leq x < n.$$

□

Nota 1.37 *Con anterioridad se probó que no hay ningún número racional cuyo cuadrado sea* 2*. Vamos a probar ahora, que como consecuencia del axioma del supremo, sí que hay un número real cuyo cuadrado es* 2*.*

Proposición 1.38 *Existe un número real positivo cuyo cuadrado es* 2*.*

Demostración. Denotemos por S al conjunto de los números reales mayores o iguales que 0 cuyo cuadrado es menor que 2. Esto es

$$S = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x,\, x^2 < 2\}.$$

Este conjunto es no vacío pues $1 \in S$ y está acotado superiormente, por ejemplo por el 2. Por el axioma del supremo el conjunto S tiene supremo en $\mathbb{R}$, llamémosle u. Probaremos que $u^2 = 2$ viendo que es imposible que $u^2 < 2$ y que $u^2 > 2$.

Supongamos que $u^2 < 2$, vamos a demostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $u + \frac{1}{n} \in S$ lo que contradice el hecho de que $u = \sup S$ (pues entonces u no sería cota superior de S). Veamos como podemos elegir un tal n. Observamos para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$\left(u + \frac{1}{n}\right)^2 = u^2 + \frac{2u}{n} + \frac{1}{n^2}$$

y como $\frac{1}{n^2}$ es menor o igual que $\frac{1}{n}$ se tiene que

$$\left(u + \frac{1}{n}\right)^2 \leq u^2 + \frac{2u}{n} + \frac{1}{n} = u^2 + \frac{1}{n}(2u + 1).$$

Ahora bien, por la afirmación (*ii*) del corolario anterior (nótese que estamos suponiendo que $2 - u^2 > 0$) existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$2u + 1 < n(2 - u^2)$$

y entonces $\frac{1}{n}(2u + 1) < 2 - u^2$ con lo que tendríamos que

$$\left(u + \frac{1}{n}\right)^2 < u^2 + (2 - u^2) = 2$$

y esto probaría que $u + \frac{1}{n} \in S$.

Supongamos ahora que $u^2 > 2$, vamos a demostrar que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $u - \frac{1}{m}$ es cota superior de S lo que contradice el que u sea la menor de las cotas superiores de S. Observamos que para cualquier $m \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$\left(u - \frac{1}{m}\right)^2 = u^2 - \frac{2u}{m} + \frac{1}{m^2} > u^2 - \frac{2u}{m}.$$

Si elegimos $m \in \mathbb{N}$ tal que $2u < m(u^2 - 2)$ (cosa que puede hacerse por la afirmación (ii) del corolario anterior al ser $u^2 - 2 > 0$) entonces

$$\frac{2u}{m} < u^2 - 2$$

y por lo tanto $u^2 - \frac{2u}{m} > 2$ y así $\left(u - \frac{1}{m}\right)^2 > 2 > x^2$ para todo $x \in S$ y $u - \frac{1}{m}$ será cota superior de S, pues $\left(u - \frac{1}{m}\right)^2 > x^2$ implica que $u - \frac{1}{m} > x$ (Proposición 1.14, (v)).

Dado que no puede darse que $u^2 > 2$ ni que $u^2 < 2$ concluimos que $u^2 = 2$. $\square$

Nota 1.39 *Este u se suele denotar por $\sqrt{2}$. Puede probarse, con el argumento anterior que todo número real a mayor que 0 tiene una raíz cuadrada b, esto es, $b^2 = a$, siendo $b \geq 0$. Este b se denota habitualmente por $\sqrt{a}$. A veces se escribe también $a^{\frac{1}{2}}$. Con un procedimiento similar al anterior, usando el binomio de Newton, se puede probar que todo número real mayor que 0 tiene una raíz $n-$ésima cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$.*

Nota 1.40 *Observamos que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales, a pesar de ser un cuerpo ordenado, no tiene la propiedad del supremo, $S = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}, \left(\frac{m}{n}\right)^2 < 2\right\}$ no tiene supremo (en $\mathbb{Q}$). En efecto, si existiese un número racional r que fuese el supremo de ese conjunto, entonces $r^2 \neq 2$ (esto se ha visto a principios del curso). Si suponemos que $r^2 < 2$ el argumento que usamos hace un momento nos daría la existencia de un $n \in \mathbb{N}$ tal que $r + \frac{1}{n} \in S$. Dado que $r \in \mathbb{Q}$ también $r + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ y tendríamos un número racional de S más grande que el supremo de S. Si por otra parte $r^2 > 2$ existirá un $m \in \mathbb{N}$ tal que $r - \frac{1}{m}$ es cota superior de S (argumento de la segunda parte de la demostración de la proposición anterior) lo que es absurdo pues $r - \frac{1}{m}$ es racional y r es la menor de las cotas superiores.*

Nota 1.41 *Otra propiedad importante que obtendremos ahora de los números reales es la de que entre cada dos números reales distintos siempre hay un número racional. Esta propiedad se conoce como la propiedad de densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.*

Proposición 1.42 (Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$) *Para cualesquiera números reales x e y tales que $x < y$ existe un número racional $r \neq 0$ tal que $x < r < y$.*

Demostración. Si $x \leq 0$ e $y > 0$, por la propiedad arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq 0 < \frac{1}{n} < y$. Supongamos ahora que $0 < x < y$. Al ser $y - x > 0$ la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$ nos da que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < y - x$, con lo que $ny - nx > 1$ y entonces $nx + 1 < ny$. Al ser $x > 0$ tenemos que $nx > 0$ y por lo tanto el apartado (iii) del Corolario anterior nos da que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m - 1 \leq nx < m$ y entonces que

$$nx < m < nx + 1 < ny$$

lo que nos da que $x < r < y$ siendo $r := \frac{m}{n}$ que es un número racional. Si finalmente $x < y \leq 0$ se trabaja con $-x$ y $-y$ que verifican $0 \leq -y < -x$. □

Nota 1.43 *Veremos ahora como entre dos reales (distintos) siempre hay un número irracional, entonces también el conjunto $\mathbb{I}$ de los números irracionales (los reales que no son racionales) es denso en el de los reales.*

Proposición 1.44 *(Densidad de $\mathbb{I}$ en $\mathbb{R}$) Para cualesquiera dos reales x e y tales que $x < y$ existe un número irracional z tal que $x < z < y$.*

Demostración. Dados x e y tales que $x < y$ consideremos los números reales $\frac{x}{\sqrt{2}}$ e $\frac{y}{\sqrt{2}}$. Por la proposición anterior aplicada a estos reales obtenemos un número racional $r, r \neq 0$, tal que

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}$$

Pero entonces $r\sqrt{2}$ es un número irracional (si fuera racional también lo sería $\sqrt{2} = \frac{1}{r}(r\sqrt{2})$ y sabemos que esto no es cierto) que verifica que

$$x < r\sqrt{2} < y.$$

□

1.2. Intervalos y decimales

La relación de orden que tenemos en $\mathbb{R}$ determina de manera bastante natural unos conjuntos que denominaremos *intervalos*.

Definición 1.45 *Dados dos reales a y b, siendo $a \leq b$, se define:*

1. Intervalo abierto de extremos a y b como $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, si $a < b$. Si $a = b$, $(a, b) = \emptyset$.

2. Intervalo cerrado y acotado de extremos a y b como $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. Observamos que si $a = b$, entonces $[a, b] = \{a\}$.

3. Intervalo semiabierto o también semicerrado de extremos a y b a cualquiera de los conjuntos: $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ y $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ si $a < b$. Si $a = b$, $[a, a) = (a, a] = \emptyset$.

Nota 1.46 *También se llaman intervalos abiertos a los conjuntos de la forma*

$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \ (-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

e intervalos cerrados a los conjuntos de la forma

$$[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \ (-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}.$$

Nótese que mientras que los intervalos con ambos extremos reales son conjuntos acotados, los de este último tipo no lo son. A veces también se usa la notación $(-\infty, +\infty)$ para denotar al propio $\mathbb{R}$. Observamos que $+\infty$ y $-\infty$ son apenas unos símbolos, no son números reales.

Intervalos encajados

Definición 1.47 *Se dice que una colección de intervalos I_n, $n \in \mathbb{N}$ está encajada si se cumple la condición*

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots$$

Observamos que el signo $\supset$ entre dos conjuntos significa que todo elemento del conjunto que está a la derecha de él también está en el conjunto de su izquierda. No se excluye que ambos conjuntos puedan ser iguales.

Ejemplo 1.48 *Si por cada $n \in \mathbb{N}$ hacemos $I_n = [0, \frac{1}{n}]$, entonces $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de intervalos encajados. Observamos que en este caso $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$. Desde luego $0 \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$ y, por otra parte, si $x \in \cap_{n=1}^{\infty} I_n$ entonces $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ lo que implica que $x = 0$, pues de lo contrario, por la propiedad arquimediana (si $x > 0$) existiría un $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_x} < x$.*

Nota 1.49 *Nótese que no toda colección encajada de intervalos tiene intersección no vacía. Esto ocurre, si por ejemplo, $I_n = (0, \frac{1}{n})$, o $I_n = [n, +\infty)$. No obstante cuando se trata de una colección de intervalos cerrados con extremos reales siempre su intersección es no vacía. Este hecho se conoce como la propiedad de los intervalos encajados y la obtenemos a continuación utilizando el axioma del supremo.*

Teorema 1.50 (de los intervalos encajados) *Si la colección de intervalos $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ es encajada entonces la intersección de los intervalos I_n es no vacía.*

Demostración. Dado que $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ resulta que $a_n \leq b_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y entonces $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado superiormente y por lo tanto tiene un supremo que denotaremos por u. En particular $a_n \leq u$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, cada b_n es cota superior de $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$. En efecto, fijado $n \in \mathbb{N}$, si tomamos $k \geq n$, entonces, como $I_k \subset I_n$, se tiene que $a_k \leq b_k \leq b_n$. Si ahora tomamos $k < n$, como $I_n \subset I_k$, se tiene que $a_k \leq a_n \leq b_n$. El que cada b_n sea cota superior de $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ nos da, por la propia definición de supremo, que $u \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tenemos así que $a_n \leq u \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y entonces $u \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Nota 1.51 *En principio la intersección de una colección de intervalos encajados que no sea vacía no tiene porque consistir en un solo punto. Piénsese en la colección formada por los intervalos* $I_n = [-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$. *Su intersección es precisamente* $[-1, 1]$. *La proposición siguiente da una condición suficiente para que la intersección de una colección encajada de intervalos cerrados conste de un único punto.*

Proposición 1.52 *Si* $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ *es una colección encajada de intervalos y se verifica que*

$$\text{ínf}\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0,$$

entonces existe un único número real c *en la* $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$. *Obsérvese que* $\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *está acotado inferiormente por* 0.

Demostración. Ya sabemos por la proposición anterior que la $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ es no vacía. Veamos como consta de un único punto. Supongamos que existen dos números reales c y d distintos en esa intersección y que $c < d$. Entonces $0 < d - c \leq b_n - a_n$, y por lo tanto $0 < d - c \leq \text{ínf}\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\}$, pero esto es imposible pues $\text{ínf}\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$. □

1.3. Representación binaria y decimal

Vamos a ver ahora como pueden representarse los reales en forma binaria o decimal. Empezamos por la forma binaria. Se trata de identificar cada número real con una "tira" $a_1\ a_2\ a_3$... donde los a_n son 0 ó 1. Vamos a empezar con los números naturales, éstos se representan con ceros y unos mediante el siguiente proceso: Se divide el número por 2, luego se divide el cociente que resulta también por 2 y así sucesivamente. Los restos son 0 ó 1 y se escriben estos ceros y unos en el orden inverso del que van saliendo poniendo al principio un 1.

Veamos algunos ejemplos: 1 se representa por 1; 2 se representa por 1 0; 3 se representa por 1 1; 4 se representa por 1 0 0; el 5 por 1 0 1; 6 por 1 1 0; 7 por 1 1 1; 8 por 1 0 0 0 etc.

Si se trata de números negativos se representa su valor absoluto como se acaba de indicar y se le pone un signo menos delante. Resulta así una "tira con signo". El 0 se representa simplemente por 0.

Todo real mayor que 0, que no sea un natural, es la suma de un número natural más un número real del intervalo $(0, 1)$. Téngase en cuenta que por el Corolario 1.1.3 (iii) para todo $x > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq x < n$. Veamos como se representan los números reales de $(0, 1)$.

Dado un real $x \in (0, 1)$ hacemos el siguiente proceso: Consideramos los intervalos $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ y $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Si $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ tomamos $a_1 = 0$, si $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ tomamos $a_1 = 1$ y si $x = \frac{1}{2}$ tomamos arbitrariamente $a_1 = 0$ ó 1.

Observamos que en cualquiera de los casos,

$$\frac{a_1}{2} \leq x \leq \frac{a_1}{2} + \frac{1}{2}.$$

En una segunda etapa consideramos los intervalos $\left(0, \frac{1}{2^2}\right]$ y $\left[\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2}\right]$ si $a_1 = 0$ y los intervalos $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2^2}\right]$ y $\left[\frac{3}{2^2}, 1\right)$ si $a_1 = 1$. Si $x \in (0, \frac{1}{2^2})$ tomamos $a_2 = 0$, si $x \in (\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2}]$ tomamos $a_2 = 1$, si $x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2^2})$ tomamos $a_2 = 0$, si $x \in (\frac{3}{2^2}, 1)$ tomamos $a_2 = 1$ y si $x = \frac{1}{2^2}$ ó $x = \frac{3}{2^2}$ tomamos $a_2 = 0$ ó 1 indistintamente. Observamos que en cualquiera de los casos,

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} \leq x \leq \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{1}{2^2}$$

Continuando este proceso indefinidamente obtenemos una "tira" $a_1\ a_2\ a_3\ a_4...$ de ceros y unos que constituye una representación binaria de x. En general,

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} \leq x \leq \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}.$$

Los a_n están unívocamente determinados salvo cuando $x \in (0,1)$ es de la forma $\frac{m}{2^n}$ con m impar. En ese caso a_n puede ser 0 ó 1 indistintamente, pero sucede que si para un tal punto tomamos $a_n = 0$ entonces todos los a_k con $k > m$ son iguales a 1 y que si tomamos $a_n = 1$ entonces $a_k = 0$ para todo $k > m$.

Si uno tiene una "tira" $a_1\ a_2\ a_3...$ de ceros y unos, y por cada $n \in \mathbb{N}$ hacemos

$$I_n = \left[\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n},\quad \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right],$$

tenemos una colección de intervalos encajados cuya diferencia de extremos es $\frac{1}{2^n}$. Como $\inf\{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\} = 0$ la intersección de esos intervalos es un único punto $x \in [0,1]$. Pues bien, $a_1\ a_2\ a_3...$ es precisamente la representación binaria de ese x. Suele ponerse un punto delante de la expresión binaria de los reales del intervalo $(0,1)$ y a veces se escribe

$$(.a_1\ a_2\ a_3...)_2$$

para indicar que se trata de un representación binaria.

Vamos a describir la representación binaria de $\frac{3}{16}$ como ejemplo. Dado que $\frac{3}{16}$ es menor que $\frac{1}{2}$ el primer dígito de su representación binaria es 0, como $\frac{3}{16}$ es menor que $\frac{1}{2^2}$ el segundo dígito es 0, como $\frac{3}{16}$ es mayor que $\frac{1}{2^3}$ es tercer dígito es 1. Precisamente $\frac{3}{16}$ es el punto medio entre $\frac{1}{2^3}$ y $\frac{1}{2^2}$, luego el cuarto dígito podemos tomarlo como 0 o 1. Si tomamos el 0 la representación binaria de $\frac{3}{16}$ será:

$$(.0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1...)_2$$

Si tomamos el 1 la representación es

$$(.0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0...)_2$$

Conviene recordar que esta representación binaria de los reales es la que se utiliza en los ordenadores. Cada dígito 0 ó 1 se llama un **bit** y con ocho bits se forma un **byte**. Ciertamente se usan representaciones truncadas.

De manera similar a la anterior se definen las representaciones decimales de los números reales. Los enteros se dejan como están y para los reales entre 0 y 1 se considera una primera división del intervalo $[0,1]$ en 10 partes iguales y se asigna a cada $x \in (0,1)$ el valor $b_1 \in \{0,1,...,9\}$ cuando $x \in \left[\frac{b_1}{10}, \frac{b_1+1}{10}\right]$. Si $b_1 = 0$ se considera el intervalo semiabierto $\left(\frac{b_1}{10}, \frac{b_1+1}{10}\right]$ y si $b_1 = 9$ se considera el intervalo semiabierto $\left[\frac{b_1}{10}, \frac{b_1+1}{10}\right)$. Cuando x está en dos de esos intervalos, cosa que sólo ocurre cuando x es un extremo, le asignamos arbitrariamente el valor b_1 o el b_1+1. Dividimos ahora el intervalo $\left[\frac{b_1}{10}, \frac{b_1+1}{10}\right]$ en 10 partes iguales y repetimos el proceso anterior determinando así un b_2... Obtenemos así una "tira" b_1 b_2 b_3... de enteros no negativos donde cada $b_k \in \{0,1,...,9\}$, que constituyen una representación decimal de x. Estos b_n verifican la relación

$$\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \cdots + \frac{b_n}{10^n} \leq x \leq \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \cdots + \frac{b_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$$

por lo que la aproximación n-ésima de x difiere de x en una cantidad menor o igual que $\frac{1}{10^n}$.

Cualquier "tira" b_1 b_2 b_3... de enteros pertenecientes a $\{0,1,...,9\}$ determina un único número real del intervalo $(0,1)$ debido, de nuevo, a la propiedad de los intervalos encajados.

La representación decimal de un número real es única salvo ese número es de la forma $\frac{m}{10^n}$ para ciertos m y n siendo $1 \leq m \leq 10^n$ (siendo m no divisible por 10). En este tipo de puntos hay dos representaciones. Por ejemplo el número racional $\frac{38}{100}$ se puede representar en forma decimal por .38000... o por .37999...

Vamos a ver ahora como $\mathbb{R}$ **no** es numerable: Supongamos que lo fuese, en particular lo sería el intervalo $(0,1)$ y tendríamos una correspondencia biyectiva entre $\mathbb{N}$ y $(0,1)$. Así podríamos escribir todo número real de ese intervalo como uno de los elementos de un conjunto numerable formado por "tiras":

$$\begin{array}{l} .b_{11}\ b_{12}\ b_{13}... \\ .b_{21}\ b_{22}\ b_{23}... \\ .b_{31}\ b_{32}\ b_{33}... \\ \cdots \end{array}$$

con $b_{kn} \in \{0,1,...,9\}$. Pues bien, si consideramos el real cuya representación decimal está definida por $.b_1$ b_2 b_3... donde $b_1 = 2$ si $b_{11} \geq 5$ y $b_1 = 7$ si $b_{11} \leq 4$; $b_2 = 2$ si $b_{22} \geq 5$ y $b_2 = 7$ si $b_{22} \leq 4$, etc. Resulta que este número real no es ninguno de los elementos de esa colección numerable que pretendía representar a todos los números reales de $(0,1)$, por lo tanto es imposible que haya una biyección entre $\mathbb{N}$ y $[0,1]$. Obsérvese que la expresión que estamos considerando no tiene términos de la forma $\frac{m}{10^n}$ con $m = 1,...,10^n$, siendo m no divisible por 10, que son los únicos con dos posibles representaciones y por lo tanto no es ninguno de los considerados.

Capítulo 2

El cuerpo de los números complejos

No toda ecuación polinómica tiene siempre solución en el cuerpo de los reales. Basta considerar la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Obsérvese que cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $x^2 \geq 0$ (si $x = 0$ entonces $x^2 = 0$ y si $x > 0$ entonces $x^2 > 0$ por la Proposición 1.13) y entonces $x^2 + 1 \geq 1 > 0$.

Este hecho motivó la introducción de los **números complejos**, ese conjunto formará un cuerpo y en él toda ecuación polinómica tiene solución. Fueron introducidos por Girolamo Cardano (matemático italiano, 1501-1576). El nombre de número complejo se lo puso Carl F. Gauss (matemático alemán, 1777-1855), a quien debieron parecerle difíciles (complejos) siendo él el llamado "Príncipe de los matemáticos".

Veamos como se pueden construir. Consideremos en el producto cartesiano de $\mathbb{R}$ por si mismo, recordamos que $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$, y definamos en ese producto cartesiano las dos operaciones siguientes:

$$\begin{aligned} (x, y) \oplus (x', y') &= (x + x', y + y') \\ (x, y) \odot (x', y') &= (xx' - yy', xy' + yx'). \end{aligned}$$

Pues bien, con esas operaciones $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tiene estructura de cuerpo, recordemos los axiomas de cuerpo que introdujimos al estudiar los números reales. El neutro para la operación $\oplus$ es el $(0, 0)$, el opuesto de (x, y) es $(-x, -y)$, el neutro para $\odot$ es $(1, 0)$ y el inverso de (x, y), cuando $(x, y) \neq (0, 0)$, es $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$. Es fácil comprobar la verificación de los axiomas de cuerpo y también estas últimas afirmaciones.

Los reales pueden considerarse como complejos "identificando" cada real x con el complejo $(x, 0)$. La aplicación $x \in \mathbb{R} \mapsto (x, 0) \in \mathbb{C}$ es inyectiva. en efecto, si $x \neq y$ entonces $(x, 0) \neq (y, 0)$ pues los elementos de un producto cartesiano están unívocamente por sus dos componentes, en este caso la segunda es 0 y la primera es diferente de la segunda.

Hay un número complejo un poco especial, se trata del $(0, 1)$. Ã‰ste tiene la siguiente propiedad interesante

$$(0, 1) \odot (0, 1) = (-1, 0).$$

Esto es, su cuadrado es el número complejo $(-1,0)$, que, como acabamos de indicar, podemos identificar con el número real -1. Al número complejo $(0,1)$ se le llama la **unidad imaginaria** y suele representarse en matemáticas por la letra i y en física por la letra j (los físicos reservan la i para la intensidad de una corriente). Según acabamos de ver $i^2 = i \cdot i = -1$ y entonces la ecuación $x^2+1=0$ tiene como solución el número complejo i. Todo número complejo se puede escribir de la forma

$$(x,y) = (x,0) \odot (1,0) \oplus (y,0) \odot (0,1)$$

y, si identificamos $(x,0)$ con x, $(y,0)$ con y, y $(1,0)$ con 1, tenemos que $(x,y) = x+yi = x+iy$ (pues el producto de números complejos es conmutativo). Es habitual representar a los complejos con la letra z, y cuando así lo hagamos, se entenderá que z representa a un complejo (x,y). La primera componente del par, la x, se llamará la **parte real** de z y se representarán por $\operatorname{Re} z$, y la segunda componente se llamará la **parte imaginaria** de z y se representará por $\operatorname{Im} z$. Dados dos números complejos $z=(x,y)$ y $z'=(x',y')$ se tiene, por definición, que $z \oplus z' = x+x'+i(y+y')$ y $z \odot z' = xx'-yy'+i(x'y+xy')$. A partir de ahora usaremos el signo $+$ tanto para sumar números complejos como reales y, como ya hicimos en el caso real en el suprimimos el $\cdot$ de la operación de multiplicación, aquí suprimiremos el $\odot$ de la multiplicación de números complejos. Obsérvese que si identificamos los números reales x con los números complejos $(x,0)$ las operaciones $\oplus$ y $\odot$ que hemos considerado hasta ahora coinciden con las operaciones de adición y multiplicación de números reales. Esto es, $(x,0) \oplus (y,0) = (x+y,0)$ que se identifica con $x+y$ y $(x,0) \odot (y,0) = (xy,0)$ que se identifica con xy.

Los complejos pueden ser representados en un sistema cartesiano como elementos de $\mathbb{R}^2$. De hecho como conjuntos coinciden $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$, pero en $\mathbb{C}$ hay una operación de multiplicar que no se considera en $\mathbb{R}^2$.

Se define el *conjugado* del número complejo $z = x+iy$ como $\overline{z} = x+i(-y) = x-iy$. Se verifican las siguientes propiedades:

$$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}, \qquad \overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'},$$

$$\overline{z-z'} = \overline{z} - \overline{z'}, \qquad z \cdot \overline{z} = x^2+y^2,$$

$$z+\overline{z} = 2\operatorname{Re} z, \qquad z-\overline{z} = i \cdot 2 \operatorname{Im} z \text{ y si } z \neq 0, \ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}.$$

Se llama *módulo* de un número complejo $z = x+iy$ al número real mayor o igual que 0, $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, este número real coincide con $\sqrt{z\overline{z}}$. Propiedades:

$$|z| = |-z| = |\overline{z}|, \qquad |zz'| = |z||z'|, \qquad \text{si } z' \neq 0|, \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}, \qquad |\operatorname{Re} z| \leq |z|,$$

$$|\operatorname{Im} z| \leq |z|, \qquad |z| \leq \ |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|, \qquad |z+z'| \leq |z|+|z'|.$$

Veamos la demostración de esta última desigualdad:

$$|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + z'\overline{z} =$$

$$|z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{z'}) \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|zz'|) = (|z| + |z'|)^2.$$

Seguimos con las propiedades del módulo:

$$||z| - |z'|| \leq |z - z'|.$$

En efecto

$$|z| = |z - z' + z'| \leq |z - z'| + |z'|$$

con lo que

$$|z| - |z'| \leq |z - z'|.$$

Análogamente

$$|z'| - |z| \leq |z - z'|$$

lo que nos da el resultado.

No puede definirse una relación de orden entre los elementos de $\mathbb{C}$ que sea compatible con las operaciones de adición y multiplicación y el orden de $\mathbb{R}$. En efecto, si hubiese una tal relación el número i (que desde luego no es 0) no podría ser mayor que 0, pues si lo fuese el producto $i \cdot i = -1$ debería ser mayor que 0 y no lo es. Tampoco i podría ser menor que 0 pues si lo fuese $-i$ sería mayor que 0 y entonces $(-i)(-i) = -1$ debería ser mayor que 0 y no lo es.

Para todo número complejo z distinto de 0 existe un único número real $\theta \in [-\pi, \pi)$ tal que

$$z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

(fórmula módulo argumental). Para ver esto hacemos lo siguiente: $\frac{z}{|z|}$ es un punto (x, y) de la circunferencia unidad (pues $x^2 + y^2 = 1$) y entonces existe un único $\theta \in [-\pi, \pi)$ tal que $x = \cos\theta$ e $y = \operatorname{sen}\theta$, con lo que $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$. En efecto, si suponemos, por ejemplo, que $x > 0$ e $y > 0$, entonces $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ y se puede definir como $\arctan \frac{y}{x}$, pues

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

debido a que $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$. Así resulta que

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} = x^2$$

de donde se sigue que $\cos\theta = x$ (téngase en cuenta que tanto $\cos\theta$ como x son mayores que 0). De esto y de la relación $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ se sigue que $\operatorname{sen}\theta = y$ (téngase en cuenta que tanto $\operatorname{sen}\theta$ como y son mayores que 0). Los demás casos para x e y se resuelven de forma similar.

De propiedades conocidas de las funciones seno y coseno de variable real se deduce fácilmente que para $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ y $z' = |z'|(\cos\theta' + i\operatorname{sen}\theta')$

$$zz' = |z||z'|(\cos(\theta+\theta') + i\operatorname{sen}(\theta+\theta')).$$

Puede ocurrir que $\theta+\theta'$ se salga del intervalo $[-\pi,\pi)$ pero entonces $\theta+\theta'+2k\pi$, con $k = 1$ ó -1 pertenece a ese intervalo y $\cos(\theta+\theta'+2k\pi) = \cos(\theta+\theta')$ y $\operatorname{sen}(\theta+\theta'+2k\pi) = \operatorname{sen}(\theta+\theta')$.

Para todo número complejo $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ y todo número natural n se verifica que

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta)$$

Dado un número complejo z, $z \neq 0$, y un número natural n, existen $w_1, ..., w_n \in \mathbb{C}$ tales que

$$w_1^n = w_2^n = \cdots = w_n^n = z.$$

Si $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\ \theta)$ estos números complejos son los $w_k,\ k = 1, ..., n$, definidos por

$$w_k = |z|^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\ \frac{\theta+2k\pi}{n}\right).$$

Puede justificarse que esas n raíces son todas distintas y que no hay ningún otro número complejo w tal que $w^n = z$.

Es habitual representar a este cuerpo por $\mathbb{C}$ y llamarlo el cuerpo de los números complejos. En este cuerpo tiene solución la ecuación polinómica $z^2+1=0$, que no la tenía en el cuerpo $\mathbb{R}$. En efecto para $z = i$ se tiene que $z^2+1 = i^2+1 = -1+1 = 0$. Un resultado profundo de Álgebra (de hecho se llama el "teorema fundamental del álgebra") muestra que toda ecuación polinómica con coeficientes complejos tiene al menos una solución que es un número complejo.

Capítulo 3

Sucesiones de números reales

Estudiamos aquí el concepto de sucesión y de límite de una sucesión, estos conceptos se usarán mucho a lo largo del curso.

Definición 3.1 *Dado un conjunto S de números reales, se llama sucesión en S a toda función $x : \mathbb{N} \to S$. Si no se menciona el conjunto S se sobrentiende que $S = \mathbb{R}$.*

Nota 3.2 *Es habitual denotar por x_n el valor que toma x en el número natural n, esto es, $x_n := x(n)$ y también es habitual denotar la sucesión x por (x_n) o $\{x_n\}$. Debe observarse que (x_n) o $\{x_n\}$ no representan el conjunto de los valores que toma x sino que denotan la "tira", que suele llamarse "array" en informática, $(x_1, x_2, x_3, ...)$. Así, la sucesión $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $x(n) = (-1)^n$ define la "tira" $(-1, 1, -1, 1, ...)$ mientras que el conjunto de los valores que toma x es $\{-1, 1\}$. Cada x_n se llama un término de la sucesión y, en concreto el x_n, se llama el término n-ésimo.*

Nota 3.3 *A veces las sucesiones se pueden definir mediante una fórmula, por ejemplo, $x_n = 2n$, o de forma recursiva, esto es, se define el primer o los primeros términos de ellas y luego se indica como se obtienen los demás. Por ejemplo, $x_1 = 2$, $x_{n+1} = x_n + 3$, que nos define la sucesión: $2, 5, 8, 11...$ Otro ejemplo es la llamada sucesión de Fibonacci definida por: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_{n+1} = x_{n-1} + x_n$ para $n \geq 2$. Sus diez primeros términos son: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34$ y 55. Esta sucesión fue descrita por Leonardo de Pisa, matemático italiano del siglo XIII también conocido como Fibonacci. Tiene numerosas aplicaciones en ciencias de la computación, matemáticas y teoría de juegos. También aparece en configuraciones biológicas, como por ejemplo en las ramas de los árboles, en la disposición de las hojas en el tallo, en la flora de la alcachofa o en el patrón de reproducción de los conejos, fue precisamente para esto para lo que fue introducida.*

En el conjunto de todas la sucesiones de números reales puede definirse de manera natural los conceptos de suma y producto, por números reales y por sucesiones,de la siguiente manera:

Definición 3.4 *Dadas dos sucesiones* (x_n) *e* (y_n) *y un número real* c *se define:*

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n),$$

$$c \cdot (x_n) = (cx_n)$$

y

$$(x_n) \cdot (y_n) = (x_n y_n).$$

Nota 3.5 *Introducimos ahora un concepto fundamental relacionado con las sucesiones y es el concepto de* ***límite*** *de una sucesión.*

Definición 3.6 *Se dice que una sucesión* (x_n) ***converge*** *a un número real* x_0 *(también suele decirse que* (x_n) *tiene por* ***límite*** *a* x_0*) si cualquiera que sea el número real* $\varepsilon > 0$ *existe un número natural* N *tal que* $|x_n - x_0| < \varepsilon$ *para todo* $n \geq N$*. Para expresar el hecho de que* (x_n) *converge a* x_0 *suelen utilizarse las notaciones:* $x_n \to x_0$, $\lim(x_n) = x_0$ *o* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x_0$.

Nota 3.7 *Debe observarse que, en general,* N *depende de* ε *y que puede suponerse que* ε *es un número real "pequeño", pues si la condición anterior se verifica para un valor de* ε *también se verifica para todos los valores de* ε *más grandes que él.*

Nota 3.8 *El que* $|x_n - x_0| < \varepsilon$ *para todo* $n \geq N$ *significa que la distancia entre los términos* x_n *de la sucesión, con* $n \geq N$*, y* x_0 *es menor que* ε*. Entonces el concepto de convergencia expresa la idea intuitiva de aproximación. Nótese que el que* $|x_n - x_0| < \varepsilon$ *para todo* $n \geq N$ *quiere decir que* $x_0 - \varepsilon < x_n < x_0 + \varepsilon$ *para esos* n.

Nota 3.9 *No toda sucesión converge a un número real, por ejemplo, la sucesión* (x_n) *definida por* $x_n = (-1)^n$ *no es convergente, pues si suponemos que converge a un número real* x_0 *y tomamos* $\varepsilon = \frac{1}{2}\max\{|1 - x_0|, |1 + x_0|\}$ *entonces,* $\varepsilon > 0$ *y como*

$$|x_n - x_0| = \begin{cases} |1 - x_0| & \text{si } n \text{ es par} \\ |1 + x_0| & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

es imposible que $|x_n - x_0|$ *sea menor que ese* ε *a la vez para* n *pares e impares. Otro ejemplo típico de sucesión no convergente es la dada por los números naturales* (n).

Nota 3.10 *Observamos que para comprobar que una sucesión* (x_n) *no converge a* x_0 *basta encontrar un* $\varepsilon > 0$ *tal que para todo* $N \in \mathbb{N}$ *existe* $n_N \in \mathbb{N}$, $n_N \geq N$*, de forma que* $|x_{n_N} - x_0| \geq \varepsilon$*. De hecho esta condición es equivalente a que* (x_n) *no converja a* x_0.

Proposición 3.11 *Si* (x_n) *es una sucesión convergente, entonces su límite es único.*

Demostración. Supongamos que $x_n \to x_0$ y que $x_n \to y_0$ siendo $x_0 \neq y_0$. Sea $\varepsilon = |x_0 - y_0| > 0$. Dado que $x_n \to x_0$ y que $x_n \to y_0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } |x_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } n \geq N.$$

Entonces, en particular

$$|x_0 - y_0| = |x_0 - x_N - (y_0 - x_N) \leq |x_N - x_0| + |x_N - y_0| < \varepsilon = |x_0 - y_0|$$

lo que es absurdo. □

Vamos a dar ahora algunos ejemplos de sucesiones convergentes:

1. Las sucesiones constantes, esto es, $x_n = c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Estas sucesiones convergen a la constante c.

2. La sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ tiene límite y éste es 0. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$ nos garantiza que existe N tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Entonces para todo $n \geq N$ se verifica que $\left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$.

3. La sucesión $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ tiene límite y éste es 0. Vamos a verlo de dos formas: Dado $\varepsilon > 0$ consideremos $\varepsilon' = \sqrt{\varepsilon}$. Dado que $\frac{1}{n} \to 0$ existe N' tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon'$ con lo que $\frac{1}{n^2} < (\varepsilon')^2 = \varepsilon$ para todo $n \geq N'$. Otra forma de probarlo es considerar que $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ y entonces si para los n mayores o iguales que un cierto N se verifica que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ también $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$. El mismo argumento funciona para ver que $\frac{1}{n^3} \to 0$, $\frac{1}{n^4} \to 0$...

4. La sucesión $\left(\frac{3n+2}{n+1}\right)$ tiene límite 3. En efecto,

$$\begin{aligned} \left|\frac{3n+2}{n+1} - 3\right| &= \left|\frac{3n+2-(3n+3)}{n+1}\right| \\ &= \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \end{aligned}$$

   y entonces, si dado $\varepsilon > 0$ se toma $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$, se tiene que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ para todo $n \geq N$ y también que $\left|\frac{3n+2}{n+1} - 3\right| < \varepsilon$ para esos n. Este argumento puede adaptarse fácilmente para ver que cuando se tiene un cociente de polinomios y el grado del numerador es el mismo que el del denominador, entonces el cociente tiene por límite el coeficiente del término de mayor grado del numerador dividido por el de mayor grado del denominador.

Nota 3.12 *Debe observarse que si se modifica o se suprime una cantidad finita de los términos de una sucesión no se altera su posible convergencia, pues siempre puede tomarse el N mayor que el subíndice del último término modificado o eliminado.*

Damos ahora una proposición que nos permitirá garantizar la convergencia de muchas sucesiones:

Proposición 3.13 *Sean (y_n) y (x_n) dos sucesiones de números reales y $x_0 \in \mathbb{R}$. Si para algún $C > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ se verifica que*

$$|x_n - x_0| < C|y_n| \text{ para todo } n \geq m$$

e $y_n \to 0$ entonces $x_n \to x_0$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ consideremos $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{C}$. Como $y_n \to 0$ existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n| < \varepsilon'$ para todo $n \geq N'$. Entonces, si $N = máx\{N', m\}$ resulta que $|x_n - x_0| < C|y_n| < C\varepsilon' = \varepsilon$ para todo $n \geq N$. □

Aplicamos ahora la proposición anterior para obtener algunos ejemplos interesantes de sucesiones convergentes:

1. Si $a > 0$, entonces $\frac{1}{1+na} \to 0$. En efecto, al ser $a > 0$ se tiene que $0 < na < 1 + na$ y por lo tanto
$$0 < \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n}$$
para todo n. Basta entonces aplicar la proposición anterior con $C = \frac{1}{a}$ y $m = 1$.

2. La sucesión $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ tiene límite 0. En efecto, $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ (recuérdese que a principio de curso se probó, por inducción, que $2^n > n$) y basta aplicar la proposición anterior con $C = 1$ y $m = 1$.

3. Si $0 < b < 1$, entonces $b^n \to 0$. En efecto,
$$\left(\frac{1}{b}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{b} - 1\right)^n$$
siendo $\frac{1}{b} - 1 > 0$. Por la desigualdad de Bernoulli (Proposición 1.23) o el binomio de Newton, sabemos que
$$\left(1 + \frac{1}{b} - 1\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{1}{b} - 1)\right) > n\left(\frac{1}{b} - 1)\right),$$
de donde se sigue que
$$b^n \leq \frac{1}{n\left(\frac{1}{b} - 1\right)} = \frac{1}{\frac{1}{b} - 1}\frac{1}{n}$$
y el resultado se sigue de la proposición anterior con $C = \frac{1}{\frac{1}{b}-1}$ y $m = 1$.

4. Si $c > 0$ entonces $c^{\frac{1}{n}} \to 1$. En efecto, si $c = 1$ se trata de la sucesión constante 1 que ciertamente converge a 1. Supongamos ahora que $c > 1$, entonces $c^{\frac{1}{n}} > 1$ para todo n y por lo tanto
$$c = \left(1 + (c^{\frac{1}{n}} - 1)\right)^n \geq 1 + n\left(c^{\frac{1}{n}} - 1\right) \geq n\left(c^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$
de donde
$$c^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{c}{n}$$
el resultado se sigue de la proposición anterior con $C = c$ y $m = 1$.
Finalmente, si $c < 1$, entonces $\frac{1}{c} > 1$ por lo que $\frac{1}{c^{\frac{1}{n}}} \to 1$ y vamos a ver enseguida que si una sucesión de términos no nulos tiene un límite no nulo, entonces la sucesión de los inversos tiene límite y éste es el inverso del límite.

5. $n^{\frac{1}{n}} \to 1$. En efecto, dado que $n^{\frac{1}{n}} > 1$ para todo $n > 1$ podemos escribir
$$n = \left(1 + \left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right)^n \geq \binom{n}{0}1 + \binom{n}{2}\left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right)^2 = 1 + \frac{1}{2}n(n-1)\left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right)^2$$
(téngase en cuenta la fórmula del binomio de Newton y que $n^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$, de donde sale esa desigualdad al suprimir algunos términos mayores que 0), con lo que
$$n - 1 \geq \frac{1}{2}n(n-1)\left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right)^2$$
y por lo tanto
$$0 \leq \left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right)^2 \leq \frac{2}{n} \text{ para todo } n > 1.$$
Sea ahora ε un número real mayor que 0 arbitrario. Por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon^2}{2}$ y entonces, para todo $n \geq N$, se verifica que $\frac{2}{n} < \varepsilon^2$. En consecuencia
$$\left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right)^2 \leq \frac{2}{n} < \varepsilon^2$$
lo que implica que
$$\left|n^{\frac{1}{n}} - 1\right| < \varepsilon$$
(téngase en cuenta que $n^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$).

Obtenemos ahora algunos resultados relativos a los límites. Comenzaremos viendo que las sucesiones convergentes son acotadas en el sentido que se indica a continuación y que expresa el hecho de que para tales sucesiones el conjunto de sus valores es un conjunto acotado de números reales en el sentido de la definición 1.1.3.

Definición 3.14 *Se dice que una sucesión de números reales (x_n) es **acotada** si existe $C > 0$ tal que $|x_n| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Claramente esto significa que el conjunto de los x_n, $n \in \mathbb{N}$, está acotado.*

Proposición 3.15 *Toda sucesión convergente es acotada.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión convergente a un cierto x_0. Tomemos $\varepsilon = 1$ y sea N tal que $|x_n - x_0| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Entonces $|x_n| < |x_0| + 1$ para todo $n \geq N$. Si denotamos por C al máx$\{|x_0| + 1, |x_1|, ..., |x_{N-1}|\}$ se tiene que $|x_n| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Proposición 3.16 *(a) Sean (x_n) e (y_n) dos sucesiones de números reales que convergen a x_0 e y_0 respectivamente y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces, $x_n + y_n \to x_0 + y_0$, $x_n - y_n \to x_0 - y_0$, $x_n y_n \to x_0 y_0$, y $cx_n \to cx_0$.*

(b) Si (y_n) es una sucesión de números reales con todos sus términos distintos de 0 y converge a un número real y_0 también distinto de 0, entonces $\frac{1}{y_n} \to \frac{1}{y_0}$.

Demostración.

(a) Dado $\varepsilon > 0$ existen N_1 y $N_2 \in \mathbb{N}$ tales que $|x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq N_1$ y también $|y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq N_2$. Entonces, para todo $n \geq$máx$\{N_1, N_2\}$ se verifica que
$$|x_n + y_n - (x_0 + y_0)| \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Esto prueba, dada la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$, que $x_n + y_n \to x_0 + y_0$.

Por otra parte también

$$|x_n - y_n - (x_0 - y_0)| = |x_n - x_0 - (y_n - y_0)| \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Veamos ahora como $x_n y_n \to x_0 y_0$. Sea $C_1 > 0$ tal que $|x_n| \leq C_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (téngase en cuenta que toda sucesión convergente es acotada) y sea $C =$máx$\{C_1, |y_0|\}$. Dado $\varepsilon > 0$ consideremos N_1 y $N_2 \in \mathbb{N}$ tales que $|x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2C}$ para todo $n \geq N_1$ y también $|y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2C}$ para todo $n \geq N_2$. Entonces, para todo $n \geq$máx$\{N_1, N_2\}$ se tiene que

$$\begin{aligned} |x_n y_n - x_0 y_0| &= |x_n y_n - x_n y_0 + x_n y_0 - x_0 y_0| \\ &\leq |x_n(y_n - y_0)| + |(x_n - x_0) y_0| \\ &= |x_n||y_n - y_0| + |x_n - x_0||y_0| \\ &< C\frac{\varepsilon}{2C} + C\frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como caso particular de lo anterior se tiene que $cx_n \to cx_0$ considerando que (y_n) es la sucesión constante c.

(b) Dado que $y_n \to y_0$ e $y_0 \neq 0$, si tomamos $\varepsilon = \frac{1}{2}|y_0|^2$ obtenemos que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n - y_0| < \frac{1}{2}|y_0|^2$ para todo $n \geq N_1$ por lo que $|y_n| > |y_0| - \frac{1}{2}|y_0| = \frac{1}{2}|y_0|$ para todo $n \geq N_1$. Por otra parte dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$|y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}|y_0|^2$ para todo $n \geq N_2$. En consecuencia, para todo $n \geq$máx$\{N_1, N_2\}$ se tiene que

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0}\right| = \left|\frac{y_n - y_0}{y_n y_0}\right| < \frac{\frac{\varepsilon}{2}|y_0|^2}{\frac{1}{2}|y_0|^2} = \varepsilon.$$

Obsérvese que de los resultados que acabamos de obtener se deduce que si $x_n \to x_0$ e $y_n \to y_0$, siendo y_n e y_0 distintos de cero, entonces $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x_0}{y_0}$.

□

Proposición 3.17 *Si (x_n) es una sucesión de números reales con $x_n \geq 0$ para todo n y (x_n) es convergente a un $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces $x_0 \geq 0$.*

Demostración. Supongamos que $x_0 < 0$. Entonces para $\varepsilon := -x_0 > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_0| < \varepsilon \text{ para todo } n \geq N.$$

Esto implica que $x_n < x_0 + \varepsilon = 0$, lo que es absurdo pues hemos supuesto que $x_n \geq 0$ para todo n.

Debe observarse que si se supone que todos los x_n son mayores que 0 entonces el límite de (x_n) (si existe) es mayor o igual que 0, pudiendo ser 0 como le ocurre a la sucesión $(\frac{1}{n})$.
□

Proposición 3.18 *Si $x_n \to x_0$ e $y_n \to y_0$ y se verifica que $x_n \leq y_n$ para todo n, entonces $x_0 \leq y_0$.*

Demostración. Hagamos $z_n := y_n - x_n$. Entonces $z_n \geq 0$ para todo n por lo que, por la proposición anterior $y_0 - x_0 =$lím$(y_n - x_n) \geq 0$, esto es, $x_0 \leq y_0$. □

Proposición 3.19 *Si $x_n \to x_0$ y existen a y $b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq x_n \leq b$ para todo n, entonces $a \leq x_0 \leq b$.*

Demostración. El resultado se sigue aplicando la proposición anterior a (x_n) y a las sucesiones constantes (a) y (b). □

Proposición 3.20 (Teorema de compresión para sucesiones) *Si las sucesiones (x_n), (y_n) y (z_n) verifican que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo n y tanto (x_n) como (z_n) son convergentes y lo hacen al mismo número real w_0 entonces (y_n) es también convergente y su límite es w_0.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ sea $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - w_0| < \varepsilon \text{ y } |z_n - w_0| < \varepsilon \text{ para todo } n \geq N.$$

Esto implica que

$$w_0 - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < w_0 + \varepsilon,$$

esto es, $|y_n - w_0| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$, lo que prueba que $y_n \to w_0$. □

Nota 3.21 *El resultado anterior también es conocido como la "Regla del sándwich".*

Obtenemos ahora varios límites usando los diversos resultados de esta sección:

1. $\lim\left(\frac{2n+1}{n}\right) = 2$. En efecto, si hacemos $x_n = 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $y_n = \frac{1}{n}$, resulta que $\frac{2n+1}{n} = x_n + y_n$. Como $x_n \to 2$ e $y_n \to 0$, se tiene que $\frac{2n+1}{n} \to 2$. Véase también el comentario que se hizo cuando se probó que $\frac{3n+2}{n+1} \to 3$.

2. $\lim\left(\frac{2n+1}{n+5}\right) = 2$. En efecto,
$$\frac{2n+1}{n+5} = \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}} \to \frac{2}{1} = 2.$$
Téngase en cuenta que $\frac{1}{n} \to 0$ con lo que $2+\frac{1}{n} \to 2$ y $1+\frac{5}{n} \to 1$ y que al ser $\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}}$ un cociente de sucesiones en el que la sucesión del denominador no tiene ningún término igual a 0 y ser su límite distinto de 0, el límite del cociente es el cociente de los límites. Puede aplicarse aquí el comentario que se hizo en el ejemplo anterior.

3. $\lim\left(\frac{2n}{n^2+1}\right) = 0$. En efecto,
$$\frac{2n}{n^2+1} = \frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \to \frac{0}{1} = 0.$$
Con este mismo argumento puede probarse que si tenemos un cociente de polinomios y el grado del polinomio del denominador es mayor que el del polinomio del numerador, entonces el límite del cociente es 0.

4. Si (x_n) es una sucesión de números reales convergente al número real x_0 y P es un polinomio,
$$P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
entonces $P(x_n) \to P(x_0)$. En efecto, se sigue de las diversas proposiciones de esta sección que para todo $j = 1, ..., k$ se verifica que $x_n^j \to x_0^j$ (nótese que j está fijo) y que $a_j x_n^j \to a_j x_0^j$. Luego
$$P(x_n) = a_k x_n^k + a_{k-1}x_n^{k-1} + \cdots + a_1 x_n + a_0 \to a_k x_0^k + a_{k-1}x_0^{k-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = P(x_0).$$

5. Si (x_n) es una sucesión de números reales convergente al número real x_0 y R es una función racional (cociente de polinomios), $R = \frac{P}{Q}$, de forma que $Q(x_n) \neq 0$ para todo n y $Q(x_0) \neq 0$, entonces $R(x_n) \to R(x_0)$. En efecto, sabemos que $P(x_n) \to P(x_0)$ y que $Q(x_n) \to Q(x_0)$ y por lo tanto,
$$\frac{P(x_n)}{Q(x_n)} \to \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Damos a continuación más resultados sobre límites que se usarán a lo largo del curso.

Proposición 3.22 *Si $x_n \to x_0$ entonces $|x_n| \to |x_0|$.*

Demostración. Recordamos que $||x_n|-|x_0|| \leq |x_n - x_0|$. Luego se sigue de la Proposición 3.13 que $|x_n| \to |x_0|$. □

Nota 3.23 *Debe observarse que si (x_n) es una sucesión con la propiedad de que $(|x_n|)$ es convergente no se sigue necesariamente que también (x_n) sea convergente. Por ejemplo, la sucesión (x_n) cuyos términos son $x_n = (-1)^n$ es tal que $|x_n| = 1$ para todo n y entonces $(|x_n|)$ converge a 1, mientras que la sucesión $(x_n) = ((-1)^n)$ no es convergente. No obstante $x_n \to 0$ si y sólo si $|x_n| \to 0$, téngase en cuenta que $||x_n|-0| = |x_n - 0| = |x_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Proposición 3.24 *Si $x_n \to x_0$ y $x_n \geq 0$ para todo n, entonces $\sqrt{x_n} \to \sqrt{x_0}$.*

Demostración. Sabemos por un resultado anterior que $x_0 \geq 0$. Vamos a distinguir los casos $x_0 = 0$ y $x_0 > 0$.

1. $x_0 = 0$. Dado $\varepsilon > 0$ sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = |x_n - 0| < \varepsilon^2$, entonces $\sqrt{x_n} < \varepsilon$ para todo $n \geq N$ (téngase en cuenta que $x_n \geq 0$ para todo n).

2. $x_0 > 0$. En este caso, al ser $\sqrt{x_0} > 0$ resulta que $\sqrt{x_n} + \sqrt{x_0} \neq 0$ para todo n y podemos escribir
$$\sqrt{x_n} - \sqrt{x_0} = \frac{\left(\sqrt{x_n} - \sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_n} + \sqrt{x_0}\right)}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x_0}} = \frac{x_n - x_0}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x_0}},$$
luego
$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{x_0}| = \left|\frac{x_n - x_0}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x_0}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x_0}}\,|x_n - x_0|$$
así el resultado se sigue de la Proposición 3.13.

□

Proposición 3.25 (Criterio del cociente para límites) *Si (x_n) es una sucesión de números reales mayores que 0 tal que la sucesión $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ es convergente a un número real menor que 1, entonces (x_n) es convergente y su límite es 0.*

Demostración. Denotemos por l al límite de la sucesión $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$. Dado que $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 0$ sabemos que $l \geq 0$. Sea r un número real mayor que l y menor que 1. Entonces $\varepsilon := r - l$ es mayor que 0, por lo tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - l\right| < \varepsilon \text{ para todo } n \geq N.$$

En particular
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < l + \varepsilon = r \text{ para todo } n \geq N$$
lo que implica que
$$0 < x_{n+1} < x_n r < x_{n-1} r^2 < \cdots < x_N r^{n-N+1} \text{ para todo } n \geq N.$$
Si hacemos $C := \frac{x_N}{r^N}$ resulta que $0 < x_{n+1} < Cr^{n+1}$ para todo $n \geq N$. Al ser $0 < r < 1$ sabemos que $r^n \to 0$, por lo que $Cr^{n+1} \to 0$ y el teorema de compresión (o la Proposición 3.13) nos da que $x_{n+1} \to 0$ lo que equivale a que $x_n \to 0$. □

Como ejemplo de aplicación de la anterior proposición obtenemos que $\frac{n}{2^n} \to 0$ pues
$$\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2}.$$
Con el mismo argumento se prueba que $\frac{n^2}{2^n} \to 0, \frac{n^3}{2^n} \to 0$... y que $\frac{2^n}{n!} \to 0$.

Damos ahora el concepto de límite infinito.

3.1. Límites infinitos

Definición 3.26 *(a) Se dice que una sucesión de números reales (x_n) tiene límite $+\infty$ si para todo $M > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > M$ para todo $n \geq N$.*

(b) Se dice que una sucesión de números reales (x_n) tiene límite $-\infty$ si para todo $M^* < 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < M^*$para todo $n \geq N$.

Ejemplo 3.27 *La sucesión (n^2) tiene límite $+\infty$ y la $(-n^2)$ tiene límite $-\infty$.*

Proposición 3.28 *Si (x_n) es una sucesión de números reales mayores que 0, entonces*
$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0.$$

Demostración. Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ y dado $\varepsilon > 0$ hagamos $M := \frac{1}{\varepsilon}$. Entonces $M > 0$ y existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > M$ para todo $n \geq N$. Esto implica que
$$\left|\frac{1}{x_n} - 0\right| = \frac{1}{x_n} < \frac{1}{M} = \varepsilon.$$

Recíprocamente, supongamos ahora que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$, entonces dado $M > 0$ sea $\varepsilon = \frac{1}{M}$ y sea $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$\left|\frac{1}{x_n} - 0\right| = \frac{1}{x_n} < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq N.$$
Esto implica que
$$x_n > \frac{1}{\varepsilon} = M \quad \text{para todo } n \geq N.$$
□

3.2. Sucesiones monótonas

Las sucesiones monótonas, que se definen a continuación, son particularmente interesantes, especialmente en lo que se refiere a su convergencia. Muchas sucesiones de gran interés en matemáticas son de este tipo.

Definición 3.29 *Se dice que una sucesión de números reales es* ***monótona creciente*** *si*

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots$$

y ***monótona decreciente*** *si*

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots$$

En cualquiera de los casos anteriores se dice que la sucesión es ***monótona****.*

El siguiente resultado es realmente relevante.

Teorema 3.30 (de las sucesiones monótonas)

1. *Si (x_n) es una sucesión monótona creciente acotada, entonces es convergente y $\lim x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.*
2. *Si (x_n) es una sucesión monótona decreciente, entonces es convergente y $\lim x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.*
3. *Si (x_n) es una sucesión monótona creciente y no está acotada (superiormente), entonces tiene límite $+\infty$.*
4. *Si (x_n) es una sucesión monótona decreciente y no está acotada (inferiormente), entonces tiene límite $-\infty$.*

Demostración.

1. Supongamos que (x_n) es monótona creciente y está acotada. Denotemos por x_0 al $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ (todo conjunto acotado superiormente tiene supremo, axioma del supremo). Dado $\varepsilon > 0$, al ser $x_0 - \varepsilon < x_0$ tiene que existir un término de la sucesión, llamémosle x_N tal que $x_N > x_0 - \varepsilon$, y dado que (x_n) es creciente, $x_n \geq x_N > x_0 - \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Esto implica que $|x_n - x_0| < \varepsilon$ pues $|x_n - x_0| = x_0 - x_n < \varepsilon$.

2. Supongamos ahora que (x_n) es monótona decreciente. Entonces la sucesión (y_n) donde $y_n = -x_n$, es monótona creciente y, al estar (x_n) acotada inferiormente, (y_n) esta acotada superiormente, por lo que (y_n) es convergente y $\lim(y_n) = \sup\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces

$$\begin{aligned} lím(x_n) &= -lím(y_n) = -\sup\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \\ &= -\sup\{-x_n : n \in \mathbb{N}\} = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

3. Si (x_n) es monótona creciente y no está acotada superiormente entonces para todo $M > 0$ existe $n_M \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_M} > M$. Al ser (x_n) monótona creciente se tiene que $x_n \geq x_{n_M} > M$ para todo $n \geq n_M$ y esto prueba que (x_n) tiene límite $+\infty$.

4. La demostración se obtiene de forma similar a la del apartado anterior.

□

Veamos ahora un par de aplicaciones del teorema anterior:

El número de Euler.

Se trata del llamado **número** e, que se denota así en homenaje al matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783), aparecerá varias veces a lo largo del curso. Seguro que ya los habéis usado alguna vez, pero quizá nunca se os ha justificado que es un número real. Nosotros aquí lo definiremos como el límite de la sucesión $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ viendo, claro está, que esta sucesión es convergente, cosa que hacemos a continuación probando que es creciente y acotada superiormente. Empezamos viendo que es creciente. Usaremos la fórmula conocida como "el binomio de Newton" que afirma que

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. La prueba de esa fórmula fue hecha anteriormente por inducción. La aplicamos con $a = 1$ y $b = \frac{1}{n}$:

$$\begin{aligned} e_n \quad : &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + \frac{n}{1}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n} \end{aligned}$$

de donde

$$e_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Para e_{n+1} se tendrá

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{(n+1)-1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

y observamos que cada término de la suma que define a e_n es menor o igual que el correspondiente término de la suma que define a e_{n+1} y además e_{n+1} tiene un término más, que es positivo, luego $e_n < e_{n+1}$.

Veamos finalmente como (e_n) está acotada. Sabemos que para $p = 1, 2, ..., n$ se verifica que $\left(1 - \frac{p}{n}\right) < 1$ y que para todo $p \in \mathbb{N}$ se verifica que $2^{p-1} \leq p!$ Entonces, para todo $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} 2 &< e_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &< 3. \end{aligned}$$

Por lo tanto la sucesión $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ tiene límite y éste está en el intervalo $[2, 3]$.

Cálculo aproximado de raíces cuadradas.

Ya hemos visto anteriormente que todo número real mayor o igual que 0 tiene raíz cuadrada, esto es, dado $x \geq 0$ existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $y^2 = x$. Vamos a ver ahora como se puede construir una sucesión (x_n) de números reales tal que $x_n \to y$. Si $x = 0$ basta tomar $x_n = 0$ para todo n. Supondremos entonces que $x > 0$. Fijemos $x_1 > 0$ arbitrariamente y consideremos la sucesión (x_n) definida inductivamente por $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{x}{x_n})$, obsérvese que todos los x_n son mayores que 0. Vamos a ver como (x_n) es convergente y converge a un número real y cuyo cuadrado es x. Este proceso ya se conocía en Mesopotamia, 1500 años a.C. En primer lugar veamos como $x_n^2 \geq x$ para todo $n \geq 2$. Fijemos un $n \in \mathbb{N}$. De la propia definición de x_{n+1} se sigue que

$$x_n^2 - 2x_{n+1}x_n + x = 0,$$

o, equivalentemente,

$$(x_n - x_{n+1})^2 - x_{n+1}^2 + x = 0.$$

Como $(x_n - x_{n+1})^2 \geq 0$, resulta que $x_{n+1}^2 \geq x$. La arbitrariedad de n nos permite afirmar que $x_n^2 \geq x$ para todo $n \geq 2$. A partir del segundo término de la sucesión (x_n) se sigue que:

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{x}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x_n^2 - x}{x_n}\right)$$

y el término de la derecha es mayor o igual que 0 para $n \geq 2$, luego $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \geq 2$. Esto es, la sucesión (x_n) es monótona decreciente a partir de su segundo término. Como está acotada inferiormente (por el 0), si aplicamos el teorema de la convergencia monótona obtenemos que la sucesión (x_n) es convergente, llamémosle y a su límite. Dado que en la sucesión (x_n) sus términos verifican la relación $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{x}{x_n})$, distintos resultados que hemos visto anteriormente prueban que: $x_{n+1} \to y$ y que $\frac{x}{x_n} \to \frac{x}{y}$, (nótese que $x_n \neq 0$ y que $y \neq 0$ pues al ser $x_n^2 \geq x$, cosa vista anteriormente, necesariamente $y^2 \geq x > 0$), luego necesariamente $y = \frac{1}{2}(y + \frac{x}{y})$, es decir $2y^2 = y^2 + x$ de donde se sigue que $x = y^2$, con lo cual la sucesión (x_n) tiene por límite precisamente a la raíz cuadrada de x que es y.

3.3. Límites superior e inferior

Damos a continuación los conceptos de límite superior y límite inferior.

Definición 3.31 *Sea (x_n) una sucesión acotada de números reales. Se llama* ***límite superior*** *de (x_n) y se representa por $\overline{\text{lím}}\ x_n$ a un número real λ que verifique las dos condiciones siguientes:*

1. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < \lambda + \varepsilon$ para todo $n \geq N$.
2. Para todo $\varepsilon > 0$, $x_n > \lambda - \varepsilon$ para infinitos n.

Ciertamente sólo hay un posible λ que verifique esas dos propiedades, pues si λ_1 y λ_2 verifican que $\lambda_1 < \lambda_2$, entonces si a la derecha de $\lambda_1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}$ sólo hay una cantidad finita de términos de (x_n) es imposible que a la derecha de $\lambda_2 - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}$ haya una cantidad infinita de términos de (x_n) (nótese que se ha tomado $\varepsilon = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}$). Entonces λ_1 no puede verificar la condición (1) si λ_2 verifica la condición (2).

Nota 3.32 *Cuando una sucesión de números reales no está acotada superiormente se dice que su límite superior es $+\infty$.*

Veamos como siempre existe un número real λ con las propiedades (1) y (2). Sea (x_n) una sucesión acotada de números reales y por cada $k \in \mathbb{N}$ sea $y_k = \sup\{x_j : j \geq k\}$. La sucesión (y_k) es monótona decreciente y está acotada inferiormente (por estarlo la (x_n)) luego, por el teorema de las sucesiones monótonas, es convergente, llamémosle y_0 a su límite; como se sabe, y_0 coincide con el $\text{ínf}\{y_k : k \in \mathbb{N}\}$. Este y_0 verifica las condiciones para ser límite superior de (x_n). En efecto, dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que $y_N < y_0 + \varepsilon$, luego los x_n con $n \geq N$ verifican que $x_n \leq y_N < y_0 + \varepsilon$. Por otra parte, si dado $\varepsilon > 0$, sólo existiese una cantidad finita de x_n verificando que $x_n > y_0 - \varepsilon$, entonces, si llamamos N al máximo de los n tales que $x_n > y_0 - \varepsilon$ resulta que los y_k con k mayor que N verificarían que $y_k \leq y_0 - \varepsilon$ (pues $x_j \leq y_0 - \varepsilon$ para todo $j > N$) y esto contradice el que $y_0 = \text{lím}\ y_k$.

Nota 3.33 *Si una sucesión es convergente a un número real entonces ese número real es su límite superior. La sucesión $((-1)^n)$ tiene límite superior 1 y no es convergente.*

Ejemplo 3.34 *La sucesión $\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)$ tiene límite superior 1.*

De manera análoga se define el concepto de límite inferior de una sucesión acotada (x_n), éste es el único número real μ tal que:

1. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > \mu - \varepsilon$ para todo $n \geq N$.

2. Para todo $\varepsilon > 0$, $x_n < \mu + \varepsilon$ para infinitos n.

El límite inferior de la sucesión (x_n) se representa por $\underline{\lim}\, x_n$.

Nota 3.35 *Si una sucesión es convergente a un número real entonces ese número real es su límite inferior. La sucesión $((-1)^n)$ tiene límite inferior -1 y no es convergente.*

Nota 3.36 *Se verifica que una sucesión acotada es convergente si y sólo si coinciden su límite superior y su límite inferior. Esto se obtiene directamente de las definiciones de este tipo de límites.*

3.4. Subsucesiones. Teorema de Bolzano-Weierstrass

Comenzamos esta sección definiendo el concepto de subsucesión de una sucesión de números reales.

Definición 3.37 *Dada una sucesión (x_n) de números reales, llamaremos subsucesión de (x_n) a cualquier sucesión de la forma (x_{n_k}) donde (n_k) es una sucesión estrictamente creciente de números naturales, es decir*

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

Debe observarse que las subsucesiones de una sucesión (x_n) son sucesiones formadas por algunos de sus términos, pero éstos deben ser elegidos de forma que una vez elegido el primer término el segundo debe ser un término posterior al elegido, el tercero debe ser posterior al segundo ya elegido... Si recordamos que una sucesión es una función $n \mapsto x_n$, una subsucesión de (x_n) es una función $k \mapsto x_{n_k}$ donde la correspondencia $k \mapsto n_k$ es estrictamente creciente, esto es, si $k > j$ entonces $n_k > n_j$. Cada x_{n_k} es uno de los x_n, siendo $n_1 < n_2 < \cdots$ Obsérvese que para todo k, $n_k \geq k$.

Puede ocurrir que una sucesión tenga subsucesiones convergentes sin ser ella convergente, por ejemplo la sucesión: $(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, ...)$ no es convergente mientras que lo es su subsucesión $(1, 1, 1, ...)$. Nótese que $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1...$ y la subsucesión que hemos considerado es $x_{n_1} = x_1 = 1,\ x_{n_2} = x_3 = 1,\ x_{n_3} = x_5 = 1...$, esto es, $n_k = 2k - 1$. Sin embargo, si una sucesión es convergente, entonces cualquier subsucesión de ella es convergente y converge a lo mismo que la sucesión. Esto es lo que demuestra la siguiente proposición.

Proposición 3.38 *Sea (x_n) una sucesión convergente a x_0, entonces cualquier subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) converge a x_0.*

Demostración. Sea (x_{n_k}) una subsucesión de (x_n). Dado $\varepsilon > 0$ queremos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq N$ se verifica que $|x_{n_k} - x_0| < \varepsilon$. Sea N un número natural tal que $|x_n - x_0| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. El hecho de que la sucesión (n_k) sea estrictamente creciente nos da, en particular, que $n_k \geq k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego si tomamos $k \geq N$ resulta que $n_k \geq k \geq N$ por lo que $|x_{n_k} - x_0| < \varepsilon$. □

A la vista de este resultado, si dada una sucesión podemos encontrar una subsucesión de ella que no sea convergente, se tendrá que la sucesión dada no es convergente.

No toda sucesión tiene alguna subsucesión convergente pero si la sucesión es acotada entonces sí que tiene subsucesiones convergentes, esto es lo que demuestra el siguiente teorema debido a dos célebres matemáticos, B. Bolzano (República Checa, 1781-1848) y K. Weierstrass (Alemania, 1815-1897).

Teorema 3.39 (de Bolzano-Weierstrass para sucesiones) *Toda sucesión acotada de números reales tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión acotada. Supondremos que esta sucesión tiene infinitos elementos distintos, de lo contrario cualquier subsucesión formada por un término que se repita infinitas veces ya es convergente. Dado que el conjunto de los puntos de la sucesión está acotado existen a y b, $a < b$, tal que $x_n \in [a, b]$ para todo n. Hagamos $I_1 = [a, b]$ y $n_1 = 1$. Dividamos el intervalo I_1 en los intervalos $I'_1 = \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ e $I''_1 = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ y consideremos los conjuntos

$$\begin{aligned} A_1 &= \{n \in \mathbb{N} : \ n > n_1, \ x_n \in I'_1\} \\ B_1 &= \{n \in \mathbb{N} : \ n > n_1, \ x_n \in I''_1\}. \end{aligned}$$

Si A_1 es infinito se define $I_2 = I'_1$ y se denota por n_2 al menor natural de A_1 (recuérdese el principio de buena ordenación). En el caso de que A_1 sea finito entonces B_1 debe ser infinito y hacemos $I_2 = I''_1$ y denotamos por n_2 a un natural de B_1. Obsérvese que $n_2 > n_1$. Hagamos $I_2 = [a_2, b_2]$, la longitud de I_2 es $\frac{b-a}{2}$.

A continuación dividimos I_2 por la mitad en dos intervalos , I'_2 e I''_2, y hacemos

$$\begin{aligned} A_2 &= \{n \in \mathbb{N} : \ n > n_2, \ x_n \in I'_2\} \\ B_2 &= \{n \in \mathbb{N} : \ n > n_2, \ x_n \in I''_2\}. \end{aligned}$$

Si A_2 es infinito se define $I_3 = I'_2$ y se denota por n_3 al menor natural de A_2. En el caso de que A_2 sea finito entonces B_2 debe ser infinito y hacemos $I_3 = I''_2$ y denotamos por n_3 a un natural de B_2. Obsérvese que $n_3 > n_2$. Hagamos $I_3 = [a_3, b_3]$, la longitud de I_3 es $\frac{b-a}{2^2}$. Reiterando este proceso obtenemos una sucesión de intervalos encajados $I_k = [a_k, b_k]$, $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$, que necesariamente tienen al menos un punto en común (Proposición 1.50), llamémosle x_0. Sucede además que siendo la longitud de I_k es $\frac{b-a}{2^{k-1}}$, $\cap_{k=1}^{\infty} I_k = \{x_0\}$, aunque esto no es relevante aquí. Dado que x_{n_k} y x_0 pertenecen a I_k para todo $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $|x_{n_k} - x_0| \leq \frac{b-a}{2^{k-1}}$ y por lo tanto $x_{n_k} \to x_0$. Nótese que de la forma en la que hemos elegido los n_k se tiene que la aplicación $k \longmapsto n_k$ es estrictamente creciente. □

Criterio de Cauchy

Se obtendrá aquí un criterio debido a Augustin Cauchy (Francia, 1789–1857) para comprobar si una sucesión es convergente. Resultará que para sucesiones de números reales una sucesión será convergente si y sólo si verifica ese criterio.

Definición 3.40 (criterio de Cauchy) *Se dice que una sucesión (x_n) de números reales es de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo par de números naturales m y n mayores o iguales que N se verifica que $|x_n - x_m| < \varepsilon$.*

La condición del criterio de Cauchy significa que los términos de la sucesión se van aproximando unos a los otros. Esta condición la verifican todas las sucesiones convergentes como se demuestra a continuación.

Proposición 3.41 *Toda sucesión convergente es de Cauchy*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión convergente a x_0. Dado $\varepsilon > 0$ sea $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } n \geq N.$$

Entonces, para todo m y n mayores que N se verifica que

$$|x_n - x_m| = |x_n - x_0 - (x_m - x_0)| \leq |x_n - x_0| + |x_m - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Probamos ahora que toda sucesión de Cauchy es acotada, esto será usado para probar después que todas las sucesiones de Cauchy son convergentes.

Proposición 3.42 *Toda sucesión de Cauchy es acotada.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy y sea $\varepsilon = 1$. Dado que (x_n) es de Cauchy existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < 1$ para todo $m, n \geq N$. en particular $|x_n - x_N| < 1$ para todo $n \geq N$ y, en consecuencia

$$|x_n| < |x_N| + 1 \text{ para todo } n \geq N.$$

Si definimos

$$M = máx\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{N-1}|, |x_N| + 1\}$$

se verifica que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 3.43 (criterio de convergencia de Cauchy) *Una sucesión de números reales es convergente (a un número real) si y sólo si es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Ya hemos probado que toda sucesión convergente es de Cauchy. Veamos ahora como todas las sucesiones de Cauchy son convergentes (a un número real).

Sea (x_n) una sucesión de Cauchy. Por la proposición anterior esa sucesión es acotada y entonces, por el teorema de Bolzano-Weierstrass existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) convergente a un cierto $x_0 \in \mathbb{R}$. Veamos ahora como la sucesión (x_n) converge a x_0.

Dado $\varepsilon > 0$ sea $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $m, n \geq N_1$ y sea N_2 tal que $|x_{n_k} - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $k \geq N_2$. Sea $N = máx\{N_1, N_2\}$, entonces para todo $n \geq N$ se verifica que

$$|x_n - x_0| = |x_n - x_{n_N} - (x_0 - x_{n_N})| \leq |x_n - x_{n_N}| + |x_0 - x_{n_N}| < \varepsilon.$$

Téngase en cuenta que $n_N \geq N$. $\square$

Nota 3.44 *No es cierto, en general que las sucesiones de Cauchy de números racionales sean convergentes a un número racional. En efecto, la sucesión de números racionales (x_n) que construimos anteriormente para aproximar la raíz cuadrada de un número real mayor que 0, en este caso con $x = 2$,*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

siendo x_1 arbitrario, es de Cauchy y no converge a ningún número racional, converge al número real (no racional) $\sqrt{2}$.

Obtenemos ahora una condición suficiente para que una sucesión sea de Cauchy.

Definición 3.45 *Se dice que una sucesión (x_n) es* ***contractiva*** *si existe un número real $C \in (0, 1)$ tal que*

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C|x_{n+1} - x_n|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 3.46 *Toda sucesión contractiva es de Cauchy y, por lo tanto, convergente.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión contractiva. De la propia definición de contractividad se sigue que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |x_{n+2} - x_{n+1}| &\leq C|x_{n+1} - x_n| \leq C^2|x_n - x_{n-1}| \\ &\leq C^3|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq C^n|x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

En consecuencia, para $m, n \in \mathbb{N}$, con $n > m$ se verifica que,

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_{m+1} - x_m| \\ &\leq \left(C^{n-2} + C^{n-3} + \cdots + C^{m-1}\right)|x_2 - x_1| \\ &= C^{m-1}\left(C^{n-m-1} + C^{n-m-2} + \cdots + 1\right)|x_2 - x_1| \\ &= C^{m-1}\left(\frac{1 - C^{n-m}}{1 - C}\right)|x_2 - x_1| \\ &\leq C^{m-1}\left(\frac{1}{1 - C}\right)|x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

Como $C \in (0,1)$ sabemos que $C^{m-1} \to 0$ y entonces puede conseguirse que $|x_n - x_m|$ sea tan pequeño como queramos sin más que tomar m suficientemente grande y $n > m$. $\square$

Observamos que si denotamos por x_0 al límite de la sucesión (x_n) entonces

$$|x_0 - x_m| \leq C^{m-1}\left(\frac{1}{1-C}\right)|x_2 - x_1|$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. En efecto, basta tener en cuenta que para todo $n > m$ se verifica que

$$|x_n - x_m| \leq C^{m-1}\left(\frac{1}{1-C}\right)|x_2 - x_1|$$

y que $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x_m| = |x_0 - x_m|$. Esto nos da una estimación del error que se comete al dar como valor de x_0 el término x_m.

Damos ahora un ejemplo de aplicación de la contractividad de una sucesión para ver su convergencia. Se trata de obtener un valor aproximado de una solución de la ecuación $x^3-7x+2=0$. Para $x=0$ la expresión x^3-7x+2 toma el valor 2, para $x=1$ toma el valor -4, parece entonces que nuestra ecuación va a tener una raíz en el intervalo $(0,1)$. Veamos si la tiene y como aproximamos su valor. Más adelante se verá que ciertas funciones si alcanzan dos valores distintos también alcanzan todos los intermedios. Consideremos la sucesión (x_n) donde $x_1 = 1$ y para $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{7}\left(x_n^3 + 2\right).$$

Veamos como esta sucesión es contractiva:

$$\begin{aligned}
|x_{n+2} - x_{n+1}| &= \left|\frac{1}{7}(x_{n+1}^3 + 2) - \frac{1}{7}(x_n^3 + 2)\right| \\
&= \frac{1}{7}\left|x_{n+1}^3 - x_n^3\right| \\
&= \frac{1}{7}\left|(x_{n+1}^2 + x_{n+1}x_n + x_n^2)(x_{n+1} - x_n)\right| \\
&= \frac{1}{7}\left|x_{n+1}^2 + x_{n+1}x_n + x_n^2\right||x_{n+1} - x_n| \\
&< \frac{3}{7}|x_{n+1} - x_n|
\end{aligned}$$

téngase en cuenta que todos los términos de la sucesión pertenecen al intervalo $[0,1]$, pues $x_1 = 1$, y si para un cierto k se verifica que $x_k \leq 1$ entonces $x_{k+1} = \frac{1}{7}(x_k^3 + 2) < \frac{1}{7}3 < 1$. Tenemos así probada la contractividad de nuestra sucesión y por lo tanto su convergencia. Si llamamos x_0 al límite de esa sucesión resulta que $x_0 = \frac{1}{7}(x_0^3+2)$, esto es, $x_0^3-7x_0+2=0$. Obtenemos así una sucesión que converge a una raíz de $x^3 - 7x + 2 = 0$ en el intervalo $(0,1)$. Nótese que en principio $x_0 \in [0,1]$, pero ni el 0 ni el 1 son raíces de esa ecuación.

Podemos obtener entonces valores, tan aproximados como queramos, de esa raíz, téngase en cuenta que
$$|x_m - x_0| \leq \frac{\left(\frac{3}{7}\right)^{m-1}}{1-\frac{3}{7}}|x_2 - x_1| = \left(\frac{3}{7}\right)^{m-1}.$$

Con ayuda del concepto de sucesión de Cauchy se puede dar una idea de una construcción explícita del cuerpo de los números reales a partir del cuerpo ordenado de los números racionales. Veamos cuál es la idea: Se considera en el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy de números racionales la siguiente relación de equivalencia: $(x_n) \sim (y_n)$ si $x_n - y_n \to 0$ y se denota por $[(x_n)]$ la clase de equivalencia que determina la sucesión (x_n). El conjunto de esas clases de equivalencia es un cuerpo con la suma $[(x_n)] + [(y_n)] = [(x_n + y_n)]$ y el producto $[(x_n)] \cdot [(y_n)] = [(x_n y_n)]$. Ambas definiciones tienen sentido, esto es, no dependen de los representantes elegidos, y se verifican todos los axiomas para poder ser considerado como el cuerpo de los números reales. La verificación de los axiomas de cuerpo es sencilla. Por ejemplo, el elemento neutro es la clase de todas las sucesiones de números racionales convergentes a 0. El conjunto P de los números positivos se define así: $[(x_n)] \in P$ si existe $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, y existe un representante (y_n) de la clase $[(x_n)]$ tal que $y_n \geq r$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La comprobación de que se verifican los axiomas de orden es también sencilla, pero la del axioma del supremo es algo difícil y no la haremos aquí.

Esta forma de construir los números reales es debida a G. Cantor y es de 1872. Hay varios otros métodos, siendo los primeros de M. Ohm (1829), B. Bolzano (1835) y W. R. Hamilton (1833 y 1835). Puede verse más información sobre este tema en el documento IntroducciónNúmerosRealesLópezPellicer.pdf en el CV de la asignatura.

Capítulo 4

Límites y continuidad de funciones de variable real

En este tema estudiaremos el concepto de límite de una función en un punto, para poder definirlo con precisión necesitaremos introducir el concepto de **punto de acumulación** de un conjunto de números reales, lo damos a continuación.

Definición 4.1 *Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}$. Se dirá que un número real c es un punto de acumulación de S si para todo $\delta > 0$ el intervalo $(c-\delta, c+\delta)$ contiene algún punto de S distinto de c. El conjunto de los puntos de acumulación de S suele denotarse por S'.*

Nota 4.2 *Puede suceder que c no pertenezca a S como ocurre en el siguiente ejemplo: Consideremos el conjunto S de los números racionales de la forma $\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. El 0 es un punto de acumulación de ese conjunto y no pertenece a él. Obsérvese que, como $\frac{1}{n} \to 0$, dado $\delta > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \delta$. Aunque el punto c pertenezca a S esto no basta para garantizar que c es de acumulación de S. Por ejemplo ninguno de los puntos del anterior conjunto S es de acumulación de él.*

Damos a continuación algunos ejemplos:

1. Si S es el intervalo $(0,1)$ entonces $S' = [0,1]$.
2. Si $S = \mathbb{Q} \cap (0,1)$ entonces $S' = [0,1]$.
3. Si $S = \mathbb{I} \cap (0,1)$ entonces $S' = [0,1]$.
4. Si S es un conjunto finito entonces $S' = \emptyset$
5. Si $S = \mathbb{N}$ entonces $S' = \emptyset$.
6. Si $S = \mathbb{R}$ entonces $S' = \mathbb{R}$.
7. Si $S = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ entonces $S' = \mathbb{R}$.

Proposición 4.3 *Un número real c es un punto de acumulación de un conjunto S si y sólo si existe una sucesión (x_n) de puntos de S con todos sus términos distintos entre si y distintos de c, tal que $x_n \to c$.*

Demostración. Sea $c \in S'$ y sea $\delta_1 = 1$. Como $((c-\delta_1, c+\delta_1)\backslash\{c\}) \cap S \neq \emptyset$ existe un punto x_1 en ese conjunto y entonces $|x_1 - c| < \delta_1 = 1$, siendo $x_1 \neq c$. Sea $\delta_2 = \frac{|x_1-c|}{2}$. Como $((c-\delta_2, c+\delta_2)\backslash\{c\}) \cap S \neq \emptyset$ existe un punto x_2 en ese conjunto y entonces $|x_2 - c| < \delta_2 = \frac{|x_1-c|}{2} < \frac{1}{2}$, necesariamente $x_2 \neq x_1$. Para $\delta_3 = \frac{|x_2-c|}{3}$ existe un punto x_3 en S tal que $|x_3 - c| < \frac{|x_2-c|}{3} < \frac{|x_1-c|}{3\cdot 2} < \frac{1}{3\cdot 2} = \frac{1}{3!}$, de donde se deduce también que $x_3 \neq x_2$ y $x_3 \neq x_1$. Repitiendo este argumento obtenemos una sucesión (x_n) de elementos de S, todos distintos entre si y distintos de c, tal que $|x_n - c| < \frac{1}{n!} < \frac{1}{n}$. Entonces, la sucesión (x_n) converje a c y tiene todos sus términos distintos entre si y distintos de c.

Recíprocamente, si (x_n) es una sucesión de puntos de S tal que $x_n \to c$ y $x_n \neq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces, para todo $\delta > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - c| < \delta$ para todo $n \geq N$. En particular $x_N \in (c-\delta, c+\delta)$ y $x_N \neq c$. $\square$

Definición 4.4 *Sean $S \subset \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ y c un punto de acumulación de S. Se dice que un número real L es el límite de f en c si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ para todo $x \in (c-\delta, c+\delta) \cap S$, $x \neq c$. Esto es,*

Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in S,\ 0 < |x-c| < \delta$, se verifica que

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Se usarán las notaciones $L = \lim\limits_{x\to c} f(x)$, o $f(x) \to L$ cuando $x \to c$, para indicar que f tiene límite en c y que éste es L.

Proposición 4.5 *Si f tiene límite en c éste es único.*

Demostración. Supongamos que $f(x) \to L_1$ y $f(x) \to L_2$ cuando $x \to c$, siendo $L_1 \neq L_2$. Consideremos $\varepsilon = \frac{1}{2}|L_1 - L_2|$ y sea $\delta > 0$ tal que

$$x \in S,\ 0 < |x-c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L_1| < \frac{1}{2}|L_1 - L_2| \quad \text{y} \quad |f(x) - L_2| < \frac{1}{2}|L_1 - L_2|.$$

Entonces, fijado $x \in S,\ 0 < |x-c| < \delta$, se verifica que

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - f(x) - (L_2 - f(x))| \\ &\leq |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| \\ &< \frac{1}{2}|L_1 - L_2| + \frac{1}{2}|L_1 - L_2| = |L_1 - L_2| \end{aligned}$$

lo que es absurdo. $\square$

Damos ahora unos ejemplos de cálculo de límite para algunas funciones.

1. $\lim\limits_{x\to c} b = b$. Esto es, el límite de una constante siempre existe y tiene el valor de esa constante independiente de quien sea el punto c. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ tomemos δ arbitrario, entonces si $x \in S$, $0 < |x-c| < \delta$, se verifica que $|b-b| = 0 < \varepsilon$. Téngase en cuenta que, en este caso, la función es la constante $f(x) = b$, el conjunto S es arbitrario y $c \in S'$ también es arbitrario.

2. $\lim\limits_{x\to c} x = c$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ tomemos $\delta = \varepsilon$, entonces si $x \in S$, $0 < |x-c| < \delta$, se verifica que $|x-c| < \varepsilon$. Téngase en cuenta que, en este caso, la función es $f(x) = x$, el conjunto S es arbitrario y $c \in S'$ también es arbitrario.

3. $\lim\limits_{x\to c} x^2 = c^2$. En efecto, observamos en primer lugar que
$$|x^2 - c^2| = |x-c| \cdot |x+c| \leq |x-c|(|x| + |c|)$$
Si consideramos sólo los x tales que $|x-c| < 1$, entonces para esos x se verifica que $|x| < 1 + |c|$ por lo que $|x+c| \leq |x| + |c| < 1 + 2|c|$, y así
$$|x^2 - c^2| < (1 + 2|c|)|x-c|.$$
Si dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta = \text{mín}\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|c|}\}$, se verifica que $|x^2 - c^2| < (1+2|c|)|x-c| < \varepsilon$ para todo $x \in S$, $0 < |x-c| < \delta$. En este caso la función es $f(x) = x^2$, el conjunto S es arbitrario y $c \in S'$ también es arbitrario.

4. $\lim\limits_{x\to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$ si $c \neq 0$. Observamos en primer lugar que
$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| = \frac{|x-c|}{|cx|}.$$
Si consideremos sólo los x tales que $|x-c| < \frac{1}{2}|c|$ entonces $|x| > |c| - \frac{1}{2}|c| = \frac{1}{2}|c|$ lo que implica que $|cx| > \frac{1}{2}|c|^2$ y así
$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| < \frac{2}{|c|^2}|x-c|.$$
Luego, si dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta = \text{mín}\left\{\frac{1}{2}|c|, \frac{|c|^2\varepsilon}{2}\right\} > 0$ se tiene que si $x \in S$ y $0 < |x-c| < \delta$ entonces $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| < \varepsilon$. En este caso $S = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ y c arbitrario, pero distinto de 0.

5. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-4}{x^2+1} = \frac{4}{5}$. En efecto,
$$\begin{aligned}\left|\frac{x^3-4}{x^2+1} - \frac{4}{5}\right| &= \frac{|5x^3 - 20 - 4x^2 - 4|}{5(x^2+1)}\\ &= \frac{|5x^3 - 4x^2 - 24|}{5(x^2+1)}\\ &= \frac{|5x^2 + 6x + 12|}{5(x^2+1)}|x-2|.\end{aligned}$$

Si consideramos sólo los x tales que $|x-2|<1$ (realmente sólo interesan los x próximos a 2) entonces $|x|<3$ y $|x|>1$ por lo que $|5x^2+6x+12|<45+18+12=75$ y $5(x^2+1)>5(1+1)=10$. En consecuencia

$$\left|\frac{x^3-4}{x^2+1}-\frac{4}{5}\right|<\frac{75}{10}|x-2|=\frac{15}{2}|x-2|.$$

Si dado $\varepsilon>0$ tomamos $\delta=\text{mín}\left\{1,\frac{2}{15}\varepsilon\right\}$ tenemos que $\left|\frac{x^3-4}{x^2+1}-\frac{4}{5}\right|<\varepsilon$ si $x\in(2-\delta,2+\delta)\cap S$, $x\neq 2$, siendo S arbitrario. En este caso $c=2\in S'$ y $f(x)=\frac{x^3-4}{x^2+1}$.

Obtenemos ahora un criterio para la existencia de límites usando sucesiones.

Teorema 4.6 (criterio de límite por sucesiones) *Sean $f:S\to\mathbb{R}$, c un punto de acumulación de S y $L\in\mathbb{R}$. Entonces $\lim_{x\to c}f(x)=L$ si y sólo si para toda sucesión (x_n) de puntos de S que converja a c, con $x_n\neq c$ para todo n, se tiene que $f(x_n)\to L$.*

Demostración. Supongamos que $\lim_{x\to c}f(x)=L$ y sea (x_n) una sucesión en S convergente a c tal que $x_n\neq c$ para todo n. Veamos cómo la sucesión $(f(x_n))$ converge a L. Dado $\varepsilon>0$ sea $\delta>0$ tal que $|f(x)-L|<\varepsilon$ siempre que $x\in S$, $0<|x-c|<\delta$. Dado que $x_n\to c$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $|x_n-c|<\delta$ para todo $n\geq N$. Entonces $|f(x_n)-L|<\varepsilon$ para todo $n\geq N$.

Recíprocamente, supongamos que para toda sucesión (x_n) de puntos de S que converja a c, con $x_n\neq c$ para todo n, se verifica que $f(x_n)\to L$. Probaremos que $\lim_{x\to c}f(x)=L$. Si suponemos que no existe el $\lim_{x\to c}f(x)$ o que existe y no es L, entonces existe ε_0 de forma que para todo $n\in\mathbb{N}$ existe $x_n\in(c-\frac{1}{n},c+\frac{1}{n})\cap S$, $x_n\neq c$, tal que $|f(x_n)-L|\geq\varepsilon_0$. Pero entonces tenemos que $x_n\to c$, $x_n\neq c$, para todo n y $(f(x_n))$ no converge a L. $\square$

El teorema anterior se usa con frecuencia para que ver que una función no tiene límite en un punto. Veamos algunos ejemplos:

1. No existe el límite de $f(x)=\frac{1}{x}$ en el punto 0. En efecto, si consideramos la sucesión (x_n) con $x_n=\frac{1}{n}$, esta sucesión converge a 0 y sin embargo $(f(x_n))=(n)$ no es convergente a ningún número real, obsérvese que no está acotada; en este caso $S=\mathbb{R}\backslash\{0\}$ y $c=0$, que pertenece a S'.

2. La función signo, que denotaremos por sig, definida en $\mathbb{R}$ por

$$sig(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\\ -1 & \text{si } x<0,\end{cases}$$

no tiene límite en $c=0$. En efecto si consideramos la sucesión $(\frac{1}{n})$ entonces $sig(x_n)=1\to 1$ y si consideramos la sucesión $(-\frac{1}{n})$ entonces $sig(x_n)=-1\to-1$. Como los valores de estos límites son distintos, la función sig no tiene límite en 0. Obsérvese que sí tiene límite en cualquier otro punto.

Cuando una función tiene límite en un punto c, el conjunto de sus valores está acotado en un intervalo con centro en c, excluido este punto. Esto es lo que demuestra la siguiente proposición.

Proposición 4.7 (Teorema de acotación) *Sean $S \subset \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ y c es un punto de acumulación de S y supongamos que f tiene límite en c y que éste vale $L \in \mathbb{R}$. Entonces existe $\delta > 0$ y existe $M > 0$ de forma que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in (c-\delta, c+\delta) \cap S$, $x \neq c$.*

Demostración. Tomemos $\varepsilon = 1$ y sea $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < 1$ para todo $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap S$, $x \neq c$. Entonces, para esos x,

$$|f(x)| \leq |L| + 1,$$

de donde se sigue que $|f(x)| \leq M$, siendo $M = |L| + 1$, para todo $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap S$, $x \neq c$. □

Más adelante utilizaremos la siguiente propiedad de los límites de las funciones en un punto cuando éstos no son cero.

Proposición 4.8 *Sean $S \subset \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$, c un punto de acumulación de S y supongamos que existe el $\lim\limits_{x\to c} f(x)$, llamémosle L. Entonces,*

1. *Si $L > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > \frac{L}{2}$ para todo $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap S$, $x \neq c$.*
2. *Si $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ es menor que 0, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < \frac{L}{2}$ para todo $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap S$, $x \neq c$.*

Demostración. Sea $L = \lim\limits_{x\to c} f(x)$ y supongamos que $L > 0$. Consideremos $\varepsilon = \frac{1}{2}L$. Dado que $L = \lim\limits_{x\to c} f(x)$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \frac{1}{2}L$ para todo $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap S$, $x \neq c$. Entonces $L - f(x) \leq |f(x) - L| < \frac{1}{2}L$ para esos x, luego $f(x) > L - \frac{1}{2}L = \frac{1}{2}L > 0$.

Para el caso en el que el límite sea menor que 0 basta tener en cuenta que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\lim\limits_{x\to c} (-f(x)) = -(-L)$ y $-L$ es mayor que 0, luego existe $\delta > 0$ tal que $-f(x) > -\frac{L}{2}$ para todo $x \in (c-\delta, c+\delta) \cap S$, $x \neq c$, esto es, $f(x) < \frac{L}{2} < 0$ para todo $x \in (c-\delta, c+\delta) \cap S$, $x \neq c$. □

En el conjunto de las funciones definidas en S con valores en $\mathbb{R}$ se pueden definir de manera natural los conceptos de suma y producto de funciones y también el de producto de una función por un número real. Así, si $f, g : S \to \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se definen:

$$\begin{aligned}
(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\
(f \cdot g)(x) &= f(x)g(x) \\
(\alpha \cdot f)(x) &= \alpha f(x) \\
(f - g)(x) &= f(x) - g(x)
\end{aligned}$$

para todo $x \in S$. Pues bien si f y g tienen límite en un punto de acumulación c de S y sus valores respectivos son L_f y L_g entonces $f+g$, $f \cdot g$ y $\alpha \cdot f$ tiene límite en c y sus valores son:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to c}(f+g)(x) &= L_f + L_g \\
\lim_{x \to c}(f \cdot g)(x) &= L_f \cdot L_g \\
\lim_{x \to c}(\alpha \cdot f)(x) &= \alpha \cdot L_f \\
\lim_{x \to c}(f-g)(x) &= L_f - L_g
\end{aligned}$$

La demostración de esto se sigue usando el hecho ya probado de que la suma y el producto de sucesiones y el producto de una constante por una sucesión tienen por límites respectivos la suma, el producto y el producto de la constante por el límite de las sucesiones. Téngase en cuenta que para toda (x_n) en S que converja a c con todos sus términos distintos de c, se verifica que $f(x_n) + g(x_n) \to L_f + L_g$, que $f(x_n)g(x_n) \to L_f \cdot L_g$ y $\alpha f(x_n) \to \alpha \cdot L_f$, y el resultado se sigue del teorema 4.6.

Proposición 4.9 *Si f tiene límite L en un punto de acumulación c de S, $f(x) \neq 0$ para todo $x \in S$ y $L \neq 0$, entonces $\frac{1}{f}$ tiene límite en c y su valor es $\frac{1}{L}$ donde la función $\frac{1}{f}$ está definida por $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$.*

Demostración. Para cualquier sucesión (x_n) en S que converja a c, con $x_n \neq c$ para todo n, sabemos que $f(x_n) \to L$ y entonces, al ser $L \neq 0$ resulta que $\frac{1}{f(x_n)} \to \frac{1}{L}$. El resultado se sigue entonces del Teorema 4.6. □

Ejemplo 4.10 *Calcular el $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-4}{x^2+1}$.*

Se verifica que,

$$\lim_{x \to 2} (x^3 - 4) = \lim_{x \to 2} x^3 - \lim_{x \to 2} 4 = 8 - 4 = 4$$

y

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 1) = 4 + 1 = 5 \neq 0,$$

por lo que,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1} = \frac{4}{5}.$$

Todo polinomio $P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tiene límite en cualquier punto c de $\mathbb{R}$ y $\lim_{x \to c} P(x) = P(c)$. En efecto

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to c} P(x) &= \lim_{x \to c}(a_k x^k) + \lim_{x \to c}(a_{k-1}x^{k-1}) + \cdots + \lim_{x \to c}(a_1 x) + \lim_{x \to c} a_0 \\
&= a_k c^k + a_{k-1}c^{k-1} + \cdots + a_1 c + a_0 \\
&= P(c).
\end{aligned}$$

Si P y Q son dos polinomios y se verifica que $Q(x) \neq 0$ para todo x de un cierto intervalo centrado en c, entonces

$$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

Proposición 4.11 *Si f es una aplicación de $S \subset \mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}$, c es un punto de acumulación de S y se verifica que $a \leq f(x) \leq b$ para todo $x \in S$, $x \neq c$, para ciertos a, $b \in \mathbb{R}$, entonces, si existe el $\lim_{x\to c} f(x)$, se verifica que*

$$a \leq \lim_{x\to c} f(x) \leq b.$$

Demostración. Sea (x_n) cualquier sucesión convergente a c con $x_n \in S$ y $x_n \neq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ (teorema 4.6). Como $a \leq f(x_n) \leq b$ para todo n, tenemos que

$$a \leq \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq b$$

(proposición 3.19) y por lo tanto que $a \leq \lim_{x\to c} f(x) \leq b$. □

Proposición 4.12 (Teorema de compresión, o regla del sandwich, para funciones) *Sean $S \subset \mathbb{R}$ y f, g, $h : S \to \mathbb{R}$ y sea c un punto de acumulación de S. Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in S$, $x \neq c$ y $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$, entonces*

$$\lim_{x\to c} g(x) = L.$$

Demostración. Consideremos una sucesión (x_n) de puntos de S, $x_n \neq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ que sea convergente a c. Dado que $f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$ y $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} h(x_n) = L$ se tiene (por la Proposición 3.19) que $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = L$. Dada la arbitrariedad de (x_n) se sigue que $\lim_{x\to c} g(x) = L$ (Teorema 4.6). □

Ejemplo 4.13 *Sea $f : \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ definida por $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$. Entonces $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.*

Observamos que para todo $x \in (0, 1]$ se verifica que $0 \leq f(x) \leq x$. En efecto,

$$x \in (0,1] \implies x^{\frac{1}{2}} \leq 1 \overset{Prop.1,14,(v)}{\implies} xx^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}} \leq x.$$

Como $\lim_{x\to 0} 0 = 0$ y $\lim_{x\to 0} x = 0$ se verifica que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

4.1. Límites laterales

Definición 4.14 *Sean $S \subset \mathbb{R}$ y $f : S \to \mathbb{R}$.*

1. Si c un punto de acumulación del conjunto $S \cap (c, +\infty)$ se dice que f tiene límite por la derecha en c y que éste es $L \in \mathbb{R}$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo $x \in (c, c + \delta) \cap S$. Se usará la notación

$$L = \lim_{x \to c^+} f(x)$$

2. Si c un punto de acumulación del conjunto $S \cap (-\infty, c)$ se dice que f tiene límite por la izquierda en c y que éste es $L \in \mathbb{R}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo $x \in (c - \delta, c) \cap S$. Se usará la notación

$$L = \lim_{x \to c^-} f(x)$$

Es claro que si c es un punto de acumulación de los conjuntos $S \cap (c, +\infty)$ y $S \cap (-\infty, c)$ y f tiene límite L en c entonces f tiene límite por la derecha y por la izquierda en c y $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = L$.

Pueda haber límites laterales a derecha e izquierda y no coincidir. Por ejemplo la función *sig* tiene límites laterales y éstos son distintos en 0. El límite por la derecha es 1 y por la izquierda es -1 en ese punto. Pero si hay límites laterales y coinciden entonces hay límite y su valor es el valor común de esos límites laterales, esto es lo que prueba el siguiente teorema.

Nota 4.15 *Todos los resultados que obtuvimos para límites son válidos también para límites laterales.*

Proposición 4.16 *Sean $S \subset \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ y c un punto de acumulación de $S \cap (c, +\infty)$ y de $S \cap (-\infty, c)$. Si existen $\lim_{x \to c^+} f(x)$, $\lim_{x \to c^-} f(x)$ y coinciden siendo este valor común L, entonces existe $\lim_{x \to c} f(x)$ y su valor es L.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ sea $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo $x \in (c, c + \delta_1) \cap S$, y sea $\delta_2 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo $x \in (c - \delta_2, c) \cap S$. Si hacemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces para todo $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap S$, $x \neq c$, se verifica que $|f(x) - L| < \varepsilon$. □

4.2. Límites infinitos

Definición 4.17 *Sean $S \subset \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ y c un punto de acumulación de S.*

1. Se dice que f tiene límite $+\infty$ cuando $x \to c$ y se escribe $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$, si para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ para todo $x \in (c-\delta, c+\delta) \cap S,\ x \neq c$.
2. Se dice que f tiene límite $-\infty$ cuando $x \to c$ y se escribe $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty$, si para todo $M^* < 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < M^*$ para todo $x \in (c-\delta, c+\delta) \cap S$, $x \neq c$.

Ejemplo 4.18 *1. La función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ definida en $S = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ verifica que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$*

2. La función $g(x) = -\frac{1}{x^2}$ verifica que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$.

En efecto,

1. Dado $M > 0$ sea $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$, entonces $f(x) = \frac{1}{x^2} > M$ si $|x| < \delta$ y $x \neq 0$.

2. En general, si $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to c}(-f)(x) = -\infty$. En efecto, dado $M^* < 0$ su opuesto $M := -M^*$ es mayor que 0 y entonces existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-c| < \delta$, $x \in S$, se verifica que $f(x) > M$ y esto implica que $-f(x) < -M = M^*$.

Definición 4.19 *Sea $S \subset \mathbb{R}$ y $f : S \to \mathbb{R}$.*

1. Si c es un punto de acumulación de $S \cap (c, +\infty)$ se dice que f tiene límite por la derecha en c y que éste es $+\infty$ si para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ para todo $x \in (c, c+\delta) \cap S$. Se usará la notación
$$\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty.$$
2. Si c es un punto de acumulación del conjunto $S \cap (-\infty, c)$ se dice que f tiene límite por la izquierda en c y que éste es $+\infty$ si para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ para todo $x \in (c-\delta, c) \cap S$. Se usará la notación
$$\lim_{x\to c^-} f(x) = +\infty.$$
3. Pueden darse también las definiciones análogas para el caso de límite $-\infty$.

4.3. Límites en el infinito

Definición 4.20 *Sea $S \subset \mathbb{R}$ y $f : S \to \mathbb{R}$.*

1. Si para algún $a \in \mathbb{R}$ se verifica que $(a, +\infty) \subset S$, se dice que f tiene límite cuando $x \to +\infty$ y que su valor es un número real L si para todo $\varepsilon > 0$ existe $K > a$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo $x > K$. Se usará la notación $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$. Ejemplo, la función $f : x \in (0, +\infty) \to f(x) = \frac{1}{x}$ tiene límite 0 cuando $x \to +\infty$.

2. Si para algún $b \in \mathbb{R}$ se verifica que $(-\infty, b) \subset S$, se dice que f tiene límite cuando $x \to -\infty$ y que su valor es un número real L si para todo $\varepsilon > 0$ existe $K^* < b$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo $x < K^*$. Se usará la notación $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$. Ejemplo, la función $f : x \in (-\infty, 0) \to f(x) = \frac{1}{x}$ tiene límite 0 cuando $x \to -\infty$.

3. Si para algún $a \in \mathbb{R}$ se verifica que $(a, +\infty) \subset S$, se dice que f tiene límite $+\infty$ cuando $x \to +\infty$ si para todo $M > 0$ existe $K > a$ tal que $f(x) > M$ para todo $x > K$. Se usará la notación $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Ejemplo, la función $f : x \in (0, +\infty) \to f(x) = x$ tiene límite $+\infty$ cuando $x \to +\infty$.

4. Si para algún $a \in \mathbb{R}$ se verifica que $(a, +\infty) \subset S$, se dice que f tiene límite $-\infty$ cuando $x \to +\infty$ si para todo $M^* < 0$ existe $K > a$ tal que $f(x) < M^*$ para todo $x > K$. Se usará la notación $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Ejemplo, la función $f : x \in (0, +\infty) \to f(x) = -x$ tiene límite $-\infty$ cuando $x \to +\infty$.

5. Si para algún $b \in \mathbb{R}$ se verifica que $(-\infty, b) \subset S$, se dice que f tiene límite $+\infty$ cuando $x \to -\infty$ si para todo $M > 0$ existe $K^* < b$ tal que $f(x) > M$ para todo $x < K^*$. Se usará la notación $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Ejemplo, la función $f : x \in (-\infty, 0) \to f(x) = -x$ tiene límite $+\infty$ cuando $x \to -\infty$.

6. Si para algún $b \in \mathbb{R}$ se verifica que $(-\infty, b) \subset S$, se dice que f tiene límite $-\infty$ cuando $x \to -\infty$ si para todo $M^* < 0$ existe $K^* < b$ tal que $f(x) < M^*$ para todo $x < K^*$. Se usará la notación $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Ejemplo, la función $f : x \in (-\infty, 0) \to f(x) = x$ tiene límite $-\infty$ cuando $x \to -\infty$.

Ejemplo 4.21 $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$ *cualquiera que sea $k \in \mathbb{N}$. En efecto, para $x \in (1, +\infty)$ se tiene que $x^k \geq x$ (por inducción: para $k = 1$, $x^k = x$. Si suponemos que $x^k \geq x$, como $x \geq 1$, tenemos que $x^{k+1} = xx^k \geq xx \geq x$). Dado $M > 0$ sea $K = M$, entonces cuando $x > M$ se tiene que $x^k \geq x > M = K$.*

Ejemplo 4.22 *Si k es un número natural par, entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = +\infty$ y si k es un número natural impar, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = -\infty$.*

En efecto, dado $M > 0$, tomemos $K = -M^{\frac{1}{k}} < 0$. Cualquiera que sea $x < K$ se verifica que $-x > -K = M^{\frac{1}{k}}$ y entonces, si k es par $x^k = (-x)^k > M$ para todo $x < K$.

Cuando k es impar, dado $M^* < 0$ tomemos $K = -(-M^*)^{\frac{1}{k}} < 0$, entonces, si $x < K$ se verifica que $-x > -K$ lo que implica que $(-x)^k > (-K)^k$. Como $x^k = -(-x)^k$ resulta que $x^k < -(-K)^k = -(-M^*) = M^*$.

4.4. Continuidad de funciones

Pasamos ahora a estudiar el concepto de continuidad de una función. Comenzamos con una definición.

Definición 4.23 *Sean $S \subset \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ y $c \in S$. Se dice que f es continua en c si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid x \in (c-\delta, c+\delta) \cap S \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Nota 4.24 *En el caso en que c pertenezca a S' estamos seguros de que $(c-\delta, c+\delta) \cap S$ tiene puntos distintos de c, de hecho tiene infinitos puntos distintos de c. Si $c \notin S'$ entonces existe un $\delta > 0$ tal que $(c-\delta, c+\delta) \cap S = \{c\}$. En este caso la condición de continuidad se verifica de forma automática y no tiene mayor interés. Los puntos que no son de acumulación se llaman* ***aislados****.*

Nota 4.25 *Para el caso en el que $c \in S' \cap S$ podemos decir que f es continua en c si y sólo si f tiene límite en c y su valor es precisamente $f(c)$.*

Definición 4.26 *Sean $S \subset \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ y $B \subset S$. Se dice que f es continua en B si es continua en cada punto de B.*

Proposición 4.27 (Criterio de continuidad por sucesiones) *Sean $S \subset \mathbb{R}$, $f : S \to \mathbb{R}$ y $c \in S$. Entonces f es continua en c si y sólo si para toda sucesión (x_n) de puntos de S que converja a c se verifica que la sucesión $(f(x_n))$ converge a $f(c)$.*

Demostración. Si f es continua en c, entonces, si $c \in S'$, f tiene límite en c y su valor es $f(c)$. Por el teorema 4.6 sabemos que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ si y sólo si para toda (x_n) que converja a c, con $x_n \neq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $(f(x_n))$ converge a $f(c)$. Obsérvese que aunque algún x_n sea igual a c no hay ningún problema. Si $c \notin S'$ y (x_n) es una sucesión de puntos de S que converge a c, entonces a partir de un cierto n_0 los términos de la sucesión son todos iguales a c y claramente una sucesión en la que a partir de un cierto término, éstos son todos de la forma $f(c)$, es una sucesión converge a $f(c)$. □

Ejemplo 4.28 *La función $f(x) = x^2$ es continua en cualquier $c \in \mathbb{R}$. En efecto, hemos visto anteriormente que para cualquier $c \in \mathbb{R}$ se verifica que $\lim\limits_{x\to c} x^2 = c^2$ que es precisamente $f(c)$.*

Ejemplo 4.29 *La función sig no es continua en el* 0*, lo es en cualquier otro punto.*

Ejemplo 4.30 *La función de Dirichlet (matemático francés, 1805-1859) definida en* $\mathbb{R}$ *por:*

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x \textit{ es irracional} \\ 1 & \textit{si } x \textit{ es racional} \end{cases}$$

no es continua en ningún punto de $\mathbb{R}$*. Veámoslo: Sea* c *número racional y consideremos una sucesión* (x_n) *de números irracionales que converja a* c *(téngase en cuenta que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *existe* $x_n \in (c-\frac{1}{n}, c+\frac{1}{n}) \cap \mathbb{I}$*, Proposición 1.44). Dado que* $f(x_n) = 0$ *para todo* n*, es claro que* $f(x_n)$ *no converge a* $f(c) = 1$*. Si ahora consideramos un número irracional* c *y consideramos una sucesión* (x_n) *de números racionales que converja a* c *(téngase en cuenta que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *existe* $x_n \in (c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}) \cap \mathbb{Q}$*, Proposición 1.42). Dado que* $f(x_n) = 1$ *para todo* n*, es claro que* $f(x_n)$ *no converge a* $f(c) = 0$*.*

Ejemplo 4.31 *La función de Thomae (matemático alemán, 1840-1921) también llamada la función "gotas de lluvia", definida por*

$$f : x \in (0,1) \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x \textit{ es irracional} \\ \frac{1}{q} & \textit{si } x \textit{ es de la forma } \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

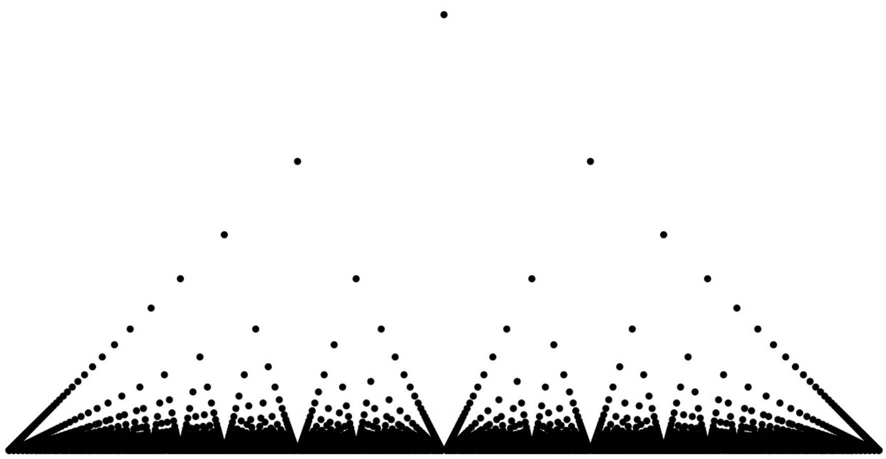
(se supone que $mcd(p,q) = 1$*) no es continua en los racionales y si lo es en los irracionales. En efecto, sea* c *un número racional del intervalo* $(0,1)$ *y consideremos una sucesión de números irracionales* (x_n) *de* $(0,1)$ *que converja a* c*. Entonces* $f(x_n) = 0$ *para todo* n *por lo que* $f(x_n)$ *no converge a* $f(c)$ *debido a que* $f(c) \neq 0$*.*

Si ahora c *es un número irracional del intervalo* $(0,1)$*. Dado* $\varepsilon > 0$*, consideremos un número natural* q_0 *tal que* $\frac{1}{q_0} < \varepsilon$ *(propiedad arquimediana). Sólo puede haber una cantidad finita de números racionales* $\frac{p}{q}$ *con* $mcd(p,q) = 1$ *y denominador menor que* q_0 *que pertenezcan al intervalo* $(0,1)$*. Téngase en cuenta que*

$$(0,1) \cap \mathbb{Q} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \dots \right\}$$

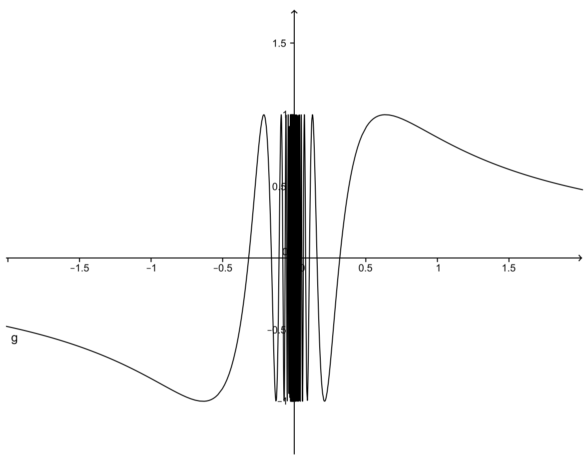
Existe entonces un $\delta > 0$ *de forma que en el intervalo* $(c-\delta, c+\delta)$ *no haya ningún racional con denominador menor que* q_0*. Luego, para todo* $x \in (c-\delta, c+\delta)$*,* $x > 0$ *se verifica que*

$$|f(x) - f(c)| = f(x) \leq \frac{1}{q_0} < \varepsilon.$$



Función de Thomae en (0,1) (dibujo de Smithers)

Ejemplo 4.32 *Aunque no hemos definido quién es la función* sen *(lo haremos más adelante) usaremos aquí que es una función definida en todo* $\mathbb{R}$ *cuyos valores están entre* -1 *y* 1 *y que se anula en todos los puntos de la forma* $k\pi$ *con* $k \in \mathbb{Z}$ *y que vale* 1 *en los puntos de la forma* $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$*, con* $k \in \mathbb{Z}$ *y* -1 *en los puntos de la forma* $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$*, con* $k \in \mathbb{Z}$*. Pues bien, sucede que la función* $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \mapsto \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ *no tiene límite en* $c = 0$ *y por lo tanto no podemos darle un valor en* 0 *que la haga continua. Obsérvese que la sucesión* (x_n) *con* $x_n = \frac{1}{n\pi}$ *converge a* 0 *y* $\operatorname{sen} \frac{1}{\frac{1}{x_n}} = \operatorname{sen} \pi n = 0$*, mientras que la sucesión* (y_n) *con* $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ *converge a* 0 *y* $\operatorname{sen} \frac{1}{\frac{1}{y_n}} = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$.



Función $\operatorname{sen}(1/x)$.

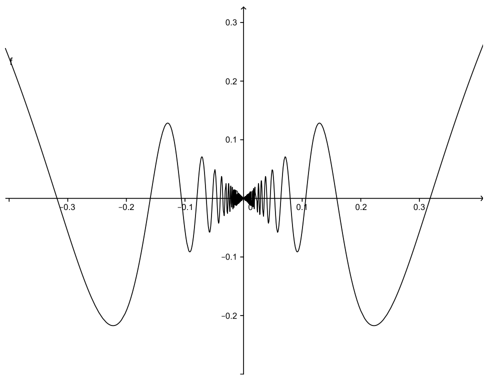
Ejemplo 4.33 *La función* $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$*, tiene límite en el* 0 *y su valor es* 0*. En consecuencia la función*

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

es continua en 0. *Veamos como* $x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \to 0$ *cuando* $x \to 0$. *Dado que* $|\operatorname{sen} t| \leq 1$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$, *resulta que*

$$\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x| \text{ para todo } x$$

lo que prueba lo que queremos.

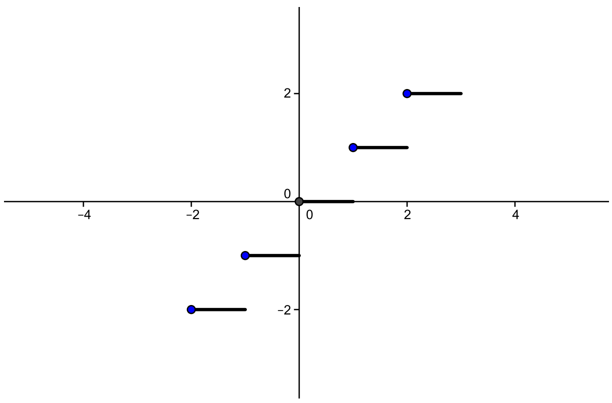


Función $x \operatorname{sen}(1/x)$.

Ejemplo 4.34 *Estudiar en qué puntos es continua la función* $E : x \mapsto E(x)$ *donde* $E(x)$ *es la* ***Parte entera*** *de* x, *definida como el mayor entero que es menor o igual que* x. *Recordamos que para todo número real* x *existe un número entero* n *tal que* $n-1 \leq x < n$ *(Proposición 1.1.3). Por ejemplo,*

$$E(7) = 7, \ E(4{,}5) = 4, \ E(3{,}9) = 3, \ E(-3) = -3, \ E(-6{,}5) = -7.$$

La función E *es constante en cada uno de los intervalos* $[n, n+1)$, *con* $n \in \mathbb{Z}$ *y vale* n. *A la vista de esto* E *es continua en cada uno de los intervalos* $(n, n+1)$ *y no lo es en ningún* $n \in \mathbb{Z}$ *pues en esos puntos el límite por la izquierda es* $n-1$ *y por la derecha* n.



Función Parte entera.

Nota 4.35 *Si tenemos una función f definida en un conjunto S y consideramos su restricción $f_{|_B}$ a un subconjunto B de S entonces, si f es continua en S, esta nueva función es necesariamente continua en B, pero puede ocurrir que $f_{|_B}$ sea continua en B aunque la f no sea continua en B. Por ejemplo, la restricción de la función E del ejemplo anterior a cada $[n, n+1)$ es continua en $[n, n+1)$ y sin embargo no es continua en $\mathbb{R}$. Nótese que al considerar la restricción de E a $[n, n+1)$ a la hora de hallar el límite de ella cuando $x \to n$ sólo se deben considerar x a la derecha de n pues no hay ningún punto a la izquierda de n que pertenezca a $[n, n+1)$.*

4.5. Operaciones con funciones continuas

Proposición 4.36 *Sean f y g dos funciones definidas en un subconjunto S de $\mathbb{R}$, continuas en un punto $c \in S \cap S'$, y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $f+g$, $f-g$, fg y αf son continuas en c. Si además h es una función continua en c y $h(x) \neq 0$ para todo $x \in S$, entonces $\frac{f}{h}$ también es continua en c.*

Demostración. Dado que f y g tienen límite en c y sus valores respectivos son $f(c)$ y $g(c)$, ya sabemos que $f+g$, $f-g$, fg y αf tienen límites $f(c)+g(c)$, $f(c)-g(c)$, $f(c)g(c)$ y $af(c)$ respectivamente, luego esas funciones son continuas en c. Sabemos también que al ser $h(x) \neq 0$ para todo $x \in S$, en particular $h(c) \neq 0$ y $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(c)}{h(c)} = \frac{f}{h}(c)$, lo que nos da la continuidad de $\frac{f}{h}$ en c. □

Corolario 4.37 *Si f y g son dos funciones continuas en S y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $f+g$, $f-g$, fg y αf son continuas en S. Si además h es una función continua en S y $h(x) \neq 0$ para todo $x \in S$, entonces $\frac{f}{h}$ también es continua en S.*

Demostración. Basta observar que la continuidad en un conjunto es precisamente la continuidad en cada uno de los puntos del conjunto. □

Como consecuencia de este corolario todas las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$, y también lo son las funciones racionales (cocientes de polinomios), en aquellos puntos en los que no se anule el denominador.

Proposición 4.38 *Si $f : S \to \mathbb{R}$ es una función continua en un punto $c \in S$, entonces la función $|f| : S \to \mathbb{R}$ definida por $|f|(x) = |f(x)|$ es también continua en c.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión de puntos de S convergente a c, entonces $f(x_n) \to f(c)$ y esto implica que que $|f(x_n)| \to |f(c)|$ lo que se ha probado en la proposición 3.22
□

Proposición 4.39 *Si $f : S \to \mathbb{R}$ es una función continua en un punto c y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in S$, entonces la función $\sqrt{f} : S \to \mathbb{R}$ definida por $\sqrt{f}(x) = \sqrt{f(x)}$ es también continua en c.*

Demostración. La demostración se sigue de la Proposición 3.24 pues si (x_n) es una sucesión de puntos de S convergente a c, entonces, por ser f continua en c sabemos que la sucesión $(f(x_n))$ converge a $f(c)$ y así, por esa proposición, la sucesión $\sqrt{(f(x_n))}$ converge a $\sqrt{f(c)}$. □

Composición de funciones continuas

Cuando uno tiene dos funciones $f : S \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ y $f(S) \subset B$ puede definir la composición de ellas, que es la función

$$g \circ f : x \in S \mapsto g \circ f = g(f(x)) \in \mathbb{R}.$$

En relación con la continuidad de la composición de funciones continuas se tiene la siguiente proposición.

Proposición 4.40 *Si tenemos dos funciones $f : S \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$ y $f(S) \subset B$. Entonces, si f es continua en un punto $c \in S$ y g lo es en el punto $f(c)$, resulta que $g \circ f$ es continua en c.*

Demostración. Sea (x_n) una sucesión de elementos de S que converge a c. Como f es continua en c, $f(x_n) \to f(c)$ y, como g es continua en $f(c)$, se tiene que $g(f(x_n)) \to g(f(c))$. □

Corolario 4.41 *Si tenemos dos funciones $f : S \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$, y $f(S) \subset B$. Entonces, si f es continua en S y g lo es en B, resulta que $g \circ f$ es continua en S.*

Demostración. Basta tener en cuenta la proposición anterior y que la continuidad de una función en un conjunto es justamente la continuidad en cada uno de sus puntos. □

Nota 4.42 *Del resultado anterior se puede deducir directamente que si f es continua en $c \in S$ entonces $|f|$ también lo es, y si $f(x) \geq 0$ también $\sqrt{f}$ es continua, pues las funciones $g : y \in \mathbb{R} \mapsto |y|$ y $g : y \in [0, +\infty) \mapsto \sqrt{y}$ son continuas.*

4.6. Funciones continuas en intervalos

Cuando el conjunto de definición de las funciones son intervalos cerrados y acotados, éstas tienen unas propiedades particularmente interesantes que estudiaremos a continuación.

Comenzamos viendo que las funciones continuas en intervalos cerrados y acotados siempre son acotadas en el sentido que precisa la siguiente definición.

Definición 4.43 *Se dice que una función $f : S \to \mathbb{R}$ es* ***acotada*** *en S si existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in S$.*

Lo que esto significa es que el conjunto $f(S) = \{f(x) : x \in S\}$ de los valores que toma f en S es un conjunto de números reales acotado de acuerdo con la definición 1.29.

Nota 4.44 *Observamos que no todas las funciones son acotadas, ni siquiera las continuas. Basta considerar la función $x \in (0, +\infty) \mapsto \frac{1}{x}$. La no acotación, en este caso, es consecuencia del hecho de que $\frac{1}{x}$ crece cada vez más cuando uno se acerca al 0 por la derecha. En efecto, dado $M \geq 0$ si tomamos $x \in \left(0, \frac{1}{M}\right)$ resulta que $\frac{1}{x} > M$. La situación es bien diferente cuando consideramos el intervalo $[a, +\infty)$ con $a > 0$. En este caso, $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{a}$ para todo $x \in [a, +\infty)$.*

Proposición 4.45 *Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado y acotado y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada en I.*

Demostración. Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que f no es acotada en I. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un punto $x_n \in I$ tal que $|f(x_n)| > n$. Dado que la sucesión (x_n) está contenida en I, es una sucesión acotada y por el teorema de Bolzano-Weierstrass para sucesiones (teorema 3.39) existen una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) y un número real x_0 tales que $x_{n_k} \to x_0$. Este número real x_0 pertenece a I pues al ser $a \leq x_{n_k} \leq b$ para todo k, entonces $a \leq x_0 \leq b$ (proposición 3.19). Al ser f continua en x_0 la sucesión $(f(x_{n_k}))$ converge a $f(x_0)$ y por lo tanto $(f(x_{n_k}))$ es una sucesión acotada (proposición 3.15) lo que es contradictorio con el hecho de que

$$|f(x_{n_k})| > n_k \geq k \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Introducimos ahora el concepto de máximo y mínimo absolutos para una función definida en un subconjunto S de $\mathbb{R}$.

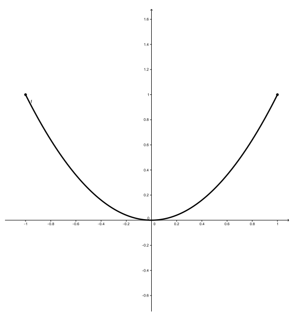
Definición 4.46 *Sean S un subconjunto de $\mathbb{R}$ y f una función definida en S con valores en $\mathbb{R}$.*

1. Se dice que f tiene un **máximo absoluto** en S si existe un punto $x^* \in S$ tal que $f(x^*) \geq f(x)$ para todo $x \in S$. En este caso se dice que x^* es un **punto de máximo absoluto** de f en S.

2. Se dice que f tiene un **mínimo absoluto** en S si existe un punto $x_* \in S$ tal que $f(x_*) \leq f(x)$ para todo $x \in S$. En este caso se dice que x_* es un **punto de mínimo absoluto** de f en S.

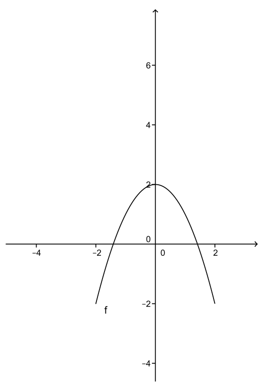
Nota 4.47 *1. No siempre existen este tipo de puntos. Por ejemplo en* $(0, +\infty)$ *no hay ningún punto de máximo absoluto para la función continua* $f(x) = \frac{1}{x}$. *Tampoco hay ninguno de mínimo absoluto para esa función.*

2. Puede haber varios puntos de máximo o de mínimo absoluto de una función. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ *definida en* $[-1, 1]$ *tiene máximo absoluto en los puntos* -1 *y* 1 *y un mínimo absoluto en* 0.



Gráfica de la función x^2 *en el intervalo* $[-1, 1]$.

3. Puede haber máximos y mínimos absolutos en conjuntos que no sean intervalos cerrados. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ *tiene un mínimo absoluto en el intervalo* $(-2, 2)$ *y* $f(x) = 2 - x^2$ *tiene un máximo en el intervalo* $(-2, 2)$.



Gráfica de la función $2 - x^2$ *en el intervalo* $(-2, 2)$.

4. Las funciones constantes tienen un máximo y un mínimo absoluto en todos los puntos de su conjunto de definición.

El siguiente teorema demuestra que las funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado siempre tienen en él un máximo y un mínimo absolutos.

Teorema 4.48 (del máximo y el mínimo) *Si $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces existen x^* y x_* en I tales que x^* es un punto de máximo absoluto para f y x_* es un punto de mínimo absoluto para f.*

Demostración. Consideremos el conjunto no vacío $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$. La proposición anterior muestra que este conjunto es acotado por lo que tiene un supremo y un ínfimo, que denotaremos por s^* y s_* respectivamente. Vamos a demostrar que existen x^* y $x_* \in I$ tales que $f(x^*) = s^*$ y $f(x_*) = s_*$.

Por la definición de supremo tenemos que cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$ se verifica que s^*-$\frac{1}{n}$ no es cota superior de $f(I)$, luego, fijado n existe $x_n \in I$ tal que

$$s^* - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq s^*.$$

Obtenemos así una sucesión (x_n) de puntos de I, esta sucesión está acotada por estarlo el conjunto I. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) que converge a un número real x^* que pertenece a I. Como f es continua en x^* sabemos que $f(x_{n_k}) \to f(x^*)$ y como

$$s^* - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq s^*$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, resulta que $f(x^*) = s^*$.

El caso del mínimo absoluto es análogo. □

Teorema 4.49 (de localización de ceros) *Sea I un intervalo y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en I. Si α y β son dos números reales del intervalo I, siendo $\alpha < \beta$, que verifican que $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$ o que $f(\alpha) > 0 > f(\beta)$, entonces existe $c \in (\alpha, \beta)$ tal que $f(c) = 0$.*

Demostración. Supongamos primero que $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$. Hagamos $\alpha_1 = \alpha$ y $\beta_1 = \beta$ y denotemos por I_1 al intervalo $[\alpha_1, \beta_1]$ y sea $\gamma_1 = \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$. Si sucede que $f(\gamma_1) = 0$ basta tomar $c = \gamma_1$ para que quede demostrado el teorema. Si no ocurre eso y $f(\gamma_1) > 0$ consideramos $\alpha_2 = \alpha_1$ y $\beta_2 = \gamma_1$, si lo que ocurre es que $f(\gamma) < 0$ entonces consideramos $\alpha_2 = \gamma_1$ y $\beta_2 = \beta_1$. En cualquiera de los dos casos se considera el intervalo $I_2 = [\alpha_2, \beta_2]$ y claramente se verifica que $f(\alpha_2) < 0 < f(\beta_2)$. Sea ahora $\gamma_2 = \frac{\alpha_2+\beta_2}{2}$. Si $f(\gamma_2) = 0$ se termina la demostración tomando $c = \gamma_2$. Si $f(\gamma_2) > 0$ consideramos $\alpha_3 = \alpha_2$ y $\beta_3 = \gamma_2$, si $f(\gamma_2) < 0$ hacemos $\alpha_3 = \gamma_2$ y $\beta_3 = \beta_2$. Reiterando este proceso o bien se encuentra un γ_n tal que $f(\gamma_n) = 0$ o bien se obtiene, por cada $n \in \mathbb{N}$, un intervalo $I_n = [\alpha_n, \beta_n]$ tal que $f(\alpha_n) < 0 < f(\beta_n)$. Los intervalos I_n están encajados cada uno en el anterior y como

$\beta_n - \alpha_n = \frac{\beta-\alpha}{2^{n-1}}$ esos intervalos tienen un (único) punto en común, llamémosle c. Como $\alpha_n \leq c \leq \beta_n$ para todo n se sigue que $0 \leq c - \alpha_n \leq \beta_n - \alpha_n$ y que $0 \leq \beta_n - c \leq \beta_n - \alpha_n$ y por lo tanto $\alpha_n \to c$ y que $\beta_n \to c$. Finalmente de la continuidad de f en $c \in I$ se sigue que

$$f(\alpha_n) \to f(c) \quad \text{y} \quad f(\beta_n) \to f(c)$$

Dado que $f(\alpha_n) < 0$ para todo n se sigue que $f(c) \leq 0$ y como $f(\beta_n) > 0$ para todo n se sigue que $f(c) \geq 0$. Luego necesariamente $f(c) = 0$.

El caso en que $f(\alpha) > 0 > f(\beta)$ se obtiene aplicando lo que se ha hecho a la función continua $-f$. □

Teorema 4.50 (de Bolzano del valor intermedio) *Sean I un intervalo y f una función continua en él. Si para $\alpha, \beta \in I$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ se verifica que $f(\alpha) < \gamma < f(\beta)$, entonces existe c entre α y β tal que $f(c) = \gamma$. Sucede lo mismo si $f(\alpha) > \gamma > f(\beta)$.*

Demostración. Supongamos que $f(\alpha) < \gamma < f(\beta)$ y que $\alpha < \beta$, el caso $\alpha > \beta$ es análogo. Consideremos la función

$$g : x \in I \mapsto g(x) = f(x) - \gamma.$$

Esta función es continua en I y verifica que

$$g(\alpha) < 0 < g(\beta).$$

Entonces, por el teorema anterior existe $c \in (\alpha, \beta)$ tal que $g(c) = 0$. Esto es, $f(c) = \gamma$ lo que demuestra el teorema.

Si $f(\alpha) > \gamma > f(\beta)$ se aplica lo anterior a la función continua $-f$. □

Corolario 4.51 *Si f es una función continua en $I = [a, b]$, entonces, para todo $\gamma \in [\text{ínf}\, f(I), \text{sup}\, f(I)]$, existe $c \in I$ tal que $f(c) = \gamma$.*

Demostración. Por ser f continua en el intervalo cerrado y acotado I sabemos (Proposición 4.45) que $f(I)$ es un conjunto acotado y por lo tanto tiene ínfimo y supremo. Sea $\gamma \in [\text{ínf}\, f(I), \sup f(I)]$, sabemos, por el teorema del máximo y el mínimo, que existen x^* y $x_* \in I$ tales que $f(x^*) = \sup f(I)$ y $f(x_*) = \text{ínf}\, f(I)$. Entonces, $f(x_*) \leq \gamma \leq f(x^*)$. Si $f(x_*) = \gamma$ tomamos $c = x_*$, si $f(x^*) = \gamma$ tomamos $c = x^*$. Si $f(x_*) < \gamma < f(x^*)$ el teorema anterior nos garantiza la existencia de un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = \gamma$. □

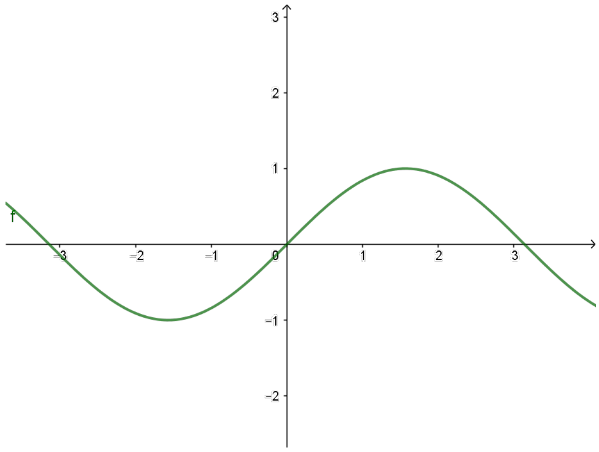
El último teorema de esta sección prueba que la imagen de un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ por una función continua es también un intervalo cerrado y acotado. Puede verse fácilmente que tal intervalo no es necesariamente el $[f(a), f(b)]$, puede que ni siquiera $f(a) < f(b)$.

Teorema 4.52 *Si $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua entonces $f(I)$ es un intervalo cerrado y acotado.*

Demostración. Dado un punto $\gamma \in [ínf\ f(I), \sup\ f(I)]$, existe, por el corolario anterior, $c \in I$ tal que $f(c) = \gamma$, esto es, $\gamma \in f(I)$, con lo que $f(I) = [ínf\ f(I), \sup\ f(I)]$. □

Este resultado puede generalizarse a intervalos de cualquier tipo, pero no puede asegurarse que la imagen de un intervalo sea un intervalo del mismo tipo que él, esto es, puede ocurrir que la imagen de un intervalo abierto sea un intervalo cerrado. En la gráfica que sigue se ve que la imagen del intervalo abierto $(-3, 3)$ es el intervalo cerrado $[-1, 1]$.

Nota 4.53 *Puede probarse, aunque no lo haremos aquí, que la imagen de un intervalo por una aplicación continua siempre es un intervalo, pero no se puede garantizar que sea del mismo tipo que el intervalo original, como se ve en el siguiente ejemplo:*



La imagen del intervalo abierto $(-3, 3)$ *es el intervalo cerrado* $[-1, 1]$.

4.7. Continuidad uniforme

Recordamos que una función $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en S si es continua en cada punto de S, esto es, si para cada punto $c \in S$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (que seguramente depende del punto c y también del ε) tal que

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon \text{ para todo } x \in (c - \delta, c + \delta) \cap S.$$

En algunos casos, la elección de δ no depende del punto c. Por ejemplo, la función $f(x) = 2x$ definida en todo $\mathbb{R}$ tiene la propiedad de que para cualquier $c \in \mathbb{R}$ y cualquier $\varepsilon > 0$ si se toma $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ se verifica que

$$|f(x) - f(c)| = 2|x - c| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ para todo } x \in (c - \delta, c + \delta).$$

Esto no ocurre para todas las funciones, si uno considera la función $f(x) = \frac{1}{x}$ definida en $\mathbb{R}^+$ observa que dado $\varepsilon > 0$ cuanto más próximo se tome el c al 0 más pequeño se debe tomar el δ y no es posible encontrar un $\delta > 0$ que sirva para todos los c. Precisaremos esto enseguida.

Hay un tipo de funciones que tienen la propiedad de que dado $\varepsilon > 0$ el δ puede tomarse independiente del punto, esto le ocurre a las funciones uniformemente continuas, que definimos a continuación:

Definición 4.54 *Se dice que una función $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es* ***uniformemente continua*** *en S si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tal que } |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in S,\ |x - y| < \delta.$$

Nota 4.55 *Debe observarse que toda función uniformemente continua es continua y que en la continuidad uniforme el δ no depende del punto, sólo depende del ε.*

Veamos como la función continua $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}^+ := (0, +\infty)$. Dados $\varepsilon = 1$ y $\delta > 0$ consideremos los puntos $\frac{1}{N}$ y $\frac{1}{N+1}$ siendo N bastante grande para que $\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} < \delta$ (téngase en cuenta que la sucesión $\left(\frac{1}{k}\right)$ es de Cauchy). Entonces

$$\left| f\left(\frac{1}{N}\right) - f\left(\frac{1}{N+1}\right) \right| = |N - (N+1)| = 1$$

que es mayor o igual que $\varepsilon = 1$.

Otro ejemplo de función no uniformemente continua es la función continua $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = x^2$. Veámoslo: Dado $\varepsilon = 1$ y $\delta > 0$ consideremos los puntos $x = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{3}$ e $y = \frac{1}{\delta} - \frac{\delta}{3}$. La distancia entre x e y es

$$\left| \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{3} - \left(\frac{1}{\delta} - \frac{\delta}{3} \right) \right| = \frac{2\delta}{3} < \delta,$$

mientras que

$$|f(x) - f(y)| = \left| x^2 - y^2 \right| = |x - y||x + y| = \frac{2\delta}{3}\frac{2}{\delta} = \frac{4}{3} > 1.$$

Aunque como hemos visto, hay funciones continuas que no son uniformemente continuas (las de los dos ejemplos anteriores verifican esto), las funciones continuas en intervalos cerrados y acotados siempre son uniformemente continuas. Esto es lo que demuestra el siguiente teorema.

Teorema 4.56 (de continuidad uniforme) *Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$, entonces f es uniformemente continua en $[a, b]$.*

Demostración. Supongamos que f no es uniformemente continua en $[a, b]$. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existen un par de puntos x_n e y_n en I tales que $|x_n - .y_n| < \frac{1}{n}$ y sin embargo $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$. Ahora bien, la sucesión (x_n) está contenida en $[a, b]$ que es cerrado y acotado, por lo tanto (x_n) tiene una subsucesión (x_{n_k}) convergente (teorema 3.39 de Bolzano-Weierstrass para sucesiones) a un punto c que está en $[a, b]$ (Proposición 3.19). Como

$$0 \leq |y_{n_k} - c| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - c| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - c|,$$

resulta que también (y_{n_k}) converge a c. Tenemos así dos sucesiones de puntos de I que convergen a un mismo punto $c \in I$ y entonces las sucesiones $(f(x_{n_k}))$ y $(f(y_{n_k}))$ deben converger $f(c)$ por ser f continua. Pero entonces la sucesión $(f(y_{n_k}) - f(x_{n_k}))$ tiene que converger a 0 lo que es imposible al ser $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. □

Funciones de Lipschitz (Rudolph O. Lipschitz. Alemania, 1832-1903).

Definición 4.57 *Se dice que $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de Lipschitz, o función lipschitziana, si existe un número real $K > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \textit{ para todo } x, y \in S.$$

Las funciones con esta condición son uniformemente continuas como prueba la siguiente proposición.

Proposición 4.58 *Toda función lipschitziana $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua en S.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ basta considerar $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ para tener que

$$|f(x) - f(y)| < K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon \text{ para todo } x, y \in S,\ |x - y| < \delta.$$

□

Nota 4.59 *No todas las funciones uniformemente continuas son funciones lipschitzianas. Por ejemplo, la función $f(x) = \sqrt{x}$ definida en $I = [0, 2]$ es continua en ese intervalo cerrado y acotado y por lo tanto es uniformemente continua en él por el teorema de continuidad uniforme, sin embargo no hay ningún número real $K > 0$ tal que $\sqrt{x} \leq Kx$ para todo $x \in I$. En efecto, fijado $K > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$, tal que el punto $x = \frac{1}{NK^2} \in [0, 2]$ y no verifica esa desigualdad, pues*

$$\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{N}K} > \frac{1}{NK} = K\frac{1}{NK^2} = Kx.$$

Funciones monótonas

Las funciones monótonas tienen un buen comportamiento respecto a la continuidad, las definimos a continuación.

Definición 4.60 *Sea $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que:*

1. f es **creciente** si $f(x) \leq f(y)$ para todo $x, y \in S$, $x \leq y$.
2. f es **estrictamente creciente** si $f(x) < f(y)$ para todo $x, y \in S$, $x < y$.
3. f es **decreciente** si $f(x) \geq f(y)$ para todo $x, y \in S$, $x \leq y$.
4. f es **estrictamente decreciente** si $f(x) > f(y)$ para todo $x, y \in S$, $x < y$.
5. Si f es creciente o decreciente se dice que es **monótona**.
6. Si f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente se dice que es **estrictamente monótona**.

Nota 4.61 *Cuando una función f es decreciente, o estrictamente decreciente, la función $-f$ es creciente o estrictamente creciente respectivamente. Por eso trabajaremos normalmente con funciones monótonas, o estrictamente monótomas, crecientes. Los resultados correspondientes para el caso decreciente se obtienen usando ese hecho.*

Nota 4.62 *No todas las funciones monótonas son continuas. Por ejemplo la función s definida por*

$$s(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in [0, 1) \\ 2 & si\ x \in [1, 2] \end{cases}$$

es monótona y no es continua en el punto 1. Sin embargo ocurrirá siempre que las funciones monótonas en un intervalo tienen límites laterales en todos los puntos salvo quizá en los extremos. Esto es lo que prueba la siguiente proposición.

Proposición 4.63 *Sea I un intervalo y sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función creciente. Entonces para todo $c \in I$ que no sea uno de sus extremos se verifica que existen los límites laterales de f en c y además:*

1. $\lim_{x \to c^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I,\ x < c\}$
2. $\lim_{x \to c^+} f(x) = inf\{f(x) : x \in I,\ x > c\}$.

Obsérvese que como c no es un extremo del intervalo existe $r_c > 0$ tal que $(c - r_c, c + r_c) \subset I$ y entonces c es un punto de acumulación de $(-\infty, c) \bigcap I$ y de $I \bigcap (c, +\infty)$.

Demostración. Observamos en primer lugar que al ser f creciente, para todo $c \in I$ que no sea el extremo inferior de I, se verifica que $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in I$, $x < c$. Entonces $\{f(x) : x \in I,\ x < c\}$ es un conjunto no vacío (c no es el extremo inferior del intervalo) acotado superiormente por $f(c)$ y por lo tanto tiene un supremo (axioma del supremo) $L \leq f(c)$. Veamos como existe el $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ y éste es L.

Dado $\varepsilon > 0$ sabemos que $L - \varepsilon$ no es cota superior de $\{f(x) : x \in I,\ x < c\}$, entonces existe $x_\varepsilon \in I$, $x_\varepsilon < c$, tal que $L - \varepsilon < f(x_\varepsilon)$. Al ser f creciente se tiene que para todo $x \in (x_\varepsilon, c)$ se verifica que $f(x_\varepsilon) \leq f(x)$, luego

$$L - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq L < L + \varepsilon \quad \text{para todo } x \in (x_\varepsilon, c).$$

Así, si hacemos $\delta = c - x_\varepsilon$, tenemos que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ para todo } x \in (c - \delta, c)$$

lo que nos da que f tiene límite por la izquierda en c y que su valor es L.

El caso del límite por la derecha es análogo al anterior. □

Definición 4.64 *Si I es un intervalo, $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función creciente y $c \in I$ no es ninguno de los extremos de I, se define el* ***salto de f en*** *c como*

$$S_f(c) = \inf\{f(x) : x \in I,\ x > c\} - \sup\{f(x) : x \in I,\ x < c\}.$$

Obsérvese que al ser la función creciente el valor del salto siempre es mayor o igual que 0 y que $\sup\{f(x) : x \in I,\ x < c\} \leq f(c) \leq \inf\{f(x) : x \in I,\ x > c\}$.

Cuando el extremo inferior a de I pertenece a I se define el salto de f en a como

$$S_f(a) = \inf\{f(x) : x \in I,\ x > a\} - f(a) \geq 0$$

y cuando el extremo superior b de I pertenece a I se define el salto de f en b como

$$S_f(b) = f(b) - \sup\{f(x) : x \in I,\ x < b\} \geq 0.$$

Proposición 4.65 *Sean I un intervalo y $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función creciente. Entonces, para todo punto $c \in I$ sucede que f es continua en c si y sólo si el salto de f en c es 0.*

Demostración. Recordamos que, por definición, f es continua en un punto $c \in I$ si y sólo si f tiene límite en el punto c y su valor es $f(c)$. Ahora bien, existe el límite de f en c si y sólo si existen los límites laterales en ese punto y coinciden con $f(c)$ (si c es el extremo inferior, el límite de f en c coincide con su límite por la derecha, y si c es el extremo superior el límite de f en c coincide con su límite por la izquierda).

"$\Longrightarrow$" Si f es continua en c existen los límites laterales de f en c y coinciden, pero

$$\begin{aligned} S_f(c) &= \acute{\imath}nf\{f(x) : x \in I,\ x > c\} - \sup\{f(x) : x \in I,\ x < c\} \\ &= \lim_{x \to c^+} f(x) - \lim_{x \to c^-} f(x) \end{aligned}$$

y entonces $S_f(c) = 0$.

"$\Longleftarrow$" Si $S_f(c) = 0$ los límites laterales, que siempre existen para las funciones monótonas, coinciden, luego hay límite en c. Como

$$f(c) \leq \lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) \leq f(c),$$

necesariamente $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. $\square$

Nota 4.66 *Puede darse también la definición de salto para funciones decrecientes y también en ese caso se verifica un resultado análogo al de la proposición anterior.*

Nota 4.67 *Hemos visto anteriormente que la función de Dirichlet:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es racional} \end{cases}$$

no es continua en ningún $c \in \mathbb{R}$. El teorema que sigue demuestra que este hecho no podría haber ocurrido si la función fuese monótona.

Teorema 4.68 *Sea $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ una función monótona. Entonces el conjunto D de puntos de discontinuidad de f en I es vacío o numerable (es decir, existe una aplicación inyectiva entre él y $\mathbb{N}$).*

Demostración. Supongamos que f es creciente (si fuese decreciente se trabajaría con $-f$). Según la proposición anterior $D = \{x \in I : S_f(x) > 0\}$. Por cada elección de una cantidad finita $x_1, x_2, ..., x_n$ de puntos de I tales que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ resulta que

$$S_f(x_1) + S_f(x_2) + \cdots + S_f(x_n) \leq f(b) - f(a).$$

En efecto, si $x_1 = a$,

$$S_f(x_1) = \acute{\imath}nf\{f(x) : x \in I,\ x > x_1\} - f(a)$$

y si $a < x_1$,

$$S_f(x_1) = \acute{\imath}nf\{f(x) : x \in I,\ x > x_1\} - \sup\{f(x) : x \in I,\ x < x_1\}.$$

En cualquier caso

$$S_f(x_1) \leq \sup\{f(x) : x \in I,\ x < x_2\} - f(a).$$

$$\begin{aligned} S_f(x_2) &= ínf\{f(x) : x \in I,\ x > x_2\} - \sup\{f(x) : x \in I,\ x < x_2\} \\ &\leq \sup\{f(x) : x \in I,\ x < x_3\} - \sup\{f(x) : x \in I,\ x < x_2\} \end{aligned}$$

$$\cdots \leq \cdots$$

$$\begin{aligned} S_f(x_{n-1}) &= ínf\{f(x) : x \in I,\ x > x_{n-1}\} - \sup\{f(x) : x \in I,\ x < x_{n-1}\} \\ &\leq \sup\{f(x) : x \in I,\ x < x_n\} - \sup\{f(x) : x \in I,\ x < x_{n-1}\}. \end{aligned}$$

Si $x_n < b$,

$$S_f(x_n) = ínf\{f(x) : x \in I,\ x > x_n\} - \sup\{f(x) : x \in I,\ x < x_n\}$$

Si $x_n = b$,

$$S_f(x_n) = f(b) - \sup\{f(x) : x \in I,\ x < x_n\}.$$

En cualquier caso

$$S_f(x_n) \leq f(b) - \sup\{f(x) : x \in I,\ x < x_n\}.$$

Sumando obtenemos que

$$S_f(x_1) + \cdots + S_f(x_n) \leq f(b) - f(a).$$

□

Luego, sea cual sea $n \in \mathbb{N}$, la suma $S_f(x_1) + \cdots + S_f(x_n)$ está acotada superiormente por $f(b) - f(a)$. De ello se deduce que:

1. Sea D_1 el conjunto de los puntos de I en los que f tiene un salto mayor o igual que $f(b) - f(a)$. Nótese que hay a lo sumo un punto de I en el que el salto es $f(b) - f(a)$

2. Sea D_2 el conjunto de los puntos de I en los que f tiene un salto mayor o igual que $\frac{f(b)-f(a)}{2}$. Nótese que hay a lo sumo dos puntos de I en los que el salto es mayor o igual que $\frac{f(b)-f(a)}{2}$.

3. Sea D_3 el conjunto de los puntos de I en los que f tiene un salto mayor o igual que $\frac{f(b)-f(a)}{3}$. Nótese que hay a lo sumo tres puntos de I en los que el salto es mayor o igual que $\frac{f(b)-f(a)}{3}$.

4. Etc.

Veamos como $D = \cup_{n=1}^{\infty} D_n$, lo que prueba que D es a lo sumo numerable al ser unión numerable de conjuntos finitos. Dado $x \in D$ sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $S_f(x) \geq \frac{f(b)-f(a)}{n}$ (téngase en cuenta que $S_f(x) > 0$), entonces $x \in D_n$.

Corolario 4.69 *Toda aplicación monótona $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifique la igualdad*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

es uniformemente continua.

En efecto, por ser f monótona es continua en algún punto c (por el teorema anterior, el conjunto de puntos donde no es continua no es todo $\mathbb{R}$, es apenas un conjunto numerable). Dado $\varepsilon > 0$ sea $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ para todo $x \in (c-\delta, c+\delta)$. Sean $x,\ y \in \mathbb{R}$ tales que $|x-y| < \delta$. Entonces

$$f(x) - f(y) = f(x-y+c) - f(c).$$

Para obtener esto téngase en cuenta que dado que $0 = f(0) = f(y-y) = f(y) + f(-y)$ resulta que $f(-y) = -f(y)$. Como $|(x-y+c) - c| = |x-y| < \delta$, se tiene que

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

4.8. Funciones inversas continuas

Recordamos que una función tiene inversa (para la composición) si y sólo si es inyectiva (esa inversa estará definida en la imagen del conjunto por la función). Las funciones estrictamente monótonas son inyectivas, luego tiene inversas. El siguiente teorema muestra una particularidad de estas funciones en relación con la continuidad de su inversa.

Teorema 4.70 (de continuidad de la inversa) *Sean I un intervalo y f una aplicación estrictamente monótona y continua. Entonces la función inversa f^{-1} de f es también estrictamente monótona (del mismo tipo que la f) y continua en $f(I)$.*

Demostración. Supondremos que f es estrictamente creciente, el caso decreciente se obtiene trabajando con $-f$. Hemos de probar entonces que f^{-1} es estrictamente creciente y continua. Veamos primero como es estrictamente creciente. Sean y_1 e $y_2 \in f(I)$, $y_1 < y_2$, y sean x_1 y $x_2 \in I$ tales que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ (estos puntos son únicos y distintos por la inyectividad de f) . Vamos a ver que $f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$. Si $x_1 \geq x_2$ entonces, al ser f creciente (incluso estrictamente) se tendría que $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$ en contra del hecho de que $y_1 < y_2$.

Veamos la continuidad de f^{-1} en un punto $f(c)$ (siendo $c \in I$). Supongamos en primer lugar que c no es un extremo del intervalo I. Entonces existe $r > 0$ tal que $[c-r, c+r] \subset I$. Consideremos un $\varepsilon > 0$ arbitrario, pero que sea menor que r, y sea

$$\delta = \textit{mín}\{f(c) - f(c-\varepsilon), f(c+\varepsilon) - f(c)\}$$

(téngase en cuenta que al ser f estrictamente creciente los números a los que le calculamos el mínimo son mayores que 0). Al ser f creciente y continua, $(f(c)-\delta, f(c)+\delta) \subset f(I)$. Sea $y \in (f(c)-\delta, f(c)+\delta)$, entonces, como

$$\delta \leq f(c) - f(c-\varepsilon) \text{ y también } \delta \leq f(c+\varepsilon) - f(c),$$

resulta que

$$f(c-\varepsilon) \leq f(c) - \delta < y < f(c) + \delta \leq f(c+\varepsilon)$$

Aplicando f^{-1} en la cadena de desigualdades anterior, teniendo en cuenta que f^{-1} es estrictamente creciente, obtenemos que

$$c - \varepsilon = f^{-1}(f(c)) - \varepsilon < f^{-1}(y) < c + \varepsilon = f^{-1}(f(c)) + \varepsilon,$$

de donde se sigue que $|f^{-1}(y) - f^{-1}(f(c))| < \varepsilon$.

Si c coincide con el extremo inferior de I se considera r tal que $[c, c+r] \subset I$ y $\delta = f(c+\varepsilon) - f(c)$, siendo $0 < \varepsilon < r$, y si c es el extremo superior de I entonces se considera r tal que $[c-r, c] \subset I$ y $\delta = f(c) - f(c-\varepsilon)$, siendo $0 < \varepsilon < r$. $\square$

La función potencia n-ésima

Dado un número natural n se llama función potencia n-ésima a la función $x \mapsto x^n$. Esta función está definida en todo $\mathbb{R}$ y es continua, pues es el producto de la identidad por si misma n veces. Veamos como es una función estrictamente creciente en $[0, +\infty)$, lo haremos por inducción en n. Si $k = 1$ no hay nada que probar. Sean x, $y \in [0, +\infty)$ tales que $x < y$. Supongamos que para un cierto k se verifica que $x^k < y^k$. Entonces

$$x^{k+1} = xx^k < xy^k < yy^k = y^{k+1}$$

y podemos concluir que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $x^n < y^n$.

Si $x < y \leq 0$ entonces $0 \leq -y < -x$ por lo que $(-y)^n < (-x)^n$. Si n es par $(-1)^n = 1$ y entonces $y^n < x^n$ por lo que $x \mapsto x^n$, con n par es estrictamente decreciente en $(-\infty, 0]$. Si n es impar $(-1)^n = -1$ y se tiene que $-y^n < -x^n$, esto es, $x^n < y^n$ y por lo tanto la función $x \mapsto x^n$, con n impar es estrictamente creciente en $(-\infty, 0]$ y por lo tanto en todo $\mathbb{R}$.

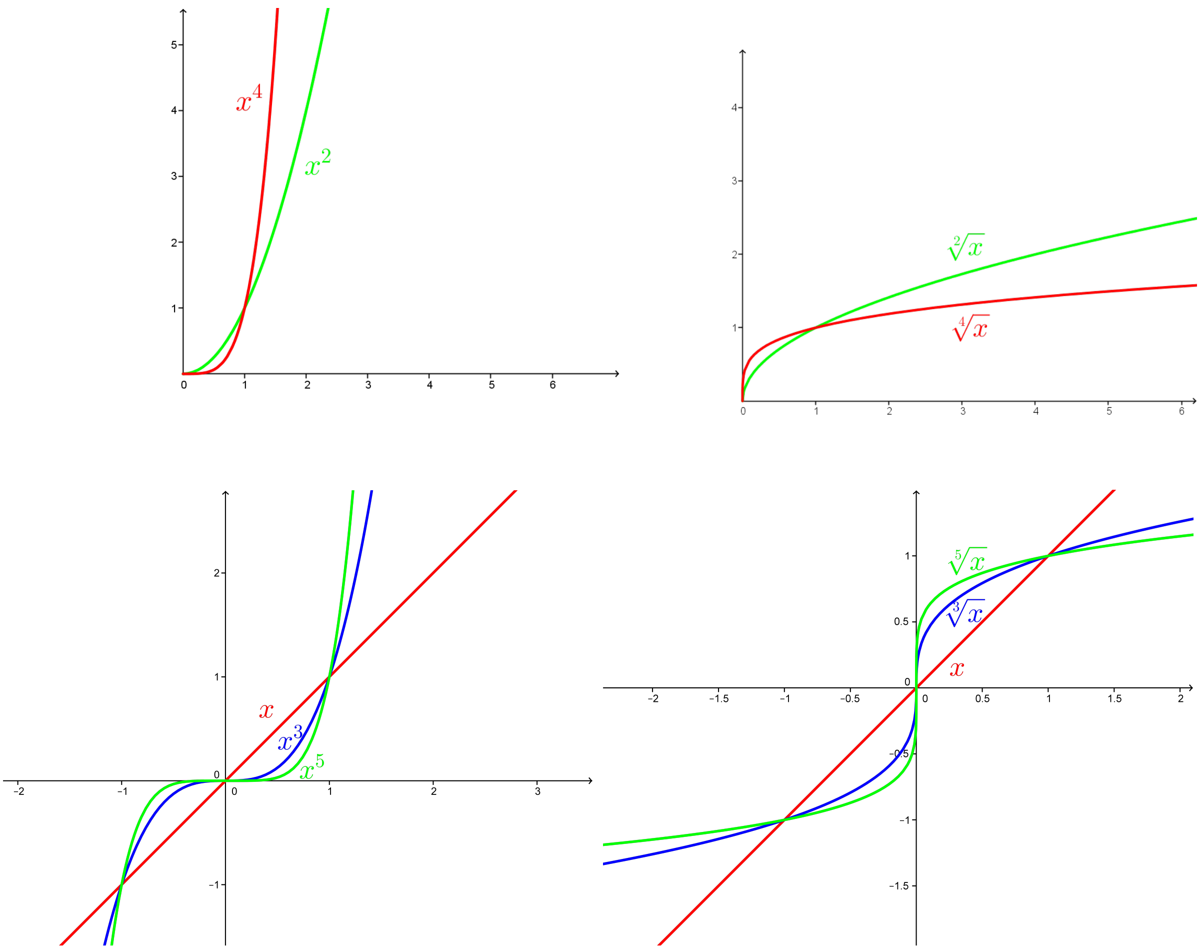
El rango de la función $x \mapsto x^n$ es $[0, +\infty)$ cuando n es par y es $\mathbb{R}$ cuando n es impar. Para ver esto obsérvese que cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $[0, +\infty) = \cup_{k=1}^{\infty}[0, k^n]$ y así, como la imagen de cada $[0, k]$ es $[0, k^n]$, pues en $[0, k]$ la función $x \to x^n$ alcanza los valores 0 y k^n y por lo tanto todos los valores intermedios (Teorema de Bolzano del valor intermedio), resulta que la imagen de $x \to x^n$ es todo el intervalo $[0, +\infty)$. Para ver que para n impar el rango de $x \to x^n$ es todo $\mathbb{R}$ puede usarse un argumento como el anterior teniendo en cuenta que $\mathbb{R} = \cup_{k=1}^{\infty} [-k^n, k^n]$.

La función raíz n-ésima

Se define la función raíz n-ésima como la función inversa (para la composición) de la función potencia n-ésima $x \mapsto x^n$. Tenemos que precisar en qué conjunto está definida esta función inversa dependiendo de si n es par o impar. Cuando n es par la función $x \mapsto x^n$ es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$ y su rango es $[0, +\infty)$, por lo tanto en este conjunto está definida la inversa y ésta es continua. Cuando n es impar la función $x \mapsto x^n$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y su rango es $\mathbb{R}$, por lo tanto tiene inversa continua en todo $\mathbb{R}$. La función inversa de $x \to x^n$ se denotará por $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ o por $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

Observamos que para todo $x \in [0, +\infty)$ y n par se verifica que $(x^n)^{\frac{1}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$ (por la definición de función inversa) y que $(xy)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}}$. Esto último es consecuencia de que $\left(x^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n \left(y^{\frac{1}{n}}\right)^n = xy$. Cuando n es impar se verifican las igualdades anteriores para todo $x \in \mathbb{R}$.

Las gráficas de las funciones $x \to x^n$ y sus inversas para $n = 2, 4$ y $n = 1, 3, 5$ son:



Potencias racionales

Para un número racional $\frac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{N}$ y $x \geq 0$ se define $x^{\frac{m}{n}}$ como $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$. Si n es impar también se define de la misma forma $x^{\frac{m}{n}}$ para $x < 0$. Se verifica que si $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ entonces $x^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{p}{q}}$ por lo que no hay ambigüedad en la definición de esa potencia. Además

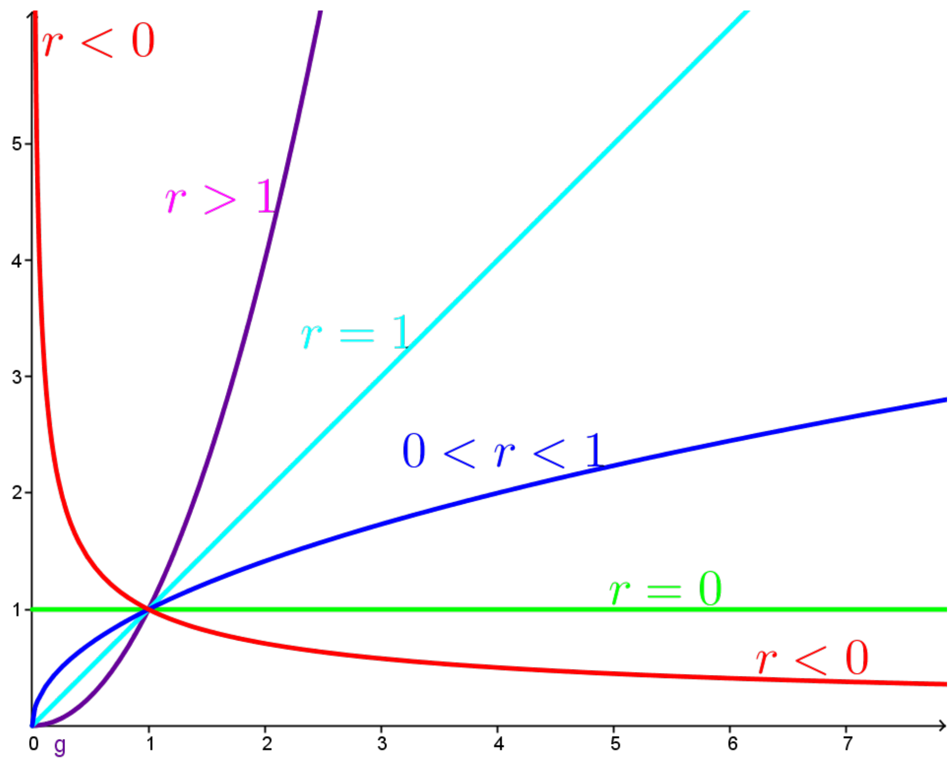
$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = (x^m)^{\frac{1}{n}}$$

y si $x > 0$ y $r, s \in \mathbb{Q}$ entonces

$$x^r x^s = x^{r+s} = x^s x^r \quad \text{y} \quad (x^r)^s = x^{rs} = (x^s)^r.$$

Para $x \neq 0$ se define $x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$ en las condiciones anteriores sobre m y n. Tenemos así definido x^r para todo número racional r, recordamos que hace tiempo se definió $x^0 = 1$.

Estas son las gráficas de $x \mapsto x^r$ para distintos valores de $r \in \mathbb{Q}$:



Capítulo 5

Derivación de funciones reales de variable real

Antes del s. XVII una curva era un conjunto de puntos que satisfacían una cierta condición geométrica. Por ejemplo, el conjunto de los puntos (x, y) del plano que verifican que $x^2+y^2 = 1$. Las tangentes a esas curvas en un punto se calculaban de forma geométrica. A partir de 1630, Descartes y Fermat crearon la llamada "Geometría Analítica" y las curvas se definen aquí a partir de esto de forma algebraica, por ejemplo $f(x) = x^3$ y surge el concepto de derivada, que como veremos está directamente relacionado con el concepto de tangente a una curva. Este concepto es fundamental en el estudio de las funciones reales de variable real. Conociendo la derivada de una función podremos conocer algunas propiedades de ella.

5.1. Funciones derivables

Definición 5.1 *Dados un intervalo I de $\mathbb{R}$, una función $f : I \to \mathbb{R}$ y un punto c un punto de I. Diremos que f es derivable en c si existe el límite del cociente*

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

cuando x tiende al punto c y es un número real. Esto es, f es derivable en c si y sólo si existe un número real, que denotaremos por $f'(c)$, tal que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad | \quad x \in I, \ x \neq c, \ |x - c| < \delta \implies \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| < \varepsilon.$$

Cuando f sea derivable en c se llamará ***tangente a la curva*** *$y = f(x)$ en $(c, f(c))$ a la recta que tiene pendiente $f'(c)$ y pasa por $(c, f(c))$. Ésta es la recta de ecuación $y = f'(c)(x - c) + f(c)$.*

Nota 5.2 *El concepto de derivada de una función en un punto de un intervalo puede extenderse a funciones definidas en algunos tipos de conjuntos que no sean intervalos, pero aquí trabajaremos sólo con funciones definidas en intervalos.*

Ejemplo 5.3 *Los primeros ejemplos más naturales de funciones derivables lo constituyen las funciones constantes. En efecto. Si $f : I \to \mathbb{R}$ es constante, esto es, si existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = d$ para todo $x \in I$, entonces para todo $c \in I$ y todo $x \neq c$,*

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{d - d}{x - c} = 0.$$

Otro ejemplo sencillo es la función $f(x) = x$. Vamos a comprobar que para todo $c \in \mathbb{R}$ existe el $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ y vale 1. En efecto

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{x - c}{x - c} = 1.$$

También $f(x) = x^2$ es derivable en todo punto. En este caso, para todo $c \in \mathbb{R}$ se verifica que $f'(c) = 2c$. En efecto

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{x^2 - c^2}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{(x - c)(x + c)}{x - c} = \lim_{x \to c} (x + c) = 2c.$$

La función $f : x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ es derivable en todos los puntos de ese conjunto y $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. En efecto, dados $c \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ y $x \neq c$ en el mismo intervalo que c se tiene que

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{c}}{x - c} = \frac{c - x}{(x - c)xc} = -\frac{1}{xc}$$

y esto tiende a $-\frac{1}{c^2}$ cuando x tiende a c.

Se verán más ejemplos más adelante. Vamos a ver ahora un ejemplo de una función no derivable en un punto.

Ejemplo 5.4 *La función $f(x) = |x|$ no es derivable en el punto 0. En efecto,*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

mientras que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Las funciones derivables en un punto son continuas en él. Esto es lo que demuestra la siguiente proposición.

Proposición 5.5 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto $c \in I$, entonces f es continua en c.*

Demostración. Tenemos que demostrar que existe el límite de f en el punto c y que éste es $f(c)$. Ahora bien, para $x \in I$, $x \neq c$ se verifica que

$$f(x) - f(c) = \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right)(x - c)$$

y entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \to c}(f(x) - f(c)) &= \lim_{x \to c}\left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right)\lim_{x \to c}(x - c) \\ &= f'(c)\lim_{x \to c}(x - c) = 0. \end{aligned}$$

Esto es, $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. □

Hemos visto anteriormente un ejemplo de una función continua en un punto que no es derivable en ese punto (la función $f(x) = |x|$. Pues bien, existen funciones continuas en un intervalo que no son derivables en ningún punto de él. Son ciertamente funciones muy raras, la primera de ellas fue definida por K. Weierstrass en 1872. En el Apéndice E de libro de Bartle y Sherbert se estudia una tal función.

En la siguiente proposición se obtienen propiedades básicas de las funciones derivables.

Proposición 5.6 *Sea I un intervalo y sean $c \in I$ y f y g dos funciones definidas en I ambas derivables en c. Entonces:*

(a) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ la función αf es derivable en c y $(\alpha f)'(c) = \alpha f'(c)$.

(a) La función $f + g$ es derivable en c y $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$

(c) La función fg es derivable en c y $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$

(d) Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ entonces la función $\frac{f}{g}$ es derivable en c y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}$$

Demostración.

(a)
$$\lim_{x \to c} \frac{(\alpha f)(x) - (\alpha f)(c)}{x - c} = \alpha \cdot \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

de donde se sigue αf es derivable en c y que $(\alpha f)'(c) = \alpha f'(c)$.

(b)

$$\begin{aligned}
\underset{x\to c}{lím}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(c)}{x-c} &= \underset{x\to c}{lím}\frac{f(x)+g(x)-(f(c)+g(c))}{x-c}\\
&= \underset{x\to c}{lím}\ \frac{f(x)-f(c)}{x-c}+\underset{x\to c}{lím}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}
\end{aligned}$$

lo que nos da que $f+g$ es derivable en c y que $(f+g)'(c)=f'(c)+g'(c)$.

(c)

$$\begin{aligned}
\underset{x\to c}{lím}\frac{(fg)(x)-(fg)(c)}{x-c} &= \underset{x\to c}{lím}\frac{f(x)g(x)-f(c)g(c)}{x-c}\\
&= \underset{x\to c}{lím}\frac{f(x)g(x)-f(c)g(x)+f(c)g(x)-f(c)g(c)}{x-c}\\
&= \underset{x\to c}{lím}\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}g(x)\right)+f(c)\underset{x\to c}{lím}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}\\
&= f'(c)g(c)+f(c)g'(c).
\end{aligned}$$

Téngase en cuenta que al ser g derivable en c es continua en ese punto y entonces $\underset{x\to c}{lím}g(x)=g(c)$.

(d)

$$\begin{aligned}
\underset{x\to c}{lím}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(c)}{x-c} &= \underset{x\to c}{lím}\frac{f(x)g(c)-f(c)g(x)}{g(x)g(c)(x-c)}\\
&= \underset{x\to c}{lím}\frac{f(x)g(c)-f(c)g(c)+f(c)g(c)-f(c)g(x)}{g(x)g(c)(x-c)}\\
&= \underset{x\to c}{lím}\left(\frac{1}{g(x)g(c)}\frac{f(x)-f(c)}{(x-c)}\right)g(c)\\
&\quad -\underset{x\to c}{lím}\left(\frac{1}{g(x)g(c)}\frac{g(x)-g(c)}{(x-c)}\right)f(c).
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que g es continua en c,

$$\underset{x\to c}{lím}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(c)}{x-c}=\frac{f'(c)g(c)-f(c)g'(c)}{(g(c))^2},$$

esto es $\frac{f}{g}$ es derivable en c y su derivada en ese punto es

$$\frac{f'(c)g(c)-f(c)g'(c)}{(g(c))^2}.$$

□

Observamos que si sólo sabemos que g es derivable en c y que $g(c) \neq 0$, entonces existe un intervalo $J \subset I$ tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in J$ (basta aplicar la Proposición 4.8), téngase en cuenta que g tiene límite en c y que éste vale $g(c)$). Podemos entonces dividir por $g(x)$ para los $x \in J$ y obtener igual la derivabilidad de $\frac{f}{g}$ en el punto c cuando f es derivable en c.

Corolario 5.7 *Dada una cantidad finita $f_1, f_2, ..., f_n$ de funciones definidas en un mismo intervalo I, todas ellas derivables en un punto $c \in I$ se verifica que:*

(a) $f_1+f_2+\cdots+f_n$ es derivable en c y $(f_1+f_2+\cdots+f_n)'(c) = f_1'(c)+f_2'(c)+\cdots+f_n'(c)$.

(b) $f_1 f_2 \cdots f_n$ es derivable en c y

$$\begin{aligned}(f_1 f_2 \cdots f_n)'(c) &= f_1'(c) f_2(c) \cdots f_n(c) \\ &\quad + f_1(c) f_2'(c) \cdots f_n(c) \\ &\quad \ldots \\ &\quad + f_1(c) f_2(c) \cdots f_n'(c).\end{aligned}$$

Si en particular consideramos $f_1 = f_2 = \cdots = f_n$ en (b) y llamamos f a esa función, obtenemos que

$$(f^n)'(c) = n f'(c)(f(c))^{n-1}.$$

La demostración de este corolario se sigue fácilmente por inducción a partir de la proposición anterior.

Nota 5.8 *Cuando una función $f : I \to \mathbb{R}$ es derivable en todos los puntos de I tiene sentido considerar la función derivada f' que asigna a cada $c \in I$ el número real $f'(c)$. En algunos libros se usan notaciones diferentes a la nuestra para la derivada f' de una función f. Concretamente, algunos autores escriben Df o $\frac{df}{dx}$ en lugar de f', y escriben $Df(c)$ o $\frac{df}{dx}(c)$ en lugar de $f'(c)$. Esta última notación es muy antigua (es debida a Leibniz, matemático alemán, 1646-1716) y es un poco confusa para funciones de una variable como las nuestras. Indica que se deriva la función f respecto a la variable x (no hay otra).*

Cuando estudiamos las funciones continuas consideramos el caso de la composición de dos funciones continuas y vimos que esa composición es continua. Vamos a ver ahora como la composición de dos funciones derivables es también derivable. Para demostrar este resultado probaremos primero un resultado auxiliar que es una caracterización de la derivabilidad de una función en un punto.

Proposición 5.9 (Teorema de Carathéodory) *Sea f una función definida en un intervalo I y sea c un punto de I. Entonces, f es derivable en c si y sólo si existe una función $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continua en c tal que*

$$f(x) - f(c) = \varphi(x)(x - c) \qquad \forall x \in I.$$

Se verifica además que $\varphi(c) = f'(c)$.

Demostración. Supongamos que f es derivable en c, entonces la función φ definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} & \text{si } x \in I,\, x \neq c \\ f'(c) & \text{si } x = c. \end{cases}$$

La función φ es continua c, pues por ser f derivable en c se tiene que

$$\lim_{x\to c} \varphi(x) = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) = \varphi(c).$$

Supongamos ahora que existe una función φ definida en I continua en c verificando las condiciones del enunciado. Entonces

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x\to c} \varphi(x) = \varphi(c).$$

Por lo tanto f es derivable en c y $f'(c) = \varphi(c)$. □

Con ayuda de la proposición anterior podemos probar, por ejemplo, que la función $f(x) = x^3$ es derivable en cualquier punto c y que $f'(c) = 3c^2$. En efecto dado $c \in \mathbb{R}$,

$$x^3 - c^3 = (x^2 + cx + c^2)(x - c) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como la función $\varphi(x) = x^2 + cx + c^2$ es continua en $\mathbb{R}$, el teorema de Carathéodory nos da que f es derivable en c y que

$$f'(c) = \varphi(c) = c^2 + cc + c^2 = 3c^2.$$

Recordamos que si tenemos dos funciones g y f definidas en sendos intervalos I y J, de forma que $f(J) \subset I$, entonces $g \circ f$ es la función definida en J por la expresión $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Respecto a la derivabilidad de la función composición se tiene el siguiente resultado conocido como la “Regla de la cadena”.

Teorema 5.10 (Regla de la cadena) *Sean $f : J \to \mathbb{R}$ una función derivable en un punto $c \in J$ y sean I un intervalo tal que $f(J) \subset I$ y sea $g : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en el punto $f(c)$. Entonces $g \circ f$ es derivable en c y se verifica que*

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c).$$

Demostración. Dado que f es derivable en c el teorema de Carathéodory nos garantiza la existencia de una función $\varphi : J \to \mathbb{R}$ continua en c tal que

$$f(x) - f(c) = \varphi(x)(x - c) \quad \forall x \in J$$

y $\varphi(c) = f'(c)$. Si aplicamos de nuevo el teorema de Carathéodory, ahora a la función g en relación con el punto $f(c)$ obtenemos que existe una función $\psi : I \to \mathbb{R}$ continua en $f(c)$ tal que

$$g(y) - g(f(c)) = \psi(y)(y - f(c)) \quad \forall y \in I$$

y $\psi(f(c)) = g'(f(c))$. Sustituyendo en esta última igualdad y por $f(x)$ y luego $f(x) - f(c)$ por $\varphi(x)(x - c)$ se obtiene que

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) - (g \circ f)(c) &= \psi(f(x))(f(x) - f(c)) \\ &= \psi(f(x))\varphi(x)(x - c) \quad \forall x \in J.\end{aligned}$$

Ahora bien, la función $x \in J \mapsto \psi(f(x))\varphi(x) = (\psi \circ f)(x)\varphi(x)$ es continua en c, entonces el teorema de Carathéodory nos garantiza que $g \circ f$ es derivable en c y que

$$(g \circ f)'(c) = \psi(f(c))\varphi(c) = g'(f(c))f'(c).$$

□

De lo anterior podemos deducir fácilmente la derivabilidad de un cociente de funciones en las hipótesis (d) de la Proposición 5.6 pues si definimos $h(y) = \frac{1}{y}$ para $y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ hemos visto anteriormente que $h'(d) = -\frac{1}{d^2}$ para todo $d \neq 0$ y entonces

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(c) &= ((h \circ g)f)'(c) = (h \circ g)'(c)f(c) + (h \circ g)(c)f'(c) \\ &= h'(g(c))g'(c)f(c) + h(g(c))f'(c) \\ &= -\frac{1}{(g(c))^2}g'(c)f(c) + \frac{1}{g(c)}f'(c) \\ &= \frac{f'(c)g(c) - g'(c)f(c)}{(g(c))^2}.\end{aligned}$$

5.2. Funciones inversas derivables

En esta sección vamos a estudiar la derivabilidad de la función inversa (para la composición). Se tiene el siguiente teorema.

Teorema 5.11 (derivabilidad de la inversa) *Sea $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ estrictamente monótona y continua en I, sea $J = f(I)$ y sea $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ la función (estrictamente monótona y continua, Teorema 4.70) inversa de f definida en J. Entonces, si f es derivable en un punto $c \in I$ y $f'(c) \neq 0$ resulta que f^{-1} es derivable en $f(c)$ y se verifica que*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}.$$

Demostración. Supondremos que f es estrictamente creciente, si fuese estrictamente decreciente se consigue el resultado trabajando con $-f$. Por el teorema de Carathéodory existe una función φ en I continua en c tal que

$$f(x) - f(c) = \varphi(x)(x - c) \text{ para todo } x \in I$$

y $\varphi(c) = f'(c)$. Dado que $\varphi(c) \neq 0$ existe $\delta > 0$ tal que $[c - \delta, c + \delta] \subset I$ y $\varphi(x) \neq 0$ siempre que $x \in [c - \delta, c + \delta]$ si $c \neq a, b$; si $c = a$ se considera el intervalo $[c, c + \delta]$ y si $c = b$ se considera el intervalo $[c - \delta, c]$. Denotemos por K al intervalo $[f(c - \delta), f(c + \delta)]$, o a $[f(c), f(c + \delta)]$ o $[f(c - \delta), f(c)]$ según corresponda, nótese que al ser f estrictamente creciente K no consta sólo del punto $f(c)$. Entonces, para todo $y \in K$ se verifica que $f^{-1}(y) \in I$ y en consecuencia

$$y - f(c) = f(f^{-1}(y)) - f(c) = \varphi(f^{-1}(y))(f^{-1}(y) - c)).$$

Dado que $\varphi(f^{-1}(y)) \neq 0$ para todo $y \in K$ se obtiene de la anterior igualdad que

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(f(c)) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}(y - f(c)).$$

Como la función $y \in K \mapsto \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}$ es continua en $f(c)$, el teorema de Carathéodory nos dice que f^{-1} es derivable en $f(c)$ y que

$$\left(f^{-1}\right)'(f(c)) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(f(c)))} = \frac{1}{\varphi(c)} = \frac{1}{f'(c)}.$$

□

Ejemplo 5.12 *Consideremos la función*

$$f(x) = x^5 + 4x + 3.$$

Se trata de una función estrictamente creciente en $I = \mathbb{R}$ (es suma de funciones estrictamente crecientes). Como $f'(x) = 5x^4 + 4$ es siempre distinta de cero. Entonces su inversa, definida en $f(I) = \mathbb{R}$, es derivable en todo punto de $\mathbb{R}$ y para cada $y = f(x) \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Por ejemplo,

$$\left(f^{-1}\right)'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{9}.$$

Ejemplo 5.13 *Si* $I = (0, +\infty)$ *y* $f(x) = x^n$ *(siendo* n *un número natural prefijado), sabemos que* f *es estrictamente creciente, derivable en* I *y* $f'(c) \neq 0$ *para todo* $c \in (0, +\infty)$. *Entonces su inversa, definida en* $f(I) = (0, +\infty)$, *que es la función* $f^{-1} : y \in (0, +\infty) \mapsto \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$, *verifica que*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{n(f^{-1}(y))^{n-1}} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{y}\right)^{n-1}} = \frac{1}{ny^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} y^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}.$$

Observamos que la técnica para obtener la derivada de $y \in (0, +\infty) \mapsto \sqrt[n]{y} := y^{\frac{1}{n}}$ *es la misma que para calcular la de* $y \in (0, +\infty) \mapsto y^n$*: Se multiplica por el exponente y se resta una unidad al exponente.*

Ejemplo 5.14 *Para* $n \in \mathbb{N}$, n *impar,* $n \neq 1$, *la inversa de la función* $x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$ *es derivable en todo punto distinto del* 0, *y la derivada de esta inversa* $(f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{n}})$ *es la función* $y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \mapsto \frac{1}{n} y^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}$. *Nótese que al ser* n *impar la función* $x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$ *es también estrictamente creciente en* $(-\infty, 0)$ *y la derivada de su inversa en los puntos de ese intervalo también es* $y \in (-\infty, 0) \mapsto \frac{1}{n} y^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}$.

Esta función inversa f^{-1} no es derivable en el 0 pues

$$\frac{y^{\frac{1}{n}} - 0^{\frac{1}{n}}}{y - 0} = y^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}$$

y como $\frac{1}{n} - 1 < 0$ el $\lim\limits_{y \to 0^+} y^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} = +\infty$ y entonces el cociente no tiene límite finito.

Ejemplo 5.15 *Si* r *es un número racional,* $r = \frac{m}{n}$, *entonces la función* $R : x \longmapsto x^r$, *definida en* $(0, +\infty)$ *si* n *es par y definida en* $\mathbb{R}$ *si* n *es impar, es la composición de las funciones* $g : x \longmapsto x^{\frac{1}{n}}$ *y* $f : y \longmapsto y^m$. *Entonces, para* $x \in (0, +\infty)$ *si* n *es par y para* $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ *si* n *es impar, se verifica que,*

$$\begin{aligned}
R'(x) &= (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \\
&= m(g(x))^{m-1} g'(x) \\
&= m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1} \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \\
&= \frac{m}{n} x^{\frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} - 1} \\
&= \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} = r x^{r-1}.
\end{aligned}$$

5.3. El teorema del valor medio

Este teorema relacionará la diferencia de los valores de una función en los extremos de su intervalo de definición con los de su derivada en un punto intermedio. Introducimos primero el concepto de extremo relativo de una función.

(a) Se dice que un punto c de un intervalo I es un **máximo relativo** (o **local**) de una función $f : I \to \mathbb{R}$ si existe $\delta > 0$ tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in (c-\delta, c+\delta) \cap I$.

(b) Se dice que un punto c de un intervalo I es un **mínimo relativo** (o **local**) de una función $f : I \to \mathbb{R}$ si existe $\delta > 0$ tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in (c-\delta, c+\delta) \cap I$.

(c) En cualquiera de los casos anteriores se dice que f tiene un **extremo relativo** en c.

Nota 5.16 *Debe observarse que si f tiene un máximo o un mínimo absolutos en un punto entonces también tiene un máximo o un mínimo relativos, respectivamente, en ese punto, y que una función puede tener varios extremos relativos e incluso absolutos.*

Teorema 5.17 *Si c es un punto interior de un intervalo I (esto es, c no es ninguno de los extremos del intervalo) y una función $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en c tiene un extremo relativo en ese punto, entonces $f'(c) = 0$.*

Demostración. Supondremos que el extremo relativo que tiene f en c es un máximo, en el caso de que se trate de un mínimo el razonamiento es análogo, también puede obtenerse el resultado considerando al función $-f$.

Como f es derivable en c existe

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

y por lo tanto existen

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

y coinciden. Consideremos un $\delta > 0$ tal que $(c - \delta, c + \delta) \subset I$ y $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in (c - \delta, c + \delta)$. Para todo $x \in (c - \delta, c)$ se verifica que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0,$$

luego

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Por otra parte si $x \in (c, c+\delta)$
$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0,$$
luego
$$\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0.$$
Como el límite por la derecha y por la izquierda coinciden, necesariamente ese valor común tiene que ser 0. $\square$

Nota 5.18 *La función $x \mapsto |x|$ tiene mínimo en 0 pero no es derivable en ese punto. La función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$, tiene un máximo, incluso absoluto, en $c = 1$ y $f'(c) = 1$. Debe observarse que el punto 1 no es un punto interior de $[0,1]$.*

El siguiente teorema, debido al matemático francés M. Rolle (1652-1719), nos ayuda a localizar los posibles extremos de una función derivable.

Teorema 5.19 (de Rolle) *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(b) = f(a) = 0$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demostración. Si f es idénticamente nula en $[a,b]$ entonces cualquier $c \in (a,b)$ verifica que $f'(c) = 0$. Supongamos entonces que f no es idénticamente nula en $[a,b]$ y supongamos también que f toma algún valor mayor que 0, si no sucediese esto trabajamos con $-f$. Por el teorema 4.48 la función continua f alcanza el valor del $\sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$ que necesariamente es mayor que 0. Esto es, existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Un tal punto c tiene que ser diferente de a y de b pues $f(a) = f(b) = 0$. El teorema anterior nos dice que $f'(c) = 0$ pues f tienen un máximo en c, incluso absoluto. $\square$

Como consecuencia del teorema anterior deducimos ahora un teorema que es fundamental en el Cálculo Diferencial, que es lo que estamos estudiando ahora y que tiene infinidad de aplicaciones.

Teorema 5.20 (del valor medio del Cálculo Diferencial) *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que*
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Demostración. Consideremos la función $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por
$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Esta función φ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) siendo $\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Sucede que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ y entonces, por el teorema de Rolle, existe $c \in (a,b)$ tal que $\varphi'(c) = 0$ lo que nos da que

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0,$$

esto es,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

□

A continuación vamos a obtener unas interesantes consecuencias del teorema anterior.

Proposición 5.21 *Si $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en I, derivable en (a,b) y $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es constante en I.*

Demostración. Fijemos un $x \in (a,b]$ y apliquemos el teorema del valor medio a f con relación al intervalo $[a,x]$, obtenemos la existencia de un punto $c \in (a,x)$ tal que

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x-a).$$

Dado que $f'(c) = 0$ resulta que $f(x) = f(a)$. Como esto ocurre para todo $x \in (a,b]$ resulta que $f(x) = f(a)$ para todo $x \in (a,b]$ y desde luego para todo $x \in [a,b]$. □

Corolario 5.22 *Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo $[a,b]$, derivables en (a,b) y tales que $f'(x) = g'(x)$. Entonces existe un número real C tal que $f(x) = g(x) + C$ para todo $x \in I$.*

Demostración. Si consideramos la función $h = f - g$. Esta función es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y además $h'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$. Por la proposición existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $h(x) = C$ para todo $x \in I$. Esto nos da que $f(x) = g(x) + C$ para todo $x \in I$. □

Ahora vamos a utilizar de nuevo el teorema del valor medio, en este caso para caracterizar la monotonía de las funciones derivables.

Proposición 5.23 *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en un intervalo I. Entonces*

(a) f es monótona creciente si y sólo si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.

(b) f es monótona decreciente si y sólo si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$.

Demostración.

(a) Fijemos un punto $x \in I$, y por cada $y \in I$, $y \neq x$, consideremos la expresión

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Sabemos que esta expresión tiene límite cuando y tiende a x (que es precisamente $f'(x)$). Ahora bien, si consideramos sólo valores de $y > x$ cuando x no es el extremo derecho de I o sólo valores $y < x$ si x es el extremo derecho de I, las diferencias $y - x$ y $f(y) - f(x)$ son del mismo signo, luego el límite del anterior cociente en x por la derecha, o por la izquierda si x es el extremo derecho de I, es mayor o igual que 0 y como hay límite, estos valores coinciden con él y es por lo tanto mayor o igual que 0.

Recíprocamente. Consideremos puntos $x < y$ en I. Apliquemos el teorema del valor medio a f en el intervalo $[x, y]$. Obtenemos la existencia de un punto $c \in (x, y)$ tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Dado que $f'(c) \geq 0$ resulta que $f(y) - f(x) \geq 0$ y por lo tanto $f(y) \geq f(x)$.

Obsérvese que no se necesita que $f'(x) \geq 0$ en los extremos del intervalo, en el caso en el que alguno de ellos pertenezca a él, para obtener la monotonía de la función.

(b) Se obtiene aplicando (a) a la función $-f$.

□

Nota 5.24 *No se puede obtener un resultado similar para funciones estrictamente monótonas cambiando las desigualdades por desigualdades estrictas, pues, por ejemplo, $f(x) = x^3$ es estrictamente monótona y sin embargo $f'(0) = 0$. No obstante, sí es cierto que cuando la derivada es siempre mayor que 0 la función es estrictamente creciente y que cuando la derivada es siempre menor que 0 la función es estrictamente decreciente. Esto se sigue directamente del teorema del valor medio:*

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$$

Esta igualdad es válida para todo x, y, para un cierto c que depende de x e y. Si $x < y$ y $f'(c) > 0$, necesariamente $f(y) > f(x)$ y si $f'(c) < 0$, necesariamente $f(y) < f(x)$.

La siguiente proposición puede considerarse como un test para intentar ver si un cierto punto es un extremo relativo.

Proposición 5.25 (Test de la primera derivada para extremos) *Sea f una función continua en un intervalo (a,b) y sea $c \in (a,b)$. Si f es derivable en (a,c) y en (c,b), entonces*

(a) Si existe $\delta > 0$ tal que $(c-\delta, c+\delta) \subset I$, $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (c-\delta, c)$ y $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (c, c+\delta)$, entonces f tiene un máximo relativo en c.

(b) Si existe $\delta > 0$ tal que $(c-\delta, c+\delta) \subset I$, $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (c-\delta, c)$ y $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (c, c+\delta)$, entonces f tiene un mínimo relativo en c.

Demostración.

(a) Fijemos arbitrariamente x en el intervalo $(c-\delta, c)$. Por el teorema del valor medio existe $d \in (x,c)$ tal que $f(c) - f(x) = f'(d)(c-x)$. Al ser $f'(d) \geq 0$ resulta que $f(x) \leq f(c)$ pues $c - x > 0$. Si ahora tomamos $x \in (c, c+\delta)$ de nuevo el teorema del valor medio nos garantiza la existencia de un punto $d \in (c,x)$ tal que $f(x) - f(c) = f'(d)(x-c)$. Como ahora $f'(d) \leq 0$ y $x - c > 0$ necesariamente $f(x) \leq f(c)$. Al ser $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in (c-\delta, c+\delta)$ hemos probado que f tiene un máximo local en c.

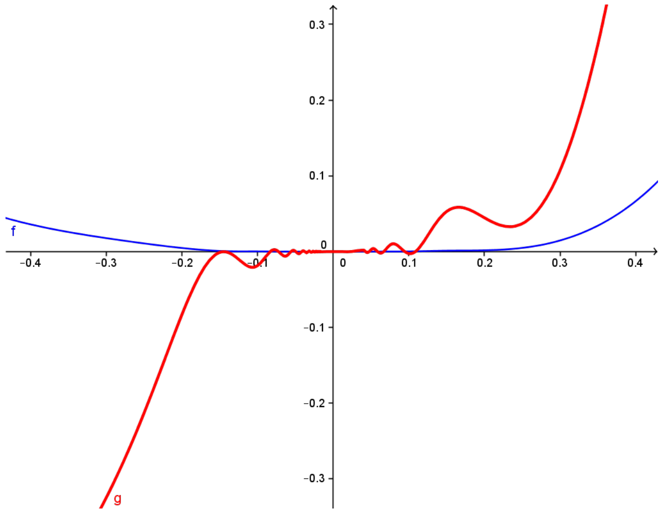
(b) La prueba en este caso se obtiene aplicando (a) a la función $-f$.

$\square$

Nota 5.26 *Observamos que la existencia de un extremo relativo en un punto c no garantiza que la derivada tenga a un lado de c un signo y el signo contrario al otro lado de c. En efecto, la función*

$$f(x) = \begin{cases} 2x^4 + x^4 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

tiene un mínimo, incluso absoluto, en 0 pues dado que la función sen *toma todos sus valores en el intervalo $[-1,1]$, siempre $2x^4 + x^4 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ es mayor que 0, para $x \neq 0$. Sea cual sea $\delta > 0$ existen puntos en $(-\delta, 0)$ en los que f' toma valores negativos y otros en los que toma valores positivos, lo mismo ocurre en $(0,\delta)$. Basta observar que $f'(x) = 8x^3 + 4x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x^2 \cos(\frac{1}{x})$, que para x de la forma $\frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, se verifica que $\operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$ y en esos puntos la función f' queda de la forma $f'(x) = x^2(8x - (-1)^k)$. Como $\frac{8}{k\pi} \to 0$ cuando $k \to \infty$ y $\left(\frac{1}{k\pi}\right)^2 > 0$ para todo k resulta que para puntos de la forma $\frac{1}{k\pi}$ con $|k| > 3$ el signo de f' es positivo si k es impar y negativo si k es par. Véanse las gráficas de f y f':*



Como aplicación del teorema del valor medio se obtiene ahora una generalización para potencias racionales de la desigualdad de Bernoulli que obtuvimos hace un tiempo (Proposición 1.23). El resultado es que para todo $r \in \mathbb{Q},\ r > 1$, entonces $(1+x)^r \geq 1+rx$ para todo $x > -1$. Veámoslo. Consideremos la función

$$f : x \in (-1, +\infty) \mapsto f(x) = (1+x)^r \in (0, +\infty).$$

Sabemos que esta función es derivable en todos los puntos x de $(-1, +\infty)$ y que $f'(x) = r(1+x)^{r-1}$.

Si $x \in \mathbb{R},\ x > 0$, y aplicamos el teorema del valor medio con respecto al intervalo $[0, x]$ obtenemos un punto $c \in (0, x)$ tal que

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x-0).$$

Esto es,

$$(1+x)^r - 1 = r(1+c)^{r-1}x.$$

Al ser $r > 1$ y $c > 0$ resulta que $(1+c)^{r-1} > 1$ con lo cual $(1+x)^r > 1 + rx$.

Si ahora $x \in (-1, 0)$ de nuevo el teorema del valor medio nos da que existe $c \in (x, 0)$ tal que

$$f(0) - f(x) = f'(c)(0-x).$$

Esto es,

$$1 - (1+x)^r = r(1+c)^{r-1}(-x).$$

Ahora, $(1+c)^{r-1} < 1$ de donde también se sigue que $-(1+x)^r \leq -rx - 1$, esto es, $(1+x)^r \geq 1 + rx$. Observamos que para $x = 0$ se tiene la igualdad: $(1+0)^r = 1 + r0$. Más adelante se verá que la misma desigualdad se verifica cuando r es real y mayor que 1, pero de momento no hemos definido qué es una potencia real.

5.4. Reglas de L'Hôpital

Se trata esencialmente de una reglas para calcular límites de cocientes cuando éstos dan lugar a alguna indeterminación. Sólo demostraremos un par de ellas.

En primer lugar obtenemos una generalización del teorema del valor medio que necesitaremos.

Teorema 5.27 (del valor medio de Cauchy) *Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo $[a,b]$ y derivables en (a,b) de forma que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Demostración. Observamos en primer lugar que $g(b)-g(a) \neq 0$, pues si $g(b)=g(a)$ el teorema del Valor Medio nos daría la existencia de un punto $c \in (a,b)$ tal que $g(b)-g(a) = g'(c)(b-a)$ pero entonces $g'(c)$ debe ser 0 y esto contradice la hipótesis de que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Como ya hicimos en el teorema del valor medio consideraremos una función auxiliar a la que aplicaremos el teorema de Rolle. En este caso la función es

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

La función φ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), además $\varphi(b) = \varphi(a) = 0$, luego le podemos aplicar el teorema de Rolle y obtenemos la existencia de un punto $c \in (a,b)$ tal que $\varphi'(c) = 0$. Ahora bien,

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)$$

con lo que $(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$.

Obsérvese que si $g(x) = x$ este teorema es exactamente el teorema del Valor Medio que hemos obtenido anteriormente. $\square$

Podemos ya obtener una de las reglas de L'Hôpital para el cálculo de algunos límites de cocientes.

Proposición 5.28 (regla de L'Hôpital) *Sean f y g dos funciones derivables en un intervalo (a,b) de forma que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$ y que*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to a^+} g(x).$$

Si existe el

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

y su valor es $L \in \mathbb{R}$ entonces existe el

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

y su valor también es L. Observamos que el hecho de que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$ nos garantiza que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, pues si extendemos g al intervalo $[a, b)$ definiendo $g(a) = 0$, entonces, para todo $x \in (a, b)$, g es continua en $[a, x]$ y derivable en (a, x), por lo que $g(x) = g(x) - g(a) = g'(c)(x - a)$ para un cierto $c \in (a, x)$ y $g'(c) \neq 0$.

Demostración. Definamos $f(a)$ y $g(a)$ como 0. Entonces f y g son continuas en $[a, b)$. Como $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, que supondremos que verifica que $a + \delta < b$, tal que

$$\left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - L \right| < \varepsilon$$

para todo $t \in (a, a + \delta)$.

Sea x un punto arbitrario en el intervalo $(a, a + \delta)$. Aplicando el teorema de Cauchy del valor medio al intervalo $[a, x]$ obtenemos que existe $c \in (a, x)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Como $f(a) = g(a) = 0$ la anterior igualdad nos da que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

y entonces

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon$$

pues $c \in (a, x) \subset (a, a + \delta)$. Esto se verifica para todo $x \in (a, a + \delta)$. En consecuencia

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

$\square$

Nota 5.29 *La misma demostración sirve cuando en hipótesis similares a las anteriores se trata de límites de la forma $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$.*

Nota 5.30 *Los resultados anteriores son válidos también cuando $L = +\infty$ o $L = -\infty$. Veamos como ejemplo el caso $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$. Definamos también aquí $f(a) = g(a) = 0$ con lo que f y g son continuas en $[a, b)$. Dado cualquier $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} > M$$

para todo $t \in (a, a+\delta)$. *Como antes, para todo* $x \in (a, a+\delta)$ *existe* $c \in (a, x)$ *tal que*

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

esto es,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} > M$$

pues $c \in (a, a+\delta)$, *luego*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

Obsérvese que con el mismo argumento se puede obtener el resultado para límites cuando x *tiende a* b *por la izquierda.*

Nota 5.31 *Cuando* f *y* g *son continuas y derivables en un intervalo de la forma* $(a, +\infty)$, *con* $a > 0$, *y* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to +\infty} g(x)$ *siendo* $g'(x) \neq 0$ *para todo* $x > a$, *entonces si existe el* $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *también existe el* $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ *y se verifica que,*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

La demostración se obtiene aplicando la primera de las reglas de L'Hôpital teniendo en cuenta que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})}.$$

Hay un resultado análogo para $-\infty$.

Nota 5.32 *Las anteriores reglas de L'Hôpital se refieren a límites de cocientes en los que los límites del numerador y denominador son* 0. *Hay resultados similares para el caso en que esos límites sean ambos* $+\infty$ *o* $-\infty$. *En las clases prácticas se verá como también se pueden resolver las formas indeterminadas:* $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞, 0^0 *e* ∞^0.

Capítulo 6

Aproximación por funciones polinómicas

Obtendremos en esta sección un teorema realmente importante debido a Brook Taylor (matemático inglés, 1685-1731) que nos permitirá aproximar funciones por polinomios.

Si tenemos una función $f : I \to \mathbb{R}$ que es derivable en todos los puntos de I tiene sentido considerar la función $f' : x \in I \mapsto f'(x)$. Puede que esta función sea derivable en algún punto $c \in I$. En ese caso la derivada de f' en c se representará por $f''(c)$ y se llamará la **derivada segunda** de f en c. Pero, claro, puede que la función f' sea derivable en todos los puntos de I y entonces tiene sentido considerar la función $f'' : x \in I \mapsto f''(x)$ y, por que no, puede que esta función sea derivable en algún punto $c \in I$ y la derivada de la derivada segunda de f en c se representará por $f'''(c)$ y se llamará la **derivada tercera** de f en c... En general, para un natural n se denotará por $f^{n)}(c)$ a la derivada de la función $f^{n-1)}$ en el punto c, supuesto claro está que existe la derivada de orden $n-1$ en todos los puntos de I, o al menos en un intervalo que contenga a c. Si $n - 1 = 0$ se entiende que la correspondiente derivada es la propia función.

Dada una función que tenga derivadas hasta el orden n en un punto x_0 construimos un polinomio de grado menor o igual que n mediante la expresión:

$$P_{n,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Tal polinomio se llama el **Polinomio de Taylor de f en x_0 de grado menor o igual que** n. El siguiente teorema nos da una información muy útil sobre cómo este polinomio aproxima a la función f, supuesto, claro está, que f verifique unas ciertas hipótesis.

Teorema 6.1 (de Taylor) *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función que tenga todas las derivadas f', $f'', ..., f^{n)}$, que éstas sean continuas*[1] *en $[a, b]$ y que exista $f^{n+1)}$ en el*

[1]Realmente las primeras $n - 1$ derivadas ya son continuas por ser derivables.

intervalo (a,b). Entonces, para todo par de puntos $x,\ x_0 \in [a,b]$ se verifica que existe un punto c entre x y x_0, $c \neq x$ y $c \neq x_0$, tal que

$$f(x) = P_{n,x_0}(x) + \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Demostración. Dado $x \in [a,b]$, $x \neq x_0$, denotemos por J al intervalo cerrado de extremos x y x_0. Según sea x en relación con x_0 el intervalo J será $[x,x_0]$ o $[x_0,x]$. Consideremos la función auxiliar definida en cada $t \in J$ por la expresión,

$$F(t) := f(x) - P_{n,t}(x) = f(x) - \left(f(t) + f'(t)(x-t) + \cdots + \frac{f^{n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right).$$

Esta función es continua en J y derivable en su interior, y

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t) + f'(t) - f''(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}2(x-t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \\ &\quad \cdots + \frac{f^{n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1} - \frac{f^{n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \\ &= -\frac{f^{n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n. \end{aligned}$$

Consideremos ahora la función definida en cada $t \in J$ por la expresión

$$G(t) := F(t) - F(x_0)\left(\frac{x-t}{x-x_0}\right)^{n+1}.$$

Esta función es continua en J y derivable en su interior. Además,

$$G(x) = F(x) = 0 \ \text{ y } \ G(x_0) = F(x_0) - F(x_0) = 0,$$

entonces, el teorema de Rolle (Teorema 5.19) nos da la existencia de un punto c en el interior del intervalo J, esto es, entre x y x_0 tal que $G'(c) = 0$. Ahora bien,

$$G'(c) = F'(c) + F(x_0)(n+1)\frac{(x-c)^n}{(x-x_0)^{n+1}},$$

de donde se deduce que

$$F(x_0) = -F'(c)\frac{1}{n+1}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-c)^n}$$

y sustituyendo $F'(c)$ por su valor, antes calculado, tenemos que

$$\begin{aligned} F(x_0) &= f^{n+1)}(c)\frac{1}{n+1}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-c)^n}\frac{(x-c)^n}{n!} \\ &= \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

De la expresión que define a $F(x_0)$ se sigue que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + F(x_0) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Como ya hemos hecho, es habitual denotar al polinomio

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

por $P_{n,x_0}(x)$, y también es habitual denotar por $R_{n,x_0}(x)$ a

$$\frac{1}{(n+1)!} f^{n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}.$$

Obsérvese que $R_{n,x_0}(x)$ depende de c que es un punto del que sólo sabemos que está entre x y x_0. Se tiene así que $f(x) = P_{n,x_0}(x) + R_{n,x_0}(x)$. La expresión R_{n,x_0} se llama el **resto de Lagrange** (matemático italiano, 1736-1813). Hay otras formas de expresar este resto, una de ellas es mediante una integral. Esto lo veremos más adelante.

Nota 6.2 *Hay también una versión del Teorema de Taylor para $n = 0$, se trata del teorema del valor medio (Teorema 5.20). En efecto, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces, para todo $x \in [a,b]$, $x \neq x_0$, existe c entre x y x_0 tal que*

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0),$$

que es lo que afirmaría el teorema de Taylor para $n = 0$.

El teorema de Taylor puede utilizarse, entre otras cosas, para caracterizar los extremos de una función. Se tiene el siguiente resultado.

Teorema 6.3 *Sean I un intervalo, x_0 un punto interior de I, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ y $f : I \to \mathbb{R}$. Supongamos que existen las derivadas f', f'', ..., $f^{n)}$, que son continuas en I y que $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{n-1)}(x_0) = 0$ pero $f^{n)}(x_0) \neq 0$. Entonces se verifica lo siguiente:*

(a) Si n es par y $f^{n)}(x_0) > 0$ entonces f tiene un mínimo relativo en x_o.

(b) Si n es par y $f^{n)}(x_0) < 0$ entonces f tiene un máximo relativo en x_o.

(c) Si n es impar entonces f no tiene un extremo en x_0.

Demostración. Si por cada $x \in I$, $x \neq x_0$, aplicamos el teorema de Taylor con $n-1$ en el intervalo determinado por x y x_0, entonces para todo $x \in I$, $x \neq x_0$, existe un c entre x y x_0 tal que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= f(x_0) + \frac{f^{n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n. \end{aligned}$$

Como $f^{n)}(x_0) \neq 0$ existe $\delta > 0$ tal que $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset I$ y $f^{n)}(x)$ tiene el mismo signo que $f^{n)}(x_0)$ para todo $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ (proposición 4.8). Si consideramos puntos x en ese intervalo, entonces el correspondiente punto c también está en él y así $f^{n)}(c)$ tiene el mismo signo que $f^{n)}(x_0)$.

Si n es par y $f^{n)}(x_0) > 0$ entonces $f^{n)}(c) > 0$ y $(x-x_0)^n > 0$ cuando $x \neq x_0$, luego $f(x) \geq f(x_0)$ para los $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, lo que nos da que f tiene un mínimo relativo en x_0, y esto prueba (a).

Si n es par y $f^{n)}(x_0) < 0$ entonces $f^{n)}(c) < 0$ y $(x-x_0)^n > 0$ cuando $x \neq x_0$, luego $f(x) \leq f(x_0)$ para los $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, lo que nos da que f tiene un máximo relativo en x_0, y esto prueba (b).

Si n es impar y $f^{n)}(x_0) > 0$ entonces $f^{n)}(c) > 0$ y $(x-x_0)^n > 0$ cuando $x > x_0$ y $(x-x_0)^n < 0$ cuando $x < x_0$. Luego $f(x) \geq f(x_0)$ para los $x \in (x_0, x_0+\delta)$ y $f(x) \leq f(x_0)$ para los $x \in (x_0-\delta, x_0)$, lo que nos dice que f no tiene un extremo relativo en x_0. Si $f^{n)}(x_0) < 0$ entonces $f^{n)}(c) < 0$ y $(x-x_0)^n > 0$ cuando $x > x_0$ y $(x-x_0)^n < 0$ cuando $x < x_0$, luego $f(x) \leq f(x_0)$ para los $x \in (x_0, x_0+\delta)$ y $f(x) \geq f(x_0)$ para los $x \in (x_0-\delta, x_0)$, lo que nos dice que f no tiene un extremo relativo en x_0. Esto prueba (c). □

6.1. Funciones convexas

Un tipo especial de funciones que son frecuentes en las aplicaciones del Cálculo son las funciones "convexas" y para este tipo de funciones hay un teorema que las caracteriza en términos de la derivada segunda. Definimos ahora qué es una función convexa y luego probaremos ese teorema.

Definición 6.4 *Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es **convexa** (I es un intervalo arbitrario) si para todo $t \in (0,1)$ y para cualesquiera x_1 y $x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, se verifica que*

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) = f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1)).$$

Debe observarse que fijados $x_1, x_2 \in I$, siendo $x_1 < x_2$, entonces, para cada $t \in [0,1]$ se verifica que $(1-t)x_1 + tx_2$ pertenece al segmento de extremos x_1 y x_2. De hecho ese segmento es exactamente el conjunto de los puntos de la forma $(1-t)x_1 + tx_2$ cuando t

recorre el intervalo $[0,1]$. Lo que significa la convexidad es que para todo punto $(1-t)x_1+tx_2$ del intervalo determinado por x_1 y x_2 el valor de la función f en ese punto es más pequeño o igual que el valor $(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$ que es el que corresponde para cada t en el segmento determinado por los puntos $(x_1,f(x_1))$ y $(x_2,f(x_2))$.

Cuando para todo $t\in[0,1]$ y para cualesquiera x_1 y $x_2\in I$, $x_1\neq x_2$, se verifica que

$$f((1-t)x_1+tx_2)\geq(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$$

se dice que la función es **cóncava**. Como una función es cóncava si y sólo si su opuesta es convexa nos centraremos sólo en el estudio de la convexidad.

Las funciones convexas pueden ser derivables o no, piénsese en la función $f(x)=|x|$, que es convexa y no es derivable en 0. Algunas son derivables, incluso dos veces derivables y para éstas se obtendrá enseguida una interesante caracterización. Para ello obtenemos primero una propiedad de las funciones dos veces derivables en un punto.

Proposición 6.5 *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función derivable en (a,b) y dos veces derivable en un punto $c\in(a,b)$. Entonces,*

$$f''(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-2f(c)+f(c-h)}{h^2}.$$

Demostración. Consideremos los cocientes

$$\frac{f(c+h)-f(c)-f'(c)h}{h^2}$$

y

$$\frac{f(c-h)-f(c)-f'(c)(-h)}{h^2}$$

en los que se ha elegido $h\neq 0$ tal que $c+h$ y $c-h$ pertenezcan a (a,b). En ambos casos el límite del numerador y el denominador es 0 cuando $h\to 0$. Al ser f derivable en (a,b) podemos aplicar la Regla de L'Hôpital (Proposición 5.28) y deducimos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)-f'(c)h}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(c+h)-f'(c)}{2h}=\frac{1}{2}f''(c)$$

y

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c-h)-f(c)-f'(c)(-h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(c-h)(-1)+f'(c)}{2h}=\frac{1}{2}f''(c).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f''(c) &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(c+h)-f(c)-f'(c)h}{h^2}+\frac{f(c-h)-f(c)-f'(c)(-h)}{h^2}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-2f(c)+f(c-h)}{h^2}. \end{aligned}$$

□

Teorema 6.6 *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función (a puede ser $-\infty$ y b puede ser $+\infty$) que tiene derivada segunda en cada punto de (a,b). Entonces f es convexa en (a,b) si y sólo si $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$.*

Demostración. "$\Longrightarrow$" Sea $c \in (a,b)$. Para todo $h \in \mathbb{R}$ tal que $c+h$ y $c-h$ pertenezcan a (a,b) se tiene que

$$c = \frac{1}{2}(c-h) + \frac{1}{2}(c+h),$$

la convexidad de f (tomando $t = \frac{1}{2}$) nos da que

$$f(c) = f\left(\frac{1}{2}(c-h) + \frac{1}{2}(c+h)\right) \leq \frac{1}{2}f(c-h) + \frac{1}{2}f(c+h)$$

de donde,

$$f(c+h) - 2f(c) + f(c-h) \geq 0$$

lo que nos dice que

$$f''(c) = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h) - 2f(c) + f(c-h)}{h^2} \geq 0.$$

"$\Longleftarrow$" Sean x_1 y $x_2 \in (a,b)$ y supongamos que $x_1 < x_2$. Fijado un $t \in (0,1)$ sea $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$. El teorema de Taylor con $n = 1$ aplicado a f y al punto x_0 nos garantiza la existencia de dos puntos, $c_1 \in (x_1, x_0)$ y $c_2 \in (x_0, x_2)$ tales que

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}f''(c_1)(x_1 - x_0)^2$$

y

$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) + \frac{1}{2}f''(c_2)(x_2 - x_0)^2.$$

Como $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$ resulta que

$$\frac{1}{2}(1-t)f''(c_1)(x_1 - x_0)^2 + \frac{1}{2}tf''(c_2)(x_2 - x_0)^2 \geq 0$$

y entonces

$$\begin{aligned}
f((1-t)x_1 + tx_2) &= f(x_0) \\
&\leq f(x_0) + \frac{1}{2}(1-t)f''(c_1)(x_1 - x_0)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}tf''(c_2)(x_2 - x_0)^2 \\
&= f(x_0) + (1-t)(f(x_1) - f(x_0) - f'(x_0)(x_1 - x_0)) \\
&\quad + t(f(x_2) - f(x_0) - f'(x_0)(x_2 - x_0)) \\
&= (1-t)f(x_1) - f'(x_0)((1-t)(x_1 - x_0) + t(x_2 - x_0)) \\
&\quad + tf(x_2) \\
&= (1-t)f(x_1) + tf(x_2)
\end{aligned}$$

(téngase en cuenta que $(1-t)(x_1 - x_0) + t(x_2 - x_0) = (1-t)x_1 + tx_2 - x_0 = 0$.) $\square$

Capítulo 7

Integración de funciones reales de variable real

Mientras que el objetivo fundamental de la derivación es el de encontrar la tangente a una curva en un punto, que no es otra cosa que la recta que pasando por el punto tiene por pendiente la derivada de la función en el punto, el objetivo de la integración es el cálculo de "áreas" que, como veremos, será en cierto modo un problema inverso al de la derivación. Hay más de una teoría de integración, nosotros aquí estudiaremos la de Riemann (matemático alemán, 1822-1866). Así como la derivada de una función en un punto es un cierto límite, también será un límite la integral de una función en un intervalo.

Empezamos definiendo el concepto de partición de un intervalo. En todo el tema trabajaremos solamente con intervalos cerrados acotados $[a,b]$, con $a<b$.

Definición 7.1 *Se llama* ***partición*** *de un intervalo* $[a,b]$ *a cualquier colección finita*

$$\mathcal{P}=\{x_o,x_1,...,x_n\}$$

de puntos de $[a,b]$ *tales que*

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

Por ejemplo, por cada $n\in\mathbb{N}$ *los puntos*

$$a,\ a+\frac{b-a}{n},\ a+2\frac{b-a}{n},...,a+(n-1)\frac{b-a}{n},b$$

forman una partición de $[a,b]$ *por puntos igualmente separados.*

Definición 7.2 *Dada una función* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *acotada en* $[a,b]$*, esto es, existen* m *y* $M\in\mathbb{R}$ *tales que* $m\leq f(x)\leq M$ *para todo* $x\in[a,b]$*, y dada una partición* $P=\{x_o,x_1,...,x_n\}$*, por cada* $k=1,...,n$ *se usarán la notaciones*

$$\begin{aligned} m_k &= \acute{\imath}nf\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\} \\ M_k &= \sup\{f(x):x\in[x_{k-1},x_k]\} \end{aligned}$$

y llamaremos ***suma inferior de*** f *correspondiente a la partición* P *a*

$$L(P,f)=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_{k-}x_{k-1})$$

y ***suma superior de*** f *correspondiente a la partición* P *a*

$$U(P,f)=\sum_{k=1}^{n} M_k(x_{k-}x_{k-1}).$$

Su usan las letras L y U por ser las iniciales de las palabras inglesas Lower y Upper que significan inferior y superior respectivamente. Obsérvese que las funciones que consideramos pueden no ser continuas, les pedimos que sean acotadas para garantizar la existencia de m_k *y* M_k*.*

Cuando f es una función positiva se puede interpretar la suma inferior como la suma de la áreas de los rectángulos que tiene por base los intervalos $[x_{k-1},x_k]$ y por altura m_k. Análogamente la suma superior representa la suma de las áreas de los rectángulos con base $[x_{k-1},x_k]$ y altura M_k.

De las propias definiciones de $L(P,f)$ y $U(P,f)$ se sigue que $L(P,f)\leq U(P,f)$.

Definición 7.3 *Se dirá que una partición Q=* $\{y_o,y_1,...,y_m\}$ *de* $[a,b]$ *es un* ***refinamiento*** *de otra partición P=* $\{x_o,x_1,...,x_n\}$ *si* $P\subset Q$*. Esto es, Q contiene a todos los puntos de P y quizá alguno más. Obsérvese que necesariamente* $m\geq n$*. Cuando Q es un refinamiento de P se dice que Q es* ***más fina*** *que P.*

Vamos a ver ahora como cuando Q es un refinamiento de P la suma inferior correspondiente a Q es mayor o igual que la correspondiente a P y la superior es menor o igual que la correspondiente a P.

Proposición 7.4 *Sea* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *acotada y sean* $P=\{x_o,x_1,...,x_n\}$ *una partición de* $[a,b]$ *y Q=* $\{y_o,y_1,...,y_m\}$ *un refinamiento de P. Entonces*

$$L(P,f)\leq L(Q,f)\leq U(Q,f)\leq U(P,f).$$

Demostración. Es claro que basta comprobar que eso ocurre con un refinamiento que tenga un punto más que la partición original. Supongamos entonces que $P=\{x_o,x_1,...,x_n\}$ y que $Q=\{x_0,x_1,...x_{j-1},x^*,x_j,x_{j+1},...,x_n\}$ con un cierto $x^*\in[a,b]$. Para el j tal que $x^*\in[x_{j-1},x_j]$, y en relación con la partición P, se tiene que $m_j=\acute{i}nf\{f(x):x\in[x_{j-1},x_j]\}$ y $M_j=\sup\{f(x):x\in[x_{j-1},x_j]\}$, y para la partición Q tendremos que considerar los valores $m'_j=\acute{i}nf\{f(x):x\in[x_{j-1},x^*]\}$, $m''_j=\acute{i}nf\{f(x):x\in[x^*,x_j]\}$,

$M_j' = \sup\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x^*]\}$ y $M_j'' = \sup\{f(x) : x \in [x^*, x_j]\}$. Las sumas inferiores correspondientes son

$$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_{k-}x_{k-1})$$

y

$$L(Q,f) = \sum_{k=1}^{j-1} m_k(x_{k-}x_{k-1}) + m_j'(x^* - x_{j-1}) + m_j''(x_j - x^*) + \sum_{k=j+1}^{n} m_k(x_{k-}x_{k-1}),$$

y las superiores

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_{k-}x_{k-1})$$

y

$$U(Q,f) = \sum_{k=1}^{j-1} M_k(x_{k-}x_{k-1}) + M_j'(x^* - x_{j-1}) + M_j''(x_j - x^*) + \sum_{k=j+1}^{n} M_k(x_{k-}x_{k-1}).$$

Ahora bien,

$$m_j'(x^* - x_{j-1}) + m_j''(x_j - x^*) \geq m_j(x^* - x_{j-1}) + m_j(x_j - x^*) = m_j(x_j - x_{j-1})$$

y

$$M_j'(x^* - x_{j-1}) + M_j''(x_j - x^*) \leq M_j(x^* - x_{j-1}) + M_j(x_j - x^*) = M_j(x_j - x_{j-1}),$$

y por lo tanto $L(Q,f) \geq L(P,f)$ y $U(Q,f) \leq U(P,f)$. □

Corolario 7.5 *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada y P_1 y P_2 son dos particiones cualesquiera de $[a,b]$, entonces $L(P_1,f) \leq U(P_2,f)$.*

Demostración. Denotemos por Q la partición de $[a,b]$ que resulta al unir los conjuntos P_1 y P_2. Entonces Q es una partición de $[a,b]$ que es un refinamiento tanto de P_1 como de P_2. En consecuencia sabemos que

$$L(P_1,f) \leq L(Q,f) \leq U(Q,f) \leq U(P_2,f).$$

□

7.1. Integrales superior e inferior.

Dado un intervalo $[a,b]$ denotemos por $\mathcal{P}([a,b])$ al conjunto de todas las particiones de $[a,b]$.

Definición 7.6 *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada. Se define la* ***integral inferior de*** *f en $[a,b]$ como*

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P,f) : P\in\mathcal{P}([a,b])\}$$

y se define la **integral superior de** f en $[a,b]$ como

$$\overline{\int_a^b} f = \acute{\imath}nf\{U(P,f) : P\in\mathcal{P}([a,b])\}.$$

Debe observarse que en virtud del corolario anterior el conjunto de los números reales $L(P,f)$, cuando P recorre el conjunto $\mathcal{P}([a,b])$, está acotado superiormente y que el conjunto de los números reales $U(P,f)$, cuando P recorre el conjunto $\mathcal{P}([a,b])$, está acotado inferiormente, luego $\underline{\int_a^b} f$ y $\overline{\int_a^b} f$ están bien definidos.

Sucede que $\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$, pues dado que para cualesquiera dos particiones P_1 y P_2 de $[a,b]$ se verifica que $L(P_1,f)\le U(P_2,f)$, entonces

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P,f) : P\in\mathcal{P}([a,b])\} \le U(P_2,f)$$

y como esto ocurre para toda P_2 se verifica que

$$\underline{\int_a^b} f \le \acute{\imath}nf\{U(P,f) : P\in\mathcal{P}([a,b])\} = \overline{\int_a^b} f.$$

Si en particular, consideramos la partición $P=\{a,b\}$ y hacemos $m=\acute{\imath}nf\{f(x) : x\in [a,b]\}$ y $M=\sup\{f(x) : x\in[a,b]\}$ tenemos que

$$m(b-a)\le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le M(b-a).$$

7.2. La integral de Riemann

Siempre sucede que $\underline{\int}_a^b f \leq \overline{\int}_a^b f$ y puede ocurrir que para una cierta función acotada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se verifique $\underline{\int}_a^b f < \overline{\int}_a^b f$. Veamos un ejemplo. La función de Dirichlet, que ya hemos considerado anteriormente, y que está definida en $[0,1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{I} \\ 1 & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

tiene esa propiedad. En efecto, sea cual sea la partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a,b]$ sucede que para cualquier $k = 1, ..., n$ en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ hay puntos racionales y puntos irracionales, luego para todo $k = 1, ..., n$, se tiene que $m_k = 0$ y $M_k = 1$. En consecuencia $L(P,f) = 0$ y $U(P,f) = 1$ para toda $P \in \mathcal{P}([a,b])$, y ello implica que $\underline{\int}_a^b f = 0$ y $\overline{\int}_a^b f = 1$.

Definición 7.7 *Cuando para una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada se verifique que $\underline{\int}_a^b f = \overline{\int}_a^b f$ se dirá que f es **Riemann integrable** en $[a,b]$ y al valor común de $\underline{\int}_a^b f$ y $\overline{\int}_a^b f$ se le llamará la **integral de Riemann** de f en $[a,b]$. Este valor suele denotarse por*

$$\int_a^b f, \quad \int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^b f(t)dt...$$

Se define $\int_b^a f$ como $-\int_a^b f$ y se define también $\int_a^a f$ como 0.

Dado que aquí sólo manejaremos la integral de Riemann normalmente hablaremos sólo de integral.

Damos a continuación unos ejemplos de funciones integrables:

Ejemplo 7.8 *Las funciones constantes son integrables. En efecto, sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = d$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces, sea cual sea la partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a,b]$ y sea cual sea $k = 1, ..., n$ se verifica que $m_k = d$ y $M_k = d$. Por lo tanto $L(P,f) = d(b-a)$ y $U(P,f) = d(b-a)$. Es claro entonces que $\underline{\int}_a^b f = d(b-a) = \overline{\int}_a^b f$. Esto es, f es integrable y además $\int_a^b f = d(b-a)$.*

Ejemplo 7.9 *La función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ es integrable en $[0,1]$. En efecto, por cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la partición*

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1\right\}.$$

Como la función f es creciente su ínfimo y su supremo en cada uno de los intervalos $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ se alcanzan en los extremos inferior y superior respectivamente, esto es,

$$m_k = \frac{k-1}{n} \quad y \quad M_k = \frac{k}{n}.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} L(P_n, f) &= 0\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\frac{1}{n} + \frac{2}{n}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n}\frac{1}{n} \\ &= \frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n^2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} U(P_n, f) &= \frac{1}{n}\frac{1}{n} + \frac{2}{n}\frac{1}{n} + \frac{3}{n}\frac{1}{n} + \cdots + \frac{n-1}{n}\frac{1}{n} + \frac{n}{n}\frac{1}{n} \\ &= \frac{1+2+\cdots+(n-1)+n}{n^2}. \end{aligned}$$

A principios de curso hemos demostrado, usando el principio de inducción matemática, que para todo $m \in \mathbb{N}$ se verifica que $1+2+\cdots+m = \frac{m(m+1)}{2}$ y, usando esto con $m = n-1$ y después con $m = n$ obtenemos que

$$L(P_n, f) = \frac{1+2+\cdots+(n-1)}{n^2} = \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

y

$$U(P_n, f) = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

El supremo de las sumas inferiores $L(P_n, f)$ es $\frac{1}{2}$ y el ínfimo de las sumas superiores es también $\frac{1}{2}$. Ahora bien

$$\begin{aligned} \underline{\int}_a^b f &= \sup\{L(P, f) : P \in \mathcal{P}([a, b])\} \\ &\geq \sup\{L(P_n, f) : n \in \mathbb{N}\} = \frac{1}{2} \\ &= \acute{\imath}nf\{U(P_n, f) : n \in \mathbb{N}\} \\ &\geq \acute{\imath}nf\{U(P, f) : P \in \mathcal{P}([a, b])\} \\ &= \overline{\int}_a^b f. \end{aligned}$$

Esto nos da que $\underline{\int}_a^b f = \overline{\int}_a^b f = \frac{1}{2}$, téngase en cuenta que siempre $\underline{\int}_a^b f \leq \overline{\int}_a^b f$. Se tiene entonces que f es integrable en $[0, 1]$ y que su integral en ese intervalo es $\int_0^1 f = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 7.10 *La función $f(x) = x^2$ es integrable en $[0,1]$. En efecto, hagamos, como en el ejemplo anterior $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1\right\}$ por cada $n \in \mathbb{N}$. También esta función es creciente en ese intervalo y entonces, para cada $k = 1, ..., n$, se tiene que*

$$m_k = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \quad y \quad M_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} L(P_n, f) &= 0\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \\ &= \frac{1 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} U(P_n, f) &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{3}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \\ &= \frac{1 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2}{n^3}. \end{aligned}$$

También se ha visto que para todo $m \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$1 + 2^2 + \cdots + m^2 = \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1),$$

y usando esto con $m = n - 1$ y después con $m = n$ obtenemos que

$$\begin{aligned} L(P_n, f) &= \frac{1 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3} = \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6n^3} \\ &= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) \leq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} U(P_n, f) &= \frac{1 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\ &= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) \geq \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

El supremo de estas sumas inferiores es $\frac{1}{3}$ y también tiene ese valor el ínfimo de esas *sumas superiores. Ahora bien, como antes,*

$$\begin{aligned}\underline{\int_a^b} f &= \sup\{L(P,f) : P \in \mathcal{P}([a,b])\} \\ &\geq \sup\{L(P_n,f) : n \in \mathbb{N}\} = \frac{1}{3} \\ &= \acute{\imath}nf\{U(P_n,f) : n \in \mathbb{N}\} \\ &\geq \acute{\imath}nf\{U(P,f) : P \in \mathcal{P}([a,b])\} \\ &= \overline{\int_a^b} f.\end{aligned}$$

Resulta entonces que f es integrable en $[0,1]$ y que su integral en ese intervalo es $\int_0^1 f = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

7.3. Criterio de integrabilidad de Riemann

Obtendremos a continuación un criterio para saber si una función es integrable.

Teorema 7.11 (criterio de integrabilidad de Riemann) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada en $[a,b]$. Entonces, f es integrable en $[a,b]$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε de $[a,b]$ tal que $U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$.*

Demostración. Supongamos que f es integrable en $[a,b]$, entonces $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. Como $\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P,f) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}$ se sabe que $\underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2}$ no es cota superior del anterior conjunto, luego necesariamente existe una partición $P_{1,\varepsilon}$ de $[a,b]$ tal que

$$\underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_{1,\varepsilon}, f),$$

y como $\overline{\int_a^b} f = \acute{\imath}nf\{U(P,f) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}$,se tiene que $\overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}$ no es cota inferior de ese conjunto, por lo que necesariamente existe una partición $P_{2,\varepsilon}$ de $[a,b]$ tal que

$$U(P_{2,\varepsilon}, f) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Denotemos por P_ε a la partición que resulta al unir los puntos de $P_{1,\varepsilon}$ con los de $P_{2,\varepsilon}$. Entonces

$$\underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_{1,\varepsilon}, f) \leq L(P_\varepsilon, f) \leq U(P_\varepsilon, f) \leq U(P_{2,\varepsilon}, f) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2},$$

de donde se sigue que

$$U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f + \varepsilon.$$

Como $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$, se tiene que $U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$.

Recíprocamente, la condición de que para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P_ε de $[a, b]$ tal que $U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$ se sigue que

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

y sabemos que el único número real mayor o igual que 0 que es menor que cualquier número positivo es el 0 (Proposición 1.18), luego $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$ y así f es integrable en $[a, b]$. □

Corolario 7.12 *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada y existe una sucesión (P_n) de particiones de $[a, b]$ de forma que*

$$\lim_{n\to\infty} (U(P_n, f) - L(P_n, f)) = 0,$$

entonces f es integrable en $[a, b]$ y además

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} L(P_n, f) = \lim_{n\to\infty} U(P_n, f).$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $U(P_n, f) - L(P_n, f) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. En particular

$$U(P_N, f) - L(P_N, f) < \varepsilon$$

y entonces basta considerar como P_ε la partición P_N para obtener la integrabilidad de f por el criterio de Riemann.

Como para todo n,

$$L(P_n, f) \leq \int_a^b f \quad \text{y} \quad \int_a^b f \leq U(P_n, f)$$

resulta que

$$0 \leq \int_a^b f - L(P_n, f) \leq U(P_n, f) - L(P_n, f)$$

y la expresión de la derecha tiende a 0 cuando $n \to \infty$, por lo que $L(P_n, f) \to \int_a^b f$. Por otra parte, también

$$0 \leq U(P_n, f) - \int_a^b f \leq U(P_n, f) - L(P_n, f)$$

lo que implica que $U(P_n, f) \to \int_a^b f$. □

Nota 7.13 *Aplicando este corolario se sigue fácilmente algo que hemos obtenido antes, a saber, que* $\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$ *y que* $\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$. *En efecto, habíamos visto que considerando las particiones* $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1\right\}$, *para* $f(x) = x$ *se tiene que*

$$U(P_n, f) - L(P_n, f) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \to 0$$

luego $f(x) = x$ *es integrable y se verifica que*

$$\int_0^1 xdx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Para $f(x) = x^2$ *tenemos que*

$$U(P_n, f) - L(P_n, f) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{n} \to 0$$

luego $f(x) = x^2$ *es integrable y se verifica que*

$$\int_0^1 x^2dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

Integrabilidad de funciones monótonas y de funciones continuas

Las funciones monótonas son integrables y lo mismo le ocurre a las continuas. Esto es lo que demostraremos en esta sección.

Proposición 7.14 *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función monótona. Entonces* f *es integrable en* $[a, b]$.

Demostración. Observamos antes de nada que las funciones monótonas son acotadas pues sus valores están entre $f(a)$ y $f(b)$.

Supondremos que f es monótona creciente, si es monótona decreciente la demostración es similar. Fijemos una partición $P_n = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ donde $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ para $k = 0, ..., n$. Al ser f creciente,

$$m_k = inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(x_{k-1})$$

y

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(x_k).$$

Así,

$$\begin{aligned} 0 \ \leq \ & U(P_n, f) - L(P_n, f) = (f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(b))\,\frac{b-a}{n} \\ & -(f(a) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1}))\frac{b-a}{n} \\ = \ & (f(b) - f(a))\frac{b-a}{n}. \end{aligned}$$

Esto nos da que el límite de $U(P_n, f) - L(P_n, f)$, cuando n tiende a ∞, es 0 y por lo tanto f es integrable en $[a, b]$ por el Corolario anterior. $\square$

Proposición 7.15 *Toda función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que sea continua es integrable en $[a, b]$.*

Demostración. Observamos antes de nada que todas las funciones continuas en $[a, b]$ son acotadas (Proposición 4.45). Sabemos también que todas las funciones continuas en $[a, b]$ son uniformemente continuas (Teorema 4.56). Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $u, v \in [a, b]$ y $|u - v| < \delta$ se verifica que $|f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Fijemos una partición $P_\varepsilon = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ de forma que la separación entre cada dos puntos consecutivos sea menor que δ. Como toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza en él su máximo y su mínimo (Teorema 4.48), existen, para cada $k = 1, ..., n$, puntos $u_k, v_k \in [x_{k-1}, x_k]$ de forma que $f(u_k) = M_k$ y $f(v_k) = m_k$. Entonces

$$M_k - m_k = |f(u_k) - f(v_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &< \quad \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

7.4. Propiedades de la integral de Riemann

Comenzamos con las llamadas “propiedades de linealidad”.

Proposición 7.16 *Si f y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son dos funciones integrables y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces αf y $f + g$ son también funciones integrables y se verifica que*

(a) $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$.

(b) $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Demostración.

(a) Desde luego αf es acotada por serlo f. Si $\alpha = 0$ no hay nada que demostrar. Supongamos primero que $\alpha < 0$. Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Al ser $\alpha < 0$ se verifica que

$$\inf\{\alpha f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = \alpha \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

para cualquier $k = 1, ..., n$, lo que nos da que $L(P, \alpha f) = \alpha U(P, f)$ y análogamente $U(P, \alpha f) = \alpha L(P, f)$. Entonces

$$\begin{aligned} \underline{\int_a^b} \alpha f &= \sup\{L(P, \alpha f) : P \in \mathcal{P}([a, b])\} \\ &= \sup\{\alpha U(P, f) : P \in \mathcal{P}([a, b])\} \\ &= \alpha \cdot \text{ínf}\{U(P, f) : P \in \mathcal{P}([a, b])\} = \alpha \overline{\int_a^b} f. \end{aligned}$$

Un razonamiento análogo muestra que

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b} \alpha f &= \text{ínf}\{U(P, \alpha f) : P \in \mathcal{P}([a, b])\} \\ &= \text{ínf}\{\alpha L(P, f) : P \in \mathcal{P}([a, b])\} \\ &= \alpha \cdot \sup\{L(P, f) : P \in \mathcal{P}([a, b])\} = \alpha \underline{\int_a^b} f. \end{aligned}$$

Dado que $\underline{\int}_a^b f = \overline{\int}_a^b f$ se deduce de esto que $\underline{\int}_a^b \alpha f = \overline{\int}_a^b \alpha f$ y por lo tanto que αf es integrable y además que $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$.

Si $\alpha > 0$ el argumento es similar, pero ahora $L(P, \alpha f) = \alpha L(P, f)$ y $U(P, \alpha f) = \alpha U(P, f)$.

(b) Desde luego $f + g$ es acotada por serlo f y g. Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Para cada $k = 1, ..., n$ se tiene que

$$\begin{aligned} \text{ínf}\{(f+g)(x) &: x \in [x_{k-1}, x_k]\} = \text{ínf}\{f(x) + g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \\ &\geq \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} + \text{ínf}\{g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \sup\{(f+g)(x) &: x \in [x_{k-1}, x_k]\} = \sup\{f(x) + g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \\ &\leq \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} + \sup\{g(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \end{aligned}$$

resulta que

$$L(P, f) + L(P, g) \leq L(P, f + g)$$

y

$$U(P, f + g) \leq U(P, f) + U(P, g).$$

Al ser f y g integrables, para cualquier $\varepsilon > 0$ existen particiones $P_{f, \frac{\varepsilon}{2}}$ y $P_{g, \frac{\varepsilon}{2}}$ de $[a, b]$ tales que

$$U(P_{f, \frac{\varepsilon}{2}}, f) - L(P_{f, \frac{\varepsilon}{2}}, f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

y
$$U(P_{g,\frac{\varepsilon}{2}}, g) - L(P_{g,\frac{\varepsilon}{2}}, g) < \frac{\varepsilon}{2}.$$
La partición P_ε formada por la unión de las particiones $P_{f,\frac{\varepsilon}{2}}$ y $P_{g,\frac{\varepsilon}{2}}$ es una partición más fina que ellas y entonces, usando lo anterior y esto,
$$\begin{aligned} U(P_\varepsilon, f+g) &\leq U(P_\varepsilon, f) + U(P_\varepsilon, g) \\ &\leq U(P_{f,\frac{\varepsilon}{2}}, f) + U(P_{g,\frac{\varepsilon}{2}}, g) \\ &< L(P_{f,\frac{\varepsilon}{2}}, f) + \frac{\varepsilon}{2} + L(P_{g,\frac{\varepsilon}{2}}, g) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq L(P_\varepsilon, f) + L(P_\varepsilon, g) + \varepsilon \\ &\leq L(P_\varepsilon, f+g) + \varepsilon. \end{aligned}$$
Esto es,
$$U(P_\varepsilon, f+g) - L(P_\varepsilon, f+g) < \varepsilon$$
lo que nos dice que $f+g$ es integrable. Además,
$$\int_a^b (f+g) \leq U(P_\varepsilon, f+g) < L(P_{f,\frac{\varepsilon}{2}}, f) + L(P_{g,\frac{\varepsilon}{2}}, g) + \varepsilon \leq \int_a^b f + \int_a^b g + \varepsilon.$$
Dada la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ se sigue de aquí que
$$\int_a^b (f+g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g.$$
Por otra parte,
$$\int_a^b f + \int_a^b g \leq U(P_{f,\frac{\varepsilon}{2}}, f) + U(P_{g,\frac{\varepsilon}{2}}, g) < L(P_\varepsilon, f+g) + \varepsilon \leq \int_a^b (f+g) + \varepsilon$$
y de nuevo, la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ nos da que
$$\int_a^b f + \int_a^b g \leq \int_a^b (f+g).$$
Resulta así que
$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f+g).$$
□

Nota 7.17 *Un sencillo argumento usando el principio de inducción prueba que si $f_1, ..., f_n$ son funciones integrables en $[a,b]$ y $\alpha_1, ..., \alpha_n$ son números reales, entonces $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n$ es integrable y*
$$\int_a^b (\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n) = \alpha_1 \int_a^b f_1 + \cdots + \alpha_n \int_a^b f_n.$$

Obtenemos ahora la llamada propiedad de positividad de las integrales:

Proposición 7.18 *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f \geq 0.$$

Demostración. Al ser $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ todas las sumas inferiores (y también las superiores) son mayores o iguales que 0, entonces el supremo de ellas es también mayor o igual que 0. □

Corolario 7.19 *Si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son integrables en $[a,b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Demostración. Basta aplicar la proposición anterior a la función $g - f$. □

Proposición 7.20 (propiedad de aditividad de la integral) *Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y $c \in (a,b)$. Entonces f es integrable en $[a,b]$ si y sólo si lo es en $[a,c]$ y en $[c,b]$. Además, se verifica que*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Demostración. Empezamos viendo como la integrabilidad de f en $[a,c]$ y en $[c,b]$ implica su integrabilidad en $[a,b]$. Consideremos un $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por el criterio de integrabilidad de Riemann existen dos particiones una $P_{1,\frac{\varepsilon}{2}}$ de $[a,c]$ y otra $P_{2,\frac{\varepsilon}{2}}$ de $[c,b]$ tales que

$$U(P_{1,\frac{\varepsilon}{2}}, f) - L(P_{1,\frac{\varepsilon}{2}}, f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$U(P_{2,\frac{\varepsilon}{2}}, f) - L(P_{2,\frac{\varepsilon}{2}}, f) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Con respecto a la partición P_ε de $[a,b]$ que se obtiene al unir los puntos de $P_{1,\frac{\varepsilon}{2}}$ con los de $P_{2,\frac{\varepsilon}{2}}$ se tiene que

$$\begin{aligned} & U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) = U(P_{1,\frac{\varepsilon}{2}}, f) + U(P_{2,\frac{\varepsilon}{2}}, f) - (L(P_{1,\frac{\varepsilon}{2}}, f) + L(P_{2,\frac{\varepsilon}{2}}, f)) \\ = \; & U(P_{1,\frac{\varepsilon}{2}}, f) - L(P_{1,\frac{\varepsilon}{2}}, f) + U(P_{2,\frac{\varepsilon}{2}}, f) - L(P_{2,\frac{\varepsilon}{2}}, f) \\ < \; & \varepsilon. \end{aligned}$$

De donde se sigue, por el criterio de integrabilidad de Riemann, que f es integrable en $[a,b]$.

Supongamos ahora que f es integrable en $[a,b]$ y probemos que también lo es en $[a,c]$ y en $[c,b]$. Dado $\varepsilon > 0$ sea P_ε una partición de $[a,b]$ tal que

$$U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon.$$

Si a P_ε le unimos el punto c (si es que no pertenece a P_ε) obtenemos una partición P'_ε de $[a,b]$ que es un refinamiento de P_ε y entonces también

$$U(P'_\varepsilon, f) - L(P'_\varepsilon, f) < \varepsilon.$$

Si ahora consideramos $P'_{\varepsilon,1} = P'_\varepsilon \cap [a,c]$ y $P'_{\varepsilon,2} = P'_\varepsilon \cap [c,b]$ obtenemos sendas particiones de $[a,c]$ y $[c,b]$ respectivamente y es claro que

$$U(P'_\varepsilon, f) = U(P'_{\varepsilon,1}, f) + U(P'_{\varepsilon,2}, f)$$

y que

$$L(P'_\varepsilon, f) = L(P'_{\varepsilon,1}, f) + L(P'_{\varepsilon,2}, f)$$

por lo que

$$U(P'_\varepsilon, f) - L(P'_\varepsilon, f) = U(P'_{\varepsilon,1}, f) + U(P'_{\varepsilon,2}, f) - (L(P'_{\varepsilon,1}, f) + L(P'_{\varepsilon,2}, f)) < \varepsilon$$

lo que implica que

$$U(P'_{\varepsilon,1}, f) - L(P'_{\varepsilon,1}, f) < \varepsilon$$

y que

$$U(P'_{\varepsilon,2}, f) - L(P'_{\varepsilon,2}, f) < \varepsilon$$

(téngase en cuenta que estas dos diferencias son positivas). Tenemos probada así la integrabilidad de f en $[a,c]$ y en $[c,b]$ por el criterio de integrabilidad de Riemann.

Veamos ahora la verificación de la fórmula del enunciado. Se tiene que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f &\leq U(P'_\varepsilon, f) = U(P'_{\varepsilon,1}, f) + U(P'_{\varepsilon,2}, f) \\
&< L(P'_{\varepsilon,1}, f) + \varepsilon + L(P'_{\varepsilon,2}, f) + \varepsilon \\
&\leq \int_a^c f + \int_c^b f + 2\varepsilon
\end{aligned}$$

y, por otra parte

$$\begin{aligned}
\int_a^c f + \int_c^b f &\leq U(P'_{\varepsilon,1}, f) + U(P'_{\varepsilon,2}, f) \\
&< L(P'_{\varepsilon,1}, f) + \varepsilon + L(P'_{\varepsilon,2}, f) + \varepsilon \\
&= L(P'_\varepsilon, f) + 2\varepsilon \\
&\leq \int_a^b f + 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

La arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ nos da que

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

$\square$

Mientras que la composición $g \circ f$ de funciones integrables no es necesariamente integrable como veremos en el siguiente ejemplo, sí lo será la composición de una función integrable con una lipschiziana, lo que se verá enseguida. De hecho lo es cuando la g es continua, pero la prueba de esto es bastante más difícil que cuando es lipschitziana (puede verse como Teorema 7.2.5 en el Libro de Bartle y Sherbert), y para nuestros objetivos será suficiente considerar ese caso particular.

Ejemplo 7.21 *(de una composición no integrable de funciones integrables) Sea* $[a,b] = [0,1]$ *y sea* f *la función de Thomae que hemos considerado (aquí la definimos también en* 0 *y en* 1*) en el capítulo de continuidad y que está definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = 0 \\ 0 & si\ x \in \mathbb{I} \cap [0,1] \\ \frac{1}{q} & si\ x \in [0,1]\ es\ de\ la\ forma\ \frac{p}{q}\ siendo\ mcd(p,q) = 1. \end{cases}$$

Esta función es integrable y su integral es 0. *Veámoslo; observamos en primer lugar que para toda* $P \in \mathcal{P}([0,1])$ *se verifica que* $L(P,f) = 0$. *Por otra parte, dado* $\varepsilon > 0$ *sea* $q_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{1}{q_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. *Sólo hay una cantidad finita* N *de números racionales de la forma* $\frac{p}{q}$ *con* $mcd(p,q) = 1$ *y* $q \le q_0$ *en* $[0,1]$. *Consideremos una partición* $P_\varepsilon = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ *de forma que la diferencia entre cada* x_k *y* x_{k-1} *sea menor que* $\frac{\varepsilon}{2N}$ *y que no contenga a ninguno de los puntos de la forma* $\frac{p}{q}$ *con* $q \le q_0$ *salvo al* 1 *(esto se hace para evitar que aparezcan esos puntos en más de un intervalo de los que define la partición). Entonces hay como mucho* N *intervalos de la forma* $[x_{k-1}, x_k]$ *en los que hay algún punto de la forma* $\frac{p}{q}$ *con* $q \le q_0$. *En ellos el supremo es menor o igual que* 1 *y como* $x_k - x_{k-1} < \frac{\varepsilon}{2N}$, *esos posibles* N *intervalos aportan a la suma superior un valor menor o igual que* $N \cdot 1 \cdot \frac{\varepsilon}{2N}$. *En los restantes intervalos la función vale menos que* $\frac{1}{q_0}$ *y entonces esos intervalos aportan a la suma superior como mucho* $\frac{1}{q_0} \cdot 1$, *pues la suma de las longitudes de esos intervalos es menor o igual que 1. Entonces,*

$$\begin{aligned} U(P_\varepsilon, f) &\le N \cdot 1 \cdot \frac{\varepsilon}{2N} + \frac{1}{q_0} \cdot 1 \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

y así $U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$.

La función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \in (0,1]. \end{cases}$$

es integrable (y su integral es 1). La composición de f con g es la función

$$g \circ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1] \bigcap \mathbb{I} \\ 1 & \text{si } x \in [0,1] \bigcap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Se trata entonces de la función de Dirichlet, y ya hemos visto anteriormente que no es integrable.

Proposición 7.22 *Sean $[a,b]$ y $[c,d]$ dos intervalos y sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable tal que $f([a,b]) \subset [c,d]$ y $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ una función lipschitziana. Entonces $g \circ f$ es integrable.*

Demostración. Ciertamente $g \circ f$ acotada. Recordamos que g es lipschitziana en $[c,d]$ si existe un número real $K > 0$ tal que

$$|g(u) - g(v)| \leq K|u - v| \text{ para todo } u, v \in [c,d].$$

El que f sea integrable en $[a,b]$ nos dice que para todo $\varepsilon > 0$ existe $P_{\frac{\varepsilon}{K}} = \{x_0, ..., x_n\} \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que

$$U(P_{\frac{\varepsilon}{K}}, f) - L(P_{\frac{\varepsilon}{K}}, f) < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}
& U(P_{\frac{\varepsilon}{K}}, g \circ f) - L(P_{\frac{\varepsilon}{K}}, g \circ f) \\
= \ & \sum_{k=1}^{n} (\sup\{g \circ f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}(x_k - x_{k-1}) - \text{ínf}\{g \circ f(y) : y \in [x_{k-1}, x_k]\}(x_k - x_{k-1})) \\
= \ & \sum_{k=1}^{n} \sup\{g \circ f(x) - g \circ f(y) : x, y \in [x_{k-1}, x_k]\}(x_k - x_{k-1}) \qquad (*) \\
\leq \ & K \sum_{k=1}^{n} \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [x_{k-1}, x_k]\}(x_k - x_{k-1}) \\
= \ & K \sum_{k=1}^{n} \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in [x_{k-1}, x_k]\}(x_k - x_{k-1}) \\
= \ & K \sum_{k=1}^{n} (\sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}(x_k - x_{k-1}) - \text{ínf}\{f(y) : y \in [x_{k-1}, x_k]\})(x_k - x_{k-1}) \\
= \ & K(U(P_{\frac{\varepsilon}{K}}, f) - L(P_{\frac{\varepsilon}{K}}, f)) < K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

((*) Esta igualdad se sigue de los Ejercicio 13 y 11 de la Hoja 2 de Problemas, tomando $A = \{g \circ f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ y $B = \{-g \circ f(y) : y \in [x_{k-1}, x_k]\}$).

Entonces, la partición $P_{\frac{\varepsilon}{K}}$ que hemos tomado para f nos vale como partición P_ε para $g \circ f$. $\square$

Obtenemos ahora algunas consecuencias del resultado anterior:

Proposición 7.23 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces la función $|f| : x \in [a,b] \mapsto |f|(x) = |f(x)|$ es también integrable en $[a,b]$ y se verifica que*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \leq M(b-a)$$

siendo M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$.

Demostración. Consideremos la función

$$g : y \in [-M, M] \mapsto g(y) = |y|.$$

Esta función es lipschitziana (con constante $K = 1$) y entonces la composición de f con g es integrable, y esta composición no es otra que la función

$$x \in [a,b] \mapsto g \circ f(x) = |f(x)|.$$

Como $f \leq |f|$ y $-f \leq |f|$ se tiene que $\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$ y $-\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$ y por lo tanto $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$. Finalmente, al ser $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$ resulta que $\int_a^b |f| \leq M(b-a)$. □

Proposición 7.24 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces f^2 es también integrable.*

Demostración. La función f^2 es la composición de la función f con la función

$$g : y \in [\,-M, M] \mapsto g(y) = y^2$$

siendo M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. Esta función g es lipschitziana pues para todo $y, z \in [\,-M, M]$ se verifica que

$$|g(y) - g(z)| = |y^2 - z^2| = |y+z||y-z| \leq 2M|y-z|.$$

Luego $f^2 = g \circ f$ es integrable. □

Nota 7.25 *La anterior proposición se generaliza, por inducción, a cualquier potencia natural de una función integrable.*

Proposición 7.26 *Si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son dos funciones integrables, entonces fg es también integrable.*

Demostración. Un simple cálculo muestra que

$$fg = \frac{1}{2}\left((f+g)^2 - f^2 - g^2\right)$$

y entonces, como $(f+g)^2$, f^2, g^2 y la diferencia $(f+g)^2 - f^2 - g^2$ y el producto de $(f+g)^2 - f^2 - g^2$ por $\frac{1}{2}$ son integrable lo es fg. □

Proposición 7.27 *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable y existe $m > 0$ tal que $m \leq f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\frac{1}{f}$ es integrable en $[a, b]$.*

Demostración. La función $\frac{1}{f}$ es la composición de la función f con la función $y \mapsto \frac{1}{y}$. Esta última función es lipschitziana en $[m, +\infty)$ pues

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right| = \frac{|y - z|}{|yz|} \leq \frac{|y - z|}{m^2} = \frac{1}{m^2}|y - z| \quad \text{para todo } y, z \text{ con } y, z \geq m.$$

$\square$

Capítulo 8

Teoremas fundamentales del Cálculo Integral

En esta sección obtendremos dos teoremas que realmente son fundamentales en el cálculo, de ellos se deducirán varios resultados posteriormente.

Teorema 8.1 (Primer teorema fundamental del Cálculo Integral, R. de Barrow) *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable y suponemos que existe una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Demostración. Consideremos una partición $P = \{x_0, ..., x_n\}$ de $[a, b]$. Aplicando el teorema del Valor Medio (teorema 5.20) a la función F en cada uno de los intervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, ..., n$, obtenemos, por cada uno de ellos, un punto $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tal que

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(c_k)(x_k - x_{k-1}) = f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

de donde se sigue que

$$m_k(x_k - x_{k-1}) \leq f(c_k)(x_k - x_{k-1}) = F(x_k) - F(x_{k-1}) \leq M_k(x_k - x_{k-1})$$

siendo $m_k =$ínf$f([x_{k-1}, x_k])$ y $M_k = \sup f([x_{k-1}, x_k])$. En consecuencia

$$\begin{aligned} L(P, f) &= \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1})) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

y por otra parte

$$\begin{aligned} U(P,f) &= \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) \\ &\geq \sum_{k=1}^{n}(F(x_k) - F(x_{k-1})) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

lo que nos da que

$$L(P,f) \leq F(b) - F(a) \leq U(P,f).$$

En consecuencia,

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P,f) : P \in \mathcal{P}([a,b])\} \leq F(b) - F(a) \leq \inf\{U(P,f) : P \in \mathcal{P}([a,b])\} = \overline{\int_a^b} f$$

y al ser f integrable,

$$\underline{\int_a^b} f = \int_a^b f = \overline{\int_a^b} f$$

por lo tanto,

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

$\square$

Ejemplo 8.2 *Calcular la*

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx.$$

La función

$$f : x \in [1,2] \mapsto f(x) = \frac{1}{x^2}$$

es integrable en $[1,2]$ *(es continua). La función*

$$F : x \in [1,2] \mapsto -\frac{1}{x}$$

es derivable en $[1,2]$ *y* $F'(x) = f(x)$ *para todo* $x \in [1,2]$*. Luego*

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = F(2) - F(1) = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}.$$

Teorema 8.3 (segundo teorema fundamental del Cálculo Integral) *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función integrable y sea*

$$F : x \in [a,b] \mapsto F(x) = \int_a^x f.$$

Entonces F *es continua en* $[a,b]$*. Si* f *es continua en un punto* $c \in [a,b]$ *se verifica que* F *es derivable en* c *y* $F'(c) = f(c)$*.*

Demostración. Sea $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. Sea $c \in [a,b]$. Si $x \in [a,b]$ y $x > c$, se verifica que

$$F(x) - F(c) = \int_a^x f - \int_a^c f = \int_c^x f$$

y si $x < c$ entonces

$$F(x) - F(c) = \int_a^x f - \int_a^c f = -\int_x^c f.$$

(téngase en cuenta que si $x > c$ entonces $\int_a^x f = \int_a^c f + \int_c^x f$ y que si $x < c$ entonces $\int_a^c f = \int_a^x f + \int_x^c f$). En cualquier caso,

$$|F(x) - F(c)| \leq M|x - c|.$$

(se ha utilizado la proposición 7.23). Luego, si dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ se tiene que $|F(x) - F(c)| \leq M|x - c| < \varepsilon$ si $|x - c| < \delta$. Observamos que la desigualdad anterior nos dice que incluso F es lipschitziana en $[a,b]$, pues x y c se pueden tomar de forma arbitraria en $[a,b]$.

Supongamos ahora que f es continua en un punto $c \in [a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$ sea $\delta > 0$ tal que $|f(y) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$ siempre que $y \in [a,b]$, $|y - c| < \delta$. Consideremos de momento solamente $x \in [a,b]$, con $x > c$ y $|x - c| < \delta$ (si $c = b$ no se considera esta situación), entonces

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c)\right| &= \left|\frac{1}{x - c}\left(\int_c^x f(y)dy - \int_c^x f(c)dy\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{x - c}\right| \left|\int_c^x (f(y) - f(c))dy\right| \\
&\leq \frac{1}{x - c}\frac{\varepsilon}{2}(x - c) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Téngase en cuenta que al ser $|x - c| < \delta$ también $|y - c| < \delta$ para todo $y \in [c,x]$. Si ahora consideramos $x \in [a,b]$, con $x < c$ y $|x - c| < \delta$ (si $c = a$ no se considera esta situación), entonces

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c)\right| &= \left|\frac{1}{x - c}\left(-\int_x^c f(y)dy + \int_x^c f(c)dy\right)\right| \\
&= -\frac{1}{x - c}\left|\int_x^c (f(y) - f(c))dy\right| \\
&= \frac{1}{c - x}\left|\int_x^c (f(y) - f(c))dy\right| \\
&\leq \frac{1}{c - x}\frac{\varepsilon}{2}(c - x) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Resulta así que

$$\lim_{x \to c}\frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c)$$

y por lo tanto existe $F'(c)$ y su valor es precisamente $f(c)$. □

Corolario 8.4 *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y se define una función F en $[a, b]$ por la expresión*

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Entonces F es derivable en $[a, b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Demostración. Basta observar que, como se acaba de probar, F es derivable en todos los puntos en los que f es continua y, por hipótesis, f es continua en todo $[a, b]$. También el teorema anterior nos dice que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. □

Esta función F se suele llamar la **integral indefinida** de f en $[a, b]$ con base en a.

Nota 8.5 *Observamos que el teorema anterior tiene una versión similar para la función*

$$F : x \in [a, b] \mapsto F(x) = \int_x^b f.$$

Téngase en cuenta que $\int_x^b f = \int_a^b f - \int_a^x f$.

Nota 8.6 *De los dos teoremas anteriores se deduce que:*

(a) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función derivable tal que f' es integrable en $[a, b]$ y $f(a) = 0$. Entonces $\int_a^x f' = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, esto es, f es la integral indefinida de su derivada.

(b) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua entonces $\left(\int_a^x f\right)' = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, esto es, f es la derivada de su integral indefinida.

8.1. Cálculo de integrales

A continuación estudiaremos algunas reglas para el cálculo de integrales, daremos una regla de integración por partes y dos teoremas de cambio de variable.

Definición 8.7 *Se dice que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene una primitiva en $[a, b]$ si existe una función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable en $[a, b]$ tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.*

Proposición 8.8 (regla de integración por partes) *Si f y g son dos funciones integrables en un intervalo $[a,b]$ y tienen primitivas F y G respectivamente en $[a,b]$, entonces*

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

Nota. Suele escribirse esto en la forma

$$\int_a^b FG' = FG]_a^b - \int_a^b F'G.$$

Demostración. Consideremos la función H definida en $[a,b]$ por la expresión

$$H(x) = F(x)G(x).$$

Dado que F y G son derivables también lo es H, y por la regla de derivación de un producto, se tiene que

$$\begin{aligned} H'(x) &= F'(x)G(x) + F(x)G'(x) \\ &= f(x)G(x) + F(x)g(x) \end{aligned}$$

Esto prueba que H es una primitiva de la función $fG+Fg$. Las funciones F y G son integrables pues son continuas por ser derivables, luego $fG+Fg$ es integrable, y si aplicamos la primera forma del teorema fundamental del cálculo, obtenemos que

$$\int_a^b (fG + Fg) = H(b) - H(a)$$

de donde se sigue el resultado. □

Ejemplo 8.9 *Calcular la*

$$\int_0^1 xe^x dx.$$

Observamos que e^x es el valor de la función exponencial en x. Esta función se estudiará más adelante, aquí usaremos el hecho de que esa función es derivable en cada punto de $\mathbb{R}$ y que su función derivada coincide con ella misma y su valor en 1 es el número e y en 0 es 1.

Si hacemos $f(x) = 1, F(x) = x$, $g(x) = e^x$ y $G(x) = e^x$ entonces F es una primitiva de f y G lo es de g. Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^x dx &= \int_0^1 F(x)g(x)dx \\ &= [F(1)G(1) - F(0)G(0)] - \int_0^1 f(x)G(x)dx \\ &= e - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - (e-1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

8.2. Teoremas de cambio de variable y del valor medio

Teorema 8.10 (primer teorema de cambio de variable) *Sea $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ una función derivable y con su derivada continua en $[\alpha, \beta]$ (se dice en esta situación que φ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ en $[\alpha, \beta]$). Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$ que contenga a $\varphi([\alpha, \beta])$, entonces*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.$$

Demostración. Como f es continua en $[a, b]$ podemos definir la función

$$F : u \in [a, b] \mapsto F(u) = \int_a^u f(x)dx.$$

Sabemos, por el segundo teorema fundamental del cálculo, que esta función es derivable en cada punto de $[a, b]$ y que $F'(u) = f(u)$ para todo $u \in [a, b]$.

Consideremos ahora la función

$$H : t \in [\alpha, \beta] \mapsto H(t) = F(\varphi(t))$$

(tiene sentido hacer esta composición pues $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$). Dado que φ y F son derivables lo es también H y además

$$H'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \quad \text{para todo } t \in [\alpha, \beta].$$

Aplicando ahora el primer teorema fundamental del Cálculo a la función $t \in [\alpha, \beta] \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ obtenemos que

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = H(\beta) - H(\alpha).$$

Vamos ahora a calcular $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$, usaremos de nuevo el primer teorema fundamental del Cálculo. Supongamos en primer lugar que $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$. Entonces, como $[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)] \subset [a, b]$,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} F'(x)dx = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = H(\beta) - H(\alpha).$$

Si $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = 0 = H(\beta) - H(\alpha).$$

Si, finalmente $\varphi(\beta) < \varphi(\alpha)$, como $[\varphi(\beta), \varphi(\alpha)] \subset [a, b]$,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = -\int_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\alpha)} f(x)dx = -\int_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\alpha)} F'(x)dx = H(\beta) - H(\alpha).$$

En cualquier caso,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = H(\beta) - H(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

$\square$

Ejemplo 8.11 *Cálculo de la integral*

$$\int_1^5 \frac{t}{1+t^2}dt.$$

Si hacemos $f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}$ *y* $\varphi(t) = t^2$ *resulta que*

$$\frac{t}{1+t^2} = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

y entonces

$$\begin{aligned} \int_1^5 \frac{t}{1+t^2}dt &= \int_1^5 f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{\varphi(1)}^{\varphi(5)} \frac{1}{1+x}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_1^{25} \frac{1}{1+x}dx. \end{aligned}$$

Dado que la derivada de la función $\log$ *(que es la inversa de la exponencial) es* $\log'(1+x) = \frac{1}{1+x}$, *de la primera forma del teorema fundamental del cálculo se sigue que*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_1^{25} \frac{1}{1+x}dx &= \frac{1}{2}(\log(1+25) - \log(1+1)) \\ &= \frac{1}{2}(\log(26) - \log(2)) \\ &= \frac{1}{2}\log 13. \end{aligned}$$

Se ha usado la propiedad de que el $\log$ *de un cociente es la diferencia del logaritmo del numerador y el del denominador. Esta propiedad, y la fórmula que da su derivada se justificarán más adelante.*

Teorema 8.12 (segundo teorema de cambio de variable) *Sea* $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *una función derivable y con derivada continua en* $[\alpha, \beta]$, *tal que* $\varphi'(t) \neq 0$ *para todo* $t \in [\alpha, \beta]$. *Si* f *es una función continua en un intervalo* $[a, b]$ *que contenga al intervalo* $\varphi[\alpha, \beta]$ *y* φ^{-1} *es la función inversa de* φ, *entonces*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)(\varphi^{-1})'(x)dx.$$

Demostración. Como $\varphi'(t) \neq 0$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$ se tiene que φ es estrictamente monótona (véase la nota 5.24 y téngase en cuenta que al ser φ' continua y ser $\varphi'(t) \neq 0$ para todo $t \in [\alpha, \beta]$ se verifica que $\varphi'(t)$ es siempre mayor que 0, o siempre menor que 0). Toda función estrictamente monótona tiene una inversa (pues es inyectiva) y además esta inversa φ^{-1} es derivable y su derivada es continua, pues por el teorema 5.11,

$$\left(\varphi^{-1}\right)' = \frac{1}{\varphi' \circ \varphi^{-1}}$$

y como φ' es continua y no se anula este cociente es una función continua.

Si denotamos por G a una primitiva de la función continua $f \circ \varphi$ (tal primitiva existe por el segundo teorema fundamental Cálculo), tenemos que

$$\begin{aligned} \left(G \circ \varphi^{-1}\right)'(x) &= G'(\varphi^{-1}(x)) \left(\varphi^{-1}\right)'(x) \\ &= (f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x)) \left(\varphi^{-1}\right)'(x) \\ &= f(x) \left(\varphi^{-1}\right)'(x) \quad \text{para todo } x \in [a, b]. \end{aligned}$$

Resulta así que $G \circ \varphi^{-1}$ es una primitiva de $f\left(\varphi^{-1}\right)'$ y entonces, por el primer teorema fundamental del cálculo, se tiene, tanto si $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$ como si $\varphi(\alpha) > \varphi(\beta)$, que

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) \left(\varphi^{-1}\right)'(x) dx &= (G \circ \varphi^{-1})(\varphi(\beta)) - (G \circ \varphi^{-1})(\varphi(\alpha)) \\ &= G(\beta) - G(\alpha). \end{aligned}$$

□

Por otra parte, al ser G una primitiva de $f \circ \varphi$ se tiene, de nuevo por la primera forma del teorema fundamental del cálculo que

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

y por lo tanto

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) \left(\varphi^{-1}\right)'(x) dx.$$

Ejemplo 8.13 *Cálculo de la*

$$\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt.$$

Si definimos $f(x) = \frac{1}{1+x}$ y $\varphi(t) = \sqrt{t}$ resulta que

$$\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt = \int_1^4 (f \circ \varphi)(t) dt.$$

En este caso $[\alpha, \beta] = [1, 4]$, $[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)] = [1, 2]$, φ es derivable en $[1, 4]$ y su derivada es

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}},$$

esta función φ' es continua en $[1, 4]$ y $\varphi'(t) > 0$ para todo $t \in [1, 4]$. La función inversa de φ en $[1, 4]$ es $\varphi^{-1}(x) = x^2$ y la función f es continua en $[1, 2]$ y entonces, por el teorema anterior,

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{t}}dt &= \int_1^4 (f \circ \varphi)(t)dt \\
&= \int_1^2 f(x)(\varphi^{-1})'(x)dx \\
&= \int_1^2 \frac{1}{1+x} 2x dx \\
&= 2\int_1^2 \frac{1+x-1}{1+x}dx \\
&= 2\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx \\
&= 2\left(\int_1^2 1dx - \int_1^2 \frac{1}{1+x}dx\right) \\
&= 2\left(1 - \int_1^2 \frac{1}{1+x}dx\right).
\end{aligned}$$

Ahora bien, como ya indicamos anteriormente, $\log'(1+x) = \frac{1}{1+x}$ y entonces, por el primer teorema fundamental del cálculo integral, se tiene que

$$\int_1^2 \frac{1}{1+x}dx = \log 3 - \log 2 = \log \frac{3}{2}$$

y finalmente

$$\int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{t}}dt = 2\left(1 - \log\frac{3}{2}\right).$$

Teorema 8.14 (del valor medio del Cálculo Integral) *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable tal que $g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces existe un punto $c \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Demostración. Sabemos que toda función continua es integrable (Proposición 7.15) y que el producto de funciones integrables e integrable (Proposición 7.26), entonces fg es integrable. Sean

$$m = \text{ínf} f([a, b]) \;\text{ y }\; M = \sup f([a, b]).$$

Como $g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ se tiene que

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

y entonces,

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

Si $\int_a^b g(x)dx = 0$ cualquier $c \in [a,b]$ verifica la fórmula del teorema, si $\int_a^b g(x)dx \neq 0$, se sigue de las desigualdades anteriores que

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M.$$

Por el corolario del teorema de Bolzano (Corolario 4.51) existe $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

y de aquí se sigue el resultado. □

Corolario 8.15 *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ entonces existe $c \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Demostración. Basta considerar la función $g(x) = 1$ para todo $x \in [a,b]$ y aplicar el teorema anterior. □

Cuando se obtuvo el teorema de Taylor en el tema anterior se dijo que había también una fórmula integral para el resto, esto es, para la diferencia entre una función y su polinomio de Taylor. Es ahora el momento de obtenerla.

Teorema 8.16 (de Taylor con el resto en forma integral) *Sean $n \in \mathbb{N}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función que tenga todas las derivadas f', f'', ..., $f^{n+1)}$ y que éstas sean continuas*[1] *en $[a,b]$ y $x_0 \in [a,b]$. Entonces, para todo $x \in [a,b]$, $x \neq x_0$, se verifica que*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots \\ &+ \frac{1}{n!}f^{n)}(x_0)(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n f^{n+1)}(t)dt. \end{aligned}$$

[1] Realmente las primeras n derivadas ya son continuas por ser derivables.

Demostración. Obsérvese en primer lugar que al ser $f^{n+1)}$ continua es integrable, y entonces, fijado $x \in [a,b]$, también es integrable la función $t \in [a,b] \mapsto (x-t)^n f^{n+1)}(t)$. Calculemos la integral de la anterior fórmula, usando el método de integración por partes, aplicándoselo a las funciones[2]

$$f_1(t) = -n(x-t)^{n-1}, \quad F_1(t) = (x-t)^n, \quad g_1(t) = f^{n+1)}(t) \quad y \quad G_1(t) = f^{n)}(t)$$

en el intervalo $[x_0, x]$ o $[x, x_0]$ según que $x > x_0$ o $x < x_0$.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{n+1)}(t)dt \\ = & \frac{1}{n!}\left((x-x)^n f^{n)}(x) - (x-x_0)^n f^{n)}(x_0) + n\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f^{n)}(t)dt\right) \\ = & -\frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1} f^{n)}(t)dt. \end{aligned}$$

Si ahora calculamos, de nuevo por el método de integración por partes, la última integral de la fórmula anterior obtenemos

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1} f^{n)}(t)dt = -\frac{f^{n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-2} f^{n-1)}(t)dt.$$

Si seguimos calculando estas integrales, al final obtendremos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{n+1)}(t)dt = & -\frac{f^{n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n - \frac{f^{n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} - \cdots \\ & -\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 - \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{1}{0!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^0 f'(t)dt. \end{aligned}$$

Como

$$\int_{x_0}^{x}(x-t)^0 f'(t)dt = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x) - f(x_0)$$

se tiene el resultado. □

Nota 8.17 *Hay otra forma para definir la integral de Riemann para una función acotada*[3] $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, *que consiste en considerar por cada partición* $P = \{x_0, ..., x_n\}$ *de* $[a,b]$ *una colección de puntos* $T = \{t_1, ..., t_n\}$, *de forma que cada* $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, *definir las sumas de Riemann* $S(P, f, T)$ *como*

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

[2] Se usan funciones con subíndice para que no haya confusión entre la función f de este teorema y la de la Regla de integración por partes.

[3] Puede probarse que las funciones que verifican la condición que sigue son necesariamente continuas.

y decir que f *es integrable en* $[a, b]$ *si existe un número real* A *tal que para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *de forma que para toda partición* P *de* $[a, b]$*, en la que el máximo de las distancias entre cada dos puntos consecutivos sea menor que* δ*, se verifica que*

$$|S(P, f, T) - A| < \varepsilon$$

para toda colección T *de puntos de* $[a, b]$ *en las condiciones anteriores. Hay un teorema de Darboux (matemático francés, 1842–1917) que prueba la equivalencia entre esta definición y la que nosotros hemos manejado aquí.*

Capítulo 9

Integrales impropias

Hasta ahora hemos trabajado siempre con funciones acotadas definidas en un intervalo cerrado y acotado, vamos a ver ahora como, en algunos casos, también tiene sentido hablar de integrales de funciones definidas en intervalos no necesariamente cerrados ni acotados y también de integrales de funciones no acotadas. Empezamos estudiando la integración para funciones definidas en un intervalo $(a, b]$.

Definición 9.1 *Se dice que una función $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ (no necesariamente acotada) es integrable en $(a, b]$ ($a \in \mathbb{R}$) si es integrable en $[c, b]$ para todo $c \in (a, b)$ y existe el*

$$\lim_{c \to a} \int_c^b f$$

y es un número real A. (Nótese que realmente se trata de un límite por la derecha, no usamos la notación $c \to a^+$ pues no hay peligro de confusión, f no está definida a la izquierda de a). Esto quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de forma que

$$\left| \int_c^b f - A \right| < \varepsilon$$

para todo $c \in (a, a + \delta)$. Este número real A se llama la ***integral impropia*** *de f en $(a, b]$ y se representa por $\int_{a^+}^b f$, o cometiendo un abuso de notación, por $\int_a^b f$. Si no hay peligro de confusión usaremos esta última notación.*

Nota 9.2 *Puede darse una definición análoga para funciones definidas en intervalos de la forma $[a, b)$ con $b \in \mathbb{R}$.*

Nota 9.3 *Si f y g son dos funciones integrables en $(a, b]$ también lo es $f + g$ y si λ es un número real, también λf es integrable en $(a, b]$.*

Ejemplo 9.4 *La función* $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ *no es acotada pero es integrable en* $(0,1]$*, pues para todo* $c \in (0,1)$ *la función* f *es integrable en* $[c,1]$ *por tratarse de una función continua, y como para todo* $c \in (0,1)$ *se verifica que*

$$\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_c^1 (2\sqrt{x})'dx = 2(1-\sqrt{c}),$$

existe el límite de $\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ *cuando* c *tiende a* 0 *(por la derecha) y*

$$\lim_{c\to 0}\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{c\to 0} 2(1-\sqrt{c}) = 2.$$

Entonces

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2.$$

Ejemplo 9.5 *La función* $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \frac{1}{x^2}$ *no es integrable en* $(0,1]$*, pues aunque* f *es integrable en* $[c,1]$ *para todo* $c \in (0,1)$*, se tiene que*

$$\int_c^1 \frac{1}{x^2}dx = \int_c^1 \left(-\frac{1}{x}\right)' dx = -1 + \frac{1}{c}$$

y el límite de $-1 + \frac{1}{c}$*, cuando* c *tiende a* 0 *(por la derecha), es* $+\infty$*.*

Ejemplo 9.6 *Si ahora consideramos la función* $f(x) = \frac{1}{x}$ *en el intervalo* $(0,1]$ *resulta que para todo* $c \in (0,1)$ *la función* f *es integrable en* $[c,1]$ *y se verifica que*

$$\int_c^1 \frac{1}{x}dx = \int_c^1 \log' x dx = \log 1 - \log c = -\log c.$$

Como el $\lim_{c\to 0} \log c = -\infty$ *resulta que* f *no es integrable en* $(0,1]$*.*

Definición 9.7 *Se dice que* $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ *es integrable en* $[a,+\infty)$ *si* f *es integrable en* $[a,c]$ *para todo* $c > a$ *y existe el*

$$\lim_{c\to +\infty} \int_a^c f$$

y es un número real A*. Esto quiere decir que para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $K > 0$ *de forma que*

$$\left| \int_a^c f - A \right| < \varepsilon$$

para todo $c > K$*. Este número real* A *se llama la* ***integral impropia*** *de* f *en* $[a,+\infty)$ *y se representará por* $\int_a^{+\infty} f$*. De manera análoga se define la integrabilidad impropia para funciones definidas en* $(-\infty, b]$*.*

Ejemplo 9.8 *La función f definida en $[1,+\infty)$ por la expresión $f(x)=\frac{1}{x}$ no es integrable en $[1,+\infty)$, pues aunque para todo $c>1$ la función es integrable en $[1,c]$, se tiene que*

$$\int_1^c \frac{1}{x}dx = \int_1^c \log' x dx = \log c$$

y como $\lim\limits_{c\to+\infty} \log c = +\infty$, la función f no es integrable en $[1,+\infty)$.

Ejemplo 9.9 *Sea $\alpha>0$, $\alpha\in\mathbb{Q}$, $\alpha\neq 1$, y consideremos la función $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ definida en $[1,+\infty)$. Para cualquier $c>1$ se tiene que*

$$\int_1^c f = \int_1^c \frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{1}{1-\alpha}\int_1^c \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right)' dx = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{c^{\alpha-1}}-1\right).$$

Si $\alpha>1$ entonces

$$\lim_{c\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{c^{\alpha-1}}-1\right)=\frac{1}{\alpha-1}$$

por lo que f es integrable en $[1,+\infty)$ y su integral impropia es $\frac{1}{\alpha-1}$.

Si $\alpha<1$ entonces

$$\lim_{c\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{c^{\alpha-1}}-1\right)=+\infty,$$

luego, si $\alpha<1$, f no tiene integral impropia en $[1,+\infty)$. Si $\alpha=1$ la función f está definida por $f(x)=\frac{1}{x}$ y se vio en el ejemplo anterior que esta función no tiene integral impropia en $[1,+\infty)$.

Nota 9.10 *Si α es un número real y f es una función integrable en $[a,+\infty)$, también αf lo es, y si g es otra función integrable en $[a,+\infty)$ también lo es $f+g$. Sin embargo puede ocurrir que fg no lo sea, o incluso que f^2 no sea integrable aun siéndolo f. En efecto, consideremos la función f definida en $[0,+\infty)$ por*

$$f(x)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ para } x\in[n-1,n).$$

Entonces, para todo $m\in\mathbb{N}$ se verifica que

$$\int_0^m f = \frac{-1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{(-1)^m}{\sqrt{m}}.$$

Se demostrará más adelante que esta sucesión $\left(\int_0^m f\right)$ es convergente, mientras que la sucesión cuyos términos son

$$\int_0^m f^2 = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}$$

no lo es.

Definición 9.11 *Se dice que* $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ *es integrable en* (a,b) *si existe* $c\in(a,b)$*, tal que* f *es integrable en* $(a,c]$ *y en* $[c,b)$*. En este caso se define*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Nota 9.12 *Debe observarse que si hay un* $c\in(a,b)$ *con la propiedad anterior, entonces también* f *es integrable en* $(a,d]$ *y en* $[d,b)$ *para todo* $d\in(a,b)$ *y*

$$\int_a^b f = \int_a^d f + \int_d^b f,$$

pues, si por ejemplo $d<c$*, entonces*

$$\begin{aligned}\int_a^c f + \int_c^b f &= \int_a^d f + \int_d^c f + \int_c^b f\\ &= \int_a^d f + \int_d^b f.\end{aligned}$$

Si $c<d$ la demostración es análoga.

Ejemplo 9.13 *La función* $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ *definida por* $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *es integrable en* $(-1,1)$*. En efecto,*

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \lim_{c\to1}\int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{c\to1}\int_0^c arcsen'\, x dx\\ &= \lim_{c\to1} arcsen\ c = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Dado que $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *es par*

$$\int_{-c}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

y, por lo tanto,

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

y entonces

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \pi.$$

Obsérvese que esta función no es acotada y sin embargo tiene integral (impropia).

Definición 9.14 *Se dice que $f : (a, +\infty)$ es integrable en $(a, +\infty)$ si lo es en $(a, c]$ y en $[c, +\infty)$ para algún $c > a$ y se define*

$$\int_a^{+\infty} f := \int_a^c f + \int_c^{+\infty} f = \lim_{d \to a} \int_d^c f + \lim_{e \to +\infty} \int_c^e f.$$

De manera análoga se define la integrabilidad para funciones definidas en $(-\infty, b)$.

Cuando se trate de una función $f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$, se dice que f es integrable si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que f es integrable en $(-\infty, c]$ y en $[c, +\infty)$. En este caso se define

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_{-\infty}^{c} f + \int_c^{+\infty} f.$$

Puede hacerse aquí la misma consideración anterior respecto al punto c.

Cuando $f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ es integrable entonces para todo $c \in \mathbb{R}$ existe el $\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} f$ y su valor es precisamente $\int_{-\infty}^{+\infty} f$, pues

$$\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} f = \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{0} f + \lim_{c\to\infty} \int_0^c f = \int_{-\infty}^{0} f + \int_0^{+\infty} f = \int_{-\infty}^{+\infty} f.$$

Puede ocurrir que exista el $\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} f$ y que sin embargo f no sea integrable en $(-\infty, +\infty)$. Esto ocurre por ejemplo con la función $f(x) = x$. Obsérvese que para todo $c \in \mathbb{R}$ se verifica que $\int_{-c}^{c} x dx = 0$, y sin embargo el $\lim_{c\to+\infty} \int_0^c x dx = +\infty$. El valor del $\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} f$, cuando exista y sea un número real, se llama el Valor Principal de Cauchy de la integral de f.

Ejemplo 9.15 *La función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es integrable en $(-\infty, +\infty)$. En efecto,*

$$\int_0^c \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan c \ \to \frac{\pi}{2}$$

por lo que, al ser f una función par,

$$\int_{\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.$$

Ejemplo 9.16 *La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ no es integrable en $(0, +\infty)$ pues no lo es en $[1, +\infty)$ debido a que*

$$\int_1^c \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2(\sqrt{c} - 1) \to \infty$$

cuando $c \to +\infty$.

Damos a continuación algunos criterios para asegurar la convergencia de integrales impropias. Trabajaremos con intervalos de la forma $[a,b)$ donde b puede ser un número real o $+\infty$.

Proposición 9.17 *Sea $f:[a,b)\to[0,+\infty)$ una función integrable en $[a,c]$ para todo $c\in(a,b)$. Entonces, f es integrable en $[a,b)$ si y sólo si existe $C>0$ tal que $\int_a^c f\le C$ para todo $c\in(a,b)$.*

Demostración. Supongamos que f es integrable en $[a,b)$ y sea $C:=\int_a^b f$. Como para todo $c\in(a,b)$ se verifica que

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$$

y al ser $f\ge 0$, $\int_c^b f$ también es mayor o igual que 0, resulta que

$$\int_a^x f\le\int_a^b f=C \ \text{ para todo } c\in(a,b).$$

Por otra parte, si suponemos que existe $C>0$ tal que $\int_a^c f\le C$ para todo $c\in(a,b)$ resulta que el conjunto

$$A=\left\{\int_a^c f : c\in(a,b)\right\}$$

está acotado superiormente y entonces tiene un supremo u. Veamos como existe el $\lim\limits_{c\to b}\int_a^c f$ y éste es u.

Dado $\varepsilon>0$ el número real $u-\varepsilon$ no es una cota superior de A, entonces existe $c_0\in(a,b)$ tal que

$$u-\varepsilon<\int_a^{c_0} f.$$

Sea $\delta=b-c_0$ si $b\ne+\infty$ y $K=c_0$ si $b=+\infty$. Al ser $f(x)\ge 0$ para todo $x\in(a,b)$ se sigue de lo anterior que

$$u-\int_a^c f<\varepsilon \ \text{ para todo } c\in(c_0,c_0+\delta) \text{ si } b\ne+\infty \text{ y } c>K \text{ si } b=+\infty.$$

Dado que $u-\int_a^c f\ge 0$ se tiene que

$$\left|\int_a^c f-u\right|=u-\int_a^c f<\varepsilon \ \text{ para todo } c\in(c_0,c_0+\delta)$$

lo que nos da que

$$\lim_{c\to b}\int_a^c f=u.$$

$\square$

Este criterio puede usarse para probar la existencia o no de ciertas integrales impropias. Por ejemplo.

Ejemplo 9.18 *Las funciones constantes, que no sean la constante* 0*, no son integrables en* $[a, +\infty)$.

En efecto, si $f(x) = d$ con $d > 0$ para todo $x \in [a, +\infty)$, entonces

$$\int_a^c f = d(c-a).$$

Ciertamente el conjunto de los números reales $\{d(c-a) : c > a\}$ no está acotado superiormente. Si $d < 0$, $-f$ no es integrable y por lo tanto no lo es f.

Ejemplo 9.19 *La función*

$$f(x) = \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}$$

no es integrable en $[\pi, +\infty)$.

En efecto, por cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x} dx &\geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{(n+1)\pi} dx \\
&= \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \\
&= \frac{2}{(n+1)\pi}.
\end{aligned}$$

De aquí se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x} dx &= \int_{\pi}^{2\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x} + \cdots + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x} \\
&\geq \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

y esta cantidad no está acotada.

Proposición 9.20 (criterio de comparación) *Sean* f *y* g *dos funciones definidas en el intervalo* $[a, b)$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, *siendo* f *integrable en* $[a, c]$ *para todo* $c \in [a, b)$ *y* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in [a, b)$*. Entonces, si* g *es integrable en* $[a, b)$ *también lo es* f.

Demostración. Basta aplicar la proposición anterior teniendo en cuenta que al ser $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b)$ entonces

$$\int_a^c f \leq \int_a^c g \leq \int_a^b g.$$

□

Nota 9.21 *También se verifica lo análogo para intervalos de la forma* $(a, b]$ *con* $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Ejemplo 9.22 *La función* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}e^x}$ *es integrable en* $(0, +\infty)$ *ya que* $f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ *en* $(0, 1]$, *que es integrable en ese intervalo y* $f(x) \leq \frac{1}{e^x}$ *en* $[1, +\infty)$, *que es integrable en ese intervalo.*

Proposición 9.23 (criterio de comparación por paso al límite) *Sean* f *y* g *dos funciones definidas en el intervalo* $[a, b)$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, *que sean integrables en* $[a, c]$ *para todo* $c \in (a, b)$, *siendo* $f(x) \geq 0$ *y* $g(x) > 0$ *para todo* $x \in (a, b)$. *Si*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = l > 0$$

entonces, f *es integrable en* $[a, b)$ *si y sólo si lo es* g.

Demostración. Tomemos $\varepsilon = \frac{l}{2}$. Existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (b - \delta, b) \cap [a, b)$ si $b \neq +\infty$ y $x > K$, para un cierto $K \geq a$, si $b = +\infty$, se verifica que

$$l - \frac{l}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < l + \frac{l}{2}$$

esto es,

$$\frac{l}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}l,$$

y entonces

$$\frac{l}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}g(x).$$

El resultado se sigue del criterio de comparación. □

Nota 9.24 *Con un argumento similar al anterior se puede probar que si* $l = 0$ *entonces* f *es integrable si* g *lo es y que si* $l = +\infty$, *entonces* g *es integrable si* f *lo es.*

Proposición 9.25 *Si para una función* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ *que sea integrable en* $[a, c)$ *para todo* $c \in (a, b)$ *se verifica que* $|f|$ *es integrable entonces* f *es integrable.*

Demostración. Dado que $-f \leq |f|$ resulta que

$$0 \leq |f| - f \leq 2|f|.$$

Al ser $|f|$ integrable también lo es $2|f|$ y entonces lo es $|f| - f$ y por lo tanto f. □

Nota 9.26 *No es cierto, en general que si f tiene integrable impropia en $[a,+\infty)$ también la tenga $|f|$. Basta observar que*

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

es integrable en $[\pi,+\infty)$, mientras que, como hemos visto,

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right|$$

no lo es (nótese que al estar trabajando en el intervalo $[\pi,+\infty)$, $\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| = \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}$). La integrabilidad de $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ en $[\pi,+\infty)$ puede obtenerse, integrando por partes, así:

$$\begin{aligned}\int_\pi^c \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx &= \int_\pi^c \frac{1}{x} \operatorname{sen} x dx \\ &= \frac{1}{c}(-\cos c) - \frac{1}{\pi}(-\cos\pi) - \int_\pi^c -\frac{1}{x^2}(-\cos x)dx \\ &= \frac{-\cos c}{c} - \frac{1}{\pi} - \int_\pi^c \frac{\cos x}{x^2}dx.\end{aligned}$$

La función $\frac{\cos x}{x^2}$ tiene integral impropia en $[\pi,+\infty)$ lo que se obtiene teniendo en cuenta que $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ y que, como se ha visto anteriormente, $\frac{1}{x^2}$ es integrable en $[\pi,+\infty)$ pues hemos visto que lo es en $[1,+\infty)$. Entonces existe el

$$\lim_{c\to+\infty} \int_\pi^c \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

y su valor es

$$-\frac{1}{\pi} - \int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx.$$

La función f se llama la función seno cardinal y es de gran importancia en la teoría de la señal. Puede comprobarse, con técnicas de variable compleja, que el valor de su integral entre ($-\infty$ y $+\infty$) es π.

Capítulo 10

Sucesiones de funciones

Comenzamos definiendo el concepto de sucesión de funciones.

Definición 10.1 *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, llamaremos sucesión de funciones en A a cualquier aplicación que asigne a cada número natural una función definida en A con valores en $\mathbb{R}$. Si por cada n denotamos por f_n a la imagen del natural n por esa aplicación, la correspondiente sucesión se denotará por (f_n). Obsérvese la analogía con las sucesiones de números reales.*

Definición 10.2 *Dados un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ y un subconjunto A_0 de A, se dice que una sucesión de funciones (f_n) en $A \subset \mathbb{R}$ es **puntualmente convergente** en A_0 a una función $f : A_0 \to \mathbb{R}$ si para todo $x \in A_0$ la sucesión de números reales $(f_n(x))$ converge al número real $f(x)$. Cuando esto ocurre se dice que f es el límite puntual de (f_n) en A_0. Para expresar el hecho de que una función f es el límite puntual de una sucesión (f_n) en un conjunto A_0 se escribe*

$$\begin{aligned} f &= \text{lím} f_n \text{ en } A_0,\ f_n \to f \text{ en } A_0, \\ f(x) &= \text{lím} f_n(x) \text{ para todo } x \in A_0 \text{ o } f_n(x) \to f(x) \text{ para todo } x \in A_0. \end{aligned}$$

Ejemplo 10.3 *Consideremos en $\mathbb{R}$ la sucesión de funciones (f_n) donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \frac{x}{n}$.*

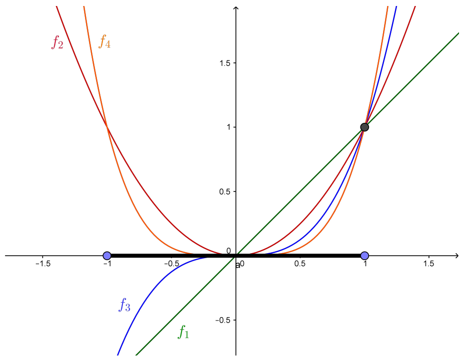
Cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$, la sucesión de números reales $(f_n(x)) = \left(\frac{x}{n}\right)$ es convergente a 0, pues, por la propiedad arquimediana, dados $x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se verifica que

$$\left|\frac{x}{\varepsilon}\right| < N$$

y entonces $\frac{|x|}{n} < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Esto es, $f_n \to f = 0$ en $A_0 = \mathbb{R}$.

Ejemplo 10.4 *La sucesión de funciones (f_n) definidas en $\mathbb{R}$ por $f_n(x) = x^n$, converge en los puntos del intervalo $(-1, 1]$ a la función que vale 0 en los puntos de $(-1, 1)$ y vale 1 en el punto 1, y no converge en ningún punto de fuera de ese intervalo.*

En efecto, fijado $x \in (-1,1)$ se sabe que la sucesión de números reales $(f_n(x)) = (x^n)$ converge a 0, pues $|x^n| = |x|^n$ y $|x| < 1$. Si $x = 1$ la sucesión $(f_n(1))$ también converge, pues se trata de la sucesión constante determinada por 1. Si $x = -1$ la sucesión $(f_n(-1)) = ((-1)^n)$ no converge y si $|x| > 1$ entonces la sucesión $(f_n(x)) = (x^n)$ no está acotada y por lo tanto no es convergente. Así $f_n \to f$ en $A_0 = (-1,1]$, siendo $f(x) = 0$ si $x \in (-1,1)$ y $f(1) = 1$.



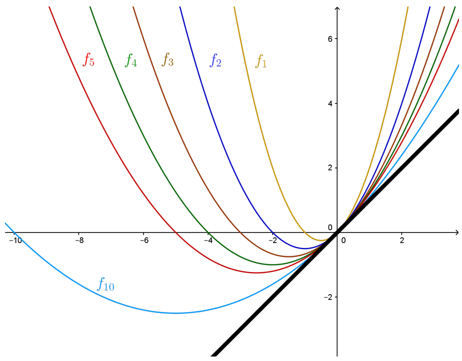
Gráfica de los cuatro primeros términos de la sucesión anterior.

Ejemplo 10.5 *La sucesión de funciones* (f_n) *definida en* $\mathbb{R}$ *por* $f_n(x) = \frac{x^2+nx}{n}$*, converge a la función* $f(x) = x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

En efecto, por cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$f_n(x) = \frac{x^2+nx}{n} = \frac{x^2}{n} + x.$$

Como $\frac{x^2}{n} \to 0$ resulta que $\frac{x^2+nx}{n} \to x$ y entonces $f_n \to f$ puntualmente en todo $\mathbb{R}$.



Gráfica de los cinco primeros términos de la sucesión anterior.

La condición exigida para la convergencia puntual en A_0 de una sucesión de funciones (f_n) definidas en A que contenga a A_0 a una función f (definida en A_0) es equivalente a la siguiente:

Para todo $x \in A_0$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe un natural N (que puede depender de x y de ε) tal que para todo $n \geq N$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

pues esto significa exactamente que para todo $x \in A_0$ la sucesión de números reales $(f_n(x))$ converge a $f(x)$.

Debe observarse que N, aparte de poder depender del ε, puede también depender del punto x. Esto se ve claramente en el ejemplo de la sucesión (x^n) cuanto más cerca está x del 1 más grande hay que tomar el N. De hecho, en este ejemplo es imposible, fijado un $\varepsilon > 0$, conseguir un N que valga para todos los $x \in (-1, 1]$. En efecto, dados $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y $N \in \mathbb{N}$, el punto $x = \sqrt[N]{\frac{1}{2}}$ pertenece al intervalo $(-1, 1]$ y sin embargo $x^N = \frac{1}{2}$, así $|f_N(x) - f(x)| = |\frac{1}{2} - 0|$ que no es menor que el ε elegido.

Hay un tipo de convergencia de las sucesiones de funciones que, para cada $\varepsilon > 0$, permite obtener un N con independencia del punto. Se trata de la convergencia uniforme que definimos a continuación.

Definición 10.6 *Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}$ y A_0 un subconjunto de A. Se dice que una sucesión de funciones (f_n) en $A \subset \mathbb{R}$ es* ***uniformemente convergente*** *en A_0 una función $f : A_0 \to \mathbb{R}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ para todo } n \geq N \text{ y para todo } x \in A_0.$$

Debe observarse que ahora dado $\varepsilon > 0$ el N no depende del punto x que se considere en A_0. Para expresar el hecho de que una sucesión de funciones (f_n) en A converge uniformemente a una función f en $A_0 \subset A$ se escribirá

$$f_n \rightrightarrows f \text{ en } A_0 \text{ o } f_n \xrightarrow{u} f \text{ en } A_0.$$

Nota 10.7 *Es muy fácil ver que si α es un número real y (f_n) es una sucesión de funciones que converge uniformemente a una función f en un conjunto A_0, entonces (αf_n) converge uniformemente a αf en ese conjunto y que si (g_n) es otra sucesión de funciones que converge uniformemente a una función g en un conjunto A_0, entonces $(f_n + g_n)$ converge uniformemente a $f + g$ en A_0. No es cierto, en general que $(f_n g_n)$ converja a fg uniformemente en A_0. La sucesión (f_n) en la que $f_n(x) = \frac{1}{n} + x$ converge uniformemente a $f(x) = x$ en todo $\mathbb{R}$ mientras que*

$$f_n^2(x) = \frac{1}{n^2} + \frac{2x}{n} + x^2$$

que tiende puntualmente a x^2, pero no lo hace uniformemente, pues si, por ejemplo, $\varepsilon = \frac{1}{2}$, dado cualquier $N \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$f_N(x_N) - x_N^2 = \frac{1}{N^2} + 1 > \varepsilon.$$

Es evidente que toda sucesión de funciones que sea uniformemente convergente en un conjunto lo es puntualmente, pero no es cierto que toda sucesión que converge puntualmente lo haga también uniformemente. Acabamos de ver que esto ocurre con la sucesión (f_n) definida por $f_n(x) = x^n$ en $A_0 = (-1, 1]$.

Nota 10.8 *Si dada una sucesión de funciones (f_n) definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se verifica que para un cierto $A_0 \subset A$ y una función f definida en A_0 existe una sucesión de números reales no negativos (a_n) que converge a 0 y existe N_0 tal que*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n \quad \textit{para todo } n \geq N_0 \textit{ y para todo } x \in A_0,$$

entonces $f_n \to f$ uniformemente en A_0. Esto es evidente, pues, como $a_n \to 0$, dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe un natural N, que podemos suponer mayor o igual que N_0 a partir del cual los a_n son menores que ε. A partir de ese N también se verifica que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in A_0$.

Ejemplo 10.9 *Sean $A = \mathbb{R}$, $A_0 = [-1, 1]$ y (f_n) la sucesión antes considerada, definida por*

$$f_n(x) = \frac{x^2 + nx}{n}$$

es uniformemente convergente en A_0 a la función $f(x) = x$. En efecto, $f_n(x) - f(x) = \frac{x^2}{n}$. Si consideramos sólo puntos de A_0 entonces $\frac{x^2}{n} \leq \frac{1}{n}$. La nota anterior nos da el resultado. Obsérvese que $f_n \to f$ puntualmente en todo $\mathbb{R}$ pero no lo hace uniformemente (en todo $\mathbb{R}$), pues para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y cualquier $N \in \mathbb{N}$, el punto $x = \sqrt{\frac{N}{2}}$ no verifica que $|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon$ debido a que

$$f_N\left(\sqrt{\frac{N}{2}}\right) - f\left(\sqrt{\frac{N}{2}}\right) = \frac{1}{2} \not< \varepsilon.$$

Damos a continuación un criterio de Cauchy sobre la convergencia uniforme de una sucesión de funciones.

Proposición 10.10 (criterio de Cauchy de convergencia uniforme) *Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en un conjunto A. Entonces (f_n) es uniformemente convergente a una función f en A si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ para todo $m, n \geq N$ y para todo $x \in A$.*

Nota.- A partir de aquí supondremos $A_0 = A$ para simplificar la escritura.

Demostración. " $\Longrightarrow$ " Dado $\varepsilon > 0$ sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq N$ y para todo $x \in A$. Si m y n son dos números naturales mayores o iguales que N, entonces

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \text{ para todo } x \in A.$$

" $\Longleftarrow$ " Dado $\varepsilon > 0$ sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x \in A$ y para todo $m, n \geq N$. Esto nos dice que, por cada $x \in A$ la sucesión de números reales $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y por lo tanto convergente (teorema 3.43). Denotemos por $f(x)$ al valor de ese límite. Podemos definir así una función f asignando a cada $x \in A$ el valor del límite de la sucesión $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$. Vamos a ver ahora que $f_n \xrightarrow{u} f$ en A. De la desigualdad $|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x \in A$ y para todo $m, n \geq N$ se sigue que

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ para todo } x \in A \text{ y para todo } m \geq N,$$

pues si fijamos $m \geq N$ se tiene que $f_m(x) - f_n(x) \to f_m(x) - f(x)$ (cuando $n \to \infty$) cualquiera que sea $x \in A$ y entonces

$$|f_m(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \text{ para todo } x \in A,$$

lo que prueba que la sucesión (f_n) converge uniformemente a f en A. $\square$

Continuidad de un límite uniforme

El límite puntual de una sucesión (f_n) de funciones continuas puede no ser una función continua, lo que ocurre, por ejemplo, si consideramos en $A = (-1, 1]$ la sucesión de funciones (f_n) definida por $f_n(x) = x^n$. Hemos visto anteriormente que esta sucesión converge puntualmente a la función

$$f : x \in (-1, 1] \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-1, 1) \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Cada una de las funciones f_n es continua, sin embargo la función f (que es el límite puntual de ellas en $(-1, 1]$) no es continua.

Esto no sucede si la convergencia es uniforme como demuestra el siguiente teorema.

Teorema 10.11 *Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ que converge uniformemente en A a una función f. Entonces, si las funciones f_n son continuas en un punto $c \in A$, también f es continua en c.*

Demostración. Tenemos que probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon \text{ para todo } x \in (c - \delta, c + \delta) \cap A.$$

Fijemos un $\varepsilon > 0$. Por la convergencia uniforme de (f_n) a f en A, para $\frac{\varepsilon}{3}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para todo } n \geq N \text{ y para todo } x \in A.$$
Para todo $x \in A$ se verifica que
$$\begin{aligned} |f(x) - f(c)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(c)| + |f_N(c) - f(c)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + |f_N(x) - f_N(c)| + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$
Ahora bien, f_N es continua en c, entonces existe $\delta > 0$ tal que
$$|f_N(x) - f_N(c)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ para todo } x \in (c - \delta, c + \delta) \cap A.$$
En consecuencia
$$|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \text{ para todo } x \in (c - \delta, c + \delta) \cap A$$
lo que nos da la continuidad de f en el punto c. □

Integrabilidad de un límite uniforme

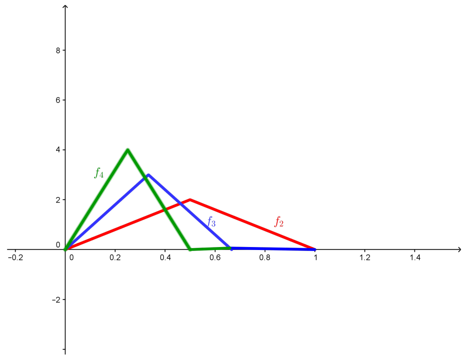
Si (f_n) es una sucesión de funciones integrables en $[a, b]$ y converge puntualmente en $[a, b]$ a una función f, puede ocurrir que f no sea integrable o que aún siendo integrable el límite de las integrales no sea la integral del límite. Veamos un ejemplo de cada una de estas situaciones.

Consideremos la función de Dirichlet $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ya considerada anteriormente (Ejemplo 4.30) y que está definida por
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1] \cap \mathbb{I} \\ 1 & \text{si } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$
Si ahora consideramos una sucesión (x_n) formada por todos los elementos de $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ y definimos una sucesión de funciones (f_n) de la siguiente forma
$$\begin{aligned} f_1(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_1 \\ 0 & \text{en los demás puntos.} \end{cases} \\ f_2(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_1 \text{ o } x = x_2 \\ 0 & \text{en los demás puntos.} \end{cases} \\ &\cdots \end{aligned}$$
Entonces, todas las f_n son integrables pero su límite puntual, que es la función f no lo es. Resulta entonces que el límite puntual de una sucesión de funciones integrables puede no ser integrable.

Consideremos ahora la sucesión de funciones (f_n) en $[0,1]$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -n^2(x-\frac{2}{n}) & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{2}{n}, 1]. \end{cases}$$

para $n \geq 2$.Se muestra a continuación la gráfica de las funciones f_2, f_3 y f_4.



Estas funciones son continuas en $[0,1]$ pues,

$$\lim_{x\to\frac{1}{n}^-} n^2x = n, \ \lim_{x\to\frac{1}{n}^+} \left(-n^2\left(x-\frac{2}{n}\right)\right) = n \text{ y } \lim_{x\to\frac{2}{n}^-} \left(-n^2\left(x-\frac{2}{n}\right)\right) = 0.$$

Al ser continuas son integrables. Si calculamos la integral de cualquiera de las f_n, para $n \geq 2$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n &= \int_0^{\frac{1}{n}} n^2xdx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} -n^2(x-\frac{2}{n})dx \\ &= n^2\left(\int_0^{\frac{1}{n}} xdx - \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} xdx + \frac{2}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} 1dx\right) \\ &= n^2\left(\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{n}\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\right)^2\right) + \frac{2}{n^2}\right) \\ &= n^2\left(\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{n^2}\right) + \frac{4}{2n^2}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

La sucesión (f_n) converge puntualmente a la función integrable 0, pues si $x = 0$ todas las f_n valen 0 en ese punto y para todo $x \in (0,1]$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $x \in [\frac{2}{N}, 1]$ y entonces, todas las f_n con $n \geq N$ son 0 en x. Así $\int_0^1 f = 0$, por lo que la sucesión $\left(\int_0^1 f_n\right)$ no converge a $\int_0^1 f$. En esta caso el límite de las integrales, aunque es integrable, no es la integral del límite.

Veremos a continuación que cuando la convergencia es uniforme la sucesión de las integrales converge a la integral del límite.

Teorema 10.12 *Sea (f_n) una sucesión de funciones integrables en un intervalo $[a,b]$ que converge uniformemente en $[a,b]$ a una función f. Entonces f es integrable en $[a,b]$, existe el límite de la sucesión numérica $\left(\int_a^b f_n\right)$ y $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b f$. Esto es*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Demostración. Probaremos la integrabilidad de f utilizando el criterio de integrabilidad de Riemann (teorema 7.11). Veamos primero como f es acotada (condición que se exige para la integrabilidad). Si tomamos $\varepsilon = 1$ y $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_{N_1}(x) - f(x)| < 1$ para todo $x \in [a,b]$ resulta que

$$|f(x)| < |f_{N1}(x)| + 1 \quad \text{para todo } x \in [a,b]$$

y como f_{N_1} es acotada necesariamente también lo es f.

Dado ahora $\varepsilon > 0$ arbitrario sea $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \text{ para todo } m \geq N \text{ y para todo } x \in [a,b].$$

Dado que f_N es integrable en $[a,b]$, el criterio de integrabilidad de Riemann para $\frac{\varepsilon}{2}$ nos garantiza la existencia de una partición $P_{\frac{\varepsilon}{2}} = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a,b]$ tal que

$$U(P_{\frac{\varepsilon}{2}}, f_N) - L(P_{\frac{\varepsilon}{2}}, f_N) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ para todo $x \in [a,b]$ se verifica, para cada $k = 1, ..., n$, que

$$\sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \leq \sup\{f_N(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

y

$$\inf\{f_N(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \leq \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Téngase en cuenta que $f(x) - f_N(x) < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ y que $f_N(x) - f(x) < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ para todo $x \in [a,b]$ y por lo tanto $f(x) < f_N(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ y $f_N(x) < f(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ para todo $x \in [a,b]$ lo que implica esas desigualdades. En consecuencia,

$$U\left(P_{\frac{\varepsilon}{2}}, f\right) \leq U\left(P_{\frac{\varepsilon}{2}}, f_N\right) + \frac{\varepsilon}{4}$$

y

$$L\left(P_{\frac{\varepsilon}{2}}, f_N\right) \leq L\left(P_{\frac{\varepsilon}{2}}, f\right) + \frac{\varepsilon}{4}, \text{ o equivalentemente, } -L(P_{\frac{\varepsilon}{2}}, f) \leq -L(P_{\frac{\varepsilon}{2}}, f_N) + \frac{\varepsilon}{4},$$

lo que nos da que

$$\begin{aligned} U(P_{\frac{\varepsilon}{2}}, f) - L(P_{\frac{\varepsilon}{2}}, f) &\leq U(P_{\frac{\varepsilon}{2}}, f_N) + \frac{\varepsilon}{4} - L(P_{\frac{\varepsilon}{2}}, f_N) + \frac{\varepsilon}{4} \\ &= U(P_{\frac{\varepsilon}{2}}, f_N) - L(P_{\frac{\varepsilon}{2}}, f_N) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

con lo que basta tomar como P_ε para f la partición $P_{\frac{\varepsilon}{2}}$ de f_N.

Veamos ahora como la sucesión de números reales $\left(\int_a^b f_n\right)$ converge al número real $\int_a^b f$. Si dado $\varepsilon > 0$ arbitrario tomamos $N \in \mathbb{N}$ como al principio de la demostración, entonces para todo $n \geq N$ se verifica que

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)\right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

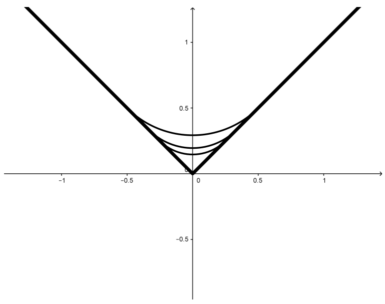
La última desigualdad es consecuencia de la proposición 7.23. □

Derivabilidad de un límite uniforme

En general no se puede afirmar que el límite, incluso uniforme, de una sucesión de funciones derivables sea derivable, o que incluso siendo el límite derivable, el límite de las derivadas sea la derivada del límite. Se observa fácilmente en la siguiente gráfica que la sucesión formada por las funciones $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{2}{n} - \frac{1}{n}\sqrt{2 - n^2x^2} & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n} \\ |x| & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a la función $f(x) = |x|$ que no es derivable en el 0, mientras que todas las f_n son derivables en todo $\mathbb{R}$.



Por lo que respecta a la posible no convergencia de las derivadas a la derivada del límite (si éste es derivable) basta considerar la sucesión (f_n) donde $f_n(x) = \frac{1}{n}\operatorname{sen} n^2x$. Esta sucesión converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a la función $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, la función límite (la constante 0) es derivable y sin embargo

$$f_n'(x) = n\cos n^2x$$

y la sucesión de funciones $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ no es convergente, ni siquiera puntualmente, a ninguna función f. Obsérvese que $f_n'(0) = n$.

Bajo algunas condiciones restrictivas se pueden obtener resultados que garantizan la derivabilidad de un límite y el que la sucesión de las derivadas converja a la derivada de ese límite. El resultado que sigue no es de los más generales que se conocen, pero las condiciones que se piden se suelen verificar en la práctica y la prueba es sencilla.

Teorema 10.13 *Sea (f_n) una sucesión de funciones derivables en un intervalo $[a,b]$ que converge puntualmente a una función f en $[a,b]$. Supongamos que la sucesión (f_n') de las derivadas de las f_n converge uniformemente en $[a,b]$ a una función continua g y que cada f_n' es integrable en $[a,b]$. Entonces f es derivable en $[a,b]$ y $f_n' \to f'$ uniformemente en $[a,b]$.*

Demostración. Como la sucesión (f_n') es uniformemente convergente a g en $[a,b]$, lo hace también en $[a,x]$ para todo $x \in [a,b]$ y el teorema anterior nos garantiza que para cada $x \in [a,b]$ se verifica que

$$\int_a^x f_n' \to \int_a^x g.$$

Por el primer teorema fundamental del cálculo (teorema 8.1)

$$\int_a^x f_n' = f_n(x) - f_n(a).$$

Como $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in A$, se deduce de la anterior igualdad que

$$f_n(x) - f_n(a) \to f(x) - f(a)$$

y así $\left(\int_a^x f_n'\right)_{n=1}^{\infty}$converge a $f(x) - f(a)$ y también a $\int_a^x g$, por lo que $f(x) - f(a) = \int_a^x g$, esto es

$$f(x) = \int_a^x g + f(a).$$

Al ser g continua sabemos, por el segundo teorema fundamental del cálculo (teorema 8.3) que f es derivable en cada punto de $[a,b]$ y que $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Tenemos entonces probado que f es derivable en cada punto de $[a,b]$ y que $f_n' \to f'$ uniformemente en $[a,b]$. $\square$

Otro resultado más general en esta línea es el del siguiente teorema, cuya prueba es bastante más complicada que la anterior y puede verse en el libro de Bartle-Sherbert.

Teorema 10.14 *Sea I un intervalo acotado de $\mathbb{R}$ y sea (f_n) una sucesión de funciones derivables en I. Supongamos que existe un punto $x_0 \in I$ tal que la sucesión $(f_n(x_0))$ converge y que la sucesión (f_n') de las derivadas de las f_n converge uniformemente en I a una función g definida en I. Entonces la sucesión (f_n) converge uniformemente a una función f en I, que es derivable en I, y que verifica que $f' = g$, esto es, $f_n' \xrightarrow{u} f'$ en I.*

Capítulo 11

Las funciones elementales

Dedicamos este capítulo al estudio de las funciones exponencial, logaritmo, seno, coseno, tangente... todas ellas se encuadran dentro del grupo de las llamadas funciones elementales.

11.1. La función exponencial

Estudiaremos aquí la función exponencial, se trata de una función cuya existencia viene dada por la siguiente proposición y que es de gran importancia en las matemáticas.

Proposición 11.1 *Existe una función* $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que verifica las dos propiedades siguientes*

1. *Es derivable y su derivada* E' *coincide con* E *en todo punto de* $\mathbb{R}$.

2. $E(0) = 1$.

Demostración. Consideremos la sucesión de funciones (E_n) definida por $E_1(x) = 1 + x$ y, para $n \geq 2$,

$$E_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Fijemos ahora un número real $A > 0$, entonces, si $x \in [-A, A]$ y $m > n > 2A$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|E_m(x) - E_n(x)| &= \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + \frac{x^m}{m!} \right| \\
&= \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{x}{n+2} + \frac{x^2}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{x^{m-(n+1)}}{(n+2)(n+3)\cdots m} \right) \right| \\
&\leq \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{A}{n} + \left(\frac{A}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{A}{n}\right)^{m-n-1} \right) \\
&< \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{m-(n+1)} \right) \\
&< \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} 2.
\end{aligned}$$

Téngase en cuenta que $\frac{A}{n} < \frac{1}{2}$ y que

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{m-(n+1)}$$

es la suma de los $m-(n+1)$ primeros términos de una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$, y el valor de esta suma es

$$\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n-1} < 2.$$

Dado que $2\frac{A^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ cuando $n \to \infty$ (por el criterio del cociente para sucesiones, proposición 3.25), se sigue de la relación

$$|E_m(x) - E_n(x)| < 2\frac{A^{n+1}}{(n+1)!}$$

válida para todo x, $|x| \leq A$ y $m > n > 2A$, que (E_n) verifica el criterio de Cauchy de convergencia uniforme (proposición 10.10) en el intervalo $[-A, A]$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ se toma $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > 2A$ y $\frac{A^{n+1}}{(n+1)!} < \varepsilon$ para todo $n \geq N$ y se tiene que $|E_m(x) - E_n(x)| < \varepsilon$ para todo x, $|x| \leq A$ y $m > n \geq N$.

Podemos entonces definir una función E en $\mathbb{R}$ asignando a cada $x \in \mathbb{R}$ el límite de la sucesión $(E_n(x))$. Obsérvese que todo $x \in \mathbb{R}$ está dentro de un intervalo de la forma $[-A, A]$.

De la convergencia uniforme de la sucesión (E_n) en cada intervalo $[-A, A]$ se sigue que E es continua en $\mathbb{R}$.

Como $E'_{n+1}(x) = E_n(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (esto se ve sin más que derivar E_{n+1}), luego también la sucesión (E'_n) converge de modo uniforme en cada intervalo de la forma $[-A, A]$ y lo hace a lo mismo que la (E_n), a la función continua E. Como las E'_n son integrables (son continuas), por un resultado anterior (teorema 10.13), E es derivable y $E' = E$ en $\mathbb{R}$.

Observamos finalmente que

$$E(0) = \lim_{n\to\infty} E_n(0) = 1,$$

pues $E_n(0) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Nota 11.2 *Obsérvese que E es el límite de la sucesión de sus polinomios de Taylor en el 0, éstos son precisamente los E_n.*

Corolario 11.3 *La función E tiene derivadas de todos los órdenes y $E^{n)} = E$ cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. La proposición anterior prueba que el resultado es cierto si $n = 1$, y si suponemos que es cierto para un $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$E^{n+1)} = (E^{n)})' = E' = E.$$

□

Corolario 11.4 *Si $x > 0$ entonces $1 + x < E(x)$.*

Demostración. Dado que que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

es claro que si $x > 0$ la sucesión $(E_n(x))$ es estrictamente creciente con lo cual

$$1 + x = E_1(x) < E_2(x) < \cdots$$

y por lo tanto

$$1 + x < E(x)$$

pues el límite de la sucesión $(E_n(x))_{n=1}^{\infty}$ es mayor que $E_2(x)$ que es mayor que $1 + x$. □

Vamos a ver ahora como la función E es única entre las que en 0 valen 1 y su derivada coincide con ellas mismas.

Proposición 11.5 *Hay una única función $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica las dos propiedades siguientes:*

1. *Es derivable y su derivada E' coincide con E en todo punto de $\mathbb{R}$.*
2. *$E(0) = 1$.*

Demostración. Supongamos que F es otra función que verifica las dos propiedades del enunciado y sea $G = F - E$. Entonces

$$G'(x) = F'(x) - E'(x) = F(x) - E(x) = G(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

y por otra parte,

$$G(0) = F(0) - E(0) = 1 - 1 = 0.$$

De la propiedad $G'(x) = G(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ se sigue, por inducción, que $G^{n)}(x) = G(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Vamos a demostrar que $G(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, lo que nos dará que $F = E$.

Fijemos un punto x en $\mathbb{R}$, $x \neq 0$, y consideremos el intervalo I_x de extremos 0 y x (si $x > 0$ se trata del intervalo $[0, x]$ y si $x < 0$ del intervalo $[x, 0]$). Aplicamos el teorema de Taylor (teorema 6.1) a F en el intervalo I_x con x y $x_0 = 0$, y obtenemos, por cada $n \in \mathbb{N}$ un punto $c_n \in I_x$ tal que

$$G(x) = G(0) + G'(0)x + \frac{G''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{G^{n)}(0)}{n!}x^n + \frac{G^{n+1)}(c_n)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Ahora bien, como $G(0) = 0$ y $G'(x) = G(x)$, resulta que $G^{k)}(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, por lo que la expresión anterior se reduce a

$$G(x) = \frac{G^{n+1)}(c_n)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{G(c_n)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

pues $G^{n+1)} = G$. La función G es continua en $\mathbb{R}$ y por lo tanto está acotada en el intervalo I_x. Si elegimos $M \in \mathbb{R}$ tal que $|G(x)| \leq M$ para todo $c \in I_x$, entonces

$$|G(x)| \leq \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como (fijado $x \in \mathbb{R}$) el límite de la sucesión $\left(\frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}\right)$ es 0, lo que se sigue del criterio del cociente para sucesiones (proposición 3.25), resulta que $G(x) = 0$. □

Definición 11.6 *A la única función $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica que $E'(x) = E(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $E(0) = 1$ se le llama la* ***función exponencial****. Su valor en cada x se suele representa por* $\exp(x)$ *o también por e^x sin que, por el momento, esto signifique "e elevado a x" pues no se ha definido aun lo que significa elevar un número real a otro, sólo se ha definido lo que es elevar un número real a un número racional.*

Proposición 11.7 *El valor de la función exponencial en el* 1*, es precisamente el número de Euler e que hemos introducido anteriormente (como aplicación del teorema de las sucesiones monótonas, teorema 3.30), su valor es el*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

(Debe recordarse que se probó en su momento que la sucesión $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ *es monótona creciente y acotada superiormente, y el teorema de la convergencia monótona (teorema 3.30) nos garantiza la existencia de ese límite).*

Demostración. Por la propia definición de E se tiene que

$$E(1) = \lim_{n\to\infty} E_n(1) = \lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

Hemos de ver entonces que las sucesiones $\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$ y $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ tienen el mismo límite. Por cada $n\in\mathbb{N}$ sea $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Como ya se vio al definir el número de Euler e en el Tema 3, utilizando la fórmula del binomio de Newton se obtiene que

$$e_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

y entonces

$$e_n \le 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} = E_n(1)$$

Esto es, para cada $n\in\mathbb{N}$ se verifica que $e_n \le E_n(1)$ lo que prueba que

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \lim_{n\to\infty} E_n(1) = E(1).$$

Por otra parte, fijemos $m\in\mathbb{N}$, por ejemplo $m=4$ para entenderlo mejor. Se tiene que si $n\ge 4$,

$$e_n \ge 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right).$$

pues si, por ejemplo $n=5$, la expresión que define a e_5 tiene 6 sumandos, todos positivos, y los cinco primeros son mayores que los cinco sumandos que hemos considerado. Si denotamos por $y_n^{(4)}$ a la suma anterior, resulta que

$$e = \lim_{n\to\infty} e_n \ge \lim_{n\to\infty} y_n^{(4)},$$

pero $\left(y_n^{(4)}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge a $s_4 = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$ y por lo tanto

$$e = \lim_{n\to\infty} e_n \ge E_4(1)$$

Como esta desigualdad puede obtenerse para cada $m\in\mathbb{N}$ resulta que

$$e \ge E_m(1)$$

para todo $m\in\mathbb{N}$ y entonces

$$e \ge \lim_{m\to\infty} E_m(1) = E(1).$$

□

Esta función exponencial tiene unas propiedades que la hacen particularmente interesante, cuatro de ellas se obtienen en la proposición siguiente.

Proposición 11.8 *La función exponencial satisface las siguientes propiedades:*

1. $E(x) \neq 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.
2. $E(x+y) = E(x)E(y)$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$.
3. $E(r) = e^r$ *(con el significado que se dio a las potencias racionales al final del tema de continuidad) para todo* $r \in Q$.
4. $E(x) > 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$

Demostración.

1. Supongamos que para algún $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$, se verifica que $E(x_0) = 0$ y denotemos por I_{x_0} al intervalo cerrado de extremos 0 y x_0. El teorema de Taylor (teorema 6.1), aplicado a la función E, en el intervalo I_{x_0}, con x_0 y $x = 0$, nos garantiza que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $c_n \in I_{x_0}$ tal que

$$1 = E(0) = E(x_0) + E'(x_0)(0 - x_0) + \cdots + \frac{E^{n)}(x_0)}{n!}(0 - x_0)^n + \frac{E^{n+1)}(c_n)}{(n+1)!}(0 - x_0)^{n+1}.$$

Como $E^{k)}(x_0) = E(x_0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, resulta que realmente

$$1 = E(0) = \frac{E(c_n)}{(n+1)!}(0 - x_0)^{n+1}$$

Sea M un número real mayor o igual que $|E(c)|$ para todo $c \in I_{x_0}$ (E es continua en el intervalo cerrado I_{x_0}). Entonces,

$$1 = \left| \frac{E(c_n)(-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{M|x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Del criterio del cociente para sucesiones (proposición 3.25) se obtiene que la sucesión $\left(\frac{M|x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\right)$ converge a 0 (cuando $n \to \infty$), pero esto es absurdo pues $\frac{M|x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Concluimos entonces que $E(x_0)$ no puede ser 0.

2. Fijemos $y \in \mathbb{R}$. Dado que $E(y) \neq 0$ tiene sentido considerar la función G definida en $\mathbb{R}$ por

$$G(x) = \frac{E(x+y)}{E(y)}.$$

Esta función es derivable (como función de la variable x) y tiene la propiedad de que

$$G'(x) = \frac{E'(x+y)}{E(y)} = \frac{E(x+y)}{E(y)} = G(x)$$

y además

$$G(0) = \frac{E(y)}{E(y)} = 1.$$

Luego esta función G es precisamente la función exponencial E, esto nos da que

$$\frac{E(x+y)}{E(y)} = E(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

con lo que

$$E(x+y) = E(x)E(y) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Esto, que se ha hecho para un $y \in \mathbb{R}$ fijo, se verifica para todo $y \in \mathbb{R}$ y entonces

$$E(x+y) = E(x)E(y) \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Observamos en primer lugar que por la propiedad anterior, usando el principio de inducción, se sigue que para todo $m \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$,

$$E(mx) = (E(x))^m .$$

En efecto, si $m = 1$ es obvio, y si es cierto para un k entonces

$$E((k+1)x) = E(kx + x) = E(kx)E(x) = (E(x))^{k+1} .$$

En particular, para $x = 1$, $E(m) = e^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Si ahora consideramos $x = \frac{1}{n}$ se sigue de lo anterior que

$$e = E(1) = E\left(n\frac{1}{n}\right) = \left(E\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

y entonces $E\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}}$. Por otra parte si $m \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$, como

$$1 = E(0) = E(mx - mx) = E(mx)E(-mx)$$

resulta que

$$E(-mx) = \frac{1}{E(mx)} = \frac{1}{e^{mx}} = e^{-mx}.$$

En consecuencia, para todo $m \in \mathbb{Z}$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$E\left(\frac{m}{n}\right) = E\left(m\frac{1}{n}\right) = \left(E\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^m = e^{\frac{m}{n}}.$$

Como todo número racional es de la forma $\frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene el resultado.

4. Como $E(0) = 1 > 0$ y $E(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, el teorema de Bolzano del valor intermedio (teorema 4.50) nos garantiza que $E(x)$ tiene que ser siempre mayor que 0 pues si en algún punto su valor fuese menor que 0 habría algún punto en el que valdría 0.

$\square$

Proposición 11.9 *La función exponencial es estrictamente creciente, convexa,* $\lim\limits_{x\to-\infty} E(x) = 0$ *y* $\lim\limits_{x\to+\infty} E(x) = +\infty$. *Además su conjunto imagen es el intervalo* $(0, +\infty)$.

Demostración. Como $E' = E$ y $E(x) > 0$, $E'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y entonces E es estrictamente creciente (obsérvese que por el teorema del valor medio (teorema 5.20) dados x, y siendo $x < y$, existe $c \in (x, y)$ tal que $E(y) - E(x) = E'(c)(y - x)$, entonces, como $E'(c) > 0$, $E(x) < E(y)$). La convexidad de E se sigue del hecho de que $E''(x) = E(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (aplicando el teorema 6.6).

Por otra parte, como hemos visto,

$$1 + 1 < E(1) = e$$

y por lo tanto $2^n < e^n = E(n)$, lo que nos da que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(n) = +\infty$, pero como E es creciente, necesariamente existe el $\lim\limits_{x\to+\infty} E(x)$ y su valor es $+\infty$. En efecto, para todo $M > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $E(n) > M$ para todo $n \geq N$. Si consideramos x tales que $x > N$, entonces $E(x) > E(N) > M$.

Dado que

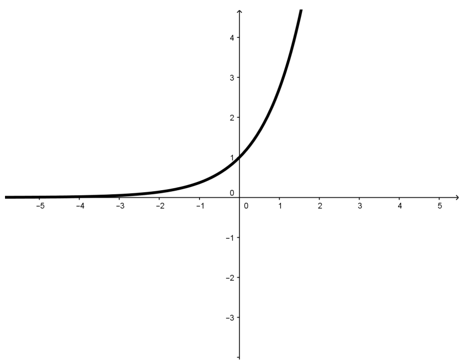
$$0 < E(-n) = e^{-n} < 2^{-n},$$

resulta que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(-n) = 0$ y por lo tanto

$$\lim_{x\to-\infty} E(x) = 0.$$

En efecto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal $E(-n) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Entonces, para todo $x < -N$ se tiene que $E(x) < E(-N) < \varepsilon$.

Finalmente, el que el $\lim\limits_{x\to-\infty} E(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} E(x) = +\infty$ nos dicen, usando el teorema de Bolzano del valor intermedio (teorema 4.50), que el conjunto imagen de $\mathbb{R}$ por la función exponencial es $(0, +\infty)$, pues, si $y > 0$ y tomamos $M = y$, existe $K > 0$ tal que $E(x) > y$ para todo $x > K$ y, en particular, $y < E(K + 1)$; por otra parte si tomamos $\varepsilon = y$, existe $K^* < 0$ tal que $E(x) < y$ para todo $x < K^*$, por lo que $E(K^* - 1) < y$, resumiendo, $E(K^* - 1) < y < E(K + 1)$ y el citado teorema de Bolzano garantiza que existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que $E(x) = y$. Sigue la gráfica de la función exponencial. $\square$



La función exponencial crece más rápido que cualquier potencia para valores grandes de la variable. Esto es lo que demuestra la siguiente proposición.

Proposición 11.10 *Para todo $k \in \mathbb{N}$ se verifica que*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{E(x)}{x^k} = +\infty.$$

Demostración. Fijemos un natural k. Tanto el numerador como el denominador de $\frac{E(x)}{x^k}$ tienen por límite $+\infty$ cuando $x \to +\infty$. Una de las reglas de L'Hôpital (véase la nota 5.28) nos dice que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{E(x)}{x^k} = \lim_{x\to+\infty} \frac{E'(x)}{kx^{k-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{E(x)}{kx^{k-1}},$$

que, si $k > 1$, sigue siendo una indeterminación como la anterior, si seguimos aplicando esa regla llegaremos a que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{E(x)}{x^k} = \lim_{x\to+\infty} \frac{E(x)}{kx^{k-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{E(x)}{k(k-1)x^{k-2}} = \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{E(x)}{k!} = \frac{1}{k!} \lim_{x\to+\infty} E(x)$$

y este último límite es $+\infty$. □

Proposición 11.11 *e es irracional.*

Demostración. Supongamos que e es de la forma $\frac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{N}$. Entonces, por una parte, el teorema de Taylor (teorema 6.1) aplicado a E con $x_0 = 0$ y $x = 1$, nos da que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $c_n \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{p}{q} = E(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!}1^2 + \cdots + \frac{1}{n!}1^n + \frac{E(c_n)}{(n+1)!}1^{n+1}.$$

Si, por otra parte, consideramos $n > q$, entonces

$$\begin{aligned} n!\frac{p}{q} &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(q+1)q(q-1)\cdots 1\cdot p}{q} \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots(q+1)(q-1)\cdots 1\cdot p \end{aligned}$$

es un número natural, pero como

$$\begin{aligned} n!\frac{p}{q} &= n!\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{E(c_n)}{(n+1)!}\right) \\ &= 2n! + \frac{n!}{2} + \cdots + 1 + \frac{1}{n+1}E(c_n) \end{aligned}$$

resulta que $\frac{1}{n+1}E(c_n)$ debe ser un número entero, pero esto es imposible si $n \geq 3$, pues, al ser $c_n < 1$ se tiene que

$$0 < E(c_n) < E(1) = e < 3,$$

y entonces,

$$0 < \frac{1}{n+1}E(c_n) < \frac{3}{n+1} < 1.$$

Nota 11.12 *De la anterior igualdad*

$$e = E(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!}1^2 + \cdots + \frac{1}{n!}1^n + \frac{E(c_n)}{(n+1)!}1^{n+1}$$

se deduce que

$$e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!}1^2 + \cdots + \frac{1}{n!}1^n\right) \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

y este último valor es muy pequeño si n es grande, por ejemplo, si $n = 10$, $\frac{3}{11!} <$ $0,000000015$. Tenemos así una aproximación del número e con 7 cifras exactas.

Nota 11.13 *El número e es trascendente, lo que significa que no es raíz de ningún polinomio con coeficientes enteros. La demostración de esto puede verse en el libro de M. Spivak, Çalculus", en la p. 599.*

□

11.1.1. Las funciones hiperbólicas

Se define la función **coseno hiperbólico** (cosh) en cada $x \in \mathbb{R}$ por la expresión,

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

y la función **seno hiperbólico** (senh) en cada $x \in \mathbb{R}$ por la expresión,

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

La función cosh es par y la senh es impar. Ambas son derivables y

$$\cosh' x = \operatorname{senh} x, \quad \operatorname{senh}' x = \cosh x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

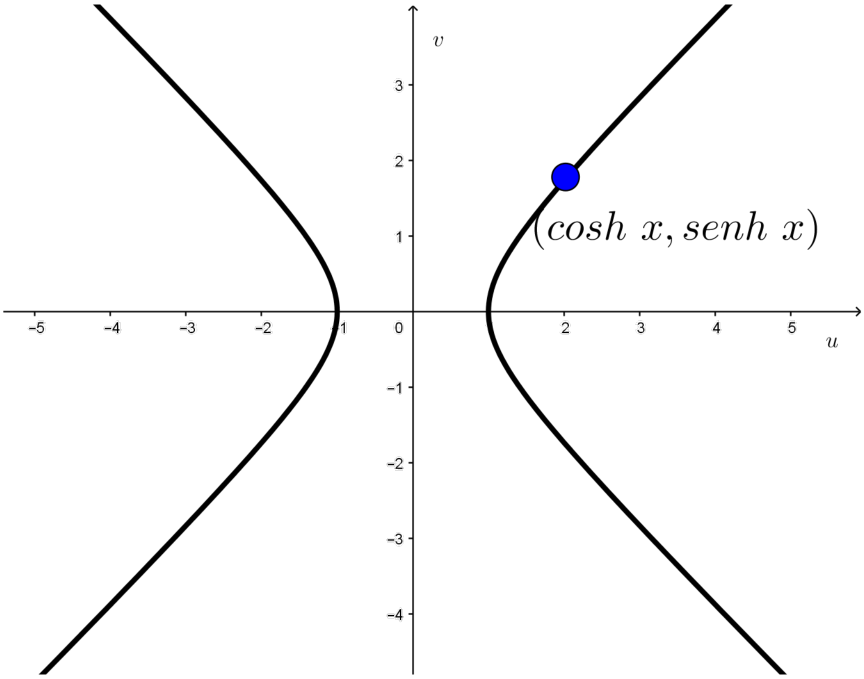
Se verifican la igualdad

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1, \quad , \quad \text{para todo co} x \in \mathbb{R}.$$

En efecto

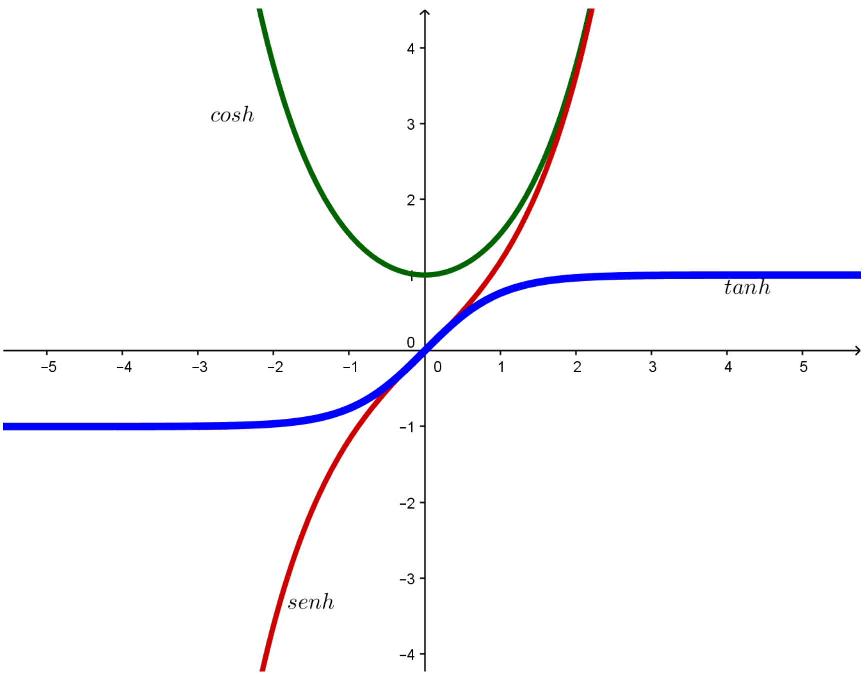
$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x e^{-x}}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2e^x e^{-x}}{4} \\
&= \frac{4e^x e^{-x}}{4} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Esto nos dice que $(\cosh x, \operatorname{senh} x)$ es un punto de la hipérbola $u^2 - v^2 = 1$, es precisamente el punto que se indica en la figura que sigue:



Se define la **tangente hiperbólica** como

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}.$$



11.2. La función logarítmica

Dado que la función exponencial es estrictamente creciente y derivable, con derivada distinta de cero en todo punto, y su imagen es $(0, +\infty)$, tiene una inversa (teorema 5.11) definida en $(0, +\infty)$ que es derivable en ese intervalo y es estrictamente creciente en él.

Definición 11.14 *Se llama* ***función logarítmica*** *a la función definida en* $(0, +\infty)$ *como la inversa de la función exponencial. Se representará por* L*,* $\log$ *o* $\ln$*. A veces se le llama la* ***función logaritmo neperiano*** *en honor al matemático escocés John Napier (1550-1617), su nombre en latín es Joannis Neperi.*

Dado que L es la función inversa de E, se tiene que

$$L \circ E(x) = x \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Por otra parte, dado $y \in (0, +\infty)$, si $x \in \mathbb{R}$ es el único número real que verifica que $E(x) = y$, entonces

$$E \circ L(y) = E \circ L(E(x)) = E \circ (L \circ E)(x) = E(x) = y.$$

Esto puede escribirse así:

$$\log e^x = x \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \;\text{ y }\; e^{\log y} = y \text{ para todo } y \in (0, +\infty).$$

Obtenemos ahora algunas propiedades de la función logarítmica.

Proposición 11.15 *La función* $L : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *tiene las siguientes propiedades:*

1. *Es estrictamente creciente, derivable,* $L'(y) = \frac{1}{y}$ *para todo* $y \in (0, +\infty)$*, cóncava y la imagen por ella de* $(0, +\infty)$ *es* $\mathbb{R}$.
2. $L(1) = 0$*,* $L(e) = 1$*,* $L(y) < 0$ *para todo* $y \in (0, 1)$ *y* $L(y) > 0$ *para todo* $y \in (1, +\infty)$.
3. $L(uv) = L(u) + L(v)$ *para todo* $u,\ v \in (0, +\infty)$.
4. $L(y^r) = rL(y)$ *para todo* $r \in \mathbb{Q}$.
5. *Si* $u, v > 0$ *entonces* $L\left(\frac{u}{v}\right) = L(u) - L(v)$.
6. $\lim\limits_{y \to +\infty} L(y) = +\infty$ *y* $\lim\limits_{y \to 0^+} L(y) = -\infty$.

Demostración.

1. Por el teorema de derivabilidad de la función inversa (teorema 5.11), aplicado a cada intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, tenemos que L es estrictamente creciente y derivable en $(0, +\infty)$ (nótese que $E'(x) = E(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$) y que

$$L'(y) = \frac{1}{E'(L(y))} = \frac{1}{E(L(y))} = \frac{1}{y} \text{ para todo } y \in (0, +\infty).$$

La concavidad de L se sigue del hecho de que $L''(y) = -\frac{1}{y^2} < 0$ para todo $y \in (0, +\infty)$ aplicando el teorema de convexidad (teorema 6.6) a la función $-L$. Como E es biyectiva (es inyectiva por ser estrictamente monótona y se ha visto anteriormente que $E(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$) se tiene que $L(0, +\infty) = \mathbb{R}$.

2. Dado que $E(0) = 1$ y $E(1) = e$ se sigue que

$$L(1) = L(E(0)) = 0 \text{ y } L(e) = L(E(1)) = 1.$$

Por otra parte, como L es estrictamente creciente, al ser $L(1) = 0$, necesariamente $L(y) < 0$ para todo $y \in (0, 1)$ y $L(y) > 0$ para todo $y \in (1, +\infty)$.

3. Para u, $v \in (0, +\infty)$ hagamos $x = L(u)$ e $y = L(v)$. Entonces $u = E(x)$ y $v = E(y)$. Como $E(x + y) = E(x)E(y)$ se tiene que

$$uv = E(x)E(y) = E(x + y)$$

y por lo tanto,

$$L(uv) = L(E(x + y)) = x + y = L(u) + L(v).$$

4. Esto se sigue con un razonamiento análogo al que utilizamos para probar que $E(r) = e^r$ para todo $r \in \mathbb{Q}$: Si $n \in \mathbb{N}$ e $y \in (0, +\infty)$, se obtiene fácilmente por inducción que

$$L(y^n) = nL(y).$$

Si $n \in \mathbb{N}$, como $L(1) = L(y^n y^{-n})$ tenemos que $0 = L(1) = L(y^n) + L(y^{-n})$, de donde se deduce que $L(y^{-n}) = -L(y^n) = -nL(y)$. Entonces, si m es un entero se verifica que $L(y^m) = mL(y)$. Por otra parte, si $n \in \mathbb{N}$, $L(y) = L(y^{\frac{n}{n}}) = nL(y^{\frac{1}{n}})$ de donde $L(y^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}L(y)$. Finalmente,

$$L(y^{\frac{m}{n}}) = L\left((y^{\frac{1}{n}})^m\right) = mL\left(y^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{m}{n}L(y).$$

Como todo número racional es de la forma $\frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene probado lo que se quería.

5.
$$L\left(\frac{u}{v}\right) = L\left(u\frac{1}{v}\right) = L(x) + L\left(\frac{1}{v}\right) = L(u) + L(v^{-1}) = L(u) - L(v).$$

6. Como $L(e^n) = n$ y $L(e^{-n}) = -n$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} L(e^n) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} L(e^{-n}) = -\infty.$$

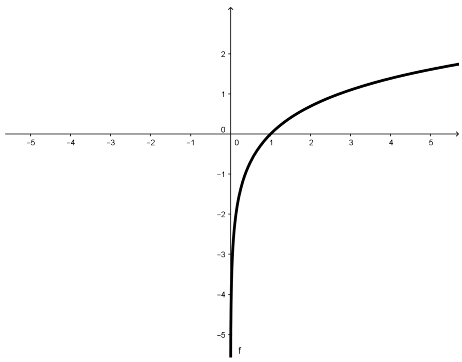
Como la función logarítmica es estrictamente creciente se tiene que

$$\lim_{y\to+\infty} L(y) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{y\to 0^+} L(y) = -\infty.$$

Esto se sigue con el mismo argumento que se utilizó al final de la proposición 11.9

□

La gráfica de la función logarítmica es,



11.2.1. Potencias reales

Hasta ahora sólo hemos definido (en la sección de potencias racionales, al final del capítulo 4), la función potencia $x \in [0, +\infty) \mapsto x^r$ cuando r es un número racional. Debe observarse que todo $r \in \mathbb{Q}$ es de la forma $\frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ y que $x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$, y tanto las potencias $m-$ésimas como las raíces $n-$ésimas se han definido anteriormente. Estamos ya en condiciones de definir el significado de x^α cuando x y α son números reales, siendo $x > 0$.

Definición 11.16 *Para $x > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se define*

$$x^\alpha := e^{\alpha \log x}.$$

Nótese que se pide que $x > 0$ pues no tiene sentido el logaritmo de un número negativo ó 0. En algunos casos se puede definir, esto ya se ha hecho anteriormente, x^α, con $\alpha \in \mathbb{Q}$, *en algunos subconjuntos de* $(-\infty, 0]$*. Recordamos que si*

$\alpha = n \in \mathbb{N}$	$x^n = \overset{n}{x \cdots x}$	*para todo* $x \in \mathbb{R}$
$\alpha = -n,\ n \in \mathbb{N}$	$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$	*para todo* $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
$\alpha = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, n *impar*	$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$	*para todo* $x \in \mathbb{R}$
$\alpha = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, n *par*	$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$	*para todo* $x \in [0, +\infty)$
$\alpha = -\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, n *impar*	$x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$	*para todo* $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
$\alpha = -\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, n *par*	$x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$	*para todo* $x \in (0, +\infty)$
$\alpha = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z}$	$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$	*según lo anterior.*

Nota 11.17 *Observamos que cuando* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *la definición de* x^α *que acabamos de dar y la que habíamos dado antes coinciden, pues si* $\alpha = \frac{m}{n}$*, entonces*

$$\alpha \log x = \frac{m}{n} \log x = \log x^{\frac{m}{n}}$$

y por lo tanto

$$x^\alpha = e^{\alpha \log x} = e^{\log x^{\frac{m}{n}}} = x^{\frac{m}{n}}.$$

Como consecuencia de las propiedades que hemos obtenido de las funciones exponencial y logarítmica se obtienen fácilmente las siguientes propiedades de la función potencia.

Proposición 11.18 *Sean* α *y* $\beta \in \mathbb{R}$ *y sean* $x, y \in (0, +\infty)$*. Entonces,*

1. $1^\alpha = 1$
2. $x^\alpha > 0$
3. $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
4. $\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$
5. $x^{\alpha+\beta} = x^a x^\beta$
6. $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$
7. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} = (x^\beta)^\alpha$
8. *Si* $\alpha < \beta$ *entonces* $x^\alpha < x^\beta$ *para todo* $x > 1$*. Para* $x \in (0,1)$ *se verifica que* $x^\alpha > x^\beta$*.*
9. $\log x^\alpha = \alpha \log x$*.*

Demostración.

1. $1^\alpha = e^{\alpha \log 1} = e^0 = 1$.

2. $x^\alpha := e^{\alpha \log x}$ y la función exponencial es siempre mayor que 0.

3. $(xy)^\alpha = e^{\alpha \log xy} = e^{\alpha(\log x + \log y)} = e^{\alpha \log x} e^{\alpha \log y} = x^\alpha y^\alpha$.

4. Veamos primero como $\left(\frac{1}{y}\right)^\alpha = \frac{1}{y^\alpha}$. En efecto,

$$y^\alpha \left(\frac{1}{y}\right)^\alpha = 1^\alpha = 1$$

y por lo tanto $\left(\frac{1}{y}\right)^\alpha$ es el inverso de y^α. En general,

$$\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \left(x\frac{1}{y}\right)^\alpha = x^\alpha \left(\frac{1}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}.$$

5. $$x^{\alpha+\beta} = e^{(\alpha+\beta)\log x} = e^{\alpha \log x} e^{\beta \log x} = x^a x^\beta.$$

6. $$x^{-\alpha} x^\alpha = x^{-\alpha+\alpha} = x^0 = 1$$

y por lo tanto $x^{-\alpha}$ es el inverso de x^α.

7. $$(x^\alpha)^\beta = e^{\beta \log x^\alpha} = e^{\beta \log e^{\alpha \log x}} = e^{\beta\alpha \log x} = x^{\alpha\beta}$$

y análogamente

$$(x^\beta)^\alpha = e^{\alpha \log x^\beta} = e^{\alpha \log e^{\beta \log x}} = e^{\alpha\beta \log x} = x^{\alpha\beta}.$$

8. Si $\alpha < \beta$, $\beta - \alpha > 0$ por lo que $x^{\beta-\alpha} = e^{(\beta-\alpha)\log x} > 1$ para todo $x > 1$, pues para estos x su log es mayor que 0 lo que implica que $(\beta - \alpha)\log x > 0$, y la función exponencial toma valores mayores que 1 para todo número real mayor que 0. Entonces,

$$x^\beta = x^{\beta-\alpha} x^\alpha > x^\alpha.$$

Si $x \in (0,1)$, $\frac{1}{x} > 1$, y por lo tanto

$$\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha < \left(\frac{1}{x}\right)^\beta$$

lo que equivale a que $x^\beta < x^\alpha$.

9. $E(\log x^\alpha) = x^\alpha := E(\alpha \log x)$ de donde se sigue que $\log x^\alpha = \alpha \log x$ al ser la función E inyectiva.

□

Otra propiedad interesante de la función potencia es que es derivable de cualquier orden. Esto es lo que prueba la siguiente proposición.

Proposición 11.19 *Cualquiera que sea* $\alpha \in \mathbb{R}$ *la función* $x \in (0, +\infty) \to x^{\alpha}$ *es derivable en todo punto y su derivada es la función* $x \in (0, +\infty) \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

Demostración. Denotemos por P_{α} la función $x \in (0, +\infty) \to x^{\alpha}$. Entonces, P_a es la composición de las funciones

$$x \in (0, +\infty) \mapsto \alpha \log x \mapsto E(\alpha \log x).$$

Como todas estas funciones son derivables lo es su composición y

$$P'_{\alpha}(x) = E'(\alpha \log x)\alpha \frac{1}{x} = E(\alpha \log x)\alpha \frac{1}{x} = x^{\alpha}\alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

El argumento anterior se le puede aplicar a la función $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$ para obtener que esta función es derivable y que su derivada es la función $x \mapsto \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ y así sucesivamente. Obsérvese que P_{α} es creciente (pues $P' > 0$) y que si $\alpha \in (0,1)$ entonces P_{α} es cóncava (pues $P'' < 0$) y si $\alpha > 1$, entonces P_{α} es convexa (pues $P'' > 0$). □

Nota 11.20 *Hasta aquí hemos manejado la función logarítmica, llamada natural (asociada al número e); pueden definirse funciones logarítmicas asociadas a otros números reales positivos, distintos del* 1. *Así dado* $a > 0$, $a \neq 1$ *se define*

$$\log_a(x) = \frac{\log x}{\log a}.$$

Nótese que si $a = e$ *entonces* $\log_a = \log$. *De estos logaritmos el que se usa más frecuentemente es aquel en el que* $a = 10$, *se llama* ***logaritmo decimal***. *Obsérvese que*

$$10^{\log_{10}(x)} = e^{\log_{10}(x)\log 10} = e^{\log x} = x.$$

11.3. Las funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas son las funciones *seno*, *coseno*, *tangente*, *cotangente*... Como todas ellas se definen en términos de las funciones seno y coseno, bastará definir con precisión estas funciones, es lo que hacemos a continuación

Proposición 11.21 *Existen dos funciones* C *y* $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *con derivadas primera y segunda tales que:*

1. $C''(x) = -C(x)$ *y* $S''(x) = -S(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

2. $C(0) = 1$, $C'(0) = 0$, $S(0) = 0$ *y* $S'(0) = 1$.

Demostración. La demostración de esta proposición sigue la misma línea que se siguió para introducir la función exponencial.

Sean (C_n) y (S_n) las sucesiones de funciones definidas en $\mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$C_1(x) = 1, \quad C_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

y, en general,

$$C_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!}$$

$$S_1(x) = x, \quad S_2(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

y, en general,

$$S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Estas funciones están bien definidas y son todas derivables. Se verifica que

$$C'_{n+1}(x) = -S_n(x) \text{ y } S'_n(x) = C_n(x) \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y todo } x \in \mathbb{R}.$$

Veremos ahora la convergencia uniforme de estas sucesiones en cualquier intervalo de la forma $[-A, A]$ usando el criterio de Cauchy de convergencia uniforme (proposición 10.10). Fijado $A > 0$ sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m > n > 2A$ y $x \in [-A, A]$. Entonces

$$\begin{aligned}
|C_m(x) - C_n(x)| &= \left|(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2(m-1)}}{(2(m-1)!}\right| \\
&\leq \frac{A^{2n}}{(2n)!}\left(1 + \left(\frac{A}{2n}\right)^2 + \left(\frac{A}{2n}\right)^{2\cdot 2} + \cdots + \left(\frac{A}{2n}\right)^{2m-2(n+1)}\right) \\
&< \frac{A^{2n}}{(2n)!}\left(1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^{2\cdot 2} + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^{2(m-(n+1))}\right) \\
&= \frac{A^{2n}}{(2n)!}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4^2}\right)^{m-n}}{1 - \frac{1}{4^2}}\right) \\
&< \frac{A^{2n}}{(2n)!}\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)} \\
&= \frac{A^{2n}}{(2n)!}\frac{16}{15}.
\end{aligned}$$

Como $\frac{A^{2n}}{(2n)!} \to 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$, que podemos suponer mayor que $2A$, tal que

$$\frac{A^{2n}}{(2n)!} < \frac{15}{16}\varepsilon \text{ para todo } n \geq N$$

y entonces

$$|C_m(x) - C_n(x)| < \varepsilon \text{ para todo } x \in [-A, A] \text{ y todo } m > n > N.$$

La convergencia uniforme de (C_n) en cada intervalo $[-A, A]$ nos garantiza la existencia de una función continua $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $C_n(x) \to C(x)$ para todo x. Como $C_n(0) = 1$ para todo n, se sigue que $C(0) = 1$.

La demostración de que (S_n) verifica el criterio de Cauchy para la convergencia uniforme en cada intervalo de la forma $[-A, A]$ es análoga. Entonces existe una función continua $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica que $S(0) = 0$ pues $S_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos ahora a aplicar el teorema 10.13, pues se cumplen todas las hipótesis, a la sucesión (C_n) en un intervalo arbitrario de la forma $[-A, A]$. Dado que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $C'_{n+1}(x) = -S_n(x)$ tenemos que (C'_n) converge uniformemente a $-S$ en $[-A, A]$ y por lo tanto C es derivable en todo punto de $[-A, A]$. La arbitrariedad de A nos garantiza la derivabilidad de C en todo $\mathbb{R}$ y

$$C'(x) = \lim_{n\to\infty} C'_{n+1}(x) = -\lim_{n\to\infty} S_n(x) = -S(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Como por otra parte, $S'_n(x) = C_n(x)$ obtenemos, con el argumento anterior y el teorema 10.13 aplicado a la sucesión (S_n), que S es derivable en $\mathbb{R}$ y que $S'(x) = C(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Del hecho de que S es derivable y $C'(x) = -S(x)$ podemos deducir que C' es derivable y que $C''(x) = -S'(x) = -C(x)$, y del hecho de que C es derivable y $S'(x) = C(x)$ se sigue que S' es derivable y $S''(x) = C'(x) = -S(x)$.

Finalmente se verifica que

$$C'(0) = -S(0) = 0 \text{ y } S'(0) = C(0) = 1.$$

□

Nota 11.22 *Acabamos de ver que $C'(x) = -S(x)$ y $S'(x) = C(x)$ para todo x. De esto se deduce que C y S tienen derivadas de cualquier orden.*

Proposición 11.23 *Las funciones C y S que satisfacen las condiciones de la proposición 11.21 son únicas.*

Demostración. Haremos la demostración para la función C, la demostración para S es análoga.

Supongamos que D es otra función con las propiedades de la función C, esto es, $D'' = -D$, $D(0) = 1$, $D'(0) = 0$. Entonces la función $G = D - C$ verifica que $G'' = -G$,

$G(0) = 0$ y $G^{k)}(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (obsérvese que $G'(0) = D'(0) - C'(0) = 0$, $G''(0) = -G(0) = 0$, $G'''(0) = -G'(0) = 0...$). Fijemos ahora un $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, arbitrario y denotemos por I_x al intervalo determinado por 0 y x. Por el teorema de Taylor aplicado a D con $x_0 = 0$, existe, para cada $n \in \mathbb{N}$ un punto c_n en I_x tal que

$$\begin{aligned} G(x) &= G(0) + G'(0)x + \frac{G''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{G^{n)}(0)}{n!}x^n + \frac{G^{n+1)}(c_n)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &= \frac{G^{n+1)}(c_n)}{(n+1)!}x^{n+1}. \end{aligned}$$

Si n es impar, $n+1$ es par y entonces $G^{n+1)}(c_n) = G(c_n)$ o $-G(c_n)$. Sea $M > 0$ tal que $|G(c)| \leq M$ para todo $t \in I_x$. Entonces $|G^{n+1)}(c_n)| \leq M$ para todo n impar, por lo que

$$|G(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

Como la sucesión numérica $\left(\frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}\right)$ converge a 0, necesariamente $G(x) = 0$, esto es, que $D(x) = C(x)$. $\square$

Definición 11.24 *Las únicas funciones C y S que satisfacen*

$$C''(x) = -C(x), \quad S''(x) = -S(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y además $C(0) = 1$, $C'(0) = 0$, $S(0) = 0$ y $S'(0) = 1$ se llaman las funciones ***coseno*** *y* ***seno*** *respectivamente y se denotan por* cos *y* sen. *Obsérvese que estas funciones tienen derivadas de todos los órdenes.*

Proposición 11.25 (Identidad de Pitágoras) *Para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica que*

$$(C(x))^2 + (S(x))^2 = 1.$$

Demostración. Definimos una función f en $\mathbb{R}$ mediante la expresión

$$f(x) = (C(x))^2 + (S(x))^2.$$

Derivando en la igualdad anterior obtenemos que

$$f'(x) = 2C(x)C'(x) + 2S(x)S'(x) = 2C(x)(-S(x)) + 2S(x)C(x) = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, lo que nos da que f es constante (proposición 5.21). Como $f(0) = 1$ resulta que $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ lo que nos da la identidad de Pitágoras. $\square$

Nota 11.26 *De la anterior igualdad se sigue que tanto la función C como la función S toman sus valores en $[-1, 1]$.*

Para obtener algunas propiedades de estas funciones probamos previamente la siguiente proposición.

Proposición 11.27 *Si $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tiene derivadas de todos los órdenes en $\mathbb{R}$ y verifica que $f''(x) = -f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$, entonces*

$$f(x) = f(0)C(x) + f'(0)S(x) \textit{ para todo } x\in\mathbb{R}.$$

Demostración. Si dada una f con esas propiedades hacemos

$$g(x) := f(0)C(x) + f'(0)S(x)$$

resulta que

1. $g''(x) = -g(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$
2. $g(0) = f(0)$
3. $g'(0) = f'(0)$.

□

Como consecuencia la función $h = f - g$ verifica que $h''(x) = -h(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$, $h(0) = 0$ y $h'(0) = 0$. Entonces todas las derivadas de h en el 0 son 0 y un argumento análogo al utilizado para ver la unicidad de la función exponencial o de la función C (que usaba el teorema de Taylor), demuestra que $h(x) = 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Esto es,

$$f(x) = g(x) = f(0)C(x) + f'(0)S(x) \text{ para todo } x\in\mathbb{R}.$$

Proposición 11.28 *1. La función* cos *es par y la función* sen *es impar.*

2. Se verifican las fórmulas de adición:

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x\cos y + \cos x\operatorname{sen} y$$

para todo $x, y\in\mathbb{R}$.

Demostración.

1. Para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica que la función C_n es par y la S_n impar, y es claro que entonces sus límites tienen también esas propiedades.

2. Fijemos $y \in \mathbb{R}$ y sea $f(x) = C(x+y)$. Esta función f tiene derivadas de todos los órdenes y se verifica que

$$f'(x) = C'(x+y) \quad \text{y} \quad f''(x) = C''(x+y) = -C(x+y) = -f(x).$$

La proposición anterior nos garantiza que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0)C(x) + f'(0)S(x) \\ &= C(y)C(x) + C'(y)S(x) \\ &= C(y)C(x) - S(y)S(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$C(x+y) = f(x) = C(y)C(x) - S(y)S(x).$$

Esto es,

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$$

La fórmula para la función S se obtiene de forma análoga, se fija $y \in \mathbb{R}$ y se considera la función $g(x) = S(x+y)$.

$\square$

Obtenemos ahora unas propiedades de acotación de las funciones cos y sen que nos permitirán definir el llamado número π.

Proposición 11.29 *Para todo $x \geq 0$ se verifican las siguientes propiedades:*

1. $-x \leq \operatorname{sen} x \leq x$.
2. $C_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} \leq \cos x \leq 1 = C_1(x)$.
3. $S_2(x) = x - \frac{x^3}{3!} \leq \operatorname{sen} x \leq x = S_1(x)$.
4. $C_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = C_3(x)$.

Demostración.

1. Como ya se ha comentado anteriormente, por la identidad de Pitágoras, $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, luego necesariamente tanto el cos como el sen toman sus valores en el intervalo $[-1, 1]$. Luego, si $x \geq 0$ resulta que

$$-x = \int_0^x -1 \leq \int_0^x \cos t dt \leq \int_0^x 1 = x,$$

lo que nos da que $-x \leq \operatorname{sen} x \leq x$.

2. Integrando las funciones de la desigualdad $\operatorname{sen} x \leq x$ obtenemos que

$$\int_0^x \operatorname{sen} t dt \leq \int_0^x t dt$$

de donde se sigue que

$$-\cos x + 1 \leq \frac{x^2}{2!}$$

y por lo tanto

$$1 - \frac{x^2}{2!} \leq \cos x.$$

Por otra parte, ya se ha dicho que siempre $\cos x \leq 1$.

3. Integrando en las desigualdades de (2) se obtiene

$$x - \frac{x^3}{3!} = \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) dt \leq \int_0^x \cos t dt = \operatorname{sen} x \leq \int_0^x 1 = x.$$

4. Integrando en las desigualdades de (3) se obtiene

$$\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} = \int_0^x \left(t - \frac{t^3}{3!}\right) dt \leq \int_0^x \operatorname{sen} t dt = -\cos x + 1 \leq \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2!}$$

de donde se sigue que

$$C_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = C_3(x).$$

□

Proposición 11.30 *Existe un número real* γ *en el intervalo* $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ *tal que* $\cos \gamma = 0$, $\cos x > 0$ *para todo* $x \in [0, \gamma)$, $\operatorname{sen} 2\gamma = 0$ *y* $\operatorname{sen} x > 0$ *para todo* $x \in (0, 2\gamma)$.

Demostración. De la primera de las desigualdades de (2) se deduce que

$$0 < \cos x \text{ para todo } x \in [0, \sqrt{2})$$

Por otra parte, de la segunda de las desigualdades de (4) se deduce que

$$\begin{aligned}
\cos \sqrt{6 - 2\sqrt{3}} &\leq 1 - \frac{6 - 2\sqrt{3}}{2} + \frac{\left(6 - 2\sqrt{3}\right)^2}{24} \\
&= 1 - \frac{6 - 2\sqrt{3}}{2} + \frac{36 - 24\sqrt{3} + 12}{24} \\
&= 1 - 3 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como $\sqrt{2} < \sqrt{6-2\sqrt{3}} < \sqrt{3}$ podemos afirmar que la función cos toma valores positivos entre 0 y $\sqrt{2}$ y negativos o 0 entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$. Dado que la función cos es continua, necesariamente existe un punto en el intervalo $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ en el que la función cos se anula. El número real $\sqrt{6-2\sqrt{3}}$, cuyo coseno es menor o igual que 0, se obtuvo resolviendo la ecuación

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = 0.$$

Consideremos ahora el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R},\ \sqrt{2} \le x,\ \cos x = 0\}$$

que debido a que $\cos x > 0$ para todo $x \in [0, \sqrt{2})$ coincide con $\{x \in \mathbb{R},\ 0 \le x, \cos x = 0\}$. Este conjunto no es vacío y está acotado inferiormente, y por lo tanto tienen un ínfimo. Denotemos por γ al ínfimo de A. Entonces por la continuidad de la función coseno, se verifica que $\cos\gamma = 0$ y $\cos x > 0$ para todo $x \in [0,\gamma)$.

De la primera desigualdad de (3) de la proposición anterior se sigue que $\operatorname{sen} x > 0$ para todo $x \in (0, \sqrt{6})$ y entonces

$$B := \{x \in \mathbb{R},\ \sqrt{6} \le x,\ \operatorname{sen} x = 0\} = \{x \in \mathbb{R},\ 0 < x,\ \operatorname{sen} x = 0\}$$

Como $\operatorname{sen} 2\gamma = 2 \operatorname{sen}\gamma \cos\gamma$ resulta que $\operatorname{sen} 2\gamma = 0$. El conjunto B es no vacío (pues $2\gamma \in B$) y acotado inferiormente por lo que tiene un ínfimo, llamémosle 2δ, necesariamente $2\delta \le 2\gamma$. Dado que $\operatorname{sen} 2\delta = 2\operatorname{sen}\delta\cos\delta$ y ser $\operatorname{sen}\delta \neq 0$ (pues $\delta < 2\delta$) necesariamente $\cos\delta = 0$. Esto implica que $\delta \ge \gamma$ y así $\delta = \gamma$. De la propia definición de γ y del hecho de que $\operatorname{sen} x > 0$ para todo $x \in (0, \sqrt{6})$ se sigue que $\operatorname{sen} x > 0$ para todo $x \in (0, 2\gamma)$. □

Definición 11.31 *Se denotará por* π *al número real* 2γ. *Según se acaba de ver* $\operatorname{sen}\pi = 0$ *y* $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. *Observamos que* $\pi \in \left[2\sqrt{2}, 2\sqrt{6-2\sqrt{3}}\right] \subset [2{,}8, 3{,}6]$ *aproximando por defecto* $\sqrt{2}$ *por* $1{,}4$ *y por exceso* $\sqrt{6-2\sqrt{3}} < \sqrt{3}$ *por* $1{,}8$.

Nota 11.32 *Un poco más adelante se verá una mejor aproximación de* π.

Proposición 11.33 *Las funciones* sen *y* cos *son periódicas de período* 2π. *Esto es,* $\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x$ *y* $\cos(x+2\pi) = \cos x$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Como $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x$ y $\operatorname{sen}\pi = 0$ se sigue que $\operatorname{sen} 2\pi = 0$. Por otra parte, teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}^2\pi = 0$ se verifica que $\cos 2\pi = \cos^2\pi - \operatorname{sen}^2\pi = \cos^2\pi + \operatorname{sen}^2\pi = 1$. Entonces

$$\cos(x+2\pi) = \cos x\cos 2\pi - \operatorname{sen} x\operatorname{sen} 2\pi = \cos x$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Análogamente

$$\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x\cos 2\pi + \cos x\operatorname{sen} 2\pi = \operatorname{sen} x.$$

□

Nota 11.34 *Observamos que*

$$\cos(\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

pues $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ *y* $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. *Como además* $\cos 0 = 1$ *y* $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, *las funciones continuas* cos *y* sen *alcanzan (teorema de Bolzano del valor intermedio, Teorema 4.50) todos los valores entre* -1 *y* 1.

Proposición 11.35 *Las funciones* sen *y* cos *verifican:*

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos x &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Demostración. Como $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, de la identidad de Pitágoras se sigue que $\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2} = 1$ y entonces $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, pues $\operatorname{sen} x > 0$ en $(0, \pi)$, luego

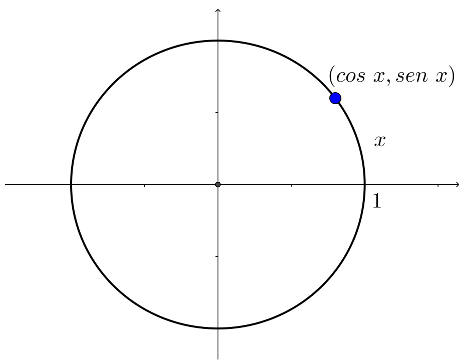
$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cos(-x) - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}(-x) \\ &= -\operatorname{sen}(-x) = \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\left(\cos x \cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Análogamente se obtienen las otras dos igualdades. □

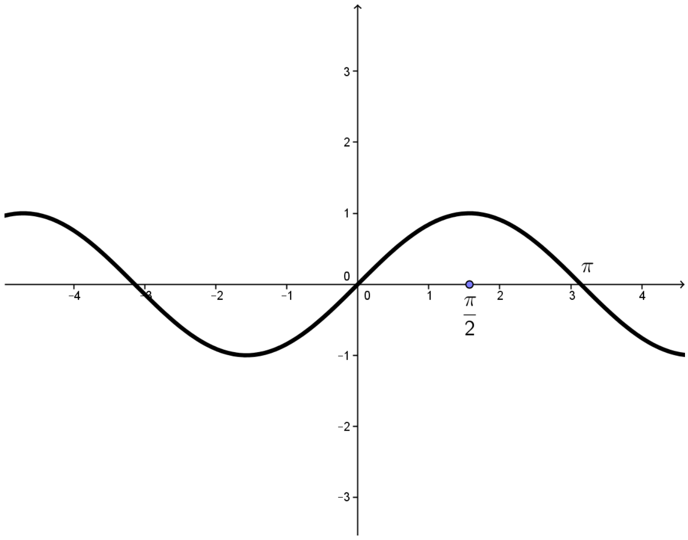
Como hemos visto, la igualdad de Pitágoras establece que $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto nos dice que $(\cos x, \operatorname{sen} x)$ es un punto de la circunferencia unidad, es precisamente el punto de la figura que sigue,



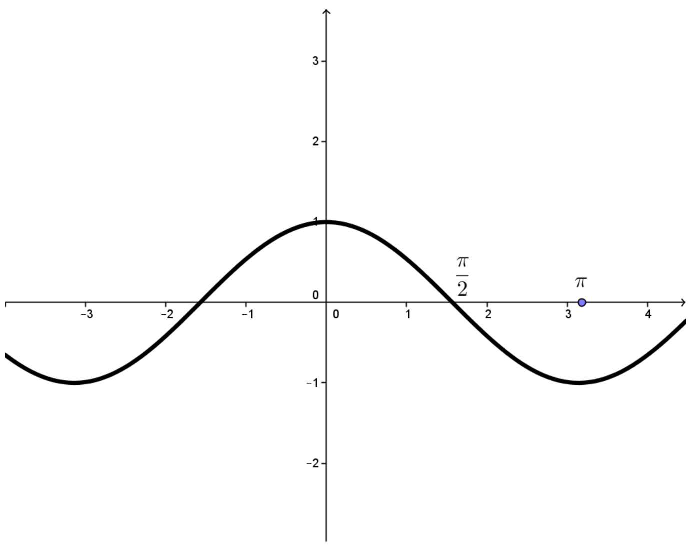
Nota 11.36 *Hay varias funciones relacionadas con las funciones* cos, sen, cosh, senh, *que son de gran importancia en geometría, física, astronomía... Citamos aquí algunas de ellas y damos sus gráficas:*

Empezamos con la función $S = \operatorname{sen}$ en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Se trata de una función continua que en 0 vale 0 y en $\frac{\pi}{2}$ vale 1. En ese intervalo la función es siempre mayor o igual que 0, entonces $S'' = -S$ es siempre menor o igual que 0 por lo que la función es cóncava entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. Como $S' = \cos$ es mayor o igual que 0 en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ resulta que S es creciente en ese intervalo.

Estudiemos ahora el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. En $\frac{\pi}{2}$ la función sen tiene un máximo, pues $S'\left(\frac{\pi}{2}\right) = C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y $S''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -S\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$. Entre $\frac{\pi}{2}$ y π la función sen es mayor o igual que 0, luego su segunda derivada es menor o igual que 0 y por lo tanto S es cóncava en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, y es decreciente pues $S' = C$ es menor o igual que 0 en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, debido a que $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \leq 0$ ya que $x - \frac{\pi}{2} \in [0, \pi)$ cuando $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Entonces sen es cóncava en $[0, \pi]$. Como sen es impar, es convexa entre $[-\pi, 0]$. La periodicidad de esta función nos permite dibujarla en todo $\mathbb{R}$:

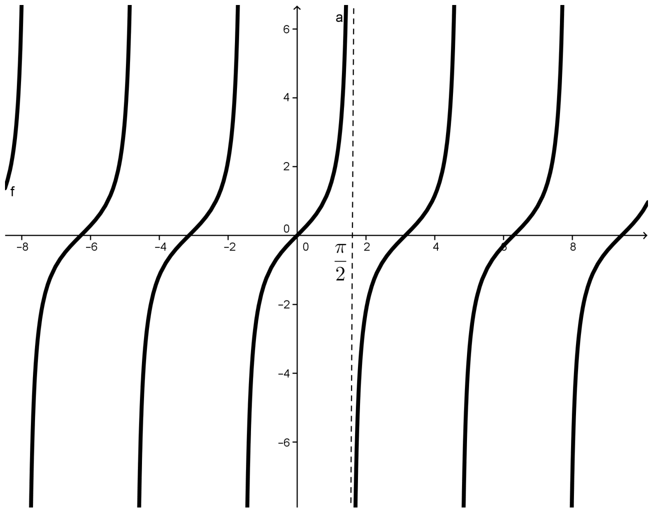


Gráfica de la función $\operatorname{sen} x,\ x \in \mathbb{R}$.



Gráfica de la función $\cos x,\ x \in \mathbb{R}$.

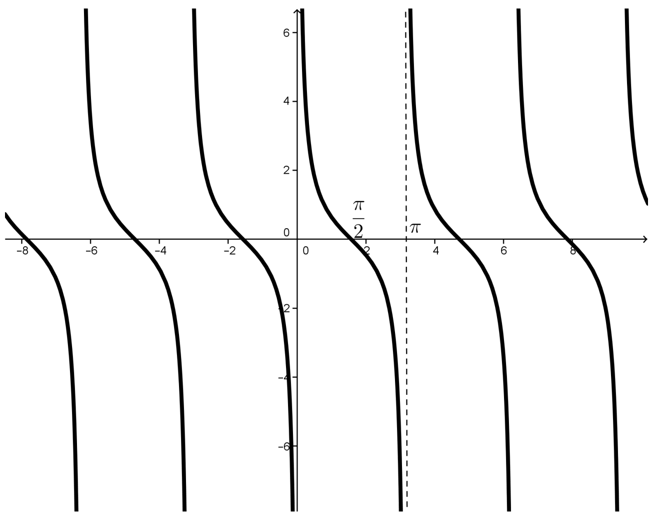
$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \text{ (definida en } x \in \mathbb{R} \text{ salvo en los puntos } \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}).$$



Gráfica de la función $\tan x$.

Se verifica que $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$ y $\tan'' x = \frac{2\cos x \operatorname{sen} x}{\cos^4 x}$ que es mayor que 0 si $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y es menor que cero si $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Claramente la función tangente tiene período π.

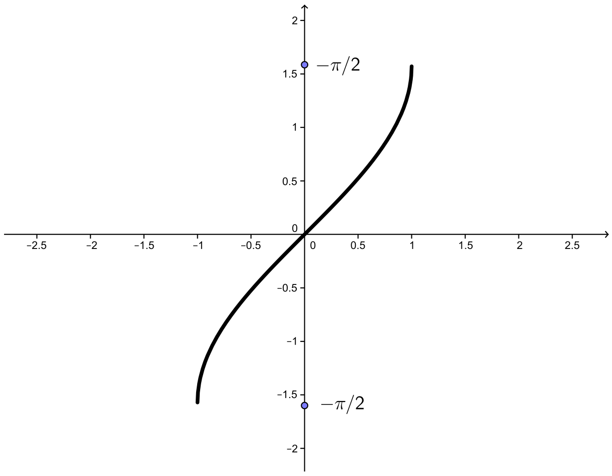
$$\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \text{ (definida en } x \in \mathbb{R} \text{ salvo en los puntos } k\pi,\ k \in \mathbb{Z}).$$



Gráfica de la función $\operatorname{cotan} x$.

Se verifica que $\operatorname{cotan}' x = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} > 0$ y $\tan'' x = \frac{2\cos x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^4 x}$.

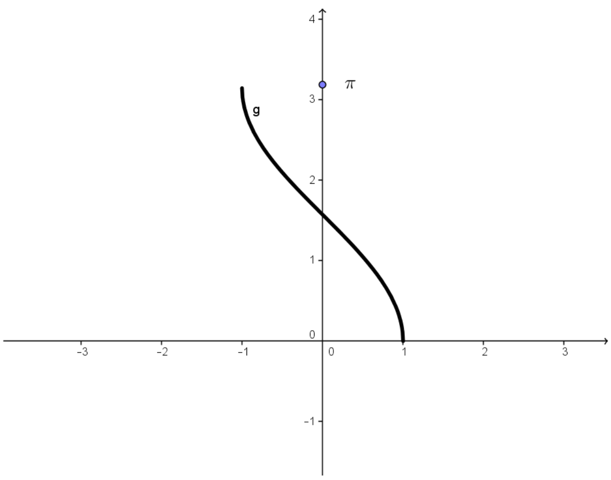
$$\operatorname{arcsen} x = \left(\operatorname{sen}|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1}(x), \;\; x \in [-1,1].$$



Gráfica de la función arcsen.

Se verifica que $\operatorname{arc\,sen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y $\operatorname{arc\,sen}''(x) = \frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^3}$ para $x \in (-1,1)$.

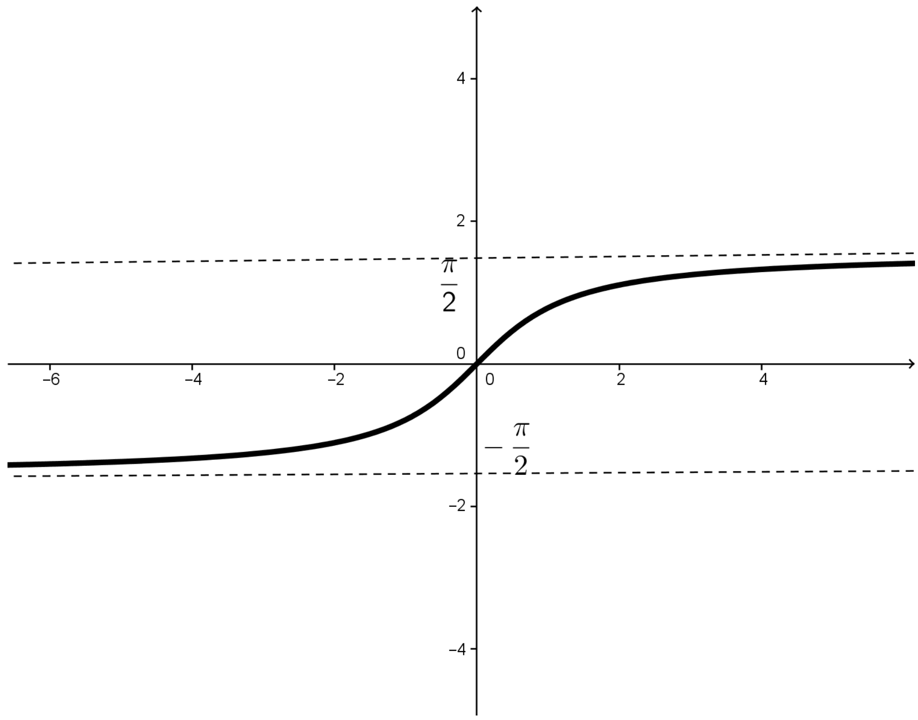
$$\arccos x = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}(x), \;\; x \in [-1,1].$$



Gráfica de la función arccos.

Se verifica que $\operatorname{arc\,cos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ y $\operatorname{arc\,cos}''(x) = \frac{-x}{(\sqrt{1-x^2})^3}$ para $x \in (-1,1)$.

$$\arctan x = \left(\tan|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1}(x), \ \ x \in \mathbb{R}.$$



Gráfica de la función arctan.

Se verifica que

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{y} \quad \arctan''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Nota 11.37 *Podemos obtener ahora una mejor aproximación de π que la que hemos dado cuando lo definimos.*

Observamos primero que la función tangente toma el valor 1 en $\frac{\pi}{4}$ pues, dado que

$$\begin{aligned} 1 &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

resulta que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

y, por lo $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

De la igualdad

$$\left(1-t^2+t^4-t^6+\cdots(-1)^n t^{2n}\right)(1+t^2)=1+(-1)^n t^{2n+2}$$

se sigue que

$$1-t^2+t^4-t^6+\cdots(-1)^n t^{2n}=\frac{1+(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}$$

y entonces

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-t^6+\cdots(-1)^n t^{2n}+\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

En consecuencia,

$$\frac{\pi}{4}=\arctan 1=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=1-\frac{1^3}{3}+\frac{1^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1^{2n+1}}{2n+1}+(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}dt$$

por lo que

$$\left|\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}\right)\right|\leq\frac{1}{2n+3}$$

lo que nos da una aproximación de $\frac{\pi}{4}$ y por lo tanto de π. No es muy buena, desde luego peor que la que dimos del número e, pueden conseguirse otras mejores, veáse, por ejemplo, el libro de M. Spivak, Ed. Reverté, p. 591.

Capítulo 12

Series de números reales

En este tema estudiaremos la convergencia de series de números reales. Comenzamos definiendo los conceptos de serie y de serie convergente.

Definición 12.1 *Dada una sucesión (x_n) de números reales se llama **serie** generada por (x_n) a la sucesión (s_n) donde*

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 \\ s_2 &= x_1 + x_2 \\ &\cdots \\ s_n &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n. \\ &\cdots \end{aligned}$$

Esta sucesión (s_n) se suele representar por $\sum x_n$ o $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Los x_n se llaman los términos de la serie y las s_n las sumas parciales de la serie. Cuando (s_n) converge a un $s \in \mathbb{R}$ se dice que la serie asociada a (x_n) es convergente a s. Cuando la serie es convergente también se denota, cometiendo un abuso de notación, por $\sum x_n$ o $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ al valor del límite de la sucesión (s_n). A veces se dice que el límite s de la sucesión (s_n) es la suma de la serie.

Ejemplo 12.2 *La serie asociada a la sucesión $(x_n) = ((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión $(s_n) = (-1, 0, -1, 0, ...) = \sum (-1)^n$. La serie asociada a la sucesión $(x_n) = \left(\frac{1}{2^n}\right)$ es la sucesión $(s_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, ...\right) = \sum \frac{1}{2^n}$.*

Ejemplo 12.3 *Sea $r \in (-1, 1)$ y consideremos la serie $\sum r^n$. Obsérvese que su término $n-$ésimo es r^n y que su suma parcial $n-$ésima es $r + r^2 + \cdots + r^n$.*

Por cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$(1 - r)s_n = s_n - rs_n = r + r^2 + \cdots + r^n - (r^2 + \cdots + r^{n+1}) = r - r^{n+1}.$$

Entonces

$$s_n = \frac{r - r^{n+1}}{1 - r}$$

y como $|r| < 1$ esta sucesión converge a $\frac{r}{1-r}$. La serie que hemos considerado es la llamada **serie geométrica**. Acabamos de ver que $\sum r^n = \frac{r}{1-r}$.

Para dar más ejemplos de series convergentes obtenemos el siguiente criterio.

Proposición 12.4 (criterio de Leibniz para series alternadas) *Si una sucesión (x_n) es decreciente y convergente a 0, siendo $x_n > 0$ para todo n. Entonces la serie $\sum(-1)^{n+1}x_n$ es convergente. Este tipo de series se llaman **series alternadas**.*

Demostración. Consideremos la subsucesión de las sumas parciales correspondientes a los términos pares,

$$s_{2n} = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + \cdots + x_{2n-1} - x_{2n}.$$

Como $x_k - x_{k+1} \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ resulta que la (s_{2n}) es una sucesión creciente con todos sus términos menores o iguales que x_1 pues

$$s_{2n} = x_1 - (x_2 - x_3) - (x_4 - x_5) - \cdots - (x_{2n-2} - x_{2n-1}) - x_{2n}$$

y $x_k - x_{k+1} \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Se sigue entonces, del teorema de la convergencia monótona (Teorema 3.30), que (s_{2n}) es convergente a un número real s. Veamos como también toda la sucesión (s_n) converge a s. Dado $\varepsilon > 0$ sea $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|s_{2n} - s| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad x_{2n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $n \geq N$ (téngase en cuenta que $x_n \to 0$).

Entonces para todo $n \geq N$ se tiene que

$$\begin{aligned} |s_{2n+1} - s| &= |s_{2n} + x_{2n+1} - s| \\ &\leq |s_{2n} - s| + x_{2n+1} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 12.5 *La serie $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ es convergente. Basta aplicar directamente el criterio de Leibniz. Veremos un poco más adelante que la serie $\sum \frac{1}{n}$ no es convergente.*

Nota 12.6 *Puede calcularse el valor de la suma de esa serie de la siguiente manera: Para todo $t \in \mathbb{R}$ y cualquier $n \in \mathbb{N}$ se verifica que,*

$$(1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n+1}t^{n-1})(1+t) = 1 + (-1)^{n+1}t^n$$

y entonces, si t es distinto de -1,

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n+1}t^{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}t^n}{1+t}.$$

Integrando en $[0,1]$ *obtenemos que*

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}t^n}{1+t}dt,$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right)\right| &= \left|\int_0^1 \frac{(-1)^n t^n}{1+t}dt\right| \\ &\leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt \\ &\leq \int_0^1 t^n dt \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Esto nos demuestra que el límite de

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

es igual a $\int_0^1 \frac{1}{1+t}dt$*, pero sabemos que el valor de esta integral es* $\log 2$ *lo que nos permite afirmar que*

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2.$$

Proposición 12.7 *Si* $\sum x_n$ *y* $\sum y_n$ *son dos series convergentes, entonces la serie* $\sum(x_n + y_n)$ *también es convergente y*

$$\sum(x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n.$$

Demostración. Si denotamos, para cada n, por s_n la suma parcial n-ésima de $\sum x_n$ y por t_n la suma parcial $n-$ésima de $\sum y_n$, resulta que la suma parcial $n-$ésima de la serie $\sum(x_n + y_n)$ es $s_n + t_n$, y sabemos que si (s_n) converge a s y (t_n) converge a t, entonces $(s_n + t_n)$ converge a $s + t$. □

Proposición 12.8 *Si* $\sum x_n$ *es una serie convergente a* s *y* α *es un número real, entonces la serie* $\sum \alpha x_n$ *también es convergente y*

$$\sum \alpha x_n = \alpha \sum x_n.$$

Demostración. La suma parcial $n-$ésima de $\sum \alpha x_n$ es αs_n y (αs_n) converge a αs. □

La siguiente proposición nos da una condición necesaria para que una serie sea convergente.

Proposición 12.9 *Si* $\sum x_n$ *es convergente, entonces la sucesión* (x_n) *converge a* 0.

Demostración. Por cada $n = 2, 3...$ sucede que

$$x_n = s_n - s_{n-1}.$$

Como (s_n) converge a s, también (s_{n-1}) converge a s y entonces $x_n \to 0$. □

Caracterizamos ahora la convergencia de las series de términos positivos.

Proposición 12.10 *Si* $\sum x_n$ *es una serie con todos sus términos* $x_n \geq 0$, *entonces* $\sum x_n$ *converge si y sólo si la sucesión* (s_n) *de sus sumas parciales está acotada superiormente.*

Demostración. Al ser $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ resulta que (s_n) es una sucesión monótona creciente y, como sabemos por el teorema de las sucesiones monótonas (Teorema 3.30) (s_n) converge si y sólo si está acotada superiormente. □

Obtenemos ahora un criterio para la convergencia de series sin ninguna restricción sobre sus términos.

Proposición 12.11 (criterio de Cauchy para la convergencia de series) *Una serie* $\sum x_n$ *es convergente si y sólo si, para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo par de naturales* (m, n) *con* $m > n \geq N$ *se verifica que*

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m| < \varepsilon.$$

Demostración. $\sum x_n$ es convergente si y sólo si (por definición) la sucesión (s_n) es convergente, y esta sucesión de números reales es convergente si y sólo si es una sucesión de Cauchy (Teorema 3.43). El que (s_n) sea de Cauchy significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo par de naturales (m, n) con $m > n \geq N$ se verifica que

$$|s_m - s_n| < \varepsilon.$$

Basta entonces observar que

$$s_m - s_n = x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m.$$

□

Definición 12.12 *Se dice que una serie* $\sum x_n$ *es absolutamente convergente cuando la serie* $\sum |x_n|$ *es convergente.*

El criterio de Cauchy nos va a permitir probar ahora que toda serie absolutamente convergente es también convergente.

Proposición 12.13 *Si $\sum x_n$ es una serie absolutamente convergente, entonces es también convergente.*

Demostración. Al ser convergente la serie $\sum |x_n|$, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo par de naturales (m, n) con $m > n \geq N$ se verifica que

$$||x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \cdots + |x_m|| < \varepsilon.$$

Como

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m| \leq |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \cdots + |x_m| < \varepsilon$$

se tiene que $\sum x_n$ verifica el criterio de Cauchy y por lo tanto es convergente. $\square$

Nota 12.14 *No es cierto, en general, que las series convergentes sean absolutamente convergentes. Hemos visto que la serie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente y se ve a continuación que la serie $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ no lo es.*

Ejemplo 12.15 *La serie $\sum \frac{1}{n}$ no es convergente. Esta serie es conocida como la* ***serie armónica****.*

Sabemos que una serie no es convergente si y sólo si no verifica la condición de Cauchy (Proposición 12.11). Ahora bien, tomemos $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y supongamos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|s_n - s_m| < \frac{1}{2}$$

para todo $m > n \geq N$. Tomando $n \geq N$ fijo y $m = 2n$ resulta que

$$|s_m - s_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$$

y esta suma es mayor o igual que

$$\frac{1}{n+n} + \overset{n}{\cdots} + \frac{1}{n+n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

por lo que no se verifica la condición de Cauchy.

Ejemplo 12.16 *La serie $\sum \frac{1}{n^p}$ no converge si $0 < p \leq 1$ y converge si $p > 1$.*

En efecto, si $0 < p \leq 1$ entonces $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$ y por lo tanto la sucesión (t_n) de las sumas parciales de la serie $\sum \frac{1}{n^p}$ tiene todos sus términos mayores o iguales que los de la serie $\sum \frac{1}{n}$. Como la serie $\sum \frac{1}{n}$ no es convergente tampoco lo es la $\sum \frac{1}{n^p}$.

Supongamos ahora que $p > 1$ y consideremos la subsucesión de $\sum \frac{1}{n^p}$ formada por las sumas parciales correspondientes a los índices $n_j = 2^j - 1$. Los términos de esta subsucesión son:

$$\begin{aligned} s_{n_1} &= s_1 = 1 \\ s_{n_2} &= s_3 = s_1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} < 1 + \frac{2}{2^p} = 1 + \frac{1}{2^{p-1}} \\ s_{n_3} &= s_7 = s_3 + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} < s_3 + \frac{4}{4^p} < 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} = \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Si hacemos $r = \frac{1}{2^{p-1}}$ se sigue por inducción matemática que

$$s_{n_j} < 1 + r + r^2 + \cdots + r^{j-1}.$$

Como $|r| < 1$ sabemos que la serie geométrica $\sum r^n$ es convergente y por lo tanto la sucesión de sumas parciales es acotada superiormente. Esto implica que la sucesión (s_{n_j}) está también acotada superiormente. Como la sucesión de sumas parciales de $\sum \frac{1}{n^p}$ es monótona creciente, al tener una subsucesión acotada superiormente, la propia sucesión es también acotada superiormente. En efecto, sea M una cota superior de (s_{n_j}). Para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $n \leq 2^n - 1$ (esto se sigue por inducción matemática). Entonces, al ser (s_n) creciente resulta que $s_n \leq s_{2^n-1} = s_{n_n} \leq M$.

Aunque en general es difícil calcular la suma de una serie convergente, hay casos en los que es muy sencillo, como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 12.17 *La serie* $\sum \frac{1}{n^2+n}$ *es convergente y* $\sum \frac{1}{n^2+n} = 1$. *En efecto,*

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

y entonces

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 - \frac{1}{2} \\ s_2 &= 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3} \\ s_3 &= 1 - \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4} \\ &\ldots \end{aligned}$$

Resulta entonces, por inducción, que $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ *y esta sucesión converge a* 1, *esto es,* $\sum \frac{1}{n^2+n} = 1$.

Obtenemos ahora algunos criterios para la convergencia de series, lo hacemos primero para la convergencia absoluta y después para la convergencia.

12.1. Criterios de convergencia absoluta

Proposición 12.18 (criterio de comparación) *Si* $\sum x_n$ *y* $\sum y_n$ *son dos series de términos mayores o iguales que* 0 *y existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que se verifica la relación*

$$0 \leq x_n \leq y_n \quad \textit{para todo } n \geq N,$$

entonces, si la serie $\sum y_n$ *es convergente también lo es la* $\sum x_n$ *y si* $\sum x_n$ *no es convergente,* $\sum y_n$ *tampoco lo es.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Si suponemos que $\sum y_n$ es convergente, el criterio de Cauchy nos da que existe un N^* tal que si $m > n \geq N^*$ entonces

$$y_{n+1} + \cdots + y_m < \varepsilon.$$

Si consideramos $m > n \geq$máx$\{N, N^*\}$ tenemos que

$$0 \leq x_{n+1} + \cdots + x_m \leq y_{n+1} + \cdots + y_m < \varepsilon$$

y entonces $\sum x_n$ verifica el criterio de Cauchy y por lo tanto es convergente.

Por otra parte, si $\sum x_n$ no es convergente tampoco puede serlo $\sum y_n$, pues de serlo lo sería $\sum x_n$ como acabamos de ver. □

Ejemplo 12.19 *La serie* $\sum \frac{1}{n2^n}$ *es convergente pues* $0 \leq \frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ *para todo* n *y hemos visto que* $\sum \frac{1}{2^n}$ *es convergente, es una progresión geométrica de razón* $\frac{1}{2}$.

Proposición 12.20 (criterio de comparación por paso al límite) *Si* $\sum x_n$ *y* $\sum y_n$ *son dos series de números reales mayores que* 0 *y existe el límite de la sucesión* $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ *y éste es un número real distinto de* 0 *(necesariamente mayor que* 0*), entonces una de las series converge si y sólo si converge la otra. Además, en el caso de que ese límite sea* 0*, la convergencia de* $\sum y_n$ *implica la de* $\sum x_n$*, y si el límite es* $+\infty$*, entonces la convergencia de* $\sum x_n$ *implica la de* $\sum y_n$*.*

Demostración. Sea l el límite de la sucesión $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$. Dado $\varepsilon = \frac{l}{2}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - l\right| < \frac{l}{2} \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Entonces para todo $n \geq N$ se verifica que

$$\frac{l}{2} y_n < x_n < \frac{3l}{2} y_n.$$

El criterio de comparación, aplicado dos veces, junto con el hecho de que si una serie converge también converge la serie formada por los productos de un número real por sus términos, nos da el resultado.

Supongamos ahora que $l = 0$ y que $\sum y_n$ converge. Dado $\varepsilon = 1$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{x_n}{y_n} < 1 \quad \text{para todo } n \geq N,$$

lo que nos da que $x_n < y_n$ para todo $n \geq N$, y el criterio de comparación nos da el resultado. Si ahora suponemos que $l = +\infty$, entonces, para $M = 1$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{x_n}{y_n} > 1 \quad \text{para todo } n \geq N,$$

lo que nos da que $y_n < x_n$ para todo $n \geq N$, y el criterio de comparación nos da el resultado. □

Ejemplo 12.21 *La serie $\sum \operatorname{sen} \frac{1}{n}$ no es convergente pues $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$ y la serie $\sum \frac{1}{n}$ no es convergente. Este hecho no se puede deducir usando sólo el criterio de comparación pues el hecho de que $\operatorname{sen} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$ no basta para decir que $\sum \operatorname{sen} \frac{1}{n}$ no es convergente.*

Proposición 12.22 (Criterio de Cauchy de la raíz)

1. *Si dada una serie $\sum x_n$ existen $r \in (0,1)$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que*

$$|x_n|^{\frac{1}{n}} \leq r \quad \textit{para todo } n \geq N$$

entonces la serie es absolutamente convergente.

2. *Si existen infinitos $n \in \mathbb{N}$ tales que $|x_n|^{\frac{1}{n}} \geq 1$, entonces la serie $\sum x_n$ no es convergente.*

Demostración.

1. La condición $|x_n|^{\frac{1}{n}} \leq r$ para todo $n \geq N$ equivale a que $|x_n| \leq r^n$ para todo $n \geq N$. Dado que $0 < r < 1$, la serie geométrica $\sum r^n$ es convergente, luego, por el criterio de comparación $\sum |x_n|$ es convergente.

2. Si $|x_n|^{\frac{1}{n}} \geq 1$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$, entonces $|x_n| \geq 1$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$ por lo que (x_n) no converge a 0 y por lo tanto la serie $\sum x_n$ no es convergente.

□

Ejemplo 12.23 *La serie $\sum \left(\frac{2}{n}\right)^n$ es convergente, pues para $n \geq N = 4$ se verifica que*

$$\left|\left(\frac{2}{n}\right)^n\right|^{\frac{1}{n}} = \frac{2}{n} \leq r = \frac{1}{2}$$

Corolario 12.24 (criterio de la raíz por paso al límite) *Si dada una serie $\sum x_n$ llamamos l al $\overline{\lim}|x_n|^{\frac{1}{n}}$. Entonces, si $l < 1$ la serie $\sum x_n$ es absolutamente convergente y si $l > 1$ la serie $\sum x_n$ no converge.*

Demostración. Si $l < 1$, consideremos un número real $r \in (l, 1)$. Como $r = l + \varepsilon$, siendo $\varepsilon = r - l > 0$, por la definición de límite superior existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n|^{\frac{1}{n}} < r$ para todo $n \geq N$. De la proposición se sigue que $\sum x_n$ converge absolutamente.

Si $l > 1$ entonces, como $1 = l - \varepsilon$, siendo $\varepsilon = l - 1 > 0$, existen infinitos $n \in \mathbb{N}$ tales que $|x_n|^{\frac{1}{n}} > 1$ y entonces, por la proposición se tiene que $\sum x_n$ no converge. $\square$

Nota 12.25 *El caso en el que $l = 1$ no se puede deducir ninguna conclusión sobre la convergencia de la serie pues eso ocurre con las series $\sum \frac{1}{n}$ y $\sum \frac{1}{n^2}$ y, como sabemos, la primera de ellas no converge y la segunda sí.*

Ejemplo 12.26 *La serie $\sum \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$ es convergente, pues $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - 1 = 0 < 1$.*

Proposición 12.27 (Criterio de D'Alembert del cociente)

1. *Si $\sum x_n$ es una serie con todos sus términos distintos de 0 y existen $r \in (0, 1)$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que*

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leq r \quad \text{para todo } n \geq N$$

entonces la serie $\sum x_n$ es absolutamente convergente.

2. *Si existe $N \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \geq 1$ para todo $n \geq N$, entonces la serie $\sum x_n$ no es convergente.*

Demostración.

1. Si $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leq r$ para todo $n \geq N$ entonces

$$\begin{aligned}
|x_{N+1}| &\leq r|x_N| \\
|x_{N+2}| &\leq r|x_{N+1}| \leq r^2|x_N| \\
|x_{N+3}| &\leq r|x_{N+2}| \leq rr^2|x_N| = r^3|x_N| \\
&\dots \\
|x_{N+m}| &\leq r^m|x_N|
\end{aligned}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Entonces a partir de N, los términos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ están mayorados por los términos correspondientes de la serie geométrica $\sum r^n$ multiplicados por $|x_N|$. Al ser $0 < r < 1$ esta serie converge, luego $\sum x_n$ converge absolutamente.

2. Si ahora $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \geq 1$ a partir de un cierto $N \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}
|x_{N+1}| &\geq |x_N| \\
|x_{N+2}| &\geq |x_{N+1}| \geq |x_N| \\
&\dots \\
|x_{N+m}| &\geq |x_N| > 0
\end{aligned}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. En consecuencia la serie $\sum x_n$ no converge, pues su término general no tiende a 0.

□

Ejemplo 12.28 $\sum \frac{1}{n!}$ *es convergente pues*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{n+1} \leq r = \frac{1}{2} \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Proposición 12.29 (criterio del cociente por paso al límite) *Si dada una serie* $\sum x_n$*, con* $x_n \neq 0$*, hacemos* $l = \overline{\text{lím}} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$ *y* $l^* = \underline{\text{lím}} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$*. Entonces,*

1. Si l es menor que 1, la serie $\sum x_n$ es absolutamente convergente y
2. Si l^* es mayor que 1, la serie $\sum x_n$ no converge.

Demostración.

1. Sea $l < 1$ y consideremos un número real $r \in (l, 1)$. Entonces $r = l + \varepsilon$, siendo $\varepsilon = r - l > 0$. De la definición de límite superior se sigue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se verifica que

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < l + \varepsilon = r.$$

   El apartado (1) de la proposición anterior nos garantiza la convergencia absoluta de la serie $\sum x_n$.

2. Si $l^* > 1$ entonces $1 = l^* - \varepsilon$, siendo $\varepsilon = l^* - 1$, y así, por la definición de límite inferior, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se verifica que $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > l^* - \varepsilon = 1$. El apartado (2) de la proposición anterior nos da el resultado.

□

Nota 12.30 *Cuando alguno de esos límites es* 1 *no se puede llegar a ninguna conclusión sobre la convergencia de la serie. Sirve el mismo contraejemplo que en el caso del criterio de la raíz por paso al límite. La serie* $\sum \frac{1}{n}$ *verifica que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

y no es convergente, mientras que la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ *verifica que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

y es convergente.

Ejemplo 12.31 *La serie* $\sum \frac{n!}{n^n}$ *es convergente, pues*

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n^n(n+1)!}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{n+1}{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1.$$

A veces, cuando sucede que $\underset{n\to\infty}{lím} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = 1$, hay algún otro criterio que permite decidir sobre la convergencia absoluta o no de la serie $\sum x_n$. Uno de ellos es el criterio de Raabe (matemático suizo, 1801-1859), que en su versión de paso al límite dice que si $\sum x_n$ es una serie cuyos términos son números reales diferentes de 0 y existe el

$$\underset{n\to\infty}{lím}\, n\left(1 - \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\right) \in \mathbb{R},$$

entonces la serie es absolutamente convergente si ese límite es mayor que 1 y no es absolutamente convergente cuando es menor que 1. En el caso de que sea 1 este criterio tampoco decide. No lo demostraremos aquí, puede verse en el libro de Bartle-Sherbert. Hay incluso una versión un poco mejor usando límites superiores e inferiores. Vamos a aplicarlo ahora al estudio de la convergencia de la serie

$$\sum \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots (2n+1)}.$$

En este caso

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2(n+1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots (2(n+1)+1)}}{\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots (2n+1)}} = \frac{2n+2}{2n+3} \to 1$$

por lo que el criterio del cociente no decide. Veamos si decide el de Raabe.

$$n\left(1 - \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\right) = n\left(1 - \frac{2n+2}{2n+3}\right) = \frac{n}{2n+3} \to \frac{1}{2},$$

luego podemos afirmar que la serie dada no es convergente.

Damos ahora un criterio de convergencia de series basado en las integrales impropias.

Proposición 12.32 (criterio de la integral) *Sea* $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ *una función decreciente. Entonces la serie* $\sum f(n)$ *converge si y sólo si existe la integral impropia* $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Demostración. Sea k un número natural mayor o igual que 2. Al ser f decreciente es integrable en $[1, c]$ para todo $c \geq 1$ y $f(k) \leq f(x) \leq f(k-1)$ para todo $x \in [k-1, k]$ y entonces es claro que

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)dx \leq f(k-1).$$

Por lo tanto

$$f(2)+\cdots+f(n)\leq\int_1^2 f(x)dx+\cdots+\int_{n-1}^n f(x)dx\leq f(1)+\cdots+f(n-1)$$

para todo $n\geq 2$, de donde se deduce que

$$s_n-f(1)\leq\int_1^n f(x)dx\leq s_{n-1}.$$

Teniendo en cuenta que $f(x)>0$ para todo $x\in[1,+\infty)$, de estas dos desigualdades se sigue que (s_n) converge si y sólo si lo hace $\left(\int_1^n f(x)dx\right)$, pues si (s_n) converge, la sucesión (s_{n-1}) está acotada superiormente y entonces también lo está la sucesión monótona creciente $\left(\int_1^n f(x)dx\right)$. Recíprocamente, si $\left(\int_1^n f(x)dx\right)$ converge, está acotada superiormente y entonces también lo está la sucesión monótona creciente (s_n).

Veamos ahora como existe el $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx\in\mathbb{R}$ si y sólo si existe el $\lim\limits_{c\to+\infty}\int_1^c f(x)dx\in\mathbb{R}$, y se verifica que

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)dx=\lim_{c\to+\infty}\int_1^c f(x)dx.$$

En efecto, denotemos por L al límite de la sucesión $\left(\int_1^n f(x)dx\right)$. Para todo $\varepsilon>0$ existe N tal que

$$L-\int_1^N f(x)dx<\varepsilon$$

(téngase en cuenta que al ser creciente la sucesión $\left(\int_1^n f(x)dx\right)$ el límite es mayor o igual que todos los términos de ella). Si consideramos ahora $c\in[N,+\infty)$ resulta que

$$\int_1^N f(x)dx\leq\int_1^c f(x)dx$$

y por lo tanto,

$$L-\int_1^c f(x)dx\leq L-\int_1^N f(x)dx<\varepsilon$$

lo que nos da que

$$\lim_{c\to+\infty}\int_1^c f(x)dx=L.$$

Debe observarse que $\int_1^c f(x)dx\leq L$ para todo $c>1$ pues $\int_1^c f(x)dx\leq\int_1^n f(x)dx$ si n es un natural mayor o igual que c.

Recíprocamente, si $L^*=\lim\limits_{c\to+\infty}\int_1^c f(x)dx$, para todo $\varepsilon>0$ existe $K>0$ (que podemos suponer natural) tal que para todo $c\geq K$ se verifica que

$$L^*-\int_1^c f(x)dx<\varepsilon.$$

Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq K$, se verifica que

$$L^* - \int_1^n f(x)dx < \varepsilon$$

lo que nos da que

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx = L^*.$$

Nota 12.33 *Es importante el que $f(x) > 0$ para todo $x \in [1, +\infty)$, pues si consideramos la función*

$$f(x) = \operatorname{sen}(2\pi(x-1))$$

existe el límite de la sucesión $\left(\int_1^n f(x)dx\right)$ y sin embargo no existe el límite (cuando $c \to \infty$) de $\int_1^c f(x)dx$. En efecto,

$$\int_1^n f(x)dx = \left[\frac{-\cos(2\pi(x-1))}{2\pi}\right]_1^n = \frac{1}{2\pi}\left(-\cos(2\pi(n-1)) + \cos 0\right) = 0$$

mientras que

$$\int_1^{\frac{1}{2\pi}+1+2n\pi} f = \int_1^{\frac{1}{2\pi}+1} f = \frac{1}{2\pi}\left(-\cos\left(2\pi\left(\frac{1}{2\pi}+1-1\right)\right) + \cos 0\right) = -\cos 1 + 1$$

que no tiende a 0 cuando $n \to \infty$, es un valor constante distinto de 0.

Este criterio puede aplicarse para estudiar la convergencia de las series del tipo $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha > 0$, (cosa que ya hemos hecho anteriormente y por lo tanto ésta es una segunda prueba de lo que allí se hizo), pues si se considera la función $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ en $[1, +\infty)$, hemos visto en el ejemplo 9.9 que f tiene integral impropia si y sólo si $\alpha > 1$. $\square$

También puede aplicarse, por ejemplo, para estudiar la convergencia de las series

$$\sum \frac{1}{(n+1)\log(n+1)} \quad \text{y} \quad \sum \frac{1}{(n+1)(\log(n+1))^2}.$$

Veámoslo, las correspondientes funciones

$$f_1(x) = \frac{1}{(x+1)\log(x+1)}$$

y

$$f_2(x) = \frac{1}{(x+1)(\log(x+1))^2}$$

son decrecientes en $[1, +\infty)$, pues sus derivadas respectivas son:

$$f_1'(x) = \frac{-(\log(x+1)+1)}{((x+1)\log(x+1))^2}$$

y

$$f_2'(x) = \frac{-((\log(x+1))^2 + 2\log(x+1))}{((x+1)(\log(x+1))^2)^2}$$

y ambas expresiones son siempre menores que 0. Para calcular la integral de f_1 entre 1 y c, para $c > 1$, usaremos la primera forma del teorema de cambio de variable (Teorema 8.10)

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

con $\varphi(t) = \log(t+1)$ y $f(x) = \frac{1}{x}$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+1)\log(t+1)}dt &= \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{(t+1)\log(t+1)}dt \\
&= \lim_{c\to+\infty} \int_{\log 2}^{\log(c+1)} \frac{1}{x}dx \\
&= \lim_{c\to+\infty} (\log(\log(c+1)) - \log(\log 2)) \to +\infty.
\end{aligned}$$

Si ahora mantenemos la misma φ y tomamos $f(x) = \frac{1}{x^2}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+1)(\log(t+1))^2}dt &= \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{(t+1)(\log(t+1))^2}dt \\
&= \lim_{c\to+\infty} \int_{\log 2}^{\log(c+1)} \frac{1}{x^2}dx \\
&= \lim_{c\to+\infty} \left(\frac{-1}{\log(c+1)} + \frac{1}{\log 2}\right) \to \frac{1}{\log 2}.
\end{aligned}$$

12.2. Criterio de convergencia no necesariamente absoluta

Para obtener un criterio de convergencia para series con términos no necesariamente positivos demostramos previamente el siguiente resultado, conocido como el Lema de Abel.

Proposición 12.34 (Lema de Abel) *Sean (x_n) e (y_n) dos sucesiones de números reales y sea (t_n) la sucesión de las sumas parciales correspondientes a la sucesión (y_n). Entonces para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, se verifica que*

$$x_m y_m = x_m t_m - x_m t_n$$

si $m = n+1$, *y*

$$\sum_{k=n+1}^{m} x_k y_k = x_m t_m - x_{n+1} t_n + \sum_{k=n+1}^{m-1} (x_k - x_{k+1}) t_k.$$

para todo $m \geq n+2$.

Demostración. La primera igualdad se obtiene directamente del hecho de que

$$t_m - t_n = y_1 + \cdots + y_{n+1} - (y_1 + \cdots + y_n) = y_{n+1} = y_m$$

Dado que para todo $k = 2, 3...$ se verifica que $y_k = t_k - t_{k-1}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{m} x_k y_k &= \sum_{k=n+1}^{m} x_k (t_k - t_{k-1}) \\
&= x_{n+1}(t_{n+1} - t_n) + x_{n+2}(t_{n+2} - t_{n+1}) + \cdots \\
&\quad + x_{m-1}(t_{m-1} - t_{m-2}) + x_m(t_m - t_{m-1}) \\
&= -x_{n+1} t_n + (x_{n+1} - x_{n+2}) t_{n+1} + (x_{n+2} - x_{n+3}) t_{n+2} + \cdots \\
&\quad + (x_{m-1} - x_m) t_{m-1} + x_m t_m \\
&= x_m t_m - x_{n+1} t_n + \sum_{k=n+1}^{m-1} (x_k - x_{k+1}) t_k.
\end{aligned}$$

□

Proposición 12.35 (criterio de Dirichlet) *Sea* (x_n) *una sucesión decreciente convergente a* 0. *Si las sumas parciales* (t_n) *de una serie* $\sum y_n$ *están acotadas, entonces la serie* $\sum x_n y_n$ *es convergente.*

Demostración. Sea M tal que $|t_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Teniendo en cuenta que al ser (x_n) decreciente y convergente a 0 necesariamente $x_n \geq 0$, para cualesquiera m y n, $m > n$, se tiene que,

$$|x_m y_m| = x_m |t_m - t_n| \leq 2 x_{n+1} M$$

si $m = n+1$, y si $m \geq n+2$,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=n+1}^{m} x_k y_k \right| &\leq |x_m t_m - x_{n+1} t_n| + \left| \sum_{k=n+1}^{m-1} (x_k - x_{k+1}) t_k \right| \\
&\leq (x_m + x_{n+1}) M + \sum_{k=n+1}^{m-1} (x_k - x_{k+1}) M \\
&= (x_m + x_{n+1}) M + (x_{n+1} - x_m) M \\
&= 2 x_{n+1} M.
\end{aligned}$$

Como (x_n) tiende a 0, dado cualquier $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un $N \in \mathbb{N}$ tal que $2x_{n+1}M < \varepsilon$ para todo $n \geq N$, y así

$$|x_{n+1}y_{n+1} + x_{n+2}y_{n+2} + \cdots + x_m y_m| < \varepsilon$$

para todo $m > n \geq N$, por lo que el resultado se sigue usando el criterio de Cauchy para la convergencia de series (Proposición 12.11). $\square$

Nota 12.36 *Obsérvese que el criterio de Leibniz para series alternadas es un caso particular de éste.*

Ejemplo 12.37 *Aplicar el criterio de Dirichlet para estudiar la convergencia de la serie*

$$\sum x_n \cos nx$$

siendo (x_n) *una sucesión decreciente y convergente a* 0 *y* x *un número real que no sea un múltiplo entero de* 2π*.*

Comprobaremos que la sucesión de sumas parciales (t_n) correspondientes a la sucesión $(\cos nx)$ está acotada. Como (x_n) decrece y converge a 0, el resultado será consecuencia directa del criterio de Dirichlet. Usaremos una fórmula clásica relativa a senos y cosenos, se trata de la fórmula,

$$\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = 2 \operatorname{sen} b \cos a$$

que se obtiene fácilmente restando las expresiones:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a \\ \operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a. \end{aligned}$$

La acotación que obtendremos aquí será

$$|\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx| \leq \frac{1}{\left|\operatorname{sen} \frac{x}{2}\right|},$$

que se deduce de la siguiente igualdad (conocida como igualdad trigonométrica de Lagrange),

$$2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}(\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx) = \operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \operatorname{sen} \frac{x}{2}$$

teniendo en cuenta que

$$\left|\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right| \leq 2$$

Veamos como podemos obtener por inducción la anterior fórmula.

Para $n = 1$ la igualdad de Lagrange se sigue de la fórmula

$$2\operatorname{sen} b \cos a = \operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b)$$

con $a = x$ y $b = \frac{x}{2}$. Si suponemos la igualdad para $k = 2, 3...$ entonces

$$\begin{aligned}
& 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}(\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos kx + \cos(k+1)x) \\
= \;& 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}(\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos kx) + 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos(k+1)x \\
& \overset{(*)}{=} \operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \operatorname{sen}\frac{x}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos(k+1)x \\
& \overset{(**)}{=} \operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \operatorname{sen}\frac{x}{2} + \operatorname{sen}\left((k+1)x + \frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left((k+1)x - \frac{x}{2}\right) \\
= \;& \operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \operatorname{sen}\frac{x}{2} + \operatorname{sen}\left((k+1)+\frac{1}{2}\right)x - \operatorname{sen}\left(k+\frac{1}{2}\right)x \\
= \;& \operatorname{sen}\left((k+1)+\frac{1}{2}\right)x - \operatorname{sen}\frac{x}{2}
\end{aligned}$$

lo que prueba que fórmula es cierta para $k+1$. En $(*)$ se ha usado que la fórmula es cierta para k y en $(**)$ se usado la relación $2\operatorname{sen} b \cos a = \operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b)$.

12.3. Introducción y supresión de paréntesis en una serie

Definición 12.38 *Se dice que una serie $\sum y_n$ se obtiene de otra serie $\sum x_n$ por introducción de paréntesis (o por agrupación de sus términos), cuando existe una aplicación estrictamente creciente $k \in: \mathbb{N} \mapsto n_k \in \mathbb{N}$, tal que*

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_1} \\
y_2 &= x_{n_1+1} + x_{n_1+2} + \cdots + x_{n_2} \\
& \;\;\cdots \\
y_{m+1} &= x_{n_m+1} + x_{n_m+2} + \cdots + x_{n_{m+1}} \\
& \;\;\cdots
\end{aligned}$$

Proposición 12.39 *Si una serie $\sum x_n$ es convergente, entonces cualquiere serie $\sum y_n$ obtenida a partir de ella por introducción de paréntesis es también convergente.*

Demostración. Si denotamos por (s_n) la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum x_n$ y por (t_n) las de la serie $\sum y_n$, observamos que (t_n) es una subsucesión de (s_n) y por lo tanto, si (s_n) converge, también debe converger (t_n).

Nota. En principio no se puede asegurar que si una serie convergente $\sum y_n$ se ha obtenido a partir de otra $\sum x_n$ por introducción de paréntesis, necesariamente la serie $\sum x_n$ tenga que ser convergente. Basta considerar la serie $\sum y_n$ con $y_n = 0$ para todo n, que se puede obtener a partir de la serie $\sum(-1)^n$ introduciendo paréntesis por medio de la función $n_k = 2k$. La serie $\sum y_n$ es convergente pero la serie no lo es. Hay un teorema que proporciona condiciones suficientes para que cuando una serie obtenida por introducción de paréntesis sea convergente, también lo sea la serie original. Las condiciones son que (x_n) converja a 0 y que exista una constante M tal que $n_{k+1} - n_k < M$ para todo $k \in \mathbb{N}$. No haremos aquí la demostración, puede verse en el libro de T.M. Apostol, Ed. Reverté, 1981, pp. 228-9.

12.4. Reordenamiento de series

Se llama reordenamiento de una serie $\sum x_n$ a cualquier serie de la forma $\sum x_{\sigma(n)}$ donde σ es una permutación de $\mathbb{N}$ (esto es, es una aplicación biyectiva de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$). Por ejemplo, la serie que determina la sucesión $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}...)$ es un reordenamiento de la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$, la permutación que hemos considerado es $\sigma(n) = n+1$ si n es impar y $\sigma(n) = n - 1$ si n es par.

Es un hecho, quizá sorprendente, el que una serie convergente pueda tener reordenamientos no convergentes o convergentes a un número real distinto de aquel al que converge la serie dada; es más, hay un teorema de Riemann, que prueba que si una serie es convergente pero no absolutamente convergente, dado cualquier número real se puede obtener una reordenación de la serie que converja a ese número real. Puede verse una demostración de este teorema en el libro de M. Spivak titulado "Calculus", Ed. Reverté, pp. 659-61. Vamos a ver un ejemplo de una reordenación de una serie convergente que es una serie, que es convergente pero no converge a lo que converge la serie original.

La serie será $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Se ha demostrado anteriormente (Proposición 12.4) que esa serie es convergente y vamos a usarlo aquí. Sus sumas parciales son:

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Vamos a reordenar los términos de la serie $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ para obtener una nueva serie que es convergente, pero que no converge a lo mismo que lo hace ella, que sabemos que es a $\log 2$. Esa reordenación es:

$$\left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{12}, \dots\right).$$

La idea es tomar un término positivo y dos negativos a su derecha lo más próximos posible que no se hayan elegido antes.

Introduzcamos paréntesis en la correspondiente serie usando la función

$$1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 3,\ 3 \mapsto 5,\ 4 \mapsto 6,\ 5 \mapsto 8 \ldots,$$

La serie que resulta es:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \cdots$$

Observamos que,

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \cdots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots\right)$$

y por lo tanto la serie que resultó de introducir paréntesis converge a $\frac{1}{2}\log 2$. Como se verifica la condición $n_{k+1} - n_k < 3$, para todo $k \in \mathbb{N}$, la serie asociada a la reordenación

$$\left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{12}, \ldots\right).$$

es entonces convergente y lo hace a $\frac{1}{2}\log 2$.

Nota 12.40 *Hemos visto que hay ejemplos de series convergentes que tiene algún reordenamiento que converge a algo distinto de lo que convergía la serie original.*

Sin embargo cuando las series son absolutamente convergentes cualquier reordenación de ellas converge a lo mismo que la serie original. Esto es lo que demuestra el siguiente teorema.

Teorema 12.41 *Sea* $\sum x_n$ *una serie absolutamente convergente. Entonces cualquier reordenación de ella converge y tiene la misma suma que ella.*

Demostración. Denotemos por s a la suma de la serie $\sum x_n$ y sea σ una permutación de $\mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si q es un número natural mayor que N se verifique que:

$$|x_{N+1}| + \cdots + |x_q| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |s_N - s| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(lo primero se obtiene del criterio de convergencia de Cauchy aplicado a la serie $\sum |x_n|$ y lo segundo del hecho de que la sucesión (s_n) de sumas parciales de la serie converge a s). Fijemos ahora un $M \in \mathbb{N}$ tal que $\{1, 2, ..., N\} \subset \{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(M)\}$. Si $m \geq M$ es un número natural y hacemos $t_m = x_{\sigma(1)} + x_{\sigma(2)} + \cdots + x_{\sigma(m)}$, entonces, $t_m - s_N$ es una suma finita de términos x_k, con $k > N$, y por lo tanto, para $q = \text{máx}\{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(M), ..., \sigma(m)\}$, se tiene que

$$|t_m - s_N| \leq |x_{N+1}| + \cdots + |x_q|$$

y esta suma es menor que $\frac{\varepsilon}{2}$, de donde se sigue que si $m \geq M$,

$$|t_m - s| \leq |t_m - s_N| + |s_N - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto prueba que $t_m \to s$. $\square$

Nota 12.42 *Obsérvese que si pedimos sólo convergencia de la serie, la condición de Cauchy nos daría que*

$$|x_{N+1} + \cdots + x_q| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y esto no nos garantiza que $|t_m - s_N|$ sea menor que $\frac{\varepsilon}{2}$, piénsese por ejemplo en la permutación

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdots \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 8 & 20 & 4 & 7 & 9 & \cdots \end{array}$$

Para $N = 4$ podemos tomar $M = 7$ y así

$$|t_7 - s_4| = |x_6 + x_8 + x_{20}|$$

y no se puede garantizar que esta cantidad es menor o igual que $|x_5 + x_6 + \cdots + x_{20}|$, en esta última suma hay más sumandos que en la anterior pero la suma puede ser más pequeña al poder haber términos negativos.

Nota 12.43 *Observamos que si una serie $\sum x_n$ es absolutamente convergente entonces cualquier reordenación $\sum x_{\sigma(n)}$ de ella es también absolutamente convergente, pues $\sum |x_{\sigma(n)}|$ es una reordenación de la serie absolutamente convergente $\sum |x_n|$.*

Nota 12.44 *En el conjunto de las series se puede considerar también una operación de multiplicación. No hay una forma canónica de hacerlo. La definición más habitual es la llamada "Producto de Cauchy" y es la siguiente:*

$$\left(\sum x_n\right)\left(\sum y_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_{n-k+1}\right).$$

Puede demostrarse que el producto de Cauchy de dos series absolutamente convergentes es convergente, mientras que si la series son convergentes, pero no absolutamente convergentes, no puede garantizarse la convergencia de ese producto. Puede verse esto haciendo el producto de la serie convergente $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ por ella misma.

Capítulo 13

Series de funciones

Dedicamos este último tema a estudiar las series de funciones. La definición de estas series es análoga a la de las series numéricas, lo que ocurre es que aquí los términos son funciones.

Definición 13.1 *Dada una sucesión de funciones (f_n), definidas todas ellas en un subconjunto A de $\mathbb{R}$, se define la serie asociada a ella como la sucesión de funciones (s_n), donde*

$$\begin{aligned} s_1(x) &= f_1(x) \\ s_2(x) &= f_1(x) + f_2(x) \\ &\dots \\ s_n(x) &= f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) \\ &\dots \end{aligned}$$

Como ya se hizo con las series numéricas, se usará la notación $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, o abreviadamente, $\sum f_n$, para denotar a la serie asociada a la sucesión (f_n). Por cada $n \in \mathbb{N}$, a la función s_n se le llama la suma parcial $n-$ésima.

Se dice que la serie de funciones $\sum f_n$ es **puntualmente convergente** en un conjunto A en el que todas ellas están definidas, si existe una función $f : A \to \mathbb{R}$ de forma que $s_n \to f$ puntualmente en A. De forma análoga se dice que la serie de funciones $\sum f_n$ es **uniformemente convergente** en A si existe una función $f : A \to \mathbb{R}$ de forma que $s_n \to f$ uniformemente en A. Suele cometerse el abuso de notación $\sum f_n = f$, indicando si la convergencia es puntual o uniforme. Desde luego, si una serie converge uniformemente a una función en un conjunto A también lo hace de forma puntual. La convergencia uniforme implica que el término general tiende a 0 uniformemente y la convergencia puntual implica que el término general tiende a 0 puntualmente.

Como, al fin y al cabo, (s_n) es una sucesión de funciones, podemos aplicarle los resultados del Tema 8 y obtener lo que afirma la siguiente proposición.

1. Si $\sum f_n$ converge uniformemente a una función f en A, y cada f_n es continua, entonces f es continua en A.

2. Si (f_n) es una sucesión de funciones integrables en un intervalo $[a, b]$ y la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en $[a, b]$ a una función f, ésta función es integrable, la serie numérica $\sum \int_a^b f_n$ converge y
$$\int_a^b f = \sum \int_a^b f_n.$$
Esto es, $\int_a^b \sum f_n = \sum \int_a^b f_n$.

3. Si (f_n) es una sucesión de funciones derivables en un intervalo $[a, b]$ tal que $\sum f_n$ converge puntualmente a una función f, cada f'_n es integrable en $[a, b]$ y la serie $\sum f'_n$ converge uniformemente a una función continua g, entonces f es derivable y $\sum f'_n$ converge uniformemente a f' en $[a, b]$.

Proposición 13.2 (criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de series) *Una serie de funciones $\sum f_n$ definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ converge uniformemente en A si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m > n \geq N$ se verifica que*
$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)| < \varepsilon \quad \textit{para todo } x \in A.$$

Demostración. Basta aplicar el criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de sucesiones de funciones (proposición 10.10) a la sucesión (s_n) de sumas parciales de la serie. Nótese que $s_m(x) - s_n(x) = f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)$. □

Ejemplo 13.3 *La serie de funciones $\sum \frac{1}{n}x^n$ es puntualmente convergente en $[-1, 1)$, pero no es uniformemente convergente en ese intervalo.*

En efecto, para todo $t \in (-1, 1)$, sabemos que
$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + \cdots$$
Integrando entre 0 y $x \in (0, 1)$ obtenemos que
$$\int_0^x \frac{1}{1-t}dt = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$$
Dado que
$$\int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\log(1-x)$$
resulta que la serie $\sum \frac{1}{n}x^n$ converge puntualmente a $-\log(1-x)$ en $(-1, 1)$. Ya se ha visto anteriormente que también converge en -1 (y que su suma es $-\log 2$).

Veamos como la convergencia no es uniforme. Si lo fuese, para $\varepsilon = \frac{1}{4}$ *debería existir* N *tal que*

$$\left| \frac{1}{N+1} x^{N+1} + \cdots + \frac{1}{N+N} x^{N+N} \right| < \frac{1}{4} \quad \textit{para todo } x \in [-1, 1),$$

pero esto no ocurre si $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2N}}$, *pues en esos puntos*

$$\frac{1}{N+1} x^{N+1} + \cdots + \frac{1}{N+N} x^{N+N} \geq \frac{N}{2N} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2N}} \right)^{2N} = \frac{1}{4}.$$

Proposición 13.4 (criterio M de Weierstrass) *Sean* (M_n) *una sucesión de números reales mayores o iguales que* 0 *y* (f_n) *una sucesión de funciones definidas en* $A \subset \mathbb{R}$ *de forma que para cada* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq M_n$ *para todo* $x \in A$. *Si la serie numérica* $\sum M_n$ *converge, entonces la serie de funciones* $\sum f_n$ *es uniformemente convergente en* A.

Demostración. Para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, se verifica que

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)| \leq M_{n+1} + \cdots + M_m \quad \text{para todo } x \in A.$$

Dado que $\sum M_n$ es convergente, el criterio de Cauchy para la convergencia de series numéricas (proposición 12.11) nos permite, dado $\varepsilon > 0$, encontrar un $N \in \mathbb{N}$ tal que $M_{n+1} + \cdots + M_m < \varepsilon$ para todo $m > n \geq N$ y entonces

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo } x \in A,$$

y la proposición anterior nos da que $\sum f_n$ es uniformemente convergente en A. □

Hay un tipo particularmente importante de series de funciones, se trata de las llamadas series de potencias que definimos a continuación.

Definición 13.5 *Se llama* ***serie de potencias*** *con centro en* $c \in \mathbb{R}$ *a cualquier serie de funciones* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *en la que las funciones son de la forma*

$$f_n(x) = a_n (x - c)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

para algún $a_n \in \mathbb{R}$. *Con un cierto abuso de notación estas series se escribirán así:* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$. *Obsérvese que en ellas se considera también un primer término, una función* f_0 *que es constante, la constante* a_0 *(pues* $(x - c)^0 = 1$*).*

Nota 13.6 *Aunque los términos de una serie de potencias sean funciones definidas en todo* $\mathbb{R}$, *puede que la correspondiente serie sólo converja puntual o uniformemente en un subconjunto propio de* $\mathbb{R}$ *que pudiera ser sólo el centro de la serie, como ocurre con la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ *que sólo converge en* 0. *Si en la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *tomamos* $x = 1$ *obtenemos la serie numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ *que ciertamente no es convergente, si* $x = \frac{1}{2}$ *sí que la serie converge pues se trata de la serie geométrica* $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Para las series de potencias hay un resultado que da mucha información sobre el conjunto de puntos donde convergen, se trata del llamado teorema de Cauchy-Hadamard que probaremos a continuación. Damos primero una definición.

Definición 13.7 *Se llama radio de convergencia de la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$*, al cociente*

$$\rho = \frac{1}{\overline{lím}(|a_n|)^{\frac{1}{n}}}$$

cuando $\overline{lím}(|a_n|)^{\frac{1}{n}} \in (0,+\infty)$*. Si ese límite superior es* 0 *se define el radio de convergencia como* $+\infty$ *y si es* $+\infty$ *se define como* 0 *(se recuerda que el límite superior es* $+\infty$ *cuando la sucesión no está acotada superiormente).*

Teorema 13.8 (de Cauchy-Hadamard) *Si tenemos una serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *con radio de convergencia* ρ*, entonces:*

1. *Si* $\rho = +\infty$ *la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *converge absolutamente en todo punto de* $\mathbb{R}$*, esto es, por cada* $x \in \mathbb{R}$ *la serie numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-c)^n|$ *es convergente. Además la serie es uniformemente convergente en todo intervalo cerrado y acotado de* $\mathbb{R}$*.*

2. *Si* $\rho \in (0,+\infty)$ *la serie converge absolutamente en todo punto del intervalo* $(c-\rho, c+\rho)$ *y lo hace de modo uniforme en* $[c-R, c+R]$ *para todo* $R < \rho$*. No converge en ningún* x *tal que* $|x-c| > \rho$*. En general no puede decir nada sobre lo que ocurre en los puntos* x *tales que* $|x-c| = \rho$*.*

3. *Si* $\rho = 0$ *la serie sólo converge en el punto* c*.*

Demostración.

1. Si $\rho = \infty$, fijemos $x \in \mathbb{R}$. Como

$$\overline{lím}\,|a_n x^n|^{\frac{1}{n}} = \overline{lím}\,|a_n|^{\frac{1}{n}}\,|x| = 0,$$

el criterio de la raíz por paso al límite (corolario 12.24) para la convergencia de series numéricas, nos dice que la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-c)^n|$ es convergente. Por otra parte, cualquier intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ está contenido en un intervalo de la forma $[c-R, c+R]$ para algún $R > 0$ y se tiene que $|a_n(x-c)^n| \le |a_n R^n|$ para todo $x \in [c-R, c+R]$, y el criterio M de Weierstrass nos da la convergencia uniforme de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ en $[c-R, c+R]$, pues $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|R^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(R+c-c)^n|$ es convergente.

2. Si $\rho \in (0,+\infty)$ y $x \in (c-\rho, c+\rho)$ entonces

$$\overline{lím}\,|a_n(x-c)^n|^{\frac{1}{n}} \le \overline{lím}\,|a_n|^{\frac{1}{n}}\,\rho < 1,$$

lo que garantiza la convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$. Si consideramos un intervalo de la forma $[c-R, c+R]$, con $R < \rho$, entonces

$$|a_n(x-c)^n| \leq |a_n|\, R^n \quad \text{para todo } x \in [c-R, c+R],$$

el criterio M de Weierstrass nos da que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ es uniformemente convergente en $[c-R, c+R]$ pues $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(R+c-c)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n$ es convergente.

Si ahora consideramos un punto x tal que $|x-c| > \rho$ entonces $\overline{lím}\,(|a_n(x-c)^n|)^{\frac{1}{n}} = \rho|x-c| > 1$ y el criterio de la raíz por paso al límite nos dice que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ no es convergente.

Respecto a la ambigüedad en el caso de que $|x-c| = \rho$, basta observar que para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ se verifica que $\rho = 1$ y que esta serie converge en el punto 1 y no lo hace en el punto -1.

3. Cuando $\rho = 0$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ no es convergente cualquiera que sea $x \neq c$ pues, para esos x, se tiene que

$$\overline{lím}\,(|a_n|\,(x-c)^n)^{\frac{1}{n}} = \overline{lím}(|a_n|)^{\frac{1}{n}}|x-c| = +\infty$$

y por lo tanto la sucesión $((|a_n|)^{\frac{1}{n}}|x-c|)$ tiene infinitos términos mayores que 1 y el criterio de la raíz por paso al límite nos dice que esa serie no converge.

$\square$

Si para una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ se verifica que su radio de convergencia $\rho \in (0, +\infty)$, entonces podemos definir una función f en $(c-\rho, c+\rho)$ asignando a cada x de ese intervalo la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$. Pues bien, esa función, al ser límite uniforme de la sucesión de sumas parciales $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ en cada intervalo $[c-R, c+R]$, $0 < R < \rho$, tiene muy buenas propiedades: Es continua (y por lo tanto integrable en cada intervalo cerrado y acotado de $(c-\rho, c+\rho)$) y derivable, para ver esto último observamos que si $f_n(x) = a_n(x-c)^n$ entonces $f_n'(x) = na_n(x-c)^{n-1}$ y estas funciones son integrables y como $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1} = (x-c)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^n$ y

$$\overline{lím}\,(|na_n|)^{\frac{1}{n}} = \overline{lím}\,(|a_n|)^{\frac{1}{n}}$$

pues $lím\; n^{\frac{1}{n}} = 1$, también $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converge uniformemente en $[c-R, c+R]$ a una función continua, luego, según la proposición 10.13, f es derivable y

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1} \quad \text{para todo } x \in (c-\rho, c+\rho)\,.$$

Cuando $\rho = \infty$ la función f se puede definir en todo $\mathbb{R}$ y tiene las propiedades anteriores.

Las funciones de este tipo se llama **funciones analíticas** en c, tienen derivadas de cualquier orden en c y observamos que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{n)}(c) = n!a_n.$$

Esto es,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{n)}(c)(x-c)^n.$$

Esta expresión, llamada la **serie de Taylor de f en c**, nos recuerda a la obtenida en el teorema de Taylor (teorema 6.1), allí la función f tenía derivadas hasta un orden $n \in \mathbb{N}$ en un intervalo $[a,b]$ y derivada de orden $n+1$ en (a,b) y se probaba que para todo $x_0 \in I$ y todo $x \in I$, $x \neq x_0$, existía un punto d entre x y x_0 tal que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0) + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{n)}(x_0)(x-x_0)^n \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}f^{n+1)}(d)(x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Obsérvese que aquí x_0 hace el papel de centro de la serie y que se usó una d en vez de la c que aparecía en el polinomio de Taylor para que no haya confusión con la c que usamos en este tema como centro de la serie.

Entonces, las funciones analíticas son como “polinomios de grado infinito”. Ciertamente son funciones muy buenas pues son “muy parecidas a los polinomios”, se derivan y se integran muy bien, y sus valores se pueden aproximar calculando valores de polinomios de grado suficientemente grande.

Nota 13.9 *No todas las funciones con derivadas de todo orden en* 0 *son analíticas en* 0. *Por ejemplo, la función*

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

tiene derivadas de todo orden en 0 *y son todas* 0, *se vio en el problema 4 de la hoja 12 que las derivadas primera y segunda de esta función en* 0 *son* 0 *y se puede obtener que* $f^{n)}(0) = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces, si* f *se pudiese escribir en la forma*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!} x^n$$

para los x *de algún intervalo centrado en* 0, *necesariamente en esos puntos* $f(x) = 0$ *mientras que esta función sólo vale* 0 *en* 0.

Vamos a ver algunos ejemplos de funciones analíticas en 0 que ya son conocidas.

La función $S(x) = \operatorname{sen} x$, se definió como el límite de la sucesión de funciones (S_n) donde para cada n,

$$S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

entonces realmente,

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Obsérvese que hay un pequeño desfase en los exponentes para empezar la suma en 0.

Para el caso del cos se tiene

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Para el caso de la función exponencial,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$