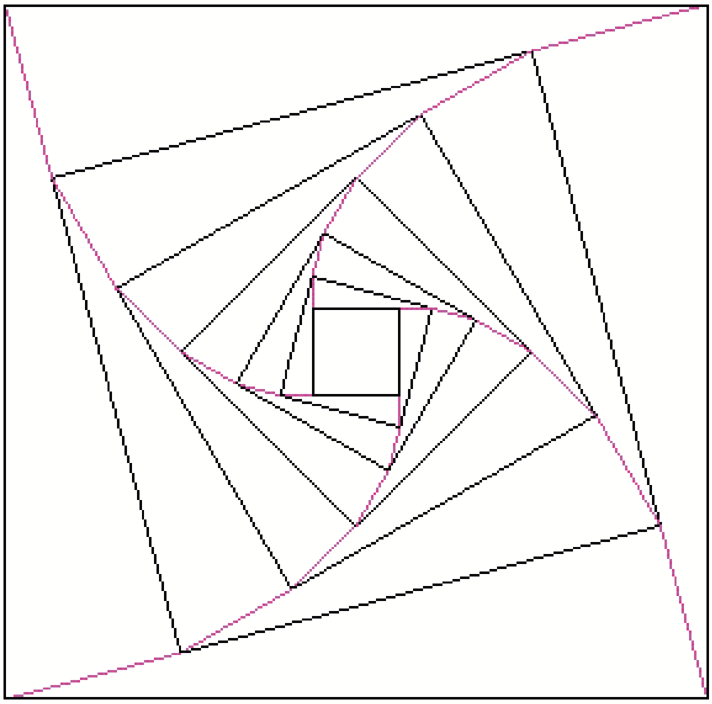
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 67
JUNIO DE 2004

ÍNDICE

Págs.

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik y Mathematical Reviews

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

GRÁFICAS LOUREIRO, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Bº de La Fortuna (Madrid).
Teléf.: (91) 611 59 94 – Fax: (91) 611 59 88

En la portada de este número aparece la figura que ha sido adoptada como *logotipo* de la Sociedad «Puig Adam». Se trata de la figura de portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado «La Matemática y su enseñanza actual», publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad, que a partir de ahora queda ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
28040 - Madrid
Teléf. y fax: 91 394 62 48
e-mail: puigadam@mat.ucm.es

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:
JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:
EUGENIO ROANES MACÍAS
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE	(Redacción de publicaciones)
ENRIQUE RUBIALES CAMINO	(Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO	(Gestión de publicaciones)
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ	(Actividades y concursos)

Secretario:
JOSÉ MARÍA SORDO JUANEDA

Vicesecretaria:
MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:
ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:
MARTÍN GARBAYO MORENO

Adjunta a la presidencia (mantenimiento página web):
MARÍA JOSÉ MORENO SÁNCHEZ DE LA SERRANA

Acta de la Asamblea General Ordinaria de 2004 de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas

En la Facultad de Matemáticas de la UCM, sita en la Ciudad Universitaria, a las doce horas del día 17 de abril de 2004, en segunda convocatoria, reunidos los miembros de la Sociedad, bajo la Presidencia de D. José Javier Etayo Gordejuela, dio comienzo la Asamblea General Ordinaria del año dos mil cuatro.

Se desarrolló con arreglo al siguiente

ORDEN DEL DÍA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.

Se procede a la lectura del acta de la Asamblea anterior, que queda aprobada por unanimidad.

2. Informe del Presidente sobre actividades de la Sociedad.

a) Se informa de que el sábado 6 de junio de 2003 se celebró el XXI Concurso de Resolución de Problemas, organizado por nuestra Sociedad con la colaboración del Colegio Oficial de Doctores y Licenciados. Como en años anteriores, los ejercicios se desarrollaron en la Facultad de Matemáticas, y la entrega de premios, por la tarde, en la Escuela Universitaria de Biblioteconomía. Se recuerda que la XXII edición se celebrará el día 5 de junio.

b) Como es costumbre, la Sociedad ha colaborado con la Real Sociedad Matemática Española en la organización de la Fase de Distrito de la Olimpiada Matemática Española.

c) Se han publicado los números 64 a 66 del Boletín, con la periodicidad cuatrimestral acostumbrada. Han continuado apareciendo recensiones de los trabajos en *ZDM* y en *Mathematical Reviews.*

d) Se ha celebrado una conferencia co-organizada y patronizada por nuestra Sociedad e impartida por el Profesor Heinz Schumann, catedrático de Matemáticas de la Universidad de Educación de Weingarten, Alemania.

3. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.

El Tesorero, D. Alberto Aizpún, reparte entre los asistentes la documentación relativa a los movimientos de tesorería, explicando detalladamente los ingresos apuntados y los gastos efectuados. Respondiendo a algunas cuestiones planteadas por D. Eugenio Roanes Macías y D. Javier Etayo Gordejuela las cuentas quedan aprobadas por unanimidad, concluyéndose que no resulta necesario modificar la cuota anual.

4. Elección de nuevos cargos directivos.

Se hace necesario cubrir la vacante de Secretario, al haber cumplido su tercer periodo cuatrienal D. Francisco González Redondo, que ha manifestado su deseo de dejar el cargo. El Presidente expresa su agradecimiento al Secretario saliente por la labor realizada en beneficio de la Sociedad, y propone para el puesto a D. José María Sordo Juanena. La propuesta es aprobada por unanimidad.

5. Asuntos de trámite

Se aprueba dedicar un número del Boletín en homenaje a la Profesora María Paz Bujanda, con ocasión de su jubilación.

6. Ruegos y preguntas

No hubo.

Y sin más asuntos que tratar, el Presidente levanta la sesión a las doce horas y cuarenta minutos de la fecha arriba indicada.

VºBº El Presidente *El Secretario*

Miguel de Guzmán: innovador, crítico, maestro

A Don Francisco Giner de los Ríos

Como se fue el maestro,
la luz de esta mañana
me dijo: Van tres días
que mi hermano Francisco no trabaja.
¿Murió? . . . Sólo sabemos
que se nos fue por una senda clara,
diciéndonos: Hacedme
un duelo de labores y esperanzas.
Sed buenos y no más, sed lo que he sido
entre vosotros: alma.
Vivid, la vida sigue,
los muertos mueren y las sombras pasan;
lleva quien deja y vive el que ha vivido.
¡Yunques, sonad; enmudeced, campanas!

Y hacia otra luz más pura
partió el hermano de la luz del alba,
del sol de los talleres,
el viejo alegre de la vida santa.
. . . Oh, sí, llevad, amigos,
su cuerpo a la montaña,
a los azules montes
del ancho Guadarrama.
Allí hay barrancos hondos
de pinos verdes donde el viento canta.
Su corazón repose
bajo una encina casta,
en tierra de tomillos, donde juegan
mariposas doradas . . .
Allí el maestro un día
soñaba un nuevo florecer de España.

Baeza, 21 febrero 1915.
Antonio Machado

“Hacedme un duelo de labores y esperanzas”. Palabras de Machado en la muerte de Francisco Giner de los Ríos. También ahora ha perdido España, con Miguel de Guzman -ayer se nos fue-, un hombre cuya vida y obra es una llamada al trabajo, un hombre que había comprendido como Giner, como Jovellanos, que la riqueza de un país es la instrucción de sus jóvenes. Y en especial, ese motor oculto que es la instrucción matemática (“lo que el árbol tiene de florido vive de lo que tiene sepultado”).

Con unos pocos hombres como él, unos pocos hombres de su generación, nuestro país ha dado un paso de gigante en esta disciplina investigadora. Y esto era imprescindible, pero no lo era todo. Faltaba la transmisión educadora, y en esta labor menos brillante pero crucial son pocos los que le han ayudado. Quizá se le ha dejado algo solo porque pocos son los generosos. Y Miguel era generoso. Culto, innovador. De esos pocos hombres de los que se puede decir: era un maestro. Un hombre sabio, que ponía su cultura, su ciencia, su sensatez, al servicio del colega erudito, sí, pero también al lado del alumno que se dirigía a él al salir de clase, o en su despacho. Porque Miguel de Guzmán era muy cercano, tranquilo, humilde.

Algo en él atraía, algo invitaba a hacerle una consulta, a hablarle de tus cosas, ya fueses científico, alumno o personal de la facultad. Miguel, siempre en paz: “mañana me operan del corazón. Si no me veis en el departamento, ya sabéis dónde estoy”. Pero aún lo vimos, aún dio guerra, hasta que: un virus, una complicación cerebral... Se fue.

Era hombre de cultura. No aquella superficial, que tanto admira a algunos (por ejemplo, hablar idiomas... aunque él los hablaba todos, y bien) , sino que era un verdadero intelectual, alguien que nada humano consideró ajeno.

Conocí a Miguel en París. Como suele decirse, “en el exilio...”. Luego tuve con él un especial intercambio cuando ambos enseñamos a grupos distintos de la misma asignatura de Historia de las Matemáticas. Me dio entonces la impresión de que Miguel casi no necesitaba acudir a los textos. Sabía como habían ocurrido las cosas, cómo habían nacido las ideas. Desde entonces me interesó especialmente su personalidad. Cuando se anunciaba una conferencia suya en cualquier foro, yo no me la perdía, aunque quizá en sí mismo no me interesase el tema, pues de Miguel siempre se aprendía algo, siempre decía algo interesante. En ese seguirle yo como al maestro comprendí la profundidad de su formación humanística, el calado de su mente filosófica, perfectamente familiarizada con lo nuevo y con lo viejo en ese pensamiento que es padre del siglo futuro y que mueve civilizaciones.

Innovador. “¡Ay de las *ideas inertes*, que admitimos sin someter a crítica!” nos advertía. Y ahí tenéis al hombre que emprendió los caminos innovadores en la educación matemática en nuestro país. Por poner un detalle nimio, pero que todos entienden, recordaré que fue el primero en utilizar el e-mail en nuestra facultad, cuando los demás no sabíamos ni que existiese, y luego fue el primero en utilizar internet para el intercambio de material didáctico con los alumnos. Cualquier innovación educadora en nuestra facultad empezaba por él – los lenguajes de cálculo automático asistiendo sus manuales- y aún ahora lo podías ver, día a día , a sus 68 años, yendo por los pasillos con el proyector bajo el brazo para dar sus clases con medios audiovisuales (el día anterior a su muerte aún nos llamó desde la clínica para que le facilitásemos la conexión a internet. Hay para pararse a pensar).

Otros matemáticos más cercanos a su campo podrán trazar mejor que yo su impresionante trayectoria como investigador y como creador de una escuela de investigadores, pero dejadme que insista en este campo de la educación, no sea que nos acordemos sólo del Miguel científico. De hecho, muchos lo conocieron, más que a través de sus artículos y libros de investigación, a través de los libros que Miguel de Guzmán escribió para la enseñanza secundaria y que supusieron un cambio de paradigma en nuestro modo de exponer las Matemáticas. En todos ellos, como en los amenos opúsculos que escribía para el gran público -merecida fama- sus reseñas históricas iban en la mejor dirección: el recuadro biográfico al que se dirigirían los ojos cansados del alumno, los ojos que los convertirían en deseo de emular una vida, y ahí tenéis el nacimiento de una vocación para la Ciencia.

¡Si hubieran sido unos pocos más los migueles de Guzman! Pero estábamos muy entretenidos en nuestra investigación. Sí, en investigación hemos sido unos cuantos, pero en educación -en lo que exige generosidad, humanidad, pasión cívica- le hemos dejado casi solo. Si viviera aún, yo le diría: Miguel, cuenta conmigo. ¿Qué hay que hacer? ¿Te preocupa que nuestros jóvenes desprecien la ciencia básica , que muestren desinterés por las matemáticas? ¿te preocupa esa maldición para el progreso de nuestro pueblo? Pues entonces también me preocupa a mí. ¿Te llamaban elitista porque reunías sábado a sábado, año a año, en nuestra facultad a esos pequeños, huérfanos hoy, especialmente dotados para las matemáticas? (porque su especial capacidad, me decías, no derive en fracaso escolar) ¿Elitista, tú, porque al atender a tantos, al compañero, al alumno, al personal de la facultad, tampoco descuidaste a este motor oculto de lo que será mañana nuestra ciencia? Pues entonces que me llamen elitista también a mí ¿Dónde hay que arrimar el hombro?

Adiós, Miguel. Hombre extraordinario. De la *Real Academia de las Ciencias*. Presidente del *International Comitee of Mathematical Instruction*. Pero mucho más aún: prestaba los libros ¡...! Ahora todos tenemos alguno que él nos había prestado (y aun regalado) ¿Qué hacer, pues, ahora con ellos? Este será un buen principio: los prestaremos a los demás.

Ignacio Sols
Catedrático de Algebra
Universidad Complutense de Madrid

XL Olimpíada Matemática Española

La fase nacional de la XL OME se ha celebrado este año en Ciudad Real. Entre los 120 ganadores de las fases de Distrito faltaron tres chicas a la cita, una de ellas, la madrileña Beatriz García. Estos fueron los problemas propuestos.

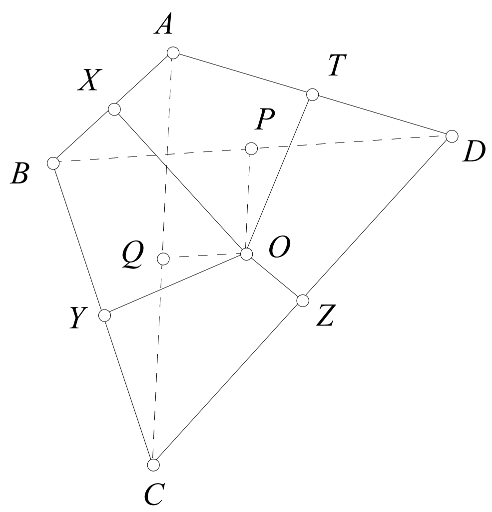
Primera sesión (viernes, 26 de marzo)

Problema 1

Tenemos un conjunto de 221 números reales cuya suma es 110721. Los disponemos formando una tabla rectangular de modo que todas las filas y la primera y última columnas son progresiones aritméticas de más de un elemento. Probar que la suma de los elementos de las cuatro esquinas vale 2004

Media de todos: 2,38
Media de los oros: 5,17

Problema 2



$ABCD$ es un cuadrilátero cualquiera, P y Q los puntos medios de las diagonales BD y AC respectivamente. Las paralelas por P y Q a la otra diagonal se cortan en

O. Si unimos *O* con las cuatro puntos medios de los lados *X, Y, Z* y *T* se forman cuatro cuadriláteros, *OXBY*, *OYCZ*, *OZDT* y *OTAX*. Probar que los cuatro cuadriláteros tienen el misma área.

Media de todos:0,86
Media de los oros: 5,67

Problema 3

Se representa por Z el conjunto de todos los enteros. Hallar todas las funciones $f: Z \to Z,$ tales que para cualesquiera x, y enteros se verifica:

$$f(x + f(y)) = f(x) - y.$$

Media de todos: 0,24
Media de los oros: 3

<u>Segunda sesión </u>(sábado, 27 de marzo)

Problema 4

¿Existe alguna potencia de 2, que al escribirla en el sistema decimal tenga todos sus dígitos distintos de cero y sea posible reordenar los mismos para formar con ellos otra potencia de 2 ?. Justificar la respuesta

Media de todos: 1,43
Media de los oros: 6,67

Problema 5

Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que, en el triángulo *ABC*, la mediana desde *B* sea dividida en tras partes iguales por la circunferencia inscrita en el triángulo, es

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{13}$$

Media de todos: 0,16
Media de los oros: 1

Problema 6

Colocamos, formando una circunferencia, 2004 fichas bicolores: blancas por una cara y negras por la otra. Un movimiento consiste en elegir una ficha con la cara *negra* hacia arriba, y dar la vuelta a tres fichas: la elegida, la de su derecha y la de su izquierda. Supongamos que inicialmente hay una sola ficha con la cara negra hacia arriba. ¿Será posible, repitiendo el movimiento descrito, conseguir que todas las fichas tengan la cara blanca hacia arriba? ¿Y si tuviéramos 2003 fichas, entre las cuales exactamente una tiene al comienzo la cara negra hacia arriba?

Media de todos:0,54
Media de los oros: 1,83

Premios

Recibieron Medalla de Oro los siguientes estudiantes:

Joaquim Serra Montoli, del IES La Sedeta de Barcelona

Maite Peña Alcaraz, del Colegio Portaceli de Sevilla

Elisa Lorenzo García, del IES Fortuni de Madrid

Miguel Teixidó Román, del Collegi Claver, de Raimat, Lleida

Francisco Javier Hernández Heras, del IES Emilio Ferrari de Valladolid.

Mª Isabel Cordero Marcos, del IES Rodríguez Fabrés de Salamanca.

Comentarios

Maite Peña y Miguel Teixidó son estudiantes de 1º de Bachillerato. Los seis representarán a España en la próxima Olimpiada Internacional, que se celebrará en Grecia entre los días 6 y 18 de julio.

Entre los ocho representantes madrileños, obtuvieron Medalla de Plata Ricardo Martín Brualla, de 1º de Bachillerato, y Javier de la Nuez González, estudiante de 4º de ESO. Además, Ana González González, de 2º de Bachillerato, obtuvo Medalla de Bronce.

Es de destacar la escasa – únicamente 19 chicas entre los 117 participantes – pero excelente participación femenina. Además de las tres premiadas con oro, una más recibió plata, y otras cuatro bronce.

Aviso

La fase nacional de la próxima Olimpiada Matemática Española se celebrará, en la primavera de 2005, en Santiago de Compostela.

María Gaspar

XVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Entre los días 12 y 20 de septiembre del pasado año se celebró en Mar del Plata, Argentina, la XVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. En ella participaron representantes de veinte países iberoamericanos.

Los problemas propuestos, en sesiones celebradas los días 16 y 17 de septiembre, fueron los siguientes:

Problema 1

a) Se tienen dos sucesiones, cada una de 2003 enteros consecutivos, y un tablero de 2 filas y 2003 columnas. Decida si siempre es posible distribuir los números de la primera sucesión en la primera fila y los de la segunda sucesión en la segunda fila, de tal manera que los resultados obtenidos al sumar los dos números de cada columna formen una nueva sucesión de 2003 números consecutivos.

b) ¿Y si se reemplaza 2003 por 2004?

Tanto en a) como en b), si la respuesta es afirmativa, explique cómo distribuiría los números, y si es negativa, justifique por qué.

Problema 2

Sean C y D dos puntos de la semicircunferencia de diámetro AB tales que B y C están en semiplanos distintos respecto de la recta AD. Denotemos M, N y P los puntos medios de los segmentos AC, DB y CD, respectivamente. Sean O_A y O_B los circuncentros de los triángulos ACP y BDP. Demuestre que las rectas O_AO_B y MN son paralelas.

Problema 3

Pablo está copiando el siguiente problema:

Considere todas las sucesiones de 2004 números reales $(x_0, x_1, \ldots x_{2003})$ *tales que*

$$x_0=1;\ 0 \le x_1 \le 2x_0;\ \ldots,0 \le x_{2003} \le 2x_{2002}.$$

Entre todas estas sucesiones, determine aquella para la cual la siguiente expresión toma su mayor valor: S=….

Cuando Pablo iba a copiar la expresión de S le borraron la pizarra. Lo único que pudo recordar es que S era de la forma $S = \pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_{2003}$, donde el último término tenía coeficiente +1, y los anteriores tenían coeficiente +1 ó -1. Demuestre que Pablo, a pesar de no tener el enunciado completo, puede determinar con certeza la solución del problema.

Problema 4

Sea $M = \{1,2,...49\}$ el conjunto de los 49 primeros enteros positivos. Determine el máximo entero k tal que el conjunto M tiene un subconjunto de k elementos en el que no hay 6 números consecutivos. Para ese valor máximo de k, halle la cantidad de subconjuntos de M, de k elementos, que tienen la propiedad mencionada.

Problema 5

En el cuadrado $ABCD$, sean P y Q puntos pertenecientes a los lados BC y CD respectivamente, distintos de los extremos, tales que $BP=CQ$.

Se consideran puntos distintos X e Y pertenecientes a los segmentos AP y AQ respectivamente.

Demuestre que cualesquiera que sean X e Y, existe un triángulo cuyos lados tienen las longitudes de los segmentos BX, XY y DY.

Problema 6

Se definen dos sucesiones $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ por:

$$a_0=1,\ b_0=4 \text{ y } a_{n+1} = a_n^{2001} + b_n,\ b_{n+1} = b_n^{2001} + a_n \text{ para } n \geq 0.$$

Demuestre que 2003 no divide a ninguno de los términos de estas sucesiones.

Comentarios

En el equipo español, Víctor González Alonso, de Burgos, obtuvo Mención de Honor; Daniel Rodrigo López, de Barcelona, y Maite Peña Alcaraz de Sevilla obtuvieron Medalla de Bronce, y Luis Hernández Corbato, de Madrid, en la que ha sido su última participación en Olimpiadas, Medalla de Plata. Recordemos que Luis tiene en su palmarés olímpico el record de tres medallas de oro en la Olimpiada Nacional, dos de bronce y una mención en internacionales, y además de esta medalla de plata, otra de oro en Iberoamericana.

Acompañaron a los estudiantes los Profesores José Aymerich como Jefe de Delegación e Ignasi Mundet como Tutor. Durante la entrega de premios la Delegación española invitó a todos los países iberoamericanos a la XIX Olimpiada Iberoamericana, que como es sabido, se celebrará el próximo mes de septiembre en Castellón.

María Gaspar

VIII Concurso de Primavera de Matemáticas

El pasado sábado 24 de abril, en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid tuvo lugar, por octavo año consecutivo, el VIII Concurso de Primavera de Matemáticas.

Fue una mañana primaveral sacada de un relato de ciencia ficción..., o tal vez, de la Grecia antigua: un sábado soleado, más de 1.800 adolescentes, de edades comprendidas entre 10 y 18 años, madrugaron para enfrentarse al noble reto de intentar resolver 25 problemas matemáticos de temática y dificultad variada. Padres y profesores no podían ocultar su satisfacción de ver a sus hijos y alumnos participando en la mayor concentración matemática de nuestro país.

Los alumnos estaban divididos en cuatro niveles diferentes: Nivel I (5º y 6º de Primaria), Nivel II (1º y 2º de Secundaria), Nivel III (3º y 4º de Secundaria), Nivel IV (1º y 2º de Bachillerato). Todos ellos se habían ganado un puesto en esta final después de realizar una fase previa en sus colegios o institutos. ¡Atención!, en esta primera criba participaron 20.000 chicos y chicas de 300 centros educativos de la Comunidad Autónoma de Madrid.

Todo ello organizado por un grupo de 13 profesores y profesoras que, ante todo, pretendemos despertar o intensificar el gusto por las matemáticas en los jóvenes estudiantes. Sin olvidar la inestimable ayuda (cesión de aulas, gastos de correos, costes del libro que editamos cada año con todos los problemas y sus resoluciones, premios, etc.) que, desinteresadamente aportan la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, la Dirección General de Ordenación Académica, el Corte Inglés, Ediciones S.M. y Grupo ANAYA.

Los ganadores de este año fueron:

PRIMER NIVEL: PRIMARIA

1º. Alberto Merchante González, Colegio Público Joaquín Costa, 6 º Prim, 120 p
2º. Pablo Boideda Álvarez, Colegio Alemán, 5º Prim,112 p
3º. Javier Sansa Oliván, Colegio Alemán, 6º Prim, 119 p

SEGUNDO NIVEL: 1º - 2º E.S.O.

1º. Alfonso Gómez-Jordana Mañas, Colegio Everest, 1º ESO, 120 p
2º. Rubén Jiménez Benito, IES José Hierro (Getafe), 1º ESO, 119 p
3º. Diego Izquierdo Arseguet, Liceo Francés , 2º ESO, 114 p
3º. Rodrigo Bellot Rodríguez, Colegio Retamar, 2º ESO, 114 p
3º. Pablo Rubio García, Colegio Zola, 2º ESO,114 p

TERCER NIVEL: 3º - 4º ESO

1º. Ru Ding, IES Ramiro de Maeztu, 4º ESO, 125 p
2º. Miguel Montero Muñoz, Colegio Fray Luis de León, 3º ESO, 110 p
3º. Carlos Riquelme Ruiz, Colegio San José del Parque, 4º ESO, 119 p

CUARTO NIVEL: BACHILLERATO

1º. Elisa Lorenzo García, IES Fortuny, 1º Bach, 103 p
2º. José Antonio Pérez Martín, Colegio Institución La Salle, 1º Bach, 102 p
2º. Beatriz García García, IES Mirasierra, 1º Bach, 102 p

Hemos de recordar que la puntuación máxima posible era de 125 puntos, por lo que el nivel de los ganadores, sobre todo en Primaria y ESO, fue realmente alto y en particular el de Ru Ding, a quien desde aquí enviamos nuestra felicitación por sus extraordinarios resultados.

El próximo año será el noveno y ya estamos trabajando con la ilusión de que sean cada vez más los alumnos y centros participantes.

Antes de terminar, dejamos aquí un problema que corresponde al Nivel I, para ustedes o sus hijos...

A Beatriz le gusta sumar las cifras que aparecen en su reloj digital; por ejemplo, cuando son las 21:17, ella obtiene 2+1+1+7=11. ¿Qué número es el mayor que puede obtener con estas sumas?

A) 24 **B)** 36 **C)** 19 **D)** 25 **E)** 20

Comité organizador del
VIII Concurso de Primavera de Matemáticas

Cursos de Posgrado en “Educación Matemática”

Año Académico 2004-05

Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid

Directora de los Cursos: *Raquel Mallavibarrena Martínez de Castro*

Cursos (todos de 3 créditos, 30 horas) y Profesores que los imparten:

1 El ordenador en la educación matemática. *Eugenio Roanes Lozano y Eugenio Roanes Macías.*

2 Las Matemáticas en Secundaria: un enfoque distinto del habitual. *Joaquín Hernández Gómez.*

3 Taller de Astronomía. *Ana Inés Gómez de Castro.*

4 Tratamiento del azar: probabilidad. *Elisa Benítez Jiménez.*

5 Estadística. *María Jesús Ríos Insua.*

6 Sistemas dinámicos y caos. *Carlos Fernández Pérez y José Manuel Vegas Montaner.*

7 Algunas cuestiones de geometría. *Juan Tarrés Freixenet y Domingo García Casado*

8 Filosofía de la Ciencia y Relatividad. *José Mendoza Casas y Eduardo Aguirre Dabán.*

9 Investigación Operativa: Modelización y Algoritmos en Optimización. *Profesores pendientes de determinar.*

10. Panorama actual de la informática práctica. *David de Frutos Escrig.*

Nota: Los detalles sobre estos cursos y algunas propuestas nuevas se darán a conocer en los próximos meses.

Recensiones en ZDM y en Math Reviews

Las prestigiosas revistas Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) y Mathematical Reviews incluyen en sus volúmenes recensiones de artículos publicados en nuestro Boletín, razón por la cual se publican actualmente con un resumen en inglés.

Como en números anteriores de nuestro Boletín, nos complace dar cuenta de las nuevas recensiones aparecidas, para conocimiento de los autores de los trabajos, y de todos nuestros socios.

RECENSIONES PUBLICADAS EN ZDM, VOL. 36 (1) DE 2004

#0014 (Sección A30). El álgebra (geométrica) de Euclides a Ommar Khayyam, por *F. González Redondo.* Bol. Soc. Puig Adam 62 (oct 2002), págs. 72-87.

#0287 (Sección D50). Problemas y soluciones, por *J. Fernández Biarge.* Bol. Soc. Puig Adam 65 (oct 2003), págs. 11-16.

#0554 (Sección G70). Un método paramétrico para demostrar automáticamente y determinar lugares a partir de las construcciones geométricas, por *E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano, Luis M. Laíta y M. Villar Mena.* Bol. Soc. Puig Adam 62 (oct 2002), págs. 34-71.

#0555 (Sección G70). Un problema de geometría resuelto con MATHEMATICA, por *Nicolás Rosillo.* Bol. Soc. Puig Adam 62 (oct 2002), págs. 88-91.

#0597 (Sección H50). Los problemas de un daltónico, por *Sergio Falcón y Luis González.* Bol. Soc. Puig Adam 62 (oct 2002), págs. 28-33.

#0598 (Sección H50). Cálculos efectivos en lógica proposicional booleana interpretada como un anillo de clases residuales (polinomial) sobre Z2, por *E. Roanes Lozano, Luis M. Laíta y E. Roanes Macías.* Bol. Soc. Puig Adam 65 (oct 2003), págs. 17-42.

#0611 (Sección I15). Versatilidad instrumenta del número e en la asignatura de Cálculo de los primeros cursos de Ingenierías y carreras de Ciencias, por *José C. Valverde, Guillermo Manjabacas y J. Javier Orengo.* Bol. Soc. Puig Adam 65 (oct 2003), págs. 77-93.

#0630 (Sección I24). Algunas observaciones sobre la enseñanza de poliomios en secundaria usando calculadoras gráficas, por *Antonio R. Quesada.* Bol. Soc. Puig Adam 62 (oct 2002), págs. 13-27.

#0765 (Sección M60). Aplicación de los sistemas de ecuaciones diferenciales al estudio de ecosistemas, por *J.C. Cortés López y G. Calbo Sanjuán.* Bol. Soc. Puig Adam 65 (oct 2003), págs. 57-76.

Número especial dedicado a la Profesora María Paz Bujanda Jáuregui, con ocasión de su jubilación

Como se refleja en el Acta de la Asamblea General Ordinaria de 2004, publicada en este número del Boletín, se aprobó dedicar un número del Boletín en homenaje a la Profesora María Paz Bujanda, con ocasión de su jubilación.

En principio, dicho número será el 68, correspondiente a octubre 2004.

Invitación a presentar artículos para ese número especial

Se invita a presentar artículos a cuantos compañeros, alumnos y amigos de la Profesora María Paz Bujanda lo deseen.

Por tratarse de número especial en homenaje a la Profesora Bujanda, se espera que, en principio, dichos artículos sean relativos a Educación Matemática en sus diversas facetas, aunque no se descarta incluir breves artículos de divulgación en otros campos, rogando que no sean excesivamente especializados.

Las normas de presentación serán las habituales del Boletín, que aparecen al final de este número. Los artículos serán revisados, como es norma en este Boletín. La fecha límite de envío de trabajos es el 3 de Septiembre de 2004.

La Junta Directiva

A dynamic approach to "simple" algebraic curves (II)

Heinz Schumann

Faculty III, Mathematics and Informatic, University of Education Weingarten
D-88250 Weingarten, Germany
schumann@ph-weingarten.de

Abstract

Despite its low relevance for teaching in schools the desideratum "Algebraic Curves" has always been an issue within mathematical didactics. This article aims to continue this tradition with respect to a project oriented mathematics instruction by applying current dynamic geometry software (Cabri II Plus).

2 Application of the method (continuation)

In the following, we discuss the corresponding treatment of Pascal's limaçon as a conchoid of the circle (Fig. 2.13). –The conchoid of a curve C with respect to a pole O consists of all points P to which the following applies: If K is a variable point on C and l is a fixed length, OKP will be located on a straight line and |OP| = |OK| + l or |OP| = |OK| – l.

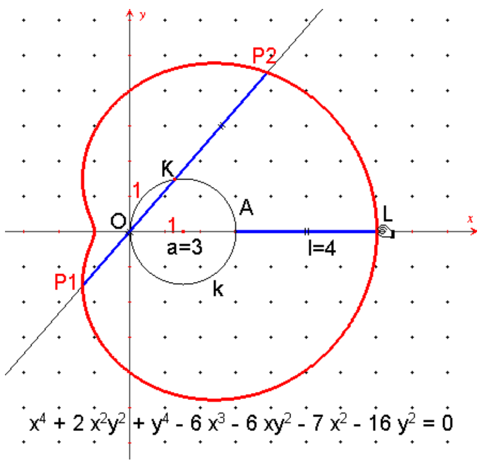


Fig. 2.13: Pascal's limaçon as conchoid of the circle –investigating the coefficients

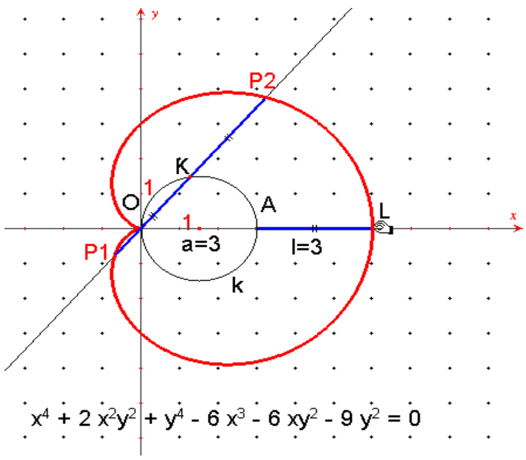
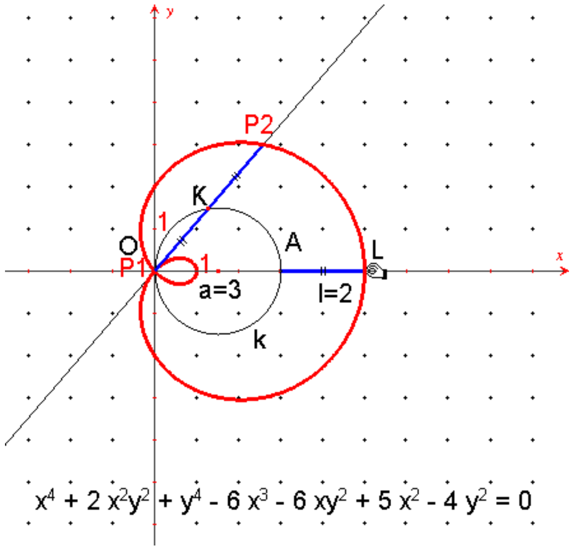


Fig. 2.14: Pascal's limaçon as conchoid of the circle –investigating the coefficients



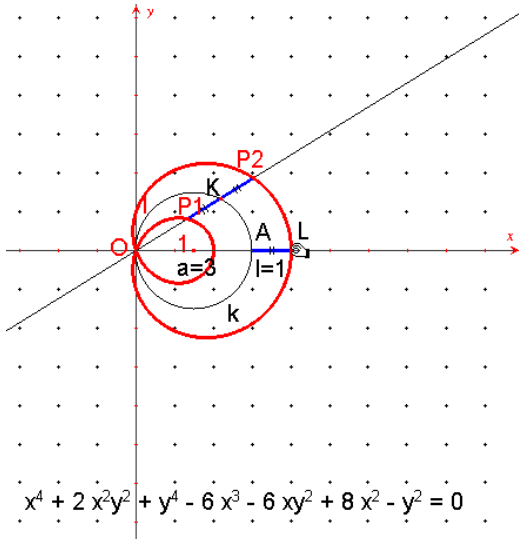


Fig. 2.15: Pascal's limaçon as conchoid of the circle –investigating the coefficients

Fig. 2.16: Pascal's limaçon as conchoid of the circle –investigating the coefficients

Construction parameters are the diameter of the circle a and the length l. Similar to the case of the curve constructed at the foot of the perpendicular, variation of integral parameter values (Figs. 2.13 – 2.16; variation of l) will give us the following dependences of the coefficients with respect to the coordinate system chosen:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2ax^3 - 2axy^2 + (a^2 - l^2)x^2 - l^2y^2 = 0 \qquad (2.5)$$

From the conchoidal construction we can easily read the polar coordinate representation (Fig. 2.17):

$$\rho = a \cdot \cos\varphi \pm l \qquad (2.6).$$

From which we can dynamically generate the curve of Pascal's limaçon (Fig. 2.18).

Using $\cos\varphi = \frac{x}{\rho}$ and $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ from (2.6) easily follows the equation $(x^2+y^2-ax^2)^2=l^2(x^2+y^2)$, which is equivalent to (2.5) –on the contrary to the elimination of the running parameter at the parametric representation.

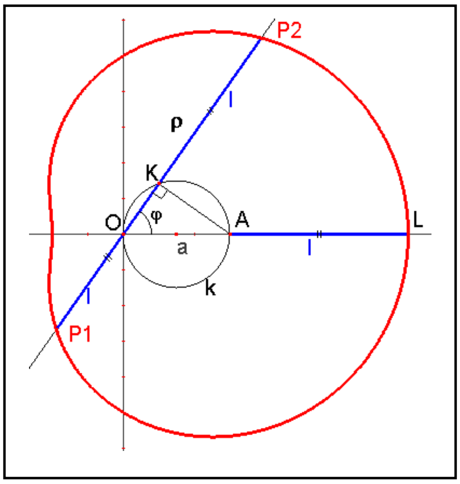


Fig. 2.17: Deriving the algebraic equation

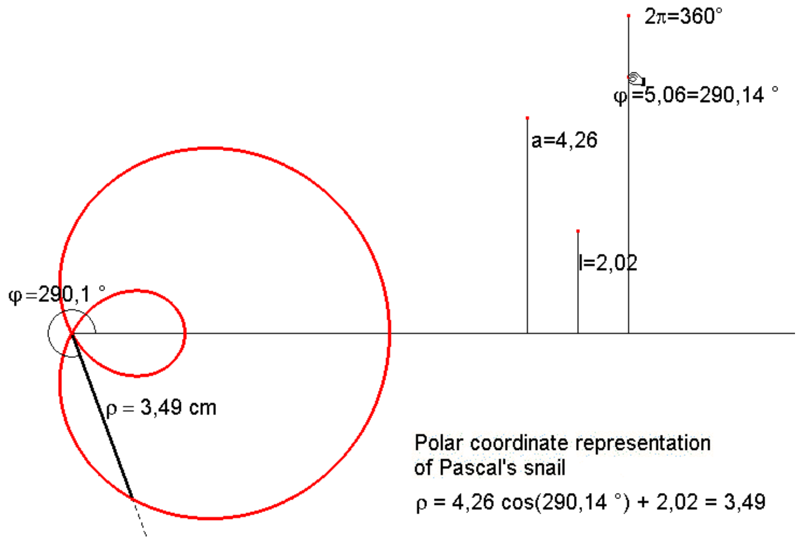


Fig. 2.18: Polar coordinate representation of Pascal's limaçon

Another interesting algebraic curve of the 4^{th} degree is the conchoid of Nicomedes (Figs. 2.19-2.21, examples for the three cases), which is a conchoid of the line the corresponding treatment of which is left as an exercise.

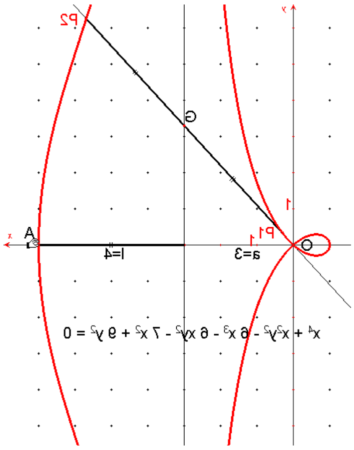


Fig. 2.19: Nicomedes Conchoid's construction and equation

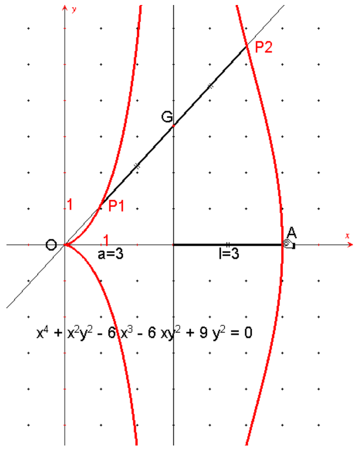


Fig. 2.20: Nicomedes Conchoid's construction and equation

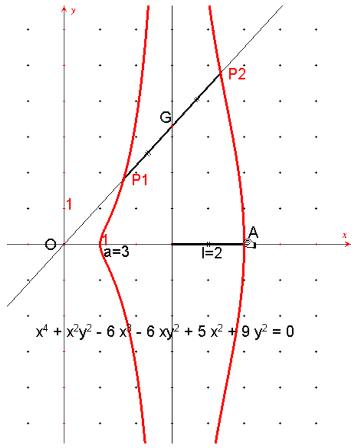


Fig.2.21: Nicomedes Conchoid's construction and equation

Example 3 (Astroid): As an example of the construction of algebraic curves as rolling curves we select the astroid which is generated by rolling a circle onto another circle (circle cycloid) and whose points can be constructed as follows (Fig. 3.1):

- Circle with center M through R (r=|MR|)
- Put a movable point P on this circle and connect it with M
- Laying off from P the distance |MP|/4 on MP in direction M and get M'
- Circle around M' with radius |MP|/4
- Parallel line to MR through M'
- Reflection of P with respect to this parallel, reflection of this reflected point with respect to MP and reflection of this radius with respect to the parallel results A, whose angle with respect to the parallel is three times as the counter oriented angle RMP.

What is the locus of A if P moves on the circle with center M, e.g. if the circle with center M' is rolling inside?

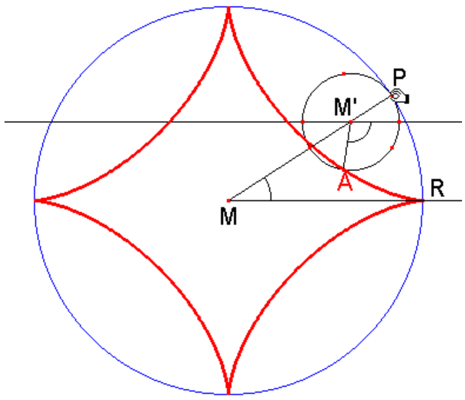


Fig. 3.1: An astroid's construction

After embedding the construction in the coordinate system with M as coordinate origin Cabri II+ indicates the algebraic equation of the astroid, which is of 6th degree and in which all exponents of x and y must be even, corresponding to the symmetry of this locus (Fig. 3.2).

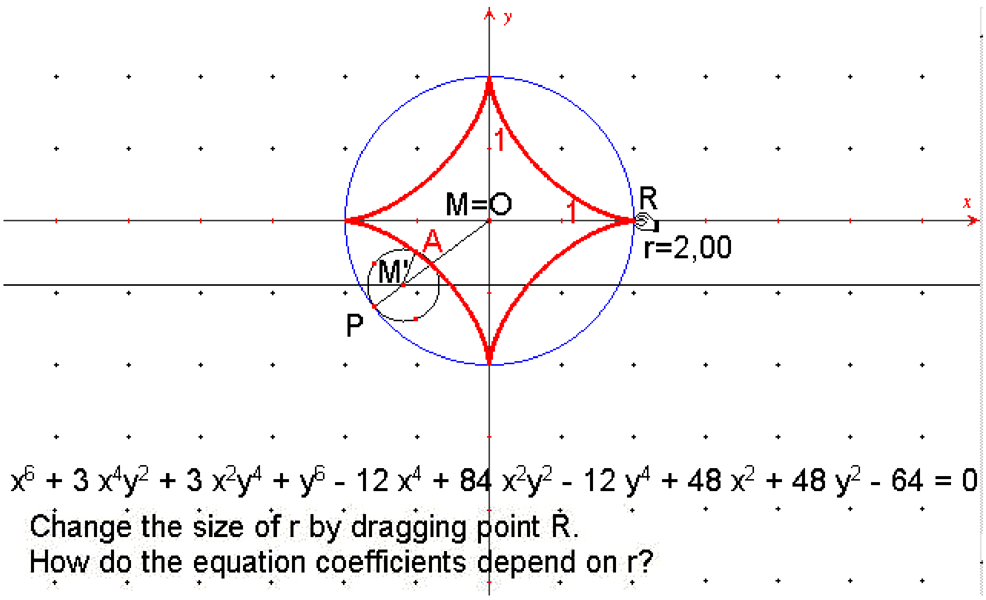


Fig. 3.2: Astroid's embedding and investigating coefficients

By varying the size of the construction parameter r by dragging of R (Fig. 3.2) we find out that the expressions of degree 6 are independent of r and can be summarised in $(x^2 + y^2)^3$, that x^4 and y^4 have the coefficient $-3r^2$, x^2y^2 has the coefficient $3r^2 \cdot 7$, x^2 and y^2 have the coefficient $3r^4$, and, last but not least, that the constant summand equals $-r^6$. The algebraic equation in x and y can therefore be written as

$$(x^2 + y^2)^3 - 3r^2 (x^4 - 7x^2y^2 + y^4) + r^4 (3x^2 + 3y^2 - r^2) = 0 \qquad (3.0).$$

We verify this equation by drawing the parameter representation of the astroid and eliminating the running parameter. According to the curve construction it is valid (Fig. 3.3):

$$r' = r/4 \text{ and } \varphi' = 3 \cdot \varphi,$$

$$x = (r - r') \cdot \cos\varphi + r' \cdot \cos\varphi' \text{ and}$$

$$y = (r - r') \cdot \sin\varphi - r' \cdot \sin\varphi', \text{ i.e.}$$

$$x = r/4 \cdot (3 \cdot \cos\varphi + \cos3 \cdot \varphi) \text{ and}$$

$$y = r/4 \cdot (3 \cdot \sin\varphi - \sin3 \cdot \varphi) \text{ and}$$

therefore follows with

$$\cos3 \cdot \varphi = 4 \cdot \cos^3\varphi - 3 \cdot \cos\varphi \text{ and}$$

$$\sin3 \cdot \varphi = 3 \cdot \sin\varphi - 4 \cdot \sin^3\varphi:$$

$$x = r \cdot \cos^3\varphi \text{ and } y = r \cdot \sin^3\varphi \qquad (3.1)$$

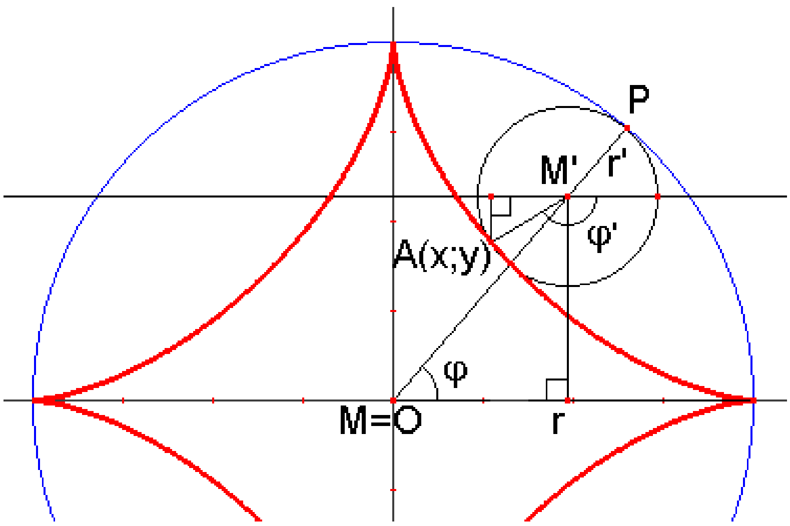


Fig. 3.3: Derivating the algebraic equation

This parametric representation is dynamically executed for controlling our result (Fig. 3.4). Varying the size of r within an interval we get an aesthetically pleasing animated graph (Fig. 3.5). We eliminate φ by extracting the third root and squaring the equations (3.1); addition leads to

$$x^{2/3} + y^{2/3} = r^2.$$

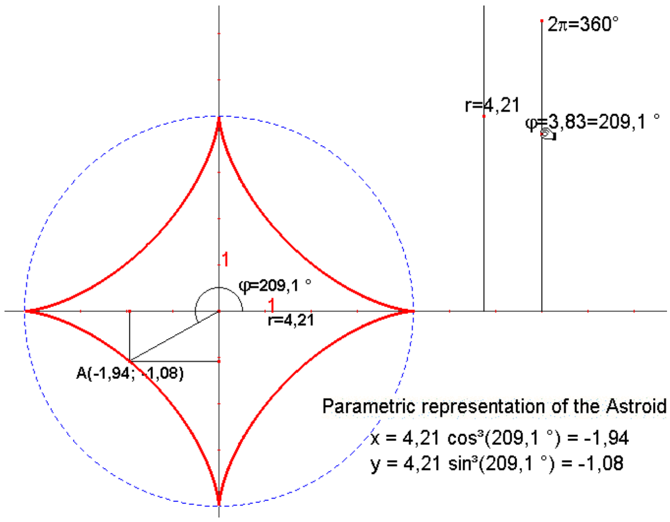


Fig. 3.4: Parametric representation of the astroid

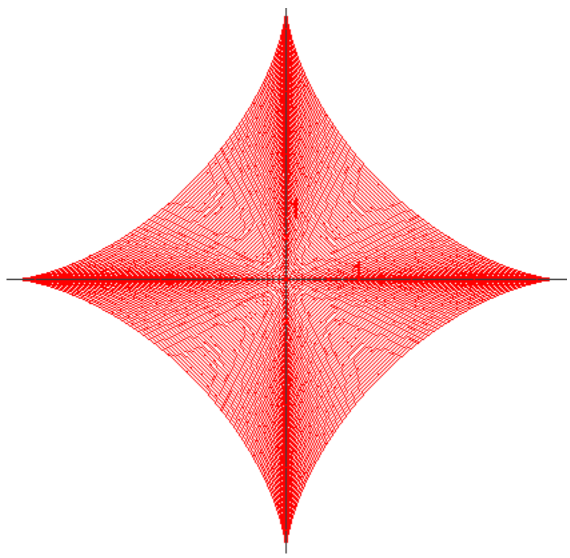


Fig. 3.5: Animation for parameter r

We use a computer algebra system, e.g. DERIVE (Fig. 3.6) to facilitate the transformation to an algebraic equation in x and y; in doing so, it is decisive that line #6 should be substituted by line #1. The result in line #9 is equivalent to the inductively found result in (3.0).

#1: $x^{2/3} + y^{2/3} = r^{2/3}$

#2: $(x^{2/3} + y^{2/3} = r^{2/3})^3$

#3: $x^2 + 3\cdot x^{4/3}\cdot y^{2/3} + 3\cdot x^{2/3}\cdot y^{4/3} + y^2 = r^2$

#4: $(x^2 + 3\cdot x^{4/3}\cdot y^{2/3} + 3\cdot x^{2/3}\cdot y^{4/3} + y^2 = r^2) - r^2 - (3\cdot x^{4/3}\cdot y^{2/3} + 3\cdot x^{2/3}\cdot y^{4/3})$

#5: $x^2 + y^2 - r^2 = -3\cdot x^{4/3}\cdot y^{2/3} - 3\cdot x^{2/3}\cdot y^{4/3}$

#6: $x^2 + y^2 - r^2 = -3\cdot x^{2/3}\cdot y^{2/3}\cdot(x^{2/3} + y^{2/3})$

#7: $x^2 + y^2 - r^2 = -3\cdot x^{2/3}\cdot y^{2/3}\cdot r^{2/3}$

#8: $(x^2 + y^2 - r^2 = -3\cdot x^{2/3}\cdot y^{2/3}\cdot r^{2/3})^3$

#9: $(x^2 + y^2 - r^2)^3 = -27\cdot r^2\cdot x^2\cdot y^2$

Fig. 3.6: Deriving the algebraic equation with DERIVE

Example 4 (A “simple” coupler curve): Out of the numerous constructions of coupler curves we select the following:

- Circle around F_1 through K
- Put a movable point P on this circle with crank F_1P
- Reflect F_1 to O and get F_2
- Construct four bar linkage F_2F_1PQ (parallelogram) with coupler PQ
- Reflect Q to F_2P and get Q'
- Midpoint of PQ': M.

What is the locus of M, if P circulates?
Figs. 4.1–4.3 show special cases of this curve. How do the coefficients of the algebraic equation for this curve depend on the constructive parameters a = |F1F2|

and k = |OK| ? How can the equation in question be derived with the coefficients dependent on a and k? (To be answered by the reader.)

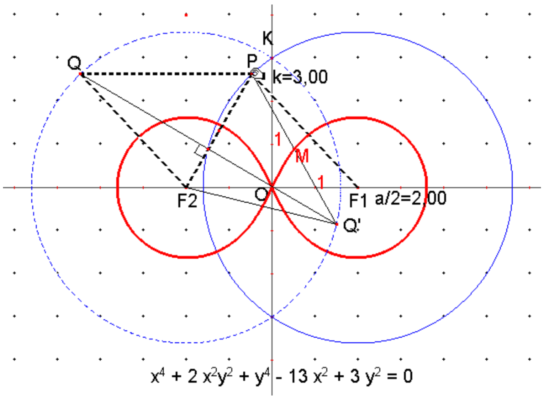


Fig. 4.1: Embedded coupler curve with its equation and variation of k-values

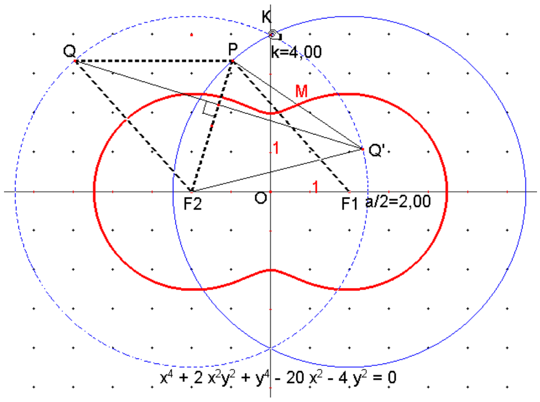


Fig. 4.2: Embedded coupler curve with its equation and variation of k-values

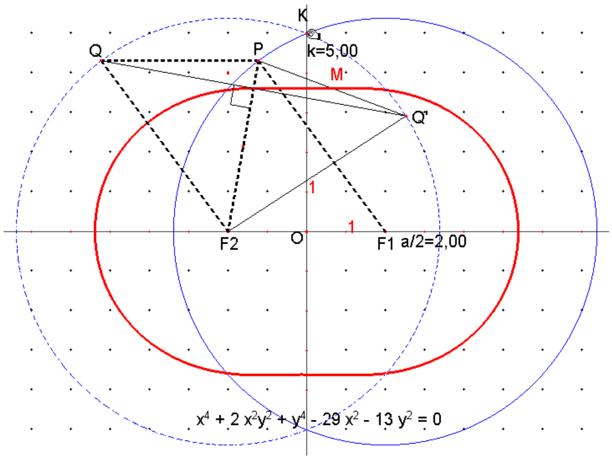


Fig. 4.3: Embedded coupler curve with its equation and variation of k-values

3 Final notes

Note no. 1 (Limitedness of the method): The method described here will fail if:

- the algebraic curve is of a higher degree than 6, i.e. if the corresponding numeric algorithm is inaccurate or if the calculations are too complex
- the dependences of the coefficients on the integral construction parameters is not rational

- no integral parametrisation of the geometric construction of the algebraic curve can be expected, e.g. in the case of loci generated by specific points of the triangle if the vertices run on corresponding tracks. Fig. 5 shows an example of such a (point symmetric) locus generated by the intersection point of lines through the side midpoints which are parallel to the angle bisectors of right triangle ABC, if C is circulating.

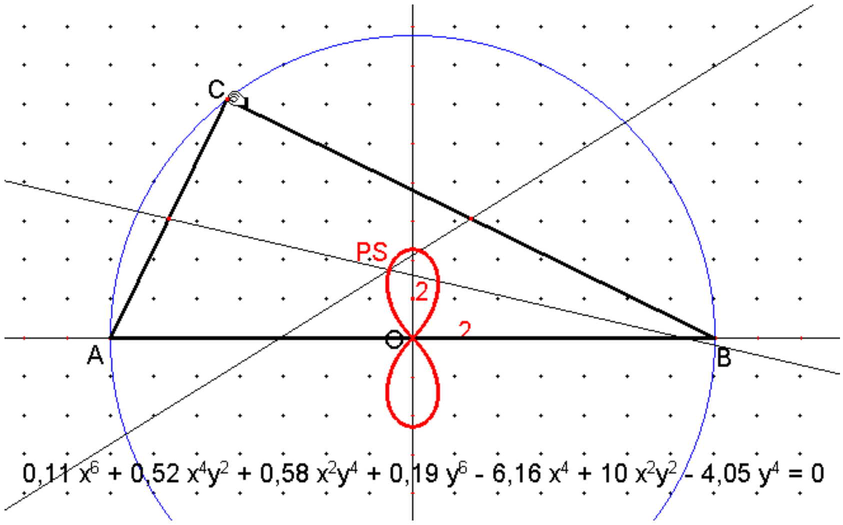


Fig. 5: An algebraic curve with non rational parametrisation

Note no. 2 (Unsolved problems?): In connection with the processing method which has been developed and applied in this paper, the following problems appear:

- Among the algebraic curves generated with compass and ruler or with conic sections, how can we characterise those with equation coefficients which are integer rational functions of their integral construction parameters?
- Among the classical algebraic curves, there are no curves of degree 5 or 7. Is this due to the fact that algebraic curves of greater prime number degree than 3, which are zero-sets of irreducible polynomials, can not be generated with compass and ruler or by means of conic sections?
- In the case of algebraic curves constructed with compass and ruler or with conic sections, their equations can be calculated by means of Groebner bases.

What is the (algebraic) characterisation of such algebraic curves?

Note no. 3 (Advanced prototypic software tools):

- In 2002, Oliver Labs developed a new menu-controlled computer tool "SPICY" for treatment of algebraic curves and areas which runs under Linux. This tool has not been discussed here as it is not yet available in a commercial Windows version.
- Reinhard Oldenburg (2003) developed a tool named "Feli-X" which is still in the experimental and development stage. It is based on MATHEMATICA and consists of a dynamic geometry component which is compatible with the computer algebra component of MATHEMATICA. Feli-X is capable of calculating the exact equation of the constructed algebraic curve with respect to the absolute coordinate system. The reverse, i.e. not just plotting the curve belonging to an algebraic equation in x and y but generating an object that is referenceable in the sense of dynamic geometry, raises fundamental problems of "bi-directionality" between CAS and DGS.
- Eugenio Roanes-Lozano et al. (2003) have developed a similar tool, "paramGeo", based on Maple or DERIVE to bridge Dynamic Geometry and Computer Algebra.

Note no. 4 (Further theoretical studies): In his studies on Dynamic Geometry Systems, Gawlick (2001/2003) points out further aspects of geometric constructions and such of algebraic curves which go beyond our naive and classroom-oriented methodical and didactic approach.

Note no. 5 (History of real algebraic curves): One profound earlier source for history of real algebraic curves is Jean Dieudonné's "History of algebraic geometry" 1985.

References

[1] Gawlick, Th. (2001): Exploration reell algebraischer Kurven mit DGS und CAS. (Exploration of real algebraic curves with DGS and CAS). In: Elschenbroich, H.-J. et al.: Zeichnung – Figur – Zugfigur. Mathematische und didaktische Aspekte dynamischer Geometrie. Hildesheim: Franzbecker, p. 69 – 76.

[2] Gawlick, Th. (2003): Über die Mächtigkeit dynamischer Konstruktionen mit verschiedenen Werkzeugen. (About the powerfulness of dynamic constructions with different tools). Bielefeld: IDM, Occasional Paper 185. URL: http://www.unibielefeld.de/idm/publikationen/occpap.html

[3] Labs, O. (2002): SPICY – Mehr als dynamische Geometrie mit Hilfe von Computeralgebra. (SPICY – more than dynamic geometry with help of computer algebra). Vortrag auf der Fachtagung „Computeralgebra in Lehre, Ausbildung und Weiterbildung III“, 2.-5. April 2002, Kloster Schöntal. URL: http://www.oliverlabs.net/spicy

[4] Oldenburg, R. (2003): Feli-X: Ein Prototyp zur Integration von CAS und DGS. (Feli-X: A prototype for integration of CAS and DGS). In: Bender, P. et al.: Lehr- und Lernprogramme für den Mathematikunterricht. Berichte über die 20. Arbeitstagung des Arbeitskreises "Mathematikunterricht und Informatik" in der GDM vom 27. bis zum 29. September 2002 in Soest, p. 123-132.

[5] Roanes-Lozano, E. and Roanes-Macías, E., Villar-Mena, M. (2003): A Bridge Between Dynamic Geometry and Computer Algebra. In: Mathematical and Computer Modelling 37/9-10, p. 1005-1088.

[6] Schumann, H. (1991): Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer. (School geometric construction with the computer). Stuttgart: Metzler und Teubner. (available in the Archiv of URL: http://www.math-schumann.de)

[7] Schumann, H.; Green, D. (1994): Discovering Geometry with a Computer. Bromley/Kent: Chartwell-Bratt.

[8] Schumann, H. (2001): Die Behandlung von Funktionen einer reellen Variablen mit Methoden der dynamischen Geometrie. (The treatment of functions of one real variables with methods of dynamic geometry). In: Elschenbroich, H.-J. et al.: Zeichnung – Figur – Zugfigur. Mathematische und didaktische Aspekte Dynamischer Geometrie. Hildesheim: Franzbecker, p. 173-182.

[9] Schupp, H.; Dabrock, H. (1995): Höhere Kurven – Situative, mathematische, historische und didaktische Aspekte. (Higher curves – situative, mathematical, historical and didactic aspects). Mannheim: BI Wissenschaftsverlag.

[10] Weth, Th. (1993): Zum Verständnis des Kurvenbegriffs im Mathematikunterricht. (For the understanding of the curve concept in the mathematics lesson). Hildesheim: Franzbecker

Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante el método de las transformadas diferenciales

J. C. Cortés López
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Valencia
jccortes@mat.upv.es
G. Calbo Sanjuán
Departamento de Matemáticas
I.E.S. Els Évols, L'Alcúdia, Valencia

Resumen

This paper deals with the study of an operational method to solve ordinary differential equations. By the examples we show that it can provide us exact or approximate solutions.

1. Introducción

Es bien sabido que el cálculo de la solución de una ecuación diferencial ordinaria (e.d.o.) de forma exacta es excepcional, y en la mayoría de las e.d.o.'s procedentes de modelos físicos, químicos,... la solución se debe calcular por métodos numéricos. Entre estos últimos, una de las técnicas más importantes es la búsqueda de la solución mediante su desarrollo en serie de Taylor. Por ejemplo, el método de Frobenius [1, p.222] basado en esta idea, es de gran utilidad para resolver e.d.o.'s de tipo singular-regular.

El presente trabajo está basado en [2] y [3], y describe a través de un método operacional, la técnica de Taylor para resolver e.d.o.'s que permite su aplicación de un modo mucho más elegante y potente que el enfoque tradicional. Acabaremos el trabajo aportando ejemplos de aplicación, tanto exactos como aproximados de esta técnica.

2. Definición de la transformada y propiedades

Dada una función que llamaremos original, $y = f(x)$, n veces diferenciable en $x = a$, llamaremos T_a-transformada diferencial de Taylor de $f(x)$ en $x = a$ al número real

$$F_a(n) = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}(f(x))\right]_{x=a} \in \mathrm{R}, \quad n \geq 0 \ \textit{entero}. \tag{1}$$

En el caso en que $a = 0$, utilizaremos la notación más sencilla $F_0(n) = F(n)$. Definimos su transformada inversa por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_a(n)(x-a)^n. \tag{2}$$

Claramente la relación entre la T_a-transformada y su inversa está dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}(f(x))\right]_{x=a}(x-a)^n$$

que es el teorema de Taylor.

Dada $f(x)$ y un punto $x = a$, si definimos $g(x) = f(x-a)$, como se verifica que

$$F_a(n) = G_0(n)$$

bastará con describir las propiedades de la T_0-transformada.

Teorema 1 (propiedades de T_0) *Para f, g y h funciones suficientemente diferenciables en $x = 0$ se cumple*

1. *Linealidad*

$$\textit{Si} \quad f(x) = \alpha g(x) + \beta h(x) \Rightarrow F(n) = \alpha G(n) + \beta H(n) \quad , \quad \forall \alpha, \beta \in \mathrm{R}.$$

2. *Transformadas de las derivadas*

$$\textit{Si} \quad f(x) = \frac{d^r}{dx^r}(g(x)) \Rightarrow F(n) = (n+r)\cdots(n+1)G(n+r) \ , \ \forall r \geq 1 \ \textit{entero},$$

en particular, si $r = 1$

$$f(x) = \frac{d}{dx}(g(x)) \Rightarrow F(n) = (n+1)G(n+1).$$

3. Transformada de un producto

$$Si \quad f(x) = g(x)h(x) \Rightarrow F(n) = \sum_{k=0}^{n} G(k)H(n-k).$$

Demostración

1. Es una consecuencia de la propiedad de linealidad de la derivada

$$F(n) = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}\left(\alpha g(x) + \beta h(x)\right)\right]_{x=0}$$

$$= \alpha\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}\left(g(x)\right)\right]_{x=0} + \beta\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}\left(h(x)\right)\right]_{x=0} = \alpha G(n) + \beta H(n).$$

2. Sea $r \geq 1$ entero,

$$F(n) = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^r}{dx^r}\left(g(x)\right)\right)\right]_{x=0} = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n+r}}{dx^{n+r}}\left(g(x)\right)\right]_{x=0}$$

$$= \frac{(n+r)\cdots(n+1)}{(n+r)!}\left[\frac{d^{n+r}}{dx^{n+r}}\left(g(x)\right)\right]_{x=0} = (n+r)\cdots(n+1)G(n+r).$$

3. Para su deducción utilizaremos la conocida fórmula de Leibniz para la derivada n-sima de un producto de funciones

$$F(n) = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}\left(g(x)h(x)\right)\right]_{x=0} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(g(x)\right)\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left(h(x)\right)\right]_{x=0}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(g(x)\right)\right]_{x=0}\frac{1}{(n-k)!}\left[\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left(h(x)\right)\right]_{x=0} = \sum_{k=0}^{n} G(k)H(n-k).$$

También podemos deducir la T_0-transformada de algunas funciones elementales,

Teorema 2 (T_0-transformada de algunas funciones elementales) *Se verifica que*

1. Transformada de la función potencial

$$Si \quad f(x) = x^m \Rightarrow F(n) = \delta(n-m) = \begin{cases} 1 & si \quad n = m \\ 0 & si \quad n \neq m \end{cases}$$

2. Transformada de la función exponencial

$$Si \quad f(x) = e^x \Rightarrow F(n) = \frac{1}{n!}$$

3. Transformada de la función seno

$$Si \quad f(x) = \sin x \Rightarrow F(n) = \begin{cases} \frac{1}{n!} & si \qquad n = 4k+1 \\ \frac{(-1)^n}{n!} & si \qquad n = 4k+3 \\ 0 & si \quad 4k+1 \neq n \neq 4k+3 \end{cases}$$

siendo $k \geq 0$ entero.

Demostración
1. Como

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^m) = \begin{cases} m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n} & \text{si} \quad m \geq n \\ 0 & \text{si} \quad n < m \end{cases}$$

se tiene

$$\left[\frac{d^n}{dx^n}(x^m)\right]_{x=0} = \begin{cases} n! & \text{si} \quad m = n \\ 0 & \text{si} \quad n \neq m \end{cases}$$

luego, en términos de la función delta

$$F(n) = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}(x^m)\right]_{x=0} = \delta(n-m).$$

2. En este caso como

$$\left[\frac{d^n}{dx^n}(e^x)\right]_{x=0} = [e^x]_{x=0} = 1$$

se tiene

$$F(n) = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}(e^x)\right]_{x=0} = \frac{1}{n!}.$$

3. Es inmediato.

3. Aplicaciones

En este apartado daremos aplicaciones del método de las T_0-transformadas. Empezaremos resolviendo la e.d.o. lineal no homogénea con coeficientes constantes de primer orden, para la cual la solución es bien conocida.

Ejemplo 1
Consideremos el problema de Cauchy

$$\left.\begin{array}{rcl} y' + ay & = & b \\ y(0) & = & y_0 \end{array}\right\}, \quad (b \neq 0) \tag{3}$$

Buscamos su solución en forma de serie de MacLaurin, es decir, de la forma (2) con $a = 0$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Y(n)x^n \tag{4}$$

siendo $Y(n)$ la T_0-transformada de la solución $y = y(x)$ de la e.d.o. Para calcular la solución, tomemos T_0-transformadas en cada miembro de la e.d.o. Aplicando primero las propiedades 1 y 2 del teorema 1 obtenemos la T_0-transformada del primer miembro:

$$(n+1)Y(n+1) + aY(n). \tag{5}$$

Para obtener la T_0-transformada del segundo miembro basta aplicar la primera propiedad del teorema 1 y la primera conclusión del teorema 2 con $m = 0$, que nos conduce a

$$b\delta(n). \tag{6}$$

Por la unicidad de la T_0-transformada (heredada por la unicidad de los coeficientes del desarrollo en serie de Taylor) se tiene de (5) y (6)

$$(n+1)Y(n+1) + aY(n) = b\delta(n) \quad , \quad n \geq 0$$

$$Y(n+1) = \frac{1}{n+1}\left[-aY(n) + b\delta(n)\right] \quad , \quad n \geq 0. \tag{7}$$

De la definición (1) junto con la condición inicial $y(0) = y_0$ de (3) obtenemos

$$Y(0) = \left[\frac{d^0}{dx^0}\left(y(x)\right)\right]_{x=0} = y(0) = y_0. \tag{8}$$

Ahora haciendo $n = 0$ en (7) y considerando que $\delta(0) = 1$ se tiene de (7) y (8)

$$Y(1) = -ay_0 + b, \tag{9}$$

mientras que como $\delta(n) = 0$, $\forall n \geq 1$, se deduce de (7)

$$Y(n+1) = \frac{-a}{n+1}Y(n) \quad , \quad n \geq 1$$

que aplicado recurrentemente nos conduce, teniendo en cuenta (9), a

$$Y(n+1) = \frac{-a}{n+1}Y(n) = \cdots = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}a^n\left(-ay_0 + b\right), \quad n \geq 1.$$

Esta expresión es válida incluso para $n \geq 0$, luego

$$Y(n+1) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}a^n\left(-ay_0 + b\right), \quad n \geq 0. \tag{10}$$

Sustituyendo (10) en (4) obtenemos la conocida solución (exacta) de (3)

$$y(x) = \sum_{n\geq 0} Y(n)x^n = Y(0) + \sum_{n\geq 0} Y(n+1)x^{n+1} = y_0 + (-ay_0 + b) \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} a^n x^{n+1}$$

$$= y_0 - (-ay_0 + b)\frac{1}{a} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} a^{n+1} x^{n+1}$$

$$= y_0 - \frac{b - ay_0}{a}\left(e^{-ax} - 1\right) = \left(y_0 - \frac{b}{a}\right) e^{-ax} + \frac{b}{a}.$$

Ejemplo 2

En el ejemplo anterior, acabamos de obtener la solución de una e.d.o. mediante el método de la T_0-transformada, sin embargo, aún cuando por otros procedimientos es posible calcular la solución exacta de una e.d.o., en general, no resulta sencillo hacerlo mediante el T_0-método, porque ello depende fundamentalmente de saber reconocer el desarrollo en serie obtenido en (2) como el de alguna combinación de funciones elementales, pero pondremos de manifiesto en este ejemplo que esto resulta a veces complicado. Sin embargo, este inconveniente no es tan grave como puede parecer en una primera evaluación precipitada, porque para la mayoría de las e.d.o.'s (incluso algunas de aspecto muy sencillo como la e.d.o. de Airy: $y'' - xy = 0$) no se conoce una representación en forma cerrada de su solución. En estos casos, en la práctica muchas veces determinaremos la solución aproximada de orden m en la forma (2), pero truncado por el término m-ésimo

$$y_m(x) = \widetilde{f}_m(x) = \sum_{n=0}^{m} F_a(n)(x-a)^n \tag{11}$$

admitiendo que la cola

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} F_a(n)(x-a)^n \tag{12}$$

es despreciable. Para ilustrar estas ideas, consideremos el problema de valor inicial

$$\left.\begin{array}{rcl} y'' - y &=& x^2 e^x \\ y(0) &=& 1 \\ y'(0) &=& 0 \end{array}\right\}, \tag{13}$$

Calculamos la T_0-transformada del primer miembro aplicando 1, y 2 del teorema 1 para $r = 2$, obteniendo

$$(n+2)(n+1)Y(n+2) - Y(n).$$

La T_0-transformada del segundo miembro se calcula aplicando 3 y 1 para $m = 2$, y 2 del teorema 2, lo que nos conduce a

$$\sum_{k=0}^{n} \delta(k-2)\frac{1}{(n-k)!}.$$

Por la unicidad de la T_0-transformada tenemos

$$(n+2)(n+1)Y(n+2) - Y(n) = \sum_{k=0}^{n} \delta(k-2)\frac{1}{(n-k)!} \quad , \quad n \geq 0, \tag{14}$$

siendo

$$\delta(k-2) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = 2 \\ 0 & \text{si} \quad k \neq 2 \end{cases}$$

Por otra parte, las condiciones iniciales dadas en (13) nos proporcionan

$$Y(0) = 1 \quad , \quad Y(1) = 0, \tag{15}$$

y a partir de (14) y (15) vamos generando la solución de (2)

$$\begin{array}{llcl} n = 0, & 2 \cdot 1 \cdot Y(2) - Y(0) = 0 & \Rightarrow & Y(2) = \frac{1}{2} \\ n = 1, & 3 \cdot 2 \cdot Y(3) - Y(1) = 0 & \Rightarrow & Y(3) = 0 \\ n \geq 2, & (n+2)(n+1)Y(n+2) - Y(n) = \frac{1}{(n-2)!} & \Rightarrow & Y(n+2) = \frac{Y(n) + \frac{1}{(n-2)!}}{(n+2)(n+1)} \end{array}$$

luego

$$Y(4) = \frac{1}{8} \quad ; \quad Y(5) = \frac{1}{20} \quad ; \quad Y(6) = \frac{1}{48} \quad ; \quad \ldots \quad ,$$

y con ello tenemos la aproximación de orden $m = 6$ de la solución dada en (11)

$$y_6(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{48}x^6 + \cdots \quad . \tag{16}$$

Sin embargo, mediante el método de los coeficientes indeterminados puede verse que la solución de (13) es ([4, p.99])

$$y(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right)e^x + \frac{3}{8}e^x + \frac{5}{8}e^{-x}.. \tag{17}$$

Es sencillo comprobar que el desarrollo de MacLaurin de orden 6 de (17) es precisamente (16).

4. Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado un método operacional para la resolución de e.d.o.'s, basado en los trabajos [2] y [3] para ecuaciones en derivadas parciales. La técnica está fundamentada en la búsqueda de solución en forma de serie de Taylor, lo cual es por otra parte, una metodología clásica. Sin embargo, la aportación del método es que la forma en operadores en que actúa permite su aplicación de una forma más elegante y potente.

Referencias

[1] Apostol T.M. (1989), Calculus Vol.2. *Ed. Reverté.* Barcelona.

[2] Chen C.K., Ho S.H. (1996) Applications of differential transformation to eigenvalue problem, *Appl. Math. Comput.* vol. 79, 179-188.

[3] Chen C.K., Ho S.H. (1999) Solving partial differential equations by two-dimensional differential transform method, *Appl. Math. Comput.* vol. 106, 171-179.

[4] Plaat O. (1974) Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. *Ed. Reverté.* Barcelona.

Un generador de números pita

José Manuel Jiménez Camacho
I.E.S. Eladio Cabañero (Tomelloso)
josemajim@terra.es

Abstract

This essay shows a pythagorean triple generator different from Euclides.

Introducción

Me pregunto cuántos y cuáles son los números pitagóricos, es decir, aquellos números naturales x, y, z que cumplen $x^2 + y^2 = z^2$. El primer recuerdo que tengo de ellos es del primer año que trabajé como profesor aunque probablemente de niño ya los hubiera visto. La primera terna que conocí de estos números fue 3, 4 y 5, que usaba entonces en problemas de trigonometría, resolución de triángulos rectángulos y cónicas. Pronto apareció la terna 6, 8 y 10, que como es el doble de la anterior, te hace sospechar que cualquier terna que sea múltipla de otra pitagórica, también es pitagórica. En efecto, $(3k)^2 + (4k)^2 = 3^2k^2 + 4^2k^2 = (3^2 + 4^2)k^2 = 5^2k^2 = (5k)^2$. Una vez hecha esta sencilla demostración ya sabemos que hay infinitos números pitagóricos. Al principio llegué a pensar que quizás no hubiera más ternas que éstas, pero no tardó mucho tiempo en aparecer otra terna que no tenía nada que ver con ellas, los números 5, 12 y 13 que seguramente descubrí cuando entre todos los profesores de matemáticas poníamos algún examen conjunto. Esta terna daría lugar a otra infinidad de ternas múltiplas. Entonces el problema que se plantea ahora es buscar las ternas "primitivas" de números pitagóricos, es decir, aquellas en las que MCD (x, y, z) = 1. Si hay dos ternas, lo más seguro es que haya infinitas, pero nunca me había detenido a estudiarlo. En el intento de encontrar todos los números pitagóricos he hallado un generador distinto al de Euclides.

1 Desarrollo

Comencemos observando los cuadrados perfectos:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, …

Los pares son múltiplos de 4 (4, 16, 36, 64,...) y los impares son múltiplos de 4 más 1 ($9 = 2·4+1$, $25 = 6·4+1$, $49 = 12·4+1$, $81 = 20·4+1$, $121 = 30·4+1$, …) y es curioso que los números que multiplican a 4 son $6 = 2·3$, $12 = 3·4$, $20 = 4·5$, $30 = 5·6$, etc, es decir, son el producto de dos naturales consecutivos. Esto es muy sencillo de probar: si se trata del cuadrado de un número par, resulta $(2k)^2 = 4k^2$ y si es el cuadrado de un impar,

$$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1 = 4k(k + 1) + 1$$

Además no falta ninguno, es decir todo número de la forma $4k(k + 1) + 1$ es un cuadrado perfecto, el cuadrado de $2k + 1$. Por lo tanto los cuadrados perfectos son múltiplos de 4 o múltiplos de 4 más 1. No es mucho, pero nos va a servir.

Si continuamos jugando con la paridad de los números pitagóricos, obtenemos resultados inmediatamente. Con el fin de ser claro me referiré a los números de la terna como catetos e hipotenusa. Si los dos catetos son pares, sus cuadrados serán múltiplos de 4 y por tanto la hipotenusa será par. Entonces los tres números son divisibles por 2 y no es una terna primitiva. Si los dos catetos son impares, la suma de sus cuadrados es $(2m + 1)^2 + (2n + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 = 4(m^2 + m + n^2 + n) + 2$, múltiplo de 4 más 2, y como ya hemos visto no sería un cuadrado perfecto. Por tanto ya sabemos *que los catetos de las ternas pitagóricas primitivas deben tener distinta paridad.* Además como consecuencia, sus cuadrados son también uno par y el otro impar, el cuadrado de la hipotenusa que es la suma será entonces impar y la hipotenusa también. Por lo tanto *las hipotenusas de las ternas primitivas son impares.*

Desde esta reflexión podemos analizar el cuadrado de la hipotenusa de una terna primitiva. Será la suma de los cuadrados de un cateto par y de otro impar, es decir, $(2m + 1)^2 + (2n)^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 = 4(m^2 + m + n^2) + 1$ que es cuadrado perfecto si y sólo si $m^2 + m + n^2 = k(k + 1)$ para algún k natural. Si pudiéramos encontrar las condiciones que deben cumplir m y n para que se dé esto último habríamos resuelto totalmente el problema, pero por aquí no he llegado a ningún resultado. También se puede intentar con la resta del cuadrado de la hipotenusa y del cateto par para tener, en lugar de $m^2 + n^2$, $m^2 - n^2$ que se puede factorizar pero tampoco llego a nada.

Bueno, un pequeño fracaso, pero sigamos por otra vía. Si en lugar de trabajar con dos parámetros m y n, trabajamos con uno solo, resulta mucho más sencillo, pero con el inconveniente de limitar enormemente el problema. La idea es hallar ternas fijando de antemano la diferencia entre la hipotenusa y un cateto. Por ejemplo podemos tomar como hipotenusa $2m + 1$ y una unidad menos, $2m$, para un cateto. Entonces el cuadrado del otro será $(2m + 1)^2 - (2m)^2 = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 = 4m + 1$ que es un cuadrado perfecto si y sólo si $m = k(k + 1)$, y al hacer este cambio quedaría $4k(k + 1) + 1 = (2k + 1)^2$ y el cateto será $2k + 1$. El otro cateto es $2m = 2k(k + 1)$ y la hipotenusa $2m + 1 = 2k(k + 1) + 1$.

Hemos encontrado la terna $2k + 1$, $2k(k + 1)$, $2k(k + 1) + 1$ que da lugar a los números pitagóricos:

3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41

...

Este generador de números pitagóricos se atribuye precisamente a Pitágoras. Ya hemos resuelto parte del problema: *hay infinitas ternas pitagóricas primitivas* porque el cateto mayor y la hipotenusa difieren en 1 y por tanto son primos entre sí. Pero estamos lejos de hallar todas porque éstas son un caso particular, las que su cateto mayor son uno menos que la hipotenusa.

Razonando de igual modo obtenemos un generador de ternas con diferencia 2 entre la hipotenusa y un cateto: hipotenusa $2m + 1$, un cateto $2m - 1$. El cuadrado del otro es $(2m + 1)^2 - (2m - 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 - (4m^2 - 4m + 1) = 8m$, que es cuadrado perfecto si y sólo si lo es $2m$, si y sólo si $m = 2k^2$. Ahora las ternas son del tipo $4k$, $4k^2 - 1$ y $4k^2 + 1$, es decir:

4	3	5
8	15	17
12	35	37
16	63	65

…

Estas ternas también son primitivas porque dos números impares de diferencia 2 son primos entre sí. Al hallar el generador de diferencia 3 obtenemos $6k + 3$, $6k(k + 1)$, $6k(k + 1) + 3$ y enseguida se ve que son múltiplos de 3 y por tanto no genera ternas primitivas. En este momento encontramos, sin pretenderlo, un camino por donde avanzar en el problema general. ¿Cuáles son las diferencias posibles entre la hipotenusa y los catetos? Probemos con diferencia 4: hipotenusa $2m + 1$, cateto $2m - 3$. El cuadrado del otro será $(2m + 1)^2 - (2m - 3)^2 = 4m^2 + 4m + 1 - (4m^2 - 12m + 9) = 16m - 8 = 4(4m - 2)$ cuadrado perfecto si y sólo si $4m - 2$ cuadrado perfecto, que sabemos que es imposible. Al probar con diferencia 5 se obtienen ternas de números múltiplos de 5.

El hecho de que los números 3 y 5 no generen ternas primitivas nos induce a pensar que ningún primo mayor que 2 lo hace. Probemos qué pasa si consideramos que la hipotenusa es h y un cateto es h-n con n primo mayor que 2. El cuadrado del otro cateto es $h^2 - (h - n)^2 = h^2 - (h^2 - 2nh + n^2) = 2nh - n^2 = n(2h - n)$ que es múltiplo de n, pero además para que sea cuadrado perfecto, al ser n primo, 2h - n debe ser también múltiplo de n y por tanto, también h. Luego h, h - n y el otro cateto son múltiplos de n y no se generan ternas primitivas.

Pero este argumento no sólo es válido para números primos mayores que 2. Para no generar ternas primitivas es suficiente que la diferencia tenga, al menos, un factor primo mayor que 2 de orden impar, es decir, que n no sea un cuadrado perfecto salvo si sólo le falta un 2 para serlo; llamemos p a este factor. Como n(2h - n) es el cuadrado de un cateto, pero n tiene a p con orden impar, el factor 2h - n tiene que ser también múltiplo de p, y al ser n múltiplo de p, 2h también lo es y por lo tanto h es múltiplo de p (por esta razón hay que exigir p>2). Ésta es la idea clave de la demostración.

Dicho de otro modo: supongamos que la diferencia es $p^n k$ con p>2, y k ya sin el factor p, es decir hipotenusa h y un cateto h - $p^n k$. El cuadrado del otro es $h^2 - (h - p^n k)^2 = h^2 - (h^2 - 2p^n kh + p^{2n} k^2) = 2p^n kh - p^{2n} k^2 = p^n(2kh - p^n k^2)$. Este número debe ser cuadrado perfecto, pero si n fuera impar, el paréntesis debería contener a p, por tanto 2kh también y como k no lo tiene es h el múltiplo de p. Pero en tal caso, otra vez, los números de la terna son múltiplos de p. Por tanto n debe ser par. Entonces todos los factores primos mayores que 2 de la diferencia deben ser de orden par.

La diferencia no podía ser 4 porque con el factor 2 pasa justo lo contrario. Para que $2^n(2kh-2^n k^2) = 2^{n+1}(kh-2^{n-1}k^2)$ sea cuadrado perfecto, n debe ser impar o bien h contener un 2 con lo que de nuevo los tres lados serían múltiplos de 2.

2 Conclusión

Resumiendo, los factores primos de la diferencia deben ser de orden par salvo el 2, que, si está, debe ser de orden impar. Por eso *¡las diferencias son cuadrados perfectos sin el 2 o cuadrados perfectos multiplicados por 2!* Entonces la diferencia entre la hipotenusa y cada uno de los catetos tiene que ser m^2 y $2n^2$ porque si fuesen dos cuadrados, la terna sería h, h-m^2 y h-n^2 y como estos cuadrados no contienen al 2, los dos catetos tendrían la misma paridad, y si las diferencias fuesen $2m^2$ y $2n^2$ pasaría lo mismo.

Hemos llegado a que los números tienen que ser h, $h - m^2$ y $h - 2n^2$, m sin el factor 2. Aplicando el teorema de Pitágoras podemos eliminar h: $h^2 = (h - m^2)^2 + (h - 2n^2)^2$ si y sólo si $h^2 = h^2 - 2m^2h + m^4 + h^2 - 4n^2h + 4n^4$ si y sólo si $h^2 + h(-2m^2 - 4n^2) + m^4 + 4n^4=0$. Resolviendo esta ecuación en h se obtiene $h = m^2 + 2n^2 + 2mn$ y $h = m^2 + 2n^2 - 2mn$ y sustituyendo h por estos valores se obtiene el generador $m(m - 2n)$, $2n(n - m)$ y $m^2 + 2n^2 - 2mn$ que no es válido porque si $m - 2n>0$ entonces $n - m<0$, y el generador *$m^2 + 2mn$, $2n^2 + 2mn$ y $m^2 + 2n^2 + 2mn$* que resuelve totalmente la cuestión. Las condiciones necesarias y suficientes para generar todas las ternas primitivas son que m sea impar y que m y n sean primos entre sí.

Los números que genera esta terna deben ser todos. Veamos los primeros:

m	n	m^2+2mn	$2n^2$+2mn	m^2+2n^2+2mn
1	1	3	4	5
1	2	5	12	13
1	3	7	24	25
1	4	9	40	41
1	5	11	60	61
3	1	15	8	17
3	2	21	20	29
5	1	35	12	37
5	2	45	28	53

Euclides resolvió este problema de una forma mucho más rápida y elegante: simplemente se dio cuenta de que la hipotenusa era siempre suma de dos cuadrados y uno de los catetos su diferencia. La solución general que él aportó fue $m^2 - n^2$, 2mn y $m^2 + n^2$. Estos generadores son equivalentes, como no podía ser de otra forma: si en el generador de Euclides se hace $m = n + p$ se obtiene de inmediato el otro generador y si en primero se escribe $m^2 + 2mn = (m + n)^2 – n^2$, y $m^2 + 2n^2 + 2mn = (m +n)^2 + n^2$, tomando $m + n = p$ se obtiene el de Euclides.

Bibliografía

[1] Torrecillas Jover, Blas. *Fermat, el mago de los números*. Nivola, 1999.

Estrategias en juegos de apuestas: ¿Diversificación o concentración? Una estrategia óptima para el caso de la Lotería Primitiva

Luis Franco Martín

Dpto. de Economía Aplicada I. Universidad de Sevilla.

Juan Manuel Valderas Jaramillo

Dpto. de Economía Aplicada I. Universidad de Sevilla.

Abstract

In this paper, authors find the optimum strategy, in the sense of maximizing the expected value, for a player who plays several bets in Lottery Games. They find the expected value for games with a fixed prize, such as the Spanish National Lottery, and for games with a variable prize, that is, the prize depends on the number bets played and the number of winners, such as the Spanish 1X2 odds and the Spanish Lotto. For games with fixed prize, they obtain that every strategy is an optimum in the sense that they lead to the same expected value. For games with a variable prize, the optimum strategy is playing different bets, in the sense that they lead to different prizes. In particular, for the case of Spanish Lotto, the optimum strategy implies that any couple of bets cannot have more than one number in common in the draw.

Introducción

Las personas que optamos por apostar nuestro dinero, en mayor o menor medida, en los diversos juegos de azar, tenemos que hacer frente a la decisión de cómo repartir entre las diversas apuestas el montante que estamos dispuestos a gastar en el juego de nuestra elección. Dos alternativas aparentemente racionales y contrapuestas acuden a nuestra mente: gastar todo en la misma apuesta o repartir el dinero entre diferentes posibilidades. La razón por la que habitualmente se opta por la primera opción es maximizar el premio obtenido, mientras que la segunda opción la razón que la justifica es aumentar la probabilidad de obtener premio. Entre ambas opciones se produce una relación de intercambio entre probabilidad y montante total de premio obtenido, en el caso de concentración el premio obtenido sería mayor, pues todos las apuestas estarían premiadas en el caso de acierto, pero a costa de una menor probabilidad; en el caso de diversificar, la probabilidad de acertar aumenta al jugarse apuestas diferentes, pero el premio será menor pues si una apuesta está premiada puede que la otra no lo esté, dependiendo de las condiciones del juego. Ambas alternativas son plenamente justificables desde el punto de vista de la utilidad esperada, sin embargo, desde una perspectiva meramente probabilística no está tan clara la respuesta.

Para clarificar dicho extremo, en primer lugar, es necesario distinguir entre juegos de premio fijo y juegos de premio variable. Un juego de premio fijo es aquél en que el premio obtenido por la apuesta ganadora es una cantidad constante conocida de antemano. Juegos de este tipo son, por ejemplo, los de la Lotería Nacional o el cupón de la O.N.C.E.. Un juego de premio variable es aquél en que el premio recibido depende del número de apuestas efectuadas en dicho juego y se reparte proporcionalmente entre el número de acertantes en cada categoría. Ejemplos de juegos de este tipo son el caso de la Lotería Primitiva y sus diferentes versiones semanales, o la Quiniela. Como comprobaremos a continuación, el hecho de diversificar o concentrar las múltiples apuestas tendrá resultados distintos desde el punto de vista de la esperanza del premio dependiendo del tipo de juego considerado.

Para analizar cada una de estas estrategias para los distintos tipos de juego, hemos seleccionado los juegos de la Lotería Nacional y la Lotería Primitiva dado que son los juegos que más recaudación obtienen de la red de juegos del Organismo Nacional de Loterías y Apuestas del Estado. Dichos datos se pueden ver en la tabla siguiente, en la que las cantidades están expresadas en millones de euros.

Volumen de Ventas (10^6 €) del Año 2000 en la Red de Juegos de la ONLAE

Total de Ventas	Lotería Nacional	% sobre Total	Lotería Primitiva	% sobre Total	Resto de Juegos	% sobre Total
6.881,432	4.102,803	59,6%	1.561,616	22,7%	1.217,013	17,7%

Fuente: Anuario O.N.L.A.E. Año 2000

1. Juegos de premio fijo: la Lotería Nacional

Vamos a analizar en primer lugar los juegos de premio fijo entre los que destaca el sorteo de Navidad dada la gran tradición que tiene y la importancia del mismo ya que su volumen de ventas representa un porcentaje superior al 30% del total anual de la Lotería Nacional de cada año.

Nuestro objetivo es calcular el valor esperado del premio a obtener en el caso de que juguemos todo el dinero previsto a un mismo número o que diversifiquemos nuestra apuesta en varios números diferentes. Supongamos que el dinero que queremos apostar nos da para comprar ***t*** décimos del sorteo de Navidad. En dicho sorteo, el bombo de los números contiene 66.000 bolas numeradas del 0 al 65.999, mientras que el bombo de los premios contiene 1.540 bolas con los premios correspondientes[1]. Además, existen premios por aproximaciones, centenas y terminaciones.

- Denotemos por $q_1, q_2, ..., q_{16}$ el valor de los premios que puede conseguir un décimo en las 16 categorías de premios existentes, desde el Gordo de Navidad hasta la aproximación por reintegro. Llamemos a p_i la probabilidad de obtener con un décimo un premio de la categoría *i-sima*, donde, para hallar p_i, sólo tenemos que aplicar la definición de probabilidad de Laplace. Dichas probabilidades se muestran a continuación

$$p_1 = 1/66000 \;, p_2 = 1/66000 \,, p_3 = 1/66000 \,, p_4 = 1/33000 \,, p_5 = 1/15500$$

$$p_6 = 1531/66000 \,, p_7 = p_8 = p_9 = 1/33000 \;, p_{10} = p_{11} = p_{12} = 33/22000$$

$$p_{13} = p_{14} = p_{15} = 659/66000 \quad p_{16} = 6599/66000$$

- Designemos con X_i^k al número de aciertos de la categoría *i-sima* que tiene la apuesta *k-sima*. Dicha variable sigue una distribución de probabilidad de Bernoulli ya que, dadas las condiciones del sorteo, las bolas son extraídas sin reemplazamiento, no podemos tener dos premios de la misma categoría en una única apuesta:

$$X_i^k = \begin{cases} 1 & P(X_i^k = 1) = p_i \\ 0 & P(X_i^k = 0) = 1 - p_i \end{cases} \Rightarrow E(X_i^k) = p_i$$

- Denotemos con X_i al número de apuestas premiadas con un premio de la categoría i-sima.

$$X_i = \sum_{k=1}^{t} X_i^k \Rightarrow E(X_i) = t \cdot p_i \qquad [1]$$

---

1 Las características específicas del sorteo pueden consultarse en el reverso de cualquier décimo de Lotería de Navidad.

- Denotemos con Q_i la variable aleatoria correspondiente a la cantidad obtenida por premios de la categoría i-sima. Al ser el juego de premio fijo se verifica que $Q_i = q_i \cdot X_i$

El premio obtenido será una variable aleatoria $Q = \sum_{i=1}^{16} Q_i$ cuyo valor esperado podemos calcular:

$$E(Q) = \sum_{i=1}^{16} E(Q_i) = \sum_{i=1}^{16} E(q_i \cdot X_i) = \sum_{i=1}^{16} q_i \cdot E(X_i) = t \cdot \sum_{i=1}^{16} q_i \cdot p_i \quad [2]$$

Para evaluar la expresión anterior en el caso de la Lotería Nacional basta sumar el montante de todos los premios de una serie y dividir por la recaudación[2] correspondiente a la venta de dicha serie, obteniendo como resultado 0`7·3000·t ptas, es decir, el valor esperado del premio es el 70% del valor invertido:

$$E(Q) = t \cdot \sum_{i=1}^{16} q_i \cdot p_i = t \cdot 2100\, ptas. = 70\% \text{ de la inversión.}$$

El resultado es, como se ve fácilmente, independiente de la estrategia de concentración o diversificación de apuestas. En el caso de concentración, la expresión [2] puede interpretarse como premios $t \cdot q_i$ con probabilidades p_i, mientras que en el caso de diversificación los premios serían q_i con probabilidades $t \cdot p_i$.

2. Otros juegos de premio fijo

Las fórmulas anteriormente calculadas siguen siendo válidas para cualquier juego de premio fijo con la única restricción, que se cumple en todos los juegos, de que una misma apuesta no pueda tener dos premios de la misma categoría. Es importante señalar que categoría y cuantía son dos conceptos distintos, así, la "pedrea" tiene premio de igual cuantía que las "terminaciones" pero son dos categorías distintas de premio.

3. Juegos de premio variable: la Lotería Primitiva

Este popular juego consiste en acertar una combinación de 6 números obtenidos al azar de entre 49 posibles. Existen premios para los acertantes de los 6 números que forman la combinación ganadora, para los acertantes de 5 números de dicha combinación más un número especial conocido como complementario y, además,

---

2 Dichos cálculos están realizados en pesetas pues nuestra referencia es el último sorteo de la Lotería de Navidad que se realizó en dicha moneda.

para los acertantes de 5, 4 y 3 números de la combinación ganadora. Hay además un premio adicional de reintegro, que se juega de forma independiente a los anteriores, a cada boleto se le asigna un número entre 0 y 9 y aquellos boletos cuyo número coincida con el reintegro les será reintegrada el valor de la apuesta. Existen pues 6 categorías de premios en este caso.

Las probabilidades de acierto para cada una de las 5 primeras categorías del premio se pueden obtener a partir de la distribución hipergeométrica multivariante o modelo multihipergeométrico. La función de probabilidad de dicho modelo *MHG(N, M_1, M_2, n)* viene dada por:

$$P\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2\right) = \frac{\binom{M_1}{x_1}\binom{M_2}{x_2}\binom{N-M_1-M_2}{n-x_1-x_2}}{\binom{N}{n}} I_{\{x_1+x_2\leq n\}} I_{\{x_1,x_2\in Z^+\}} I_{\{x_i\in X_i(\Omega)\}}$$

donde $x_1 = 0,1,2,3,4,5,6$ representa el número de aciertos y $x_2 = 0,1$ indica si ha acertado el número complementario. Como jugamos combinaciones de 6 números se verificará que $x_1 + x_2 \leq 6$, y, en el caso que nos ocupa, $N = 49, M_1 = 6, M_2 = 1, n = 6$. Dichas probabilidades calculadas se dan a continuación.

$$p_1 = 7{,}151124 \cdot 10^{-8} \qquad p_2 = 4{,}290674 \cdot 10^{-7} \qquad p_3 = 1{,}802083 \cdot 10^{-5}$$
$$p_4 = 9{,}686197 \cdot 10^{-4} \qquad p_5 = 1{,}765040 \cdot 10^{-2}$$

La probabilidad de obtener el reintegro es independiente a todas las anteriores y es calculada fácilmente a partir de la definición clásica de probabilidad como $p_6 = \frac{1}{10}$.

- Denotemos por R_i el montante a repartir entre los acertantes correspondientes a la categoría *i-sima,* i=1,2,3,4. Dicho montante es un porcentaje prefijado de la recaudación total. En las dos últimas categorías cada acertante tiene un premio fijo sea cual sea el número de acertantes, $q_5 = 7'2€$ para los acertantes de 3 números y $q_6 = 0'9€$ para los agraciados con el reintegro. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el número de acertantes en cada categoría, sin contar nuestras posibles apuestas, es n_i. Dicho número es la realización de una variable aleatoria que dependerá del número de apuestas jugadas, de la probabilidad de obtener premio de cada una de las categorías y de la estrategia elegida por cada uno de los jugadores para seleccionar los números a jugar.

- Vamos a designar con *t* al número de apuestas que vamos a jugar. Lógicamente *t será mucho menor que el número de apuestas jugadas por el total de apostantes*, lo que conlleva que la incidencia de nuestras apuestas en el total de la recaudación es prácticamente nula y el premio que nos llevaremos en la categoría *i-sima* si tenemos X_i apuestas premiadas será:

$$Q_i = X_i \cdot q_i \quad i=1,\dots,6 \;;\; q_i = \frac{R_i}{n_i + X_i} \quad i=1,2,3,4$$

El valor esperado del premio será:

$$E(Q) = \sum_{i=1}^{6} E(Q_i) = \sum_{i=1}^{6} E(q_i \cdot X_i) = \sum_{i=1}^{4} E(X_i \cdot \frac{R_i}{n_i + X_i}) + t \cdot \sum_{i=5}^{6} q_i \cdot p_i$$

De donde, $$E(Q) = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{t} P(X_i = j) \cdot \frac{R_i}{n_i + j} \cdot j + t \cdot (p_5 \cdot 7'2 + p_6 \cdot 0'9) \quad [3]$$

Nótese que los premios de 5ª y 6ª categoría son fijos y en la expresión [3] volvemos a ver, como en los juegos de premio fijo, que su aportación al valor esperado es independiente de la estrategia seguida y sólo depende del número de apuestas jugadas.

<u>Hipótesis 1ª.- Concentración de apuestas.</u>

Si las *t* apuestas son iguales entonces $P(X_i = j) = 0$ para $j = 1,2,\dots,t-1$ y, además,

$$P(X_i = t) = P(X_i^k = 1) = p_i \quad i=1,\dots,4 \quad k=1,\dots t$$

sustituyendo en [3] $$E(Q) = \sum_{i=1}^{4} P(X_i = t) \cdot \frac{R_i}{n_i + t} \cdot t + t \cdot (p_5 \cdot 7'2 + p_6 \cdot 0'9)$$

En definitiva: $$E(Q) = \left(\sum_{i=1}^{4} p_i \cdot \frac{R_i}{n_i + t} + p_5 \cdot 7'2 + p_6 \cdot 0'9 \right) \cdot t$$

<u>Hipótesis 2ª.- Diversificación de apuestas.</u>

En este segundo caso, jugamos nuestras *t* apuestas a combinaciones *con todos los números diferentes*, y solo podremos tener un único premio de las cuatro primeras categorías, es decir:

$$P(X_i = j) = 0 \quad j > 1 \quad i=1,\dots,4$$

Además: $$P(X_i = 1) = P(\sum_{k=1}^{t} X_i^k = 1) = \sum_{k=1}^{t} P(X_i^k = 1) = \sum_{k=1}^{t} p_i = t \cdot p_i \quad [4]$$

ya que los sucesos correspondientes a $X_i^k = 1$ son disjuntos por la hipótesis. Puede ocurrir que tengamos 2 premios de 5ª ó 6ª categoría pero como los premios son fijos, sustituyendo en la expresión [3] nos queda:

$$E(Q) = \sum_{i=1}^{4} t \cdot p_i \cdot \frac{R_i}{n_i + 1} + t \cdot (p_5 \cdot 7'2 + p_6 \cdot 0'9)$$

$$E(Q) = \left(\sum_{i=1}^{4} p_i \cdot \frac{R_i}{n_i + 1} + p_5 \cdot 7'2 + p_6 \cdot 0'9 \right) \cdot t$$

Lo que demuestra que en este caso el premio esperado es mayor que en el caso anterior, ya que:

$$\frac{R_i}{n_i + 1} > \frac{R_i}{n_i + t} \quad \text{para todo } t > 1.$$

Hemos pues demostrado que la diversificación de apuestas es mejor estrategia que la concentración desde el punto de vista del valor esperado del premio.

Sin embargo, solamente podemos jugar 8 apuestas sin repetir ninguno de los 49 números del sorteo de la Primitiva. Por ello vamos a estudiar el caso general y demostraremos que su valor esperado está comprendido entre los valores extremos anteriormente calculados. También demostraremos que coincide con el de diversificación máxima bajo ciertas condiciones.

Hipótesis 3ª.- Caso general.

En el caso general, consideramos que diversificamos las apuestas. Dos apuestas son distintas si no contienen todos los números iguales, pero puede ocurrir que apuestas diferentes tengan algún número en común y por tanto se produce una interacción entre los premios de las mismas al compartir números comunes.

De la cadena de desigualdades $\frac{R_i}{n_i + 1} \cdot j \geq \frac{R_i}{n_i + j} \cdot j \geq \frac{R_i}{n_i + t} \cdot j$, se sigue que:

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{t} P(X_i = j) \cdot \frac{R_i}{n_i + 1} \cdot j \geq \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{t} P(X_i = j) \cdot \frac{R_i}{n_i + j} \cdot j \geq \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{t} P(X_i = j) \cdot \frac{R_i}{n_i + t} \cdot j$$

$$\sum_{i=1}^{4} E(X_i) \cdot \frac{R_i}{n_i + 1} \geq \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{t} P(X_i = j) \cdot \frac{R_i}{n_i + j} \cdot j \geq \sum_{i=1}^{4} E(X_i) \cdot \frac{R_i}{n_i + t}$$

$$\sum_{i=1}^{4} t \cdot p_i \cdot \frac{R_i}{n_i + 1} \geq \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{t} P(X_i = j) \cdot \frac{R_i}{n_i + j} \cdot j \geq \sum_{i=1}^{4} t \cdot p_i \cdot \frac{R_i}{n_i + t}$$

Añadiendo los sumandos correspondientes a los premios de 5ª y 6ª categoría obtendremos:

E("Diversificación máxima") ≥ E("Caso general") ≥ E("Concentración")

Proposición.

Supongamos que jugamos t apuestas tales que cualesquiera dos apuestas tienen en común a lo sumo un número. Entonces, si Q es el premio, su valor esperado será:

$$E(Q)=\left(\sum_{i=1}^{4} p_i\cdot\frac{R_i}{n_i+1}+p_5\cdot 7'2+p_6\cdot 0'9\right)\cdot t=E(\text{“Diversificación máxima”})$$

En efecto: para cada una de las cuatro categorías superiores no puede haber dos apuestas distintas que tengan un premio de dicha categoría, por tanto, $P(X_i=j)=0 \quad j>1 \quad i=1,\ldots,4$, en conjunción con [4], obtenemos:

$$E(Q)=\sum_{i=1}^{4} P(X_i=1)\cdot\frac{R_i}{n_i+1}+t\cdot(p_5\cdot 7'2+p_6\cdot 0'9)=\sum_{i=1}^{4} t\cdot p_i\cdot\frac{R_i}{n_i+1}+t\cdot(p_5\cdot 7'2+p_6\cdot 0'9)$$

No podemos debilitar la condición de la proposición anterior ya que si dos apuestas tienen dos números comunes sería posible que la combinación ganadora diera lugar a dos premios de 4ª categoría.

Ejemplo. Jugamos la apuestas {**1,2**,3,4,5,6} y {**1,2**,7,8,9,10}. Si la combinación ganadora fuese {**1,2**,3,4,7,8} ambas apuestas tendrían 4 aciertos y no cobraríamos $2\cdot\frac{R_4}{n_4+1}$ sino $2\cdot\frac{R_4}{n_4+2}$ luego la estrategia no sería óptima.

Boletín de la Soc. Puig Adam, núm 67 (Junio 2004)

La expresión algebraica de la Ley fundamental de la Dinámica newtoniana en la Mecánica de Euler

Francisco A. González Redondo
Dpto. Álgebra. Facultad de Educación
Universidad Complutense de Madrid
faglezr@edu.ucm.es

Abstract

In a previous article [1] the first steps towards the formulation of a real mathematical physics along the XVIIth century (from Galileo to Newton and Leibniz) have been detailed. In the following pages Euler's contributions during the first half of the XVIIIth century are analyzed, as they will lead to an algebraic and analytical statement of Newton's Dynamics.

1. La formulación newtoniana de la Dinámica

La parte más importante de la contribución de Leonard Euler a la Historia de la Mecánica se recoge en dos de los tratados más significativos de su vasta producción científica: la *Mecánica o Ciencia del movimiento expresada analíticamente* (1736) [2] y la *Teoría del movimiento de los cuerpos sólidos rígidos* (1760) [3]. Además, en sus numerosos artículos, entre los que puede destacarse el *Nuevo Principio de la Mecánica* (1750) [4], se recogen muchos aspectos concretos complementarios, algunos de ellos de no poca trascendencia. Unos y otros permiten detectar en Euler: 1) el uso de constantes en las primeras ecuaciones físicas; 2) la introducción de unidades y medidas para las cantidades implicadas; 3) el sometimiento al requisito de homogeneidad de los términos de las ecuaciones; etc.

Toda teoría física clásica, a los efectos del formalismo matemático, se construye esencialmente con un conjunto de magnitudes primarias y un sistema de 'leyes relacionales' [5]. Es verdad que son capitales también en la formulación de toda teoría los 'principios ecuacionales' (esencialmente, los principios de conservación; por ejemplo, conservación de la energía) que establecen una igualdad entre cantidades de una única magnitud, y las hipótesis magnitudinales (por ejemplo, la inaccesibilidad del cero absoluto) que predican una propiedad de una cierta magnitud, pero ni unos ni otras relacionan magnitudes distintas, es decir, no imponen ligaduras a las magnitudes al modo en el que Newton enunciaba la ley fundamental de la Dinámica [6]:

> "*Axioma 2*. El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa, y se hace en la dirección de la línea recta en la que se imprime esa fuerza".

Las 'leyes relacionales' (como la de Newton que acabamos de transcribir) de una teoría física se expresan como relaciones de proporcionalidad entre productos de potencias de cantidades de las magnitudes (usualmente primarias) de la teoría. Las cantidades pueden medirse una vez que se han elegido las unidades de medida de las cantidades de cada magnitud. En el tránsito de estas relaciones de proporcionalidad entre cantidades a las igualdades entre medidas, en cada expresión ecuacional de esa ley relacional surge una constante de proporcionalidad, problema que se pone de manifiesto con radicalidad en los trabajos de Euler que se analizarán críticamente a continuación.

Durante el siglo XVII se habían desarrollado algunas técnicas de medición para cantidades de magnitudes distintas de la longitud, pero refiriéndose a ésta. La velocidad instantánea podía medirse mediante una longitud de caída, el intervalo de tiempo pequeño por péndulos ajustando su longitud a la unidad requerida, y las presiones midiendo alturas de columnas de mercurio. Fuerzas, pesos y 'masas' se medían (todas ellas) mediante pesadas, con las consiguientes confusiones conceptuales por identificación mensurable de lo que magnitudinalmente es distinto. Lógicamente, estas técnicas condicionarían todos los desarrollos teóricos, como se podrá comprobar más adelante.

Sin embargo, en la Mecánica de Newton: a) las leyes, enunciadas como relaciones de proporcionalidad, carecen de cualquier tipo de simbolismo; b) las proposiciones se plantean también como proporcionalidades y se demuestran sólo geométricamente; y c) se introduce, todo lo más, un paso al límite "reduciendo las demostraciones" de algunas proposiciones "a las primeras y últimas razones de cantidades nacientes y evanescentes" [7].

La tarea que se emprende sintéticamente en este artículo y centrado únicamente en los trabajos de Euler entre 1736 y 1750, es el estudio de una parte del camino recorrido por la Mecánica [8] en su matematización, es decir, el proceso seguido hasta la decisión de elegir unidades para poder expresar las leyes relacionales ya no únicamente como relaciones de proporcionalidad, sino como igualdades entre medidas, paso que dejó pendiente Newton al finalizar el siglo anterior. Nuestra mirada ha de ser histórica, y desde esta perspectiva constatar con qué dificultades surgen los temas inherentes a la formalización mediante ecuaciones de las leyes de la Dinámica newtoniana.

2. La expresión algebraica y analítica de la 2ª Ley de la Dinámica

En 1736 publica Euler su *Mecánica*[1] [9] [10] [11]. Como parece natural, los desarrollos del primer capítulo enlazan sin discontinuidad con el formato geométrico propio del siglo XVII en el que, tras explicitar los Axiomas, los teoremas consecuentes se enuncian (y demuestran) mediante proporcionalidades entre cantidades de velocidad, c, longitud, s, y tiempo, t. Para dos cuerpos en movimiento por ejemplo (§25)[2]se formulan como sigue:

$$C:c=S:\frac{sT}{T} \text{ seu } C:c=\frac{S}{T}:\frac{s}{t}. \tag{2}$$

A partir de consideraciones de este tipo resuelve, en particular, un problema (§51) con el que obtiene, ahora ya sí, la expresión ecuacional cinemática:

$$t=\int\frac{ds}{c}, \tag{3}$$

tal que, diferenciando, resultará

$$dt=\frac{ds}{c}, \tag{4}$$

1 Utilizamos los volúmenes I y II de la edición en latín de Paul Stäkel de 1912, de la *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, dentro de la *Opera Omnia*, “Series Secunda, Opera Mechanica et Astronomica. Volumen Primum”. Teubner, Berna. La colección que hemos consultado se encuentra en la “Biblioteca de Investigación” de la Facultad de Matemáticas de la U.C.M.

2 Euler numera sucesivamente cada párrafo (Definición, Teorema, Corolario o Escolio), lo que conservamos aquí para facilidad de referencia y contraste con el original.

donde *t* representa una escala de tiempos [*scala temporum*] y lo que pretende es construir una escala de velocidades [*scalam celeritatum*]. Ciertamente, la expresión (4) se considera hoy como definición de la magnitud secundaria velocidad,

$$c = \frac{ds}{dt}. \tag{5}$$

Estas construcciones las retoma más adelante, estudiando el movimiento de un cuerpo de masa puntual *A* (§151). Considera Euler que si sobre el cuerpo actúa una fuerza [*potentia*] *p*, para ese cuerpo de masa *A* con velocidad *c* se tiene (§155)

$$dc = \frac{npdt}{A}, \tag{6}$$

donde *n* denota un número[3] [*ubi* n *in omnibus casibus eundem denotat numerum*] (§155). Operando[4] obtiene

$$dc = \frac{npdt}{A} = \frac{np\dfrac{ds}{c}}{A} = \frac{npds}{Ac}, \tag{7}$$

o bien (§157)[5]

---

3 Una "constante", como podremos leer más adelante en una nota con la interpretación de Macagno [12].

4 La expresión científica actual de esta ecuación, que no es otra que la ley fundamental de la Dinámica, se deduce de la siguiente elemental manera:

$$A\frac{dc}{dt} = np \;\Rightarrow\; (\text{para } n = 1)\; m\frac{dv}{dt} = F \;\Rightarrow\; m\vec{a} = \vec{F}.$$

Por otra parte, la constante *n* es la teóricamente denominada 'constante dinámica' en la ley fundamental de la Dinámica newtoniana que mencionábamos arriba. Pero habrá que esperar hasta 1750, como veremos más adelante, para que Euler profundice en este sentido.

5 Sobre la interpretación de esta fórmula de Euler se han publicados varios artículos en los que pueden verse diversas versiones con distintas notaciones. Así, en Ravetz [13] se dice: "Para una fuerza general *p* que actúa sobre un cuerpo de masa o peso *A*, la ecuación dinámica es

$$dv = \frac{pdt}{A}."$$

$$cdc = \frac{npds}{A}. \tag{8}$$

Continúa tratando este problema en el capítulo tercero, que lleva por título "*De motu rectilineo puncti liberi a potentiis absolutis sollicitati*". En concreto (§193) estudia la caída libre de un cuerpo puntual de masa A, sometido a una fuerza g tal que, una vez recorrida una altura x, alcanza una velocidad c, y llega a una expresión de la relación entre la velocidad y la distancia recorrida para este movimiento uniformemente acelerado, literalmente[6]:

$$cc = \frac{2ngx}{A} \quad \text{seu} \quad c = \sqrt{\frac{2ngx}{A}}. \tag{9}$$

Como la altura (o distancia) recorrida x es proporcional a c^2 [cc], Euler quiere expresar c en términos de una 'especie de distancia' v (nueva variable) proporcional a su cuadrado. Para ello propone (§201) un valor v igual a la distancia x que "produce" la velocidad c en la caída libre, poniendo (§202):

$$v = cc \quad \text{et} \quad c = \sqrt{v}, \tag{10}$$

donde

$$v = \frac{2ngx}{A}, \tag{11}$$

Análogamente, en Macagno [12] se afirma: "[Euler] formuló la ecuación

$$Adv = npdt$$

(para el movimiento de una masa A bajo una fuerza p), incluyendo una constante n que consideró dependía de las unidades elegidas para medir las magnitudes implicadas".

[6] Esta expresión de Euler no es otra que la conocida hoy como velocidad de un movimiento uniformemente acelerado, de aceleración a, que parte del reposo [velocidad nula], cuando ha recorrido una distancia s:

$$v = \sqrt{2as},$$

que para el caso de la caída libre en el campo gravitatorio terrestre es

$$v = \sqrt{2gh}.$$

de tal modo que para estimar el valor de la constante *n* considera (§204) que *g* representa simplemente el peso del cuerpo. Como ha decidido que *v* coincida con la distancia *x* recorrida en la caída, resuelve:

$$v = \frac{2ngx}{A} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{Av}{2gx} = \frac{A}{2g}, \tag{12}$$

y considerando que la razón de la masa del cuerpo *A* al peso del cuerpo *g* es constante[7] [*quantitas constants*] opta (§205) por hacerla uno [*hanc ergo ponemus* 1], eliminando el factor 2 de la expresión (12).

Hay, por tanto, en este planteamiento de Euler unas primeras igualdades entre 'medidas', pero no se han elegido unidades para las magnitudes que intervienen. Aparece una constante *n*, pero no se explicita que su cuantía dependa de las unidades elegidas para medir las magnitudes que intervienen.

Euler busca también una nueva expresión para el tiempo (§218), de forma que a partir de

$$c = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2ngx}{A}}, \tag{13}$$

haciendo

$$\frac{1}{\sqrt{2n}} = m, \tag{14}$$

deduce

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2n}} \frac{\sqrt{A}dx}{\sqrt{gx}} = \frac{m\sqrt{A}}{\sqrt{g}} \frac{dx}{\sqrt{x}}, \tag{15}$$

tal que, integrando, obtiene

[7] No es más que la inversa de la aceleración de la gravedad (constante).

$$t = 2m\sqrt{\frac{Ax}{g}}. \tag{16}$$

Pero ahora afirma que *m* solamente puede ser determinada mediante experimento [*experimento determinare literam* m].

Para hallar el valor de *m* (§219-223) considera, como antes (§205), $A/g = 1$, y que en la caída libre, si la altura se mide en 'pies renanos' y el tiempo en segundos, mediante experimento se obtiene a partir de (16) que en un segundo

$$1 = 2m\sqrt{15625} \tag{17}$$

es decir, $m = \dfrac{1}{250}$.

Así, concluye que en el caso de la caída libre, si el espacio recorrido *x* se mide en pies renanos (§221):

$$t = \frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ax}{g}} \ \textit{minitorum secundorum}. \tag{18}$$

Para el movimiento en general (§222), si *v* (la variable proporcional a *cc*)[8] y *s* se miden en pies renanos, la ecuación (cinemática) a utilizar sería

$$t = \frac{1}{125}\int \frac{ds}{\sqrt{v}} \ \textit{min. sec.} \tag{19}$$

La precisión experimentada desde las aportaciones -formuladas retóricamente- de Newton, como puede observarse, es notable.

3. La expresión tridireccional de la Ley fundamental de la Dinámica

8 Según veíamos antes (§201), con valor igual a la distancia que "produce" *c* en la caída libre. Conviene recordar que Euler intenta reducir las mediciones de todas las magnitudes a longitudes de "líneas" o números absolutos.

En 1752 se publica el "Descubrimiento de un nuevo principio de la Mecánica", escrito en 1750[9]. En él, después de numerosas aclaraciones previas, comienza (§20)[10] la que considera Euler "Explicación del Principio General y Fundamental de toda la Mecánica" [8] [9] [14].

Pretende determinar el movimiento de un cuerpo de masa puntual *M*, "solicitado" por fuerzas cualesquiera. Si *x* es la distancia del cuerpo con respecto a un plano fijo en el instante inicial, afirma Euler que todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo deben descomponerse según direcciones paralelas o perpendiculares al plano. Para un elemento de tiempo *dt*, la distancia del cuerpo al plano será $x + dx$, de modo que si el elemento *dt* se considera constante, se tendrá:

$$2Mddx = \pm P dt^2, \tag{20}$$

según que la fuerza *P* tienda a alejar o a acercar el cuerpo al plano. Para Euler "ésta es la única fórmula que encierra todos los principios de la Mecánica". A continuación afirma que para comprender mejor la importancia de esta fórmula es preciso explicar a qué unidades se refieren las diversas cantidades *M*, *P*, *x* y *t* que entran en ella.

A ello se dedica. Primero señala que *M* representa tanto la masa del cuerpo como el peso que tendría en la superficie de la Tierra, de manera que para el matemático suizo, al estar también reducida la fuerza *P* a la de un peso, las letras *M* y *P* "contienen cantidades homogéneas".

---

9 Se utiliza la edición de "Decouverte d'un nouveau principe de mécanique" (1750) recopilada, junto con otros artículos, con el título general de *Commentationes Mechanicaei*, en la *Opera Omnia*, "Series Secunda. Opera Mechanica et Astronomica. Volumen Tertium, Volumen V", pp. 81-108. Teubner, Berna.

10 Como es costumbre en Euler, en estos artículos también numera sucesivamente los párrafos temáticos.

A continuación supone que la velocidad con que el cuerpo se aleja del plano, $\frac{dx}{dt}$, es igual a la que un grave adquiriría al caer desde la altura[11] v, por lo que debe tomarse

$$\frac{dx^2}{dt^2} = v, \tag{21}$$

donde el elemento de tiempo será

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}, \tag{22}$$

expresión a partir de la cual se obtiene la relación entre el tiempo t y el espacio x.

Pero la fórmula (20) no determina totalmente el movimiento del cuerpo, puesto que sólo lo hace con respecto a un plano fijo. Precisa Euler, por tanto, que para hallar la "situación verdadera del cuerpo en cada instante", habrá que referirse al mismo tiempo a tres planos fijos perpendiculares entre sí. Denotando ahora por y y z la distancia desde los otros planos, y descomponiendo todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo a lo largo de las direcciones perpendiculares a los tres planos, pueden representarse dichas fuerzas perpendiculares a los planos, respectivamente, mediante P, Q y R. En suma, suponiendo que las fuerzas alejan al cuerpo de los planos, "el movimiento del cuerpo estará contenido en las tres fórmulas siguientes":

$$2Mddx = Pdt^2 \tag{23.a}$$

$$2Mddy = Qdt^2 \tag{23.b}$$

$$2Mddz = Rdt^2 \tag{23.c}$$

En notación actual, si F es la fuerza que actúa sobre el cuerpo de masa M, se tiene entonces [15]:

[11] No se debe confundir esta variable, v, con la velocidad [celeritas], c. Recordemos, de nuevo, que en 1736 Euler concibió (§201) ya esta variable (§201) proporcional a c^2, medible (§222) en pies renanos.

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=F_x \tag{24.a}$$

$$M\frac{d^2y}{dt^2}=F_y \tag{24.b}$$

$$M\frac{d^2z}{dt^2}=F_z \tag{24.c}$$

Así, por primera vez en la Historia, la ley fundamental de la Dinámica (la primera ley relacional -en sentido propio- de la Física), no sólo se expresa mediante una ecuación -igualdad entre medidas- (y no simplemente como relación de proporcionalidad entre cantidades), sino que se descompone, como debe ser dada la naturaleza vectorial de las magnitudes relacionadas, según las tres direcciones del espacio puntual euclídeo tridimensional de la Física clásica[12].

4. Consideraciones finales

Como ha podido observarse, aunque Euler ha dado pasos importantísimos, todavía falta mucho para completar el panorama de la aportación del siglo XVIII hacia una formulación matemática completa de la Mecánica newtoniana. Ciertamente, otros autores se ocuparán, también dentro de este ámbito de la Mecánica, del sentido de los constructos matemáticos que integran las fórmulas de su ciencia.

Por ejemplo, d'Alembert [16], ya en 1743 afirmaba que "no podemos comparar entre sí dos cosas de diferente naturaleza tales como espacio y tiempo, pero sí podemos comparar la razón de las partes del tiempo con las partes del espacio recorrido". Pero, como el tema seguía sin clarificarse completamente, retomaba estas cuestiones en 1758 insistiendo -y para ello tenía que recurrir a expresiones ya clásicas entonces- en que no definía una velocidad uniforme como una distancia dividida por un tiempo (porque no podía existir una razón entre dos magnitudes heterogéneas), sino que lo correcto era decir que las velocidades uniformes son directamente proporcionales a las distancias e inversamente proporcionales a los tiempos[13].

---

12 Este tipo de cuestiones vuelven a surgir con la matematización de otros ámbitos físicos, sobre todo durante el siglo XIX, referido inicialmente al Electromagnetismo, pero con pretensión de generalidad.

13 Puede recordarse, en esta línea, lo que varias décadas después se verá obligado a seguir precisando, por ejemplo, Lamé [17]: "Espacio, tiempo y velocidad son magnitudes de tipos diferentes

El propio Euler dedicará varios capítulos de su *Teoría del movimiento de los cuerpos sólidos rígidos* (1760) a estudiar estas cuestiones. Y en este mismo sentido de clarificación comenzará Lagrange su *Mecánica Analítica* de 1788, aquella en la que, por fin, ya no eran necesarias las figuras para expresar matemáticamente la Mecánica [18][14]: "Tomando una fuerza cualquiera o su efecto como unidad, la expresión de otra fuerza ya no es más que una razón, una cantidad matemática que puede representarse mediante números o líneas. Bajo este aspecto es bajo el cual consideramos las fuerzas en Mecánica".

El final del siglo XVIII (de culminación de una Mecánica newtoniana todavía objeto de estudio para los matemáticos, no para los físicos) dará paso a una nueva centuria en la que los ya propiamente físicos emprenderán la matematización rigurosa de otros dos ámbitos que habían continuado en el nivel de lo cualitativo: Termología primero, Electricidad y Magnetismo después.

Pero todos y cada uno de estos temas merecen que les dediquemos estudios monográficos detallados. En breve los iremos presentando.

Bibliografía

[1] González Redondo F. A. (2004) "La formulación matemática de la Mecánica en el siglo XVII: Galileo, Newton, Leibniz". *Boletín de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas* nº 66 (febrero).

[2] Euler, L. (1736) *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*. Teubner, Berna, 1912.

[3] Euler, L. (1760) *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*. Teubner, Berna, 1948.

[4] Euler, L. (1750) "Decouverte d'un nouveau principe de mécanique". *Mémoires de l'Academie des Sciences de Berlin 6*, 185-217. [Aparece publicado en 1752].

[5] González de Posada, F. (1994) *Breviario de Teoría Dimensional*. Universidad Politécnica de Madrid.

---

que deben referirse a unidades diferentes para que podamos comparar los números que las representan: si l es la razón del espacio recorrido a la unidad de longitud y t la del tiempo considerado a la unidad de tiempo, la velocidad por definición viene dada por la ecuación $v=l/t$".

[14] Las aportaciones de Lagrange al tema de la matematización de la Mecánica merecen ser estudiadas pormenorizadamente, lo que haremos en un próximo artículo.

[6] Newton, I. (1687) *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Tecnos, Madrid, 1987.

[7] Blay, M. (1992) *La naissance de la mécanique analytique: la science du mouvement au tournant des XVIIe XVIIIe siècles*. Presses Universitaires de France, París.

[8] Dugas, R. (1955) *Histoire de la mécanique*. [Utilizamos la edición inglesa, *History of Mechanics*. Dover, New York, 1988].

[9] Truesdell, C. (1960) "The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies, 1638-1788", Prólogo al Volumen XI de la *Opera Omnia*, "Series Secunda, Opera Mechanica et Astronomica", pp. 250-253. Teubner, Berna.

[10] Youschkevitch, A. P. (1970) "Euler, Leonard". En C. C. Gillespie (ed.) *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 5, pp. 467-484. Scribner's, New York.

[11] Fellmann, E. A. (1995) *Leonhard Euler*. Rowohlt Taschenbuch, Reinbek bei Hamburg.

[12] Macagno, E. O. (1971) "Historico-critical Review of Dimensional Analysis", en *Journ. Franklin Inst*. 292, 391-402.

[13] Ravetz, J. (1961) "The Representation of Physical Quantities in Eighteenth Century Mathematical Physics". *Isis*, *52*, 7-20.

[14] Truesdell, C. (1975) *Ensayos de Historia de la Mecánica*. Tecnos, Madrid.

[15] Fauvel, J. y Gray, J. (eds.) (1987) *The History of Mathematics. A Reader*. The Open University, Milton Keynes.

[16] D'Alembert, J. R. (1758) *Traité de dynamique*. David, París.

[17] Lamé, G. (1836) *Cours de Physique*. Bachellier, París.

[18] Lagrange, J. L. (1788) *Mechanique Analitique*, Darboux, París.

Los números de Barinaga

Manuel Benito Muñoz
I. Práxedes Mateo Sagasta. Logroño
mbenit8@palmera.pntic.mec.es.

José Javier Escribano Benito
I. Valle del Cidacos. Calahorra
jesbriba@boj.pntic.mec.es

Abstract

Can "a priori" the value of n be determined such that the sum of the first n prime numbers divides its product? J. Barinaga asked this question in the pages of *L'Intermédiaire des mathématiques* in 1913 [1] and was repeated, slightly different, by Dickson in this *History of the Theory of Numbers* (1952)[3]. While considering it here, we evoke Barinaga's personality, we calculate the first 76000000 terms of the sequence, counting the number of terms of the sequence that verify Barinaga's condition, those that verify the condition in the way Dickson wrote it, and the number of terms of the sequence that are primes. Different tables are given and some asymptotical properties are suggested.

Introducción

¿Puede determinarse *a priori* el valor de n de modo que la suma de los n primeros números primos divida a su producto? J. Barinaga dejó formulada esta pregunta en las páginas de *L'Intermédiaire des mathématiques* en 1913 [1] y, con un matiz diferente, la repitió Dickson en su *History of the Theory of Numbers* (1952)[3]. Al retomarla ahora, evocaremos la figura de Barinaga y, siguiendo la filosofía de *L'Intermédiaire*, plantearemos al lector de este boletín algunos problemas que hemos visto surgir.

1. Breve apunte biográfico de José Barinaga

José Barinaga Mata (1890-1965) fue uno de los matemáticos más capaces de su generación. Sin embargo, circunstancias que desconocemos y los avatares de la guerra civil acabaron por ensombrecer una carrera que pudo ser más brillante.

Barinaga nació en Valladolid el 2 de mayo de 1890 pero pronto se trasladó a Salamanca, donde su padre había sido destinado como fiscal de la Audiencia. En el Instituto de Salamanca realizó —dice su biógrafo N. Cuesta [1]— el bachillerato "sin pena ni gloria" entre 1900 y 1906. Sabemos, por la *Revista de la Sociedad Matemática Española* con la que colaboró activamente, que en 1911 era alumno de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central, pero su licenciatura se retrasó hasta el 22 de junio de 1926, cuando ya contaba treinta y seis años de edad. A partir de aquí inicia una rápida carrera universitaria: Profesor Auxiliar de Análisis Matemático en la Universidad Central en 1927, doctor en 1929, catedrático de Análisis Matemático de la Universidad de Barcelona en 1930 y catedrático de la misma disciplina de la Universidad Central en 1931. Son años de gran actividad, en los que Barinaga compagina una fecunda labor de investigación con la dirección del Laboratorio y Seminario Matemático y de la Sociedad Matemática Española, que se verían truncados por la guerra civil. Al terminar la contienda fue separado de la universidad hasta 1946; la rehabilitación daría paso a una segunda etapa universitaria de catorce años que se desarrolló en el "tono menor del vencido" [2, p. 82].

Polifacético, también en matemáticas, Barinaga se interesó por el álgebra, la geometría, los fundamentos y desde su época escolar por la teoría de números.

2. Descripción de la pregunta

A la teoría de números y a su época de estudiante corresponde la cuestión que ahora comentamos. Se trata de una nota publicada en *L'Intermédiaire des mathématiques* en 1913 (pp. 218-219)[1]:

En désignant par p_i le terme de rang i dans la série

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ \ldots$$

des nombres premiers, la valeur de n peut-elle être déterminée a priori de façon que $\prod_{i=1}^{n} p_i$ soit divisible par $\sum_{i=1}^{n} p_i$?

[1] Para mayor información véase la emotiva y nostálgica necrológica [2].

Je trouve pour les premières valeurs de n

$\sum_{i=1}^{3} p_i = p_2 \times p_3$; $\sum_{i=1}^{7} p_i = p_2 \times p_3 \times p_5$; $\sum_{i=1}^{9} p_i = p_2 \times p_3 \times p_7$,

$\sum_{i=1}^{11} p_i = p_2 \times p_4 \times p_7$; $\sum_{i=1}^{12} p_i = p_5 \times p_{10}$; $\sum_{i=1}^{16} p_i = p_5 \times p_{16}$,

$\sum_{i=1}^{22} p_i = p_{10} \times p_{12}$; $\sum_{i=1}^{27} p_i = p_2 \times p_5 \times p_{24}$; $\sum_{i=1}^{28} p_i = p_4 \times p_6 \times p_{10}$.

Or, je désire connaître si, en continuant les calculs, on peut trouver quelque relation remarquable et générale de même nature? J. BARINAGA *(Madrid).* [2]

Cuesta da en su necrológica una lista de 61 publicaciones de Barinaga, pero no se hace eco de esta nota [3] que sin embargo, no pasa inadvertida para Dickson, quien en su clásica *History of the Theory of Numbers* [3], en la página 438 del volumen I incluye la siguiente reseña:

J. Barinaga expressed the sum of the first n primes as a product of distinct primes for $n = 3,\ 7,\ 9,\ 11,\ 12,\ 16,\ 22,\ 27,\ 28$, *and asked if there is a general law.* [4]

Como podemos observar, la pregunta de Dickson no es la misma que la de Barinaga. Por ello, denominaremos *números de Barinaga* a los términos de la sucesión

$$s_1 = 1, s_2 = 1 + 2, s_3 = 1 + 2 + 3, \ldots, s_n = \sum_{i=1}^{n} p_i, \ldots ,$$

[2]Designando por p_i el término de lugar i en la sucesión 1, 2, 3, 5, 7, 11, ... de los números primos, ¿se puede determinar *a priori* el valor de n para que $\prod_{i=1}^{n} p_i$ sea divisible por $\sum_{i=1}^{n} p_i$?

He encontrado para los primeros valores de n,

$\sum_{i=1}^{3} p_i = p_2 \times p_3$; $\sum_{i=1}^{7} p_i = p_2 \times p_3 \times p_5$; $\sum_{i=1}^{9} p_i = p_2 \times p_3 \times p_7$,

$\sum_{i=1}^{11} p_i = p_2 \times p_4 \times p_7$; $\sum_{i=1}^{12} p_i = p_5 \times p_{10}$; $\sum_{i=1}^{16} p_i = p_5 \times p_{16}$,

$\sum_{i=1}^{22} p_i = p_{10} \times p_{12}$; $\sum_{i=1}^{27} p_i = p_2 \times p_5 \times p_{24}$; $\sum_{i=1}^{28} p_i = p_4 \times p_6 \times p_{10}$.

Así pues, desearía saber si continuando los cálculos, se puede encontrar alguna relación notable y general del mismo tipo.

[3]Entre las publicaciones citadas por Cuesta, no figuran las numerosas preguntas que aparecen en *L'Intermédiaire des mathématiques* firmadas con su nombre o con el seudónimo L. Nowetcheski.

[4]J. Barinaga expresó la suma de los n primeros primos como producto de primos distintos para $n = 3,\ 7,\ 9,\ 11,\ 12,\ 16,\ 22,\ 27,\ 28$, y preguntó si hay una regla general. Dickson [3] recoge también otras cuestiones propuestas por Barinaga en las páginas 203, 336 y 428.

(obtenida al sumar los n primeros números primos, incluido el 1), que dividen a su producto $\prod_{i=1}^{n} p_i$. Y *números de Barinaga-Dickson* a los términos de $\{s_n\}$ que no tienen ningún divisor cuadrado. La diferencia entre estos conceptos se hará más palpable en la Tabla 1 donde hemos recogido los primeros términos de la sucesión $\{s_n\}$ que son números de Barinaga, números primos y números de Barinaga-Dickson respectivamente.

3. Propiedades asintóticas

En las primeras columnas de la Tabla 2 hemos anotado el número $\mathrm{B}(n)$ de números de Barinaga, el número $\mathrm{P}(n)$ de primos y el números $\mathrm{BD}(n)$ de números de Barinaga-Dickson que hay entre los n primeros términos de la sucesión $\{s_n\}$. A la vista de los resultados obtenidos en las restantes columnas, nos gustaría hacer a los lectores de *La Gaceta* las siguientes preguntas:

1. Una de las primeras cuestiones que cabe plantearse es comparar la cantidad $\mathrm{P}(n)$, de números primos que hay entre los n primeros términos de la sucesión $\{s_n\}$, con la cantidad de números primos que hay entre los n primeros números naturales. Para estos últimos se cumple, como es bien sabido, las relaciones:

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1\,,$$

   donde $\pi(x)$ es el número de primos menores que un número real positivo x.

   También en la sucesión $\{s_n\}$ los números primos son cada vez más escasos, pero la tabla sugiere la siguiente hipótesis:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{P}(n)}{\frac{n}{\log n}} = \frac{1}{2}\,.$$

2. ¿Existe $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{B}(n)}{n}$? y, en caso afirmativo, ¿es distinto de 0? Los resultados reflejados en la columna 5 de la Tabla 2 parecen indicar que dicho límite pudiera ser algún número en torno a 0,216...

3. La probabilidad de que un número natural no tenga factores cuadrados [5] es $\frac{6}{\pi^2}$; la columna 7 de la Tabla 2 nos sugiere un resultado similar:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\mathrm{BD}(n)}{n}}{\frac{6}{\pi^2}} = 1\,.$$

[5] Véase, por ejemplo, [4, teorema 333].

n	p_n	s_n es de Barinaga	s_n es primo	s_n es de Barinaga-Dickson
1	1	1	1	1
2	2		3	3
3	3	$6 = 2 \cdot 3$		$6 = 2 \cdot 3$
4	5		11	11
6	11		29	29
7	13	$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$		$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$
8	17		59	59
9	19	$78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$		$78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$
10	23		101	101
11	29	$130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$		$130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$
12	31	$161 = 7 \cdot 23$		$161 = 7 \cdot 23$
14	41		239	239
15	43			$282 = 2 \cdot 3 \cdot 47$
16	47	$329 = 7 \cdot 47$		$329 = 7 \cdot 47$
17	53			$382 = 2 \cdot 191$
19	61			$502 = 2 \cdot 251$
20	67		569	569
22	73	$713 = 23 \cdot 31$		$713 = 23 \cdot 31$
26	97		1061	1061
27	101	$1162 = 2 \cdot 7 \cdot 83$		$1162 = 2 \cdot 7 \cdot 83$
28	103	$1265 = 5 \cdot 11 \cdot 23$		$1265 = 5 \cdot 11 \cdot 23$
30	109		1481	1481
31	113			$1594 = 2 \cdot 797$
32	127		1721	1721
38	157	$2585 = 5 \cdot 11 \cdot 47$		$2585 = 5 \cdot 11 \cdot 47$
40	167	$2915 = 5 \cdot 11 \cdot 53$		$2915 = 5 \cdot 11 \cdot 53$
44	191			$3639 = 3 \cdot 1213$
46	197	$4029 = 3 \cdot 17 \cdot 79$		$4029 = 3 \cdot 17 \cdot 79$
48	211	$4439 = 23 \cdot 193$		$4439 = 23 \cdot 193$
50	227		4889	4889
51	229			$5118 = 2 \cdot 3 \cdot 853$
52	233		5351	5351
53	239	$5590 = 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 43$		$5590 = 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 43$
55	251			$6082 = 2 \cdot 3041$
56	257			$6339 = 3 \cdot 2113$
57	263			$6602 = 2 \cdot 3301$
58	269		6871	6871
59	271			$7142 = 2 \cdot 3571$
60	277			$7419 = 3 \cdot 2473$
64	307			$8583 = 3 \cdot 2861$
65	311			$8894 = 2 \cdot 4447$
74	367			$11967 = 3 \cdot 3989$
76	379	$12719 = 7 \cdot 23 \cdot 79$		$12719 = 7 \cdot 23 \cdot 79$
77	383			$13102 = 2 \cdot 6551$
80	401			$14289 = 3 \cdot 11 \cdot 433$
81	409			$14698 = 2 \cdot 7349$
82	419			$15117 = 3 \cdot 5039$
83	421			$15538 = 2 \cdot 17 \cdot 457$
84	431			$15969 = 3 \cdot 5323$
85	433	$16402 = 2 \cdot 59 \cdot 139$		$16402 = 2 \cdot 59 \cdot 139$
86	439			$16841 = 11 \cdot 1531$
88	449	$17733 = 3 \cdot 23 \cdot 257$		$17733 = 3 \cdot 23 \cdot 257$
89	457	$18190 = 2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 107$		$18190 = 2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 107$
90	461			$18651 = 3 \cdot 6217$
91	463			$19114 = 2 \cdot 19 \cdot 503$
92	467	$19581 = 3 \cdot 61 \cdot 107$		$19581 = 3 \cdot 61 \cdot 107$
95	491	$21038 = 2 \cdot 67 \cdot 157$		$21038 = 2 \cdot 67 \cdot 157$
98	509		22549	22549
99	521			$23070 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 769$

Cuadro 1: Términos de $\{s_n\}$ que son números de Barinaga, primos y Barinaga-Dickson.

n	B(n)	P(n)	BD(n)	$\frac{\mathrm{B}(n)}{n}$	$\frac{\mathrm{P}(n)\log n}{n}$	$\frac{\mathrm{BD}(n)\pi^2}{6n}$
1000000	218735	36091	607044	0.218735	0.498616	0.998547
10000000	2174168	310609	6079884	0.217417	0.500643	1.000101
20000000	4337554	594959	12161222	0.216878	0.500100	1.000220
30000000	6497916	870702	18240659	0.216597	0.499687	1.000156
40000000	8658862	1140372	24318590	0.216472	0.499038	1.000062
50000000	10815577	1407280	30397367	0.216312	0.498952	1.000033
60000000	12971469	1671928	36478667	0.216191	0.499066	1.000083
70000000	15125464	1934628	42557919	0.216078	0.499245	1.000071
71000000	15340635	1960580	43165739	0.216065	0.499208	1.000068
72000000	15555842	1986330	43772999	0.216053	0.499125	1.000051
73000000	15771395	2012402	44381651	0.216047	0.499130	1.000067
74000000	15987154	2038154	44989575	0.216043	0.499061	1.000066
75000000	16202713	2064065	45597174	0.216036	0.499036	1.000058
76000000	16418480	2089800	46205465	0.216033	0.498974	1.000065

Cuadro 2: B(n), P(n), BD(n), para valores de n menores que 76000001.

Por ello, formulamos la siguiente pregunta: ¿la densidad de números sin factores cuadrados es la misma en la sucesión $\{s_n\}$ que en la sucesión de los números naturales?

4. Si no consideramos el 1 como un número primo, esto es, si estudiamos la sucesión:

$$2, 2+3, 2+3+5, \dots ,$$

los cocientes obtenidos (véase la Tabla 3) son similares a los anteriores. Esto nos lleva a generalizar la definición de la sucesión $\{s_n\}$ del siguiente modo:

$$s_1 = a,\ s_2 = s_1 + p_k,\ s_3 = s_2 + p_{k+1},\ \dots,\ s_n = s_{n-1} + p_{k+n-2},\ \dots ,$$

donde a es un número natural cualquiera y p_k es el menor primo mayor que a (en este caso diremos que un término s_n es un número de Barinaga si no tiene factores cuadrados y todos sus factores son menores que p_{k+n-1}). Los correspondientes números se denotan por B$_a(n)$, P$_a(n)$ y BD$_a(n)$.

Hemos probado con diferentes valores de a y en todos ellos hemos obtenido resultados similares para las cuestiones planteadas (en la Tabla 4 recogemos los valores obtenidos para $a = 267$). En vista de ello, ¿puede afirmarse que las propiedades 1, 2 y 3 son independientes del valor inicial a utilizado en la definición de $\{s_n\}$?

n	$\mathrm{B}_2(n)$	$\mathrm{P}_2(n)$	$\mathrm{BD}_2(n)$	$\frac{\mathrm{B}_2(n)}{n}$	$\frac{\mathrm{P}_2(n)\log n}{n}$	$\frac{\mathrm{BD}_2(n)\pi^2}{6n}$
1000000	218721	36303	607612	0.218721	0.501544	0.999482
10000000	2174082	310757	6080087	0.217408	0.500881	1.000134
20000000	4335996	594852	12160780	0.216800	0.500010	1.000184
30000000	6495758	870375	18240328	0.216525	0.499500	1.000138
40000000	8651987	1141479	24318677	0.216300	0.499522	1.000066
50000000	10810273	1408137	30398927	0.216205	0.499256	1.000085
60000000	12964863	1671840	36480445	0.216081	0.499040	1.000132
70000000	15117707	1933771	42558640	0.215967	0.499024	1.000088
71000000	15332968	1959748	43165837	0.215957	0.498996	1.000070

Cuadro 3: $\mathrm{B}_2(n)$, $\mathrm{P}_2(n)$, $\mathrm{BD}_2(n)$, para valores de n menores que 71000001.

n	$\mathrm{B}_{267}(n)$	$\mathrm{P}_{267}(n)$	$\mathrm{BD}_{267}(n)$	$\frac{\mathrm{B}_{267}(n)}{n}$	$\frac{\mathrm{P}_{267}(n)\log n}{n}$	$\frac{\mathrm{BD}_{267}(n)\pi^2}{6n}$
1000000	218993	36645	607993	0.218993	0.506269	1.000108
10000000	2173887	310575	6079265	0.217389	0.500588	0.999999
20000000	4338664	593809	12158649	0.216933	0.499133	1.000009
30000000	6498808	868773	18238252	0.216627	0.498580	1.000024
40000000	8654359	1138779	24316264	0.216359	0.498341	0.999966
50000000	10811235	1404865	30393591	0.216225	0.498096	0.999909
60000000	12967639	1668741	36471472	0.216127	0.498115	0.999886

Cuadro 4: $\mathrm{B}_{267}(n)$, $\mathrm{P}_{267}(n)$, $\mathrm{BD}_{267}(n)$, para valores de n menores que 60000001.

Referencias

[1] J. Barinaga, *L'Intermédiaire des mathématiques*, **20** (1913), 218–219.

[2] N. Cuesta Dutari, Don José Barinaga Mata. In Memoriam, *Gaceta Matemática*, Tomo XVIII, 1ª serie (nº 3-4) (1966), 63–86.

[3] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, Chelsea, 1952.

[4] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford at the Clarendon Press, 1979.

Una Experiencia de Enseñanza en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales de Bachillerato

Juan José Prieto Martínez
I.E.S. Pedro de Tolosa. Comunidad de Madrid
Dpto. de Estadística e Investigación Operativa.
Fac. de C.C. Matemáticas. Universidad Complutense de Madrid.
jjprieto@mat.ucm.es

Abstract

This paper is an abstract of the main aspects developed in a reseach work (doctor´s courses) about the computer science introduction in the classroom of mathematics.

Introducción

La experiencia didáctica que se va a presentar en este trabajo de investigación es el estudio de un caso concreto. En educación el estudio de casos es considerado como una estrategia metodológica de investigación, como una metodología apropiada para la formación o como instrumento en el diagnóstico y la orientación. El objeto de esta técnica, no es comprobar la eficacia de una teoría, es enseñar a analizar situaciones concretas y aportar vías de solución a los problemas, teniendo como soporte la experiencia personal, los conocimientos científicos necesarios, la comprensión de la situación que describe el caso y un cierto sentido común que aporte operatividad a las conclusiones.

Como en toda investigación educativa se planifica, se recogen datos, se analiza e interpreta la información y se elabora el informe, con la peculiaridad de que el propósito de la investigación es el estudio intensivo y profundo del caso. En concreto, en este trabajo de investigación se pretenden mostrar los resultados de una experiencia Didáctica en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II de

Bachillerato. El objetivo principal es valorar la motivación del ordenador y programas informáticos como recurso de ayuda didáctica, en relación con la enseñanza clásica de la lección magistral, contrastando así la validez de un software determinado referido a una mejor comprensión del bloque de temas explicados en la experiencia, en particular de Estadística y Probabilidad. Se mostrarán análisis adicionales e interpretación de los datos obtenidos, finalizando con la elaboración de un informe.

Para la realización de la citada experiencia se han elegido cuatro grupos: dos de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales constituidos por 21 y 23 alumnos, y otros dos de 2º Bachillerato de Ciencias Sociales de 18 y 20 alumnos, cada uno de ellos bajo la responsabilidad de un profesor de matemáticas.

Después de haber elegido el software con el que se iban a realizar las prácticas (Hoja de Cálculo Excel), se han realizado los oportunos estudios y variaciones para adaptarlos a los niveles educativos mencionados. Se ha llegado al acuerdo de que cada profesor explique en su grupo Estadística y Probabilidad con los mismos contenidos teóricos, nomenclatura y ejemplos. Por la naturaleza de los temas a impartir y por la tendencia de dejar para final de curso los temas de esta experiencia didáctica, se ha decidido realizar este proyecto a comienzo de curso.

El aula informática del instituto cuenta con 30 puestos individuales, por lo que no hubo problemas de puesto por alumno. Esto hace pensar a priori que lo aprendido por cada alumno no es gracias a la ayuda del compañero que se siente en un mismo puesto informático.

Se ha elegido al azar un grupo de alumno por cada curso, denominado *grupo de control*, que recibirá la enseñaza de tipo tradicional; a los otros dos cursos de niveles diferentes se les denominan *grupo experimental,* que recibe la enseñanza a través de herramientas informáticas y pizarra blanca. Estos últimos grupos me encargo personalmente de llevar a cabo la experiencia didáctica, en los otros dos grupos de control lleva a cabo la experiencia didáctica un compañero, al cual doy sinceramente las gracias.

Es importante destacar que pese a la falta de interés por parte de los alumnos en las aplicaciones informáticas relacionadas con la enseñanza, la experiencia de comenzar el curso de matemáticas en el aula de informática fue acogida muy favorablemente por los grupos experimentales, incluso con entusiasmo, seguramente por la novedad.

Los datos que se recopilan inicialmente son:

1. Nota media de todas las asignaturas del curso académico anterior. Se denota por *nota previa*.
2. Un test de inteligencia. Dicho test mide la capacidad de abstracción, la comprensión de relaciones y la capacidad de acomodación conceptual. A la variable se la ha definido *Test de inteligencia*. Se incluyó para tener una observación comparativa de los alumnos de dichos cursos con el resto de la población de la misma edad, y resulta ser una observación adicional de cada alumno que no quedaba reflejada en las otras variables de estudio.
3. Un examen de conocimientos previos sobre Estadística y Probabilidad hasta el curso en el que se encuentran.
4. Un test de Actitud ante la informática que fue rellenado por los alumnos del grupo experimental de cada curso, y cuyos resultados se agruparon en la variables: "Se ha tenido contacto con la informática"; "El ordenador facilita el aprendizaje"; "El ordenador es ameno, entretiene"; "El alumno siente interés por curiosidad por las aplicaciones informáticas"; "Se está en desacuerdo con la informática didáctica".

Existió al final de la experiencia (coincidiendo con la evaluación) una prueba final común en cada grupo referido a los temas desarrollados, que se denominará *Calificación final.* Comentado esto en clase, los alumnos se quejaron de tener una sola oportunidad para aprobar u obtener mejor calificación en la evaluación. Se llegó a un acuerdo de realizar un control adicional a mediados del trimestre y hacer una media aritmética con ambas calificaciones.

Análisis estadístico de los datos.

Antes de comenzar con el desarrollo y la exhaustiva de los datos obtenidos se tiene que comentar que las primeras sesiones hubo respuesta del alumnado en cuanto al trabajo personal, que fue decayendo porque ellos consideraba que no era suficiente para alcanzar los objetivos del curso. No hemos de olvidar que este decaimiento aumenta según se avanza el curso académico. La explicación era que el programa informático era demasiado rígido, por lo que era difícil la adaptación a la diversidad, y trajo como consecuencia que algunos alumnos podían ayudarse del software mientras que a otros les resultaba imposible; estos últimos alumnos echaban en falta el apoyo de un profesor en muchos momentos (sobre todo en casa) que resuelve cuantas dudas les surgen. Muchos alumnos ocuparon gran parte de su tiempo del aula de informática copiando en su cuaderno la información teórica del programa y comprobando que salían determinados resultados, despreocupándose en particular del concepto estadístico; les resultaba difícil asimilar los conceptos siguiendo la lectura de la pantalla, sin un profesor que interpretase in situ lo observado. En resumen, las dificultades surgidas se derivan básicamente bien de la falta de autosuficiencia del alumnado para estudiar solos con ayuda del ordenador, bien de la angustia que les crea el temor a un suspenso en cursos de bachillerato, difícilmente recuperable en su opinión.

En cuanto a la ficha técnica hay que indicar que el número de estudiantes considerados fue de 82, donde 44 eran de 1º de Bachillerato y otros 38 de 2º curso de Bachillerato, ambos cursos de la especialidad de Humanidades y Ciencias Sociales. Dadas las diferencias significativas entre los cursos, y partes de software empleado, los análisis realizados y presentados a continuación se subdividen en diferentes apartados. Primero se analiza las observaciones previas a la realización de la experiencia, después comparamos las calificaciones finales y, por último, las opiniones del grupo experimental sobre el software empleado. Los análisis estadísticos habituales sobre este tipo de experimentos incluyen una metodología de análisis de la varianza para estudiar los diferentes métodos de enseñanza, pero en este caso hemos preferido realizar, simplemente, un examen de los datos, aunque cuando el tamaño de la muestra lo permite hemos añadido algún otro. Se puede argumentar que es necesario un análisis más formal, pero en este caso no parece técnicamente correcto, ya que con muestras tan pequeñas es de dudosa la validez de la hipótesis de que dicha muestra proviene de una población con distribución normal.

Análisis de los datos iniciales.

Primero se analiza los resultados de las tres primeras variables (nota previa, test de inteligencia y conocimientos previos). El resumen de dichos datos se presenta en la Tabla 1. En las dos primeras columnas se describen el grupo y la variable, respectivamente; en las dos columnas siguientes se presentan un valor alrededor del cual se concentran los datos y el grado de concentración de los mismos, respectivamente; y en las dos últimas columnas se presentan los datos de asimetría y curtosis para dar una idea de la forma en que éstos se distribuyen.

Para que los alumnos de los grupos de control y experimental sean representativos de la misma población, se utiliza los datos de la citada tabla, así como los gráficos box-plot mostrados en la Figuras 1, 2 y 3. En la Figura 1 no se observa diferencias significativas excepto las notas medias de tres alumnos de 2º de Bachillerato que destacan sobre la de sus compañeros. También una ligera dispersión del segundo grupo frente a la de los otros tres. Nótese que las notas medias pueden ser por debajo de 5 debido a que en secundaria pueden obtener el título hasta con dos áreas calificadas negativamente y en segundo de bachillerato existen alumnos con una y dos asignaturas suspensas del curso anterior (el título de E.S.O. se puede obtener hasta con dos asignaturas calificadas negativamente). Los gráficos referentes a los test de inteligencia destacan por la homogeneidad de los datos en los cuatro grupos.

En cuanto a los conocimientos previos, la Figura 3 muestra una evaluación muy negativa en el grupo de 1ºB-GC, contrastando con la del grupo de 1ºB-GE. Los grupos de 2º de Bachillerato muestran una gran dispersión, donde más del 75% de los estudiantes han sido valorados con un 4 o más en sus conocimientos previos.

Grupo	Variable	n	Media	Mediana	Desviac. típica	Rango	Asimetría. estándar	Curtosis estándar
1ºB-GC	Nota previa	21	6,162	6,200	0,941	2,9	0,402	-1,023
1ºB-GE	Nota previa	23	5,909	5,800	1,260	4	0,087	-1,062
2ºB-GC	Nota previa	18	6,194	5,750	0,912	3,8	1,753	4,335
2ºB-GE	Nota previa	20	6,345	6,150	0,935	3,7	1,291	2,005
1ºB-GC	Test de inteli-gencia	21	40,084	38,120	7,402	19,63	0,119	-1,847
1ºB-GE	Test de inteli-gencia	23	41,819	42,580	7,377	21	-0,208	-1,639
2ºB-GC	Test de inteli-gencia	18	42,800	40,120	8,364	24,55	0,330	-1,425
2ºB-GE	Test de inteli-gencia	20	40,370	39,280	7,163	18,87	0,056	-1,867
1ºB-GC	Conocimientos previos	21	3,357	3,365	1,710	6,28	0,256	-0,443
1ºB-GE	Conocimientos previos	23	7,939	6,832	0,878	2,75	-0,192	-0,507
2ºB-GC	Conocimientos previos	18	7,266	5,753	1,542	5,00	-0,192	-0,035
2ºB-GE	Conocimientos previos	20	3,915	5,828	1,536	7,09	-0,196	0,805

Tabla 1. Datos Estadísticos.

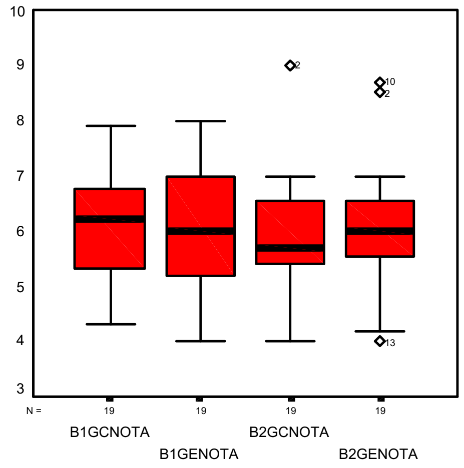


Figura 1. Notas Previas

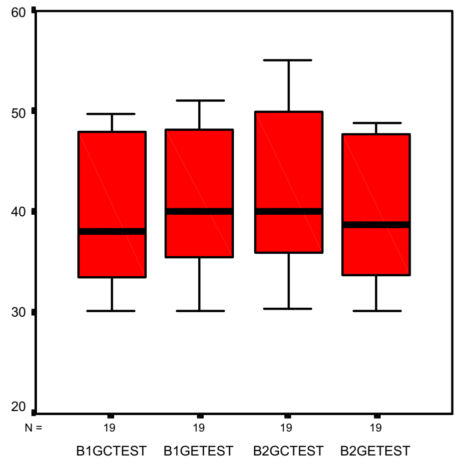


Figura 2. Test de Inteligencia.

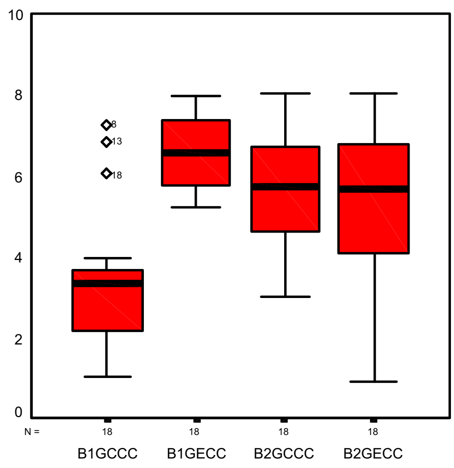


Figura 3. Conocimientos Previos.

Se dijo anteriormente que, en general, no se puede verificar la hipótesis de que las muestras provienen de poblaciones normales, puesto que el número de alumnos por grupo es muy reducido, pero sí se ha realizado gráficos que representan la distribución de valores y la distribución normal que mejor se aproxima para las tres variables. Destaquemos de las tres variables el gráfico de la Figura 4 propio de mixtura de dos poblaciones normales con medias diferentes.

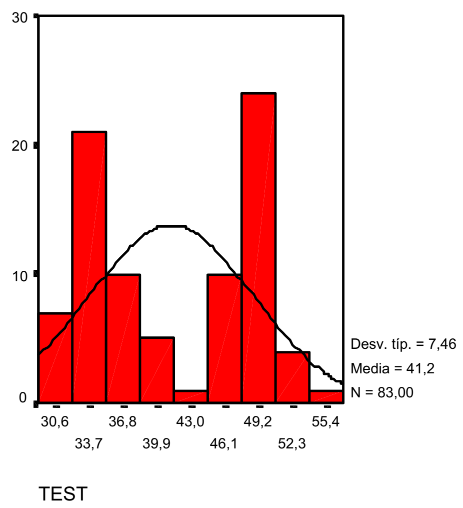


Figura 4. Histograma asociado a Test de Inteligencia

Otra de las variables estudiadas es sobre la opinión que tenían los alumnos del grupo experimental sobre cuestiones referentes a la informática. Para dicho estudio se consideraron 12 preguntas con cuatro posibles respuestas, "Muy poco de acuerdo", "Un poco de acuerdo", "Bastante de acuerdo" y "Muy acuerdo", y que se agruparon en seis categorías. Las características observadas fueron:

1. Tipo A. El alumno ha tenido contacto con la informática. (2 preguntas).
2. Tipo B El alumno considera que el ordenador facilita el aprendizaje. (2 preguntas).
3. Tipo C. El alumno considera el uso del ordenador ameno y entretenido. (2 preguntas).
4. Tipo D. El alumno siente interés ante la informática. (2 preguntas).
5. Tipo E. El alumno siente curiosidad por las aplicaciones informáticas. (2 preguntas).
6. Tipo F. El alumno está en desacuerdo con el uso del ordenador en aspectos didácticos. (2 preguntas).

Las principales características se resumen en la Tabla 2, que contiene las mismas columnas que en la tabla precedente.

Categoría	Media	Mediana	Desviación típica	Asimetría	Curtosis
Tipo A	2,16	2,36	0,58	0,21	-1.17
Tipo B	2,22	2,27	0,61	-1,09	-0,77
Tipo C	1,88	1,69	0,7	2,42	0,51
Tipo D	1,89	1,75	0,56	2,95	1,87
Tipo E	2,21	2,24	0,51	0,17	-0,77
Tipo F	1,82	1,79	0,34	1,32	1,15

Tabla 2. Datos Estadísticos sobre la actitud ante la informática.

Se ha incluido también el gráfico box-plot de las citadas variables considerando, incluso, las opiniones de los estudiantes de los grupos experimentales. (Figura 5).

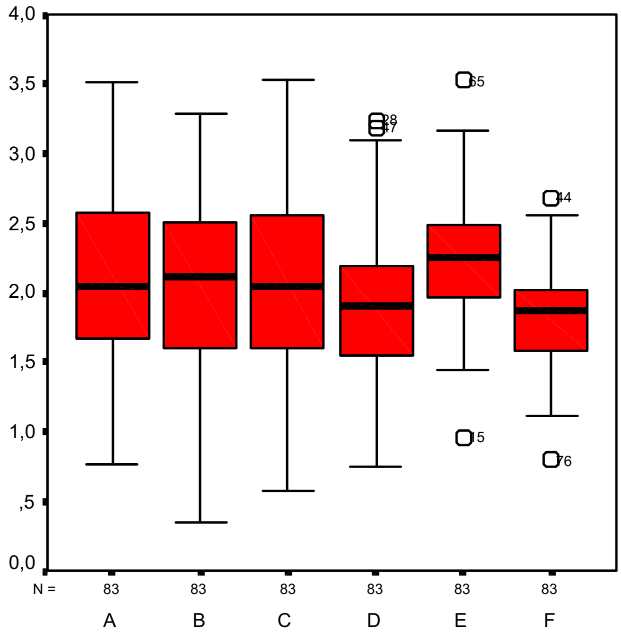


Figura 5 . Box-Plot sobre la actitud ante la informática.

Merece la pena destacar que no existe semejanza entre los seis tipos considerados, ya que ninguna distribución tiene sus parámetros similares a los de otra.
En cuanto al contacto que los estudiantes habían tenido con la informática existía una bipolarización entre el 55%, aproximadamente, que afirmaban que no habían tenido contacto y el 45%, aproximadamente, que afirmaban estar bastante de acuerdo con haber tenido contacto con la informática.

Referente a su opinión sobre si la informática facilita el aprendizaje, se observa que la dispersión de los datos es alta respecto de los valores centrales; un 57% para el menor y un 43 % para el mayor, pero la diferencia con respecto a la categoría A es la existencia de algunos estudiantes que piensan rotundamente que la informática no facilita su aprendizaje.

Respecto al interés por parte de los estudiantes en temas informáticos se obtiene una vez más una distribución de valores simétrica; es la más parecida a una distribución normal, repartiéndose el 50% las opiniones positivas y negativas.

En cuanto a la característica D, la opinión mayoritaria es que existe interés ante las aplicaciones informáticas: el 60% en torno a valores de "muy poco de acuerdo" y un 37% en torno a valores relacionados con "un poco de acuerdo". Destacan unas posturas muy radicales, por las que algunos estudiantes consideraban el uso del ordenador muy interesante.

Respecto a la curiosidad que sentían ante aplicaciones informáticas es la variable con la que se tiene más adicto, pero teniendo en cuenta que son programas con utilidades en otras áreas o educativos no relacionados directamente con los objetivos de las mismas.

Por último, la característica de que el alumno estaba en desacuerdo con el uso del ordenador en aspectos didácticos, tenía la vertiente de saber su opinión sobre este tema y, además, comprobar si el test había sido contestado coherentemente. No se ha detectado ninguna discrepancia severa en las contestaciones, y comprobamos que la distribución de las respuestas era aproximadamente simétrica. Se ha confirmado que las personas que sentían curiosidad ante aplicaciones informáticas estaban de acuerdo, con reparos, en la utilización didáctica de este tipo de herramientas, mientras que los alumnos que no tenían esta curiosidad estaban de desacuerdo con los fines del software especializado.

Análisis de las calificaciones finales.

El siguiente análisis es referente a la última variable "Calificación final" recopilada para todos los estudiantes y con la que se pretendía comparar los dos métodos de enseñanza.

El estudio se realiza sobre las calificaciones de dos exámenes en común en cada curso. Los exámenes de cada curso fueron elaborados por los profesores que impartíamos el área y revisado por el resto de profesores del departamento para evitar posibles errores, preguntas confusas, evitar en alguna medida la influencia subjetiva del profesor del curso o posibles preguntas con retórica.

En primer lugar, se considera las medias de las dos calificaciones de todos los alumnos de ambos cursos. Se muestran en la Figuras 6 el histograma y la curva de proximidad a una distribución normal, cuya distribución tiene media 4,82 y desviación típica 2,534, y en la Figura 7 el box-plot asociado a la citada variable. Nótese que la nota media de la asignatura Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales en la prueba de Selectividad celebrada en junio de 2003 en la C.A.M. fue de 3,7; según el coordinador de la asignatura para la citada prueba el Prof. Dr. Miguel Ángel Gómez Villegas.

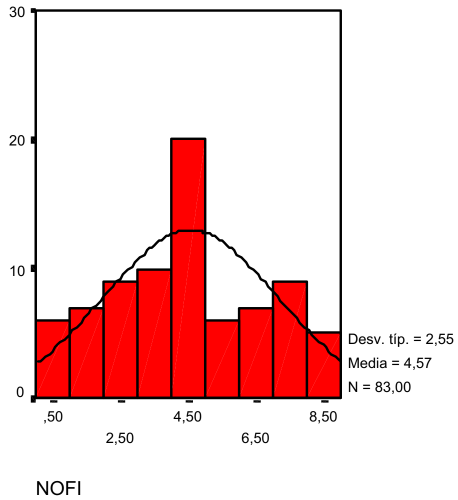


Figura 6 . Histograma y curva ajustada

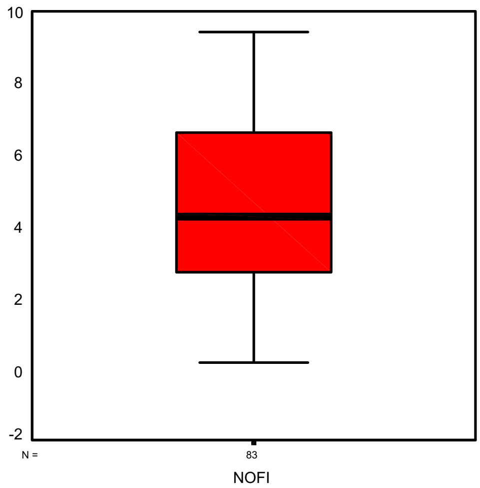


Figura 7 . Box-plot asociado a las notas finales.

La distribución de las calificaciones es asimétrica y no se ajusta mal a una distribución normal, pero al ser exámenes diferentes, se puede concluir que el conjunto de todas las calificaciones parecen comportarse normalmente y con calificaciones concentradas en valores centrales.

Se realiza a continuación un análisis comparativo entre las medias de las dos calificaciones de cada curso, cuyas principales características estadísticas se resumen en la Tabla 3.

Curso	N	Media	Mediana	Desviación típica	Asimetría	Curtosis
1ºB	44	4,31	4,09	1,892	0,044	-0,404
2ºB	38	5,09	5,17	1,984	-0,234	-0,484

Tabla 3. Datos Estadísticos sobre la nota final.

Como puede apreciarse no existen analogías entre los cursos, pero tampoco existen diferencias exageradas entre ellos. Si se realizan análisis de la varianza, considerando como tratamientos los cuatro cursos, también se comprueban diferencias estadísticas entre ellos, aunque como ya se ha comentado no se puede asegurar que se cumplan las hipótesis que se deben verificar para utilizar esta técnica correctamente.

Si se considera las medias de las calificaciones de los grupos de control y experimental se obtiene la Tabla 4. También se ha realizado un análisis de la varianza teniendo en cuenta los dos métodos de enseñanza, aunque recordemos que no es muy fiable (ver Tabla 5). Es en este punto donde se justifica que el material didáctico (PC y software) no es un aval por el cual la enseñanza en bachillerato nos garantice mejores resultados. Es un elemento esencialmente motivador, donde el docente tienen un apoyo y una herramienta que le facilita realizar cálculos tediosos, y corroborar lo estudiado y lo inesperado en un ejercicio de investigación

Curso	n	Media	Mediana	Desviación típica	Asimetría	Curtosis
Grupos de Control	43	4,88	4,59	1,874	-0,044	-0,452
Grupos Experimental	39	4	3,87	1,984	-0,234	-0,484

Tabla 4. Datos Estadísticos sobre la nota final.

Además, esta tabla indica que la principal fuente de variación es dentro de los grupos, y por ser el p-valor mayor que 0,01 se debe concluir que no existen diferencias estadísticas significativas entre las medias de las calificaciones finales del grupo de control y experimental. Por lo que concluimos que las distribuciones de las calificaciones finales de los grupos de control y grupos de experimentación en cada grupo pueden considerarse semejantes, aunque las calificaciones del grupo experimental eran sensiblemente inferiores.

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Media de cuadrados	F	p-valor
Entre grupos	13,2548	1	13,2548	2,61	0,1124
En cada grupo	598,867	123	4,8688		

Tabla 5. Análisis de la varianza.

Para completar nuestro estudio y puesto que los exámenes fueron diferentes se ha realizado un análisis semejante al anterior pero en cada curso. Las principales características estadísticas de la variable calificaciones finales en cada curso son las que se muestran en la Tabla 6.

Puede apreciarse que las distribuciones en los dos cursos y en ambos grupos son bastantes simétricas y semejantes. Las distribuciones presentan concentración de calificaciones alrededor de los valores altos en el caso de los grupos de control, y valores centrales en el caso de los grupos de experimentación. Los dos cursos muestran una autosemejanza con el análisis global de las calificaciones finales por grupo, es decir, existe una ligerísima tendencia a calificaciones más bajas en el grupo experimental que en el grupo de control, y cuando se utilizan técnicas de análisis de la varianza en cada curso, comparando los dos métodos de enseñanza, se concluye que no existen diferencias significativas ni entre la media, ni la variabilidad, ni la distribución de las calificaciones de cada grupo.

Curso	n	Media	Mediana	Desviación típica	Asimetría estándar	Curtosis Estándar
1º Control	21	4,542	5,1	2,062	-1,068	-0,402
1º Experimental	23	3,76	3,95	1,911	-0,854	0,26
2º Control	18	5,23	6	1,996	0,112	0,449
2º Experimental	20	4,4	5	1,841	0,345	0,126

Tabla 6. Calificación final de cada curso.

Análisis del software empleado en la experiencia.

Se elaboró un test de 10 preguntas relativas a los diferentes aspectos que debía tener un software educativo. Las 9 preguntas tenían cinco opciones, a saber: siempre, frecuentemente, a veces, casi nunca y nunca; la última pregunta era de tipo abierto. Dada la preocupación de los alumnos del grupo experimental ante la posibilidad de que pudieran suspender todo el curso académico por culpa de la experiencia abordada y pese a que se les aseguró que no podría darse esa eventualidad, se decidió que rellenaran los cuestionarios después de conocer sus calificaciones en la evaluación correspondiente, con el fin de evitar, en el grado de lo posible, la influencia entre las notas con la evaluación del software utilizado.

En los resultados generales se tuvo en cuenta la opinión no recogida en ninguna encuesta de las entregadas y que tuvo una gran influencia, "la preocupación ante la posibilidad de fracasar en el examen".

El empleo del software en el primer curso de bachillerato sobre estadística descriptiva fue mejor valorado que el de cálculo de probabilidades, y en segundo curso de bachillerato tuvo una mejor aceptación en la inferencia estadística que, de nuevo, en el tema de cálculo de probabilidades. Una posible explicación es que la disposición de razonamiento y la preparación para abordar los conceptos probabilísticos requieren mayor esfuerzo que los requeridos para la comprensión del tema de estadística descriptiva con una o dos variables, o de la propia inferencia; estos últimas temas contienen ejercicios más mecánicos o con un algoritmo más detallados que no necesitan de un proceso inductivo-deductivo tan grande como los de probabilidad.

Los aspectos más destacados como positivos del programa Excel para utilizarlos como herramienta docente son:

- No es preciso tener muchos conocimientos de informática para manejar los programas y su manejo no distrae para el aprendizaje de los conceptos.
- Es sencillo familiarizarse con la estructura en que están presentados los conceptos en las pantallas; cada una de las pantallas no abruma con muchos contenidos y tiene una ayuda apreciable.
- Permite ir al ritmo que cada uno pretende, da tiempo para pensar y, sobre todo, provoca preguntas a los usuarios.
- El manual presentado por el profesor sobre la hoja de cálculo Excel plantea ejemplos explicativos de los conceptos enseñados y desarrolla la mayoría de los pasos intermedios en las operaciones.

Los aspectos negativos más destacados han sido:

- Es necesario más esfuerzo para adquirir los conocimientos y más tiempo que el que se emplea en las clases presenciales.
- Es preciso un aumento de la comunicación entre el usuario y el programa.
- Proporciona pocos estímulos adicionales, y es deseable conocer el nivel de conocimientos que se va adquiriendo.

Crítica constructiva sobre el artículo de E. Rubiales
“Reflexiones sobre la selección y resolución de problemas” (publicado en el nº 64 de nuestro Boletín, páginas 45-66)

Sergio Falcón Santana
Departamento de Matemáticas
Universidad de Las Palmas de G.C
sfalcon@dma.ulpgc.es

Abstract

I want to make a constructive critic to the article mentioned in the title with object of showing another form of exposition and resolution of the exposed problems.

Introducción

Vaya por delante mi admiración por todo profesor que es capaz de innovar en su didáctica y que siente que su profesión no es sólo el cumplimiento de una obligación contractual sino, y sobre todo, el deber de procurar el entusiasmo en los alumnos a los que se dirige. En consecuencia, manifiesto mi mayor consideración por D. Enrique Rubiales tanto por los ejercicios propuestos y su resolución, como por su deseo de hacer cómplices a sus alumnos de su amor por la Matemática.

En consecuencia, la crítica que hago al artículo mencionado no pretende en absoluto desmerecer el trabajo sino, quizás, abrir nuevas vías en este nuestro deseo de involucrar al alumno en variadas formas de resolución de ejercicios.

El primer ejercicio [1] nos lleva a una cuestión muchas veces debatida y aún no resuelta: ¿se debe ofrecer a los alumnos ejercicios que les hagan manejar bien los conocimientos matemáticos adquiridos o se debe exigir que los ejercicios que se propongan estén conectados con el mundo real?. En mi opinión, que seguramente será discutible, se ha de procurar que los problemas sean siempre reales. Y viene esto a cuento porque a la vista del ejercicio propuesto, cualquiera se preguntaría que si una persona dispone de dos escaleras a las que puede medir y las coloca a lo ancho de un pasillo que también puede medir, este problema debería pedir un dato no medible como es la altura a la que se cruzan dichas escaleras y no dar este dato y pedir la anchura del pasillo…que él podría medir como hizo con las escaleras.

Parecida opinión me merece el segundo ejercicio, puesto que ¿cómo es posible poder medir exactamente unos ángulos y que, sin embargo, no se pueda medir una sencilla distancia?.

El tercer ejercicio, desde mi punto de vista, contiene una pequeña trampa al alumno pues se dice en la línea –2 de la página 54 que el hecho de que |f(3) – f(2)| = |f(3) – f(4)| asegura una simetría en la gráfica de la función en el intervalo [2,4]…lo cual es incorrecto, pues, evidentemente, este hecho lo único que indica es que la diferencia del valor de la función en los extremos del intervalo menos su valor en el punto medio, en valor absoluto, es la misma. Mucho más riguroso sería el siguiente razonamiento. Una función f(x) es simétrica con respecto al punto (a, f(a)) en el intervalo [a–1, a+1] si

(1) f(a) – f(a+k) = f(a–k) – f(a), para $0 \leq k \leq 1$.

Veamos así que la función $f(x)=\dfrac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}$ es simétrica con respecto al punto (3, f(3) = ½) en el intervalo [2, 4].

Según (1) ha de ser ½ – f(3+k) = f(3 – k) – ½ de donde resulta que ha de ser f(3+k) + f(3 – k) = 1 lo cual es evidente puesto que

$$f(3+k)=\frac{\sqrt{\ln(6-a)}}{\sqrt{\ln(6-a)}+\sqrt{\ln(6+a)}} \quad \text{y} \quad f(3-k)=\frac{\sqrt{\ln(6+a)}}{\sqrt{\ln(6+a)}+\sqrt{\ln(6-a)}}$$

cuya suma es 1. Salvo este detalle, me parece muy intuitiva su forma de resolver el problema.

El ejercicio *Demostrar que* $2^{5+10n}+1$ *es múltiplo de 11 para cualquier número natural n*, creo que admite una resolución más simple que es la siguiente. Sabemos que el producto de dos congruencias del mismo módulo es otra congruencia de igual módulo [2]. Es decir: si $a \equiv r \pmod{k}$, $b \equiv r' \pmod{k}$ entonces $a \cdot b \equiv r \cdot r' \pmod{k}$. Por otra parte, es evidente que $2^{5+10n} + 1 = 32\cdot(1024)^n + 1$. Y como $32 \equiv 10 \pmod{11}$ y $1024 \equiv 1 \pmod{11}$ resulta que $32\cdot(1024)^n + 1 \equiv 10\cdot(1)^n + 1 = 11 \pmod{11}$, es decir, que el número propuesto es múltiplo de 11.

Bien el tipo de ejercicios restantes y la forma de resolverlos.

Espero que estas notas sean motivo de pensamiento individual y discusión colectiva sobre lo que la comunidad Matemática queremos para nuestra Ciencia.

Bibliografía.

[1] E. Rubiales Camino, *Reflexiones sobre la selección y resolución de problemas*, Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, nº 64, pp. 45–66.

[2] E. Bujalance, J.A. Bujalance,Costa y E. Martínez, Elementos de Matemática Discreta, Sanz y Torres, 1993, pp. 87-92.

N. de la R.: Se remite al lector al artículo original del Prof. Rubiales, en que se justifica el por qué de la elección y modo de resolución de los problemas.

INSTRUCCIONES PARA EL ENVÍO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACIÓN EN EL BOLETÍN

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en papel por duplicado* y además *también en formato electrónico*, del modo especificado al final de estas instrucciones.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex (en este último caso deberá usarse estilo "article" y si se usan paquetes específicos deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes). Si se usa otro procesador, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos (normal). Las páginas sin numerar, pero numeradas a lápiz al dorso.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y "abstract" de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección en minúsculas negritas y numerados, sin punto después del número ni punto final, excepto el de introducción que irá sin numerar. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Envío de las copias en papel

Se enviarán vía postal por duplicado a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín.

Envío del fichero o ficheros en formato electrónico

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadam@mat.ucm.es` o bien, junto con las copias en papel, en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes: 35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66 y 67.

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número 3025-0006-24-1400002948, al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella:

– la dirección a donde se han de enviar
– el correspondiente cheque nominativo o resguardo de transferencia.