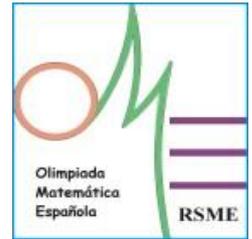




REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA

LIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Comunidad de Madrid

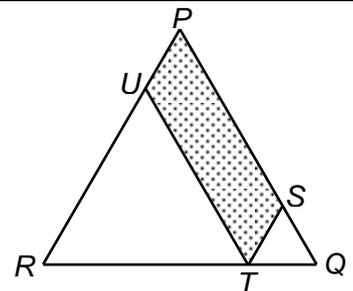


FASE CERO: viernes 25 de noviembre de 2016

- En la hoja de respuestas, escribe la letra de la opción que creas correcta.
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos, cada respuesta en blanco 1 punto y cada respuesta errónea 0 puntos.
- No está permitido el uso de calculadoras, instrumentos de medida o de cualquier aparato electrónico.
- TIEMPO: 3 horas.

1. Si el perímetro del triángulo equilátero PQR es 48 cm, ¿cuál es, en cm, el perímetro del paralelogramo $PSTU$?

- A) 26 B) 28 C) 30 D) 32
E) 34

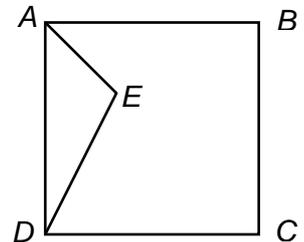


2. La media, mediana y moda del conjunto de siete números 60, 100, x , 40, 50, 200 y 90 son todas iguales a x . ¿Cuál es el valor de x ?

- A) 50 B) 60 C) 75 D) 90 E) 100

3. En el dibujo que observas, el perímetro del cuadrado $ABCD$ es 120 y el perímetro del triángulo AED es $2x$. ¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde al perímetro del pentágono $ABCDE$?

- A) $120 + 2x$ B) $40 + 2x$ C) $60 + 2x$ D) $90 + 2x$
E) $30 + 2x$



4. Las dimensiones de una caja de base rectangular vienen expresadas por números enteros y están en la proporción $1 : 3 : 4$. ¿Cuál de los siguientes números puede corresponder al volumen de la caja?

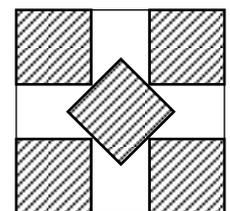
- A) 18 B) 56 C) 72 D) 96 E) 144

5. En cierto campamento de verano cada uno de los 100 estudiantes que hay sabe cantar, bailar o hacer teatro pero ninguno sabe hacer las tres cosas. Hay 42 que no saben cantar, 65 que no saben bailar y 29 que no saben hacer teatro. ¿Cuántos estudiantes saben hacer dos de estas tres cosas?

- A) 16 B) 25 C) 36 D) 49 E) 64

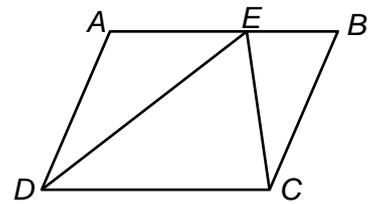
6. En el interior de un cuadrado de lado 1 hemos dibujado cinco cuadrados iguales como muestra la figura. El punto medio de cada uno de los lados del cuadrado central coincide con uno de los vértices de cada uno de los otros cuatro cuadrados. Si la longitud del lado de cada uno de estos cinco cuadrados es $\frac{a - \sqrt{2}}{b}$ con a y b enteros positivos, $a + b$ es igual a:

- A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11



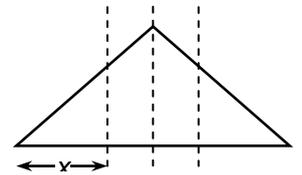
7. ¿Qué porcentaje de números de cuatro cifras diferentes, todas impares, son divisibles entre 3?
 A) 80% B) 25% C) 33% D) 40% E) 75%
8. El número 33^{33} podemos escribirlo como la suma de 33 impares consecutivos. El mayor de todos ellos es:
 A) $33^{32} + 32$ B) $33^{31} + 32$ C) $33^{32} - 32$ D) $33^{33} - 32$ E) 33^{32}
9. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?
 $123456785 \cdot 123456782 - 123456783 \cdot 123456784$
 (Como ves, se trata de una resta y productos de números de nueve cifras)
 A) -2 B) -1 C) 0 D) 2 E) Nada de lo anterior

10. En el paralelogramo $ABCD$ de la figura, se verifica que $\frac{AE}{EB} = \frac{3}{2}$.
 ¿Cuál es el cociente entre el área del cuadrilátero $AECD$ y el área del paralelogramo $ABCD$?
 A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{6}$



11. La diferencia entre una fracción positiva y su inversa es $\frac{9}{20}$. ¿Cuál es la suma de dicha fracción y su inversa?
 A) $\frac{41}{40}$ B) $\frac{20}{9}$ C) $\frac{25}{16}$ D) $\frac{41}{20}$ E) 5

12. La base (lado desigual) del triángulo isósceles de la figura tiene 12 cm de longitud. Trazando tres rectas perpendiculares a la base, dividimos dicho triángulo en cuatro partes de igual área. ¿Cuál es la longitud del segmento x ?
 A) $3\sqrt{2}$ B) 4 C) 4,5 D) 5 E) $3\sqrt{3}$



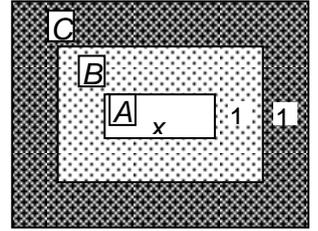
13. Una recta que pasa por el origen de coordenadas corta a las rectas $x = 1$ e $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ formando un triángulo equilátero. ¿Cuál es el perímetro de este triángulo?
 A) $2\sqrt{6}$ B) $2 + 2\sqrt{3}$ C) 6 D) $3 + 2\sqrt{3}$ E) $6 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

14. Los puntos de corte de la parábola $y = x^2 - 2ax + 2a$ con el eje de abscisas tienen coordenadas enteras. ¿Cuál es la suma de todos los valores posibles de a ?
 A) 7 B) 8 C) 16 D) 17 E) 18

15. Ali, Bea y Celia escogen al azar un número entre los diez primeros enteros positivos, siendo diferentes todos los escogidos. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de Ali sea múltiplo del de Bea y el de Bea sea múltiplo del de Celia?
 A) $\frac{1}{64}$ B) $\frac{1}{72}$ C) $\frac{1}{80}$ D) $\frac{1}{90}$ E) $\frac{3}{200}$

16. De cuántas formas podemos escribir 345 como suma de una lista creciente de dos o más enteros positivos consecutivos?
 A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7

17. En el interior del rectángulo grande dibujamos otros dos cuyos lados son paralelos a los del primero, como muestra la figura. Si las áreas de las tres regiones, A, B y C, están en progresión aritmética, la altura del rectángulo pequeño es 1 cm y la anchura de las regiones B y C también es de 1 cm, ¿cuánto mide la base, x , del rectángulo pequeño?



- A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

18. Los vértices de un cuadrilátero son los puntos $P(a, b)$, $Q(b, a)$, $R(-a, -b)$ y $S(-b, -a)$, siendo a y b enteros y $a > b > 0$. Si el área de dicho cuadrilátero es 16, ¿cuál es el valor de $a + b$?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 12 E) 13

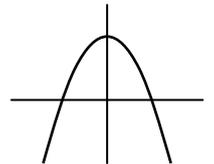
19. ¿Cuál es la suma de las soluciones positivas de la ecuación $(x^2 - x)^2 = 18(x^2 - x) - 72$?

- A) 5 B) 7 C) 8 D) 9 E) 18

20. Si x es cualquier número real, el menor valor que toma la expresión $x^2 - 4x + 3$ es:

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 3 E) -3

21. La gráfica de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ es la que observas, cuyo vértice está en el eje de ordenadas. ¿Qué afirmación de las siguientes tiene que ser verdadera?



- A) $a + b + c = 0$ B) $a + b - c < 0$ C) $a - b + c < 0$ D) $a + b + c < 0$
E) No hay información suficiente.

22. Si $p(x) = (x-2)^{2016}(x+2016) + (x-2)^{2015}(x+2015) + (x-2)^{2014}(x+2014) + \dots + (x-2)(x+1)$ la suma de los coeficientes del polinomio $p(x)$ es:

- A) 1008 B) 2016 C) 2027090 D) 0 E) 1

23. En un cuadrante de una circunferencia inscribimos otra circunferencia, como muestra la figura 1. ¿Cuál es el cociente entre el área del círculo pequeño y el área del cuadrante?

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $3(2 - \sqrt{3})$ D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ E) $4(3 - 2\sqrt{2})$

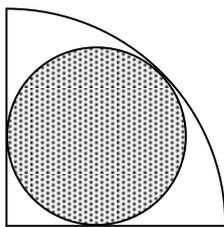


Figura 1

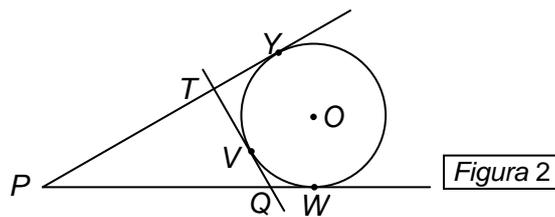


Figura 2

24. En el triángulo PQT de la figura 2, $PQ = 10$ cm, $QT = 5$ cm y el ángulo $\angle PQT = 60^\circ$. Los puntos Y , W y V son los puntos de tangencia de la circunferencia de centro O con las rectas que determinan los lados del triángulo. ¿Cuál es, en cm, el radio de dicha circunferencia?

- A) $5\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$ B) $\frac{5(3 - \sqrt{3})}{2}$ C) $\frac{5(\sqrt{3} - 1)}{2}$ D) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{25\sqrt{3}}{6}$

25. Seleccionamos al azar tres enteros diferentes entre 1 y 2016, ambos inclusive. Si llamamos p a la probabilidad de que el producto de los tres sea impar, entonces:

- A) $p < \frac{1}{8}$ B) $p = \frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{8} < p < \frac{1}{3}$ D) $p = \frac{1}{3}$ E) $p > \frac{1}{3}$

26. ¿Cuál es el área encerrada por la gráfica de la curva $x^2 + y^2 = |x| + |y|$?

- A) $\pi + \sqrt{2}$ B) $\pi + 2$ C) $\pi + 2\sqrt{2}$ D) $2\pi + \sqrt{2}$ E) $2(\pi + \sqrt{2})$

27. La gráfica de $x^2(x + y + 1) = y^2(x + y + 1)$ está formada por:

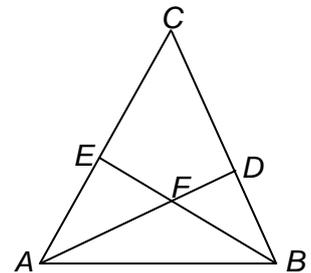
- A) Dos rectas paralelas B) Dos rectas que se cortan C) Una recta y una parábola
D) Tres rectas concurrentes en un punto E) Tres rectas no concurrentes en un punto

28. Los tres vértices del triángulo ABC están en la gráfica de la parábola $y = x^2$. El vértice A es el origen de coordenadas y el lado BC es paralelo al eje de abscisas. Si el área del triángulo es 64, ¿cuál es la longitud del lado BC ?

- A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 16

29. En el triángulo ABC de la figura de lados $AB = 6$, $BC = 7$ y $CA = 8$, las bisectrices AD y BE de los ángulos \hat{A} y \hat{B} respectivamente, se cortan en el punto F . ¿Cuál es el cociente $\frac{AF}{FD}$?

- A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{3}$ C) 2 D) $\frac{7}{3}$ E) $\frac{5}{2}$



30. En el triángulo PQR , el ángulo \hat{R} es el doble del ángulo \hat{P} , $PR = 5$ y $QR = 4$. ¿Cuál es la longitud del lado PQ ?

- A) $2\sqrt{10}$ B) 6 C) 7 D) $2\sqrt{7}$ E) $5\sqrt{2}$