SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 98 OCTUBRE DE 2014

Número especial dedicado al Profesor Alberto Aizpún López

ÍNDICE

	Págs.
XXXII Concurso "Puig Adam" de Resolución de Problemas de Matemáticas,	
por Joaquín Hernández y Juan Jesús Donaire	4
Problemas propuestos en el XXXII Concurso	9
A Alberto Aizpún y sus compañeros de época, in memoriam	
por Javier Etayo	16
Otro modo de presentar la matemática elemental, visualizando y explorando con GeoGebra,	
por E. Roanes Lozano, E. Roanes Macías y J.L. Ruiz Lozano	. 23
Mitos en la historia de las matemáticas por <i>Javier Peralta</i>	. 65
Curva más corta que divide un triángulo en dos regiones de igual área	
por José Alberto García Suárez	. 74
Condiciones algebraicas de existencia de ternas Pitagóricas por <i>Jesús Álvarez Mesa</i>	. 82
Instrucciones para el envío de originales	93
Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín	95

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen ahora en "MathEduc", es decir, en lo que antes era Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), que ha cambiado su nombre.

La confección de este número ha estado a cargo de Antonio Hernando, Eugenio Roanes Lozano y Eugenio Roanes Macías.

ISSN: 1135-0261 Depósito Legal: M-7762-1995 Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid). Telf.: 91 611 59 94 – e-mail:loureiro@graficasloureiro.es

En la portada de este número aparece la figura adoptada como logotipo de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado "La Matemática y su enseñanza actual", publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS Facultad de Educación (Dpto. de Algebra) Despacho 3215 Rector Royo Villanova, s/n - 28040 - Madrid Teléf.: 91 394 62 48

> Página web de la Sociedad "Puig Adam": http://www.sociedadpuigadam.es

Todo lo relativo a publicación en el Boletín (de artículos, etc), debe hacerse a través del correo electrónico: puigadam@mat.ucm.es

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes: EUGENIO ROANES MACÍAS F. JAVIER PERALTA CORONADO VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

ENRIQUE RUBIALES CAMINO EUGENIO ROANES LOZANO JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ JUAN JESÚS DONAIRE MORENO

Secretario:

JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

Vicesecretaria:

MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:

FERNANDO LISÓN MARTÍN

Bibliotecario:

ANTONIO HERNANDO ESTEBAN

Mantenedoras página web: BEATRIZ BARRERO DÍAZ CAROLINA BRAVO SANZ

(Relaciones Institucionales)(Gestión de publicaciones)(Actividades y concursos)(Redacción de Publicaciones)

XXXII Concurso "Puig Adam" de Resolución de Problemas de Matemáticas

El sábado 14 de junio se celebró en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid la trigésimo segunda edición de nuestro concurso de problemas que, después de la Olimpiada Matemática Española es, sin duda, el de mayor tradición en nuestro país.

Ochenta y ocho estudiantes repartidos en tres niveles (3º ESO, 4º ESO y 1º Bachillerato) trabajaron durante toda la mañana en la resolución de los problemas que podéis ver a continuación de esta crónica.



Como viene siendo norma, los estudiantes procedían de diversas comunidades, algunas no muy próximas, como Cantabria o Valencia.

Como siempre, hubo tres niveles, con participación análoga a la del año pasado, manteniendo el "problema encadenado" en la segunda parte que, aquellos que no tuvierais información del concurso del año pasado, podéis ver su estructura en los enunciados mostrados a continuación de esta crónica.

Por la tarde, en un acto familiar y siempre entrañable, nuestro Presidente resaltó el mérito que supone en un sábado caluroso de junio, con el curso prácticamente terminado, pasar la mañana resolviendo problemas después de haber hecho en algunos casos cuatrocientos kilómetros, y aquí no se cobran dietas.



A la vez que hizo entrega de diplomas y premios a los estudiantes ganadores, explicó a todos que estaban ahí, no sólo por su talento, sino por el trabajo y dedicación de sus profesores.

Desde aquí, nuestro agradecimiento a todos los estudiantes que, con el curso prácticamente terminado, han dedicado su tiempo a participar en un concurso por el único placer de resolver problemas, a su profesores que les animan en esa idea, a la editorial Nivola que, dentro de sus posibilidades, ha colaborado en la entrega de premios y a Almudena, la mujer de nuestro presidente, que como siempre es nuestra mejor reportera.

En la foto a continuación aparecen los ganadores mostrando sus diplomas, junto a los profesores, miembros del equipo directivo de la Sociedad "Puig Adam", que calificaron los ejercicios resueltos por los participantes.



Y entre los ganadores, como no podía ser de otra manera, estaban estudiantes que pocos días más tarde representarían a España en la Olimpiada Matemática Internacional que se celebraría en Ciudad del Cabo (Sudáfrica).

Nuestro agradecimiento a todos los que hacen posible que llevemos desde el año 83 en esto y en particular a los profesores que dedican horas a trabajar con sus estudiantes en este tipo de actividades.

Los nombres de los estudiantes premiados en este XXXII Concurso "Puig Adam" se relacionan a continuación.

RELACIÓN DE GANADORES

<u>1° NIVEL (3° ESO)</u>

- 1.- Hajjar Muñoz, RafahIES Camp de Turia (Liria)
- 2.- Enseñat Saavedra, IsabelColegio San José del Parque (Madrid)
- 3.- Zhou, JunyúIES Narcis Monturiol (Parla)
- 4.- Torres Latorre, AinaIES Guadassnar (Valencia)
- 4.- Del Olmo de Casas, PabloIES Las Canteras (Collado Villalba)

<u>2° NIVEL (4° ESO)</u>

- 1.- García González, BertaIES San Juan Bautista (Madrid)
- 2.- Puignau Chacón, Daniel IES Alameda de Osuna (Madrid)
- 3.- De Hevia Rodríguez, David......Colegio Fray Luis de León (Madrid)
- 4.- González Domínguez, JavierIES San Juan Bautista (Madrid)
- 5.- Didirka Díaz, Alex..... IES Luis García Berlanga (Coslada)

<u>3º NIVEL (1º Bachillerato)</u>

- 1.- Sierra del Río, Ismael.....IES San Mateo (Madrid)
- 2.- Yu Xia, RuizheIES Don Pelayo (Villalbilla)

- 3.- López Sánchez, RodrigoIES Alameda de Osuna (Madrid)
- 4.- Ramos Gutiérrez, JavierIES San Juan Bautista (Madrid)
- 5.- Olmos Prieto, VíctorIES La Estrella (Madrid)

Joaquín Hernández Gómez y Juan Jesús Donaire Moreno

Problemas propuestos en el XXXII Concurso

NIVEL I (3° de E.S.O.)

Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1

En la figura siguiente puedes ver una semicircunferencia de centro O y diámetro AB, una circunferencia de centro P tangente a ella y a su diámetro AB, y una circunferencia de centro Q tangente a AB, a la semicircunferencia y a la circunferencia de centro P. Si OB = 2, calcula el radio de la circunferencia de centro Q.



Problema 2

¿Cuántos números de diez cifras, que terminan en 2014, son múltiplos de 2014?

Segunda parte: problema encadenado (1 hora 30 minutos)

Problema 1A (1 punto) Escribe el número $\frac{3\sqrt{22}\sqrt{23}\sqrt{24}\sqrt{25}}{\sqrt{44}\sqrt{45}\sqrt{46}}$ como \sqrt{b} , donde *b* es un número entero.

Problema 2A (1,5 puntos)

Sea *T* el número *b* del problema anterior. En el triángulo *ACE* de la figura siguiente, el segmento *BD* es paralelo al lado *AE*. Si CD = T, DE = 10 y el área del triángulo *ACE* es 320, calcula el área del trapecio *ABDE*.



Problema 3A (2 puntos)

Sea T la respuesta del problema 2A. En la figura siguiente, la recta DE es tangente a la circunferencia de centro O en el punto C, las cuerdas AB y AC tienen igual

longitud y el ángulo $B\hat{C}E = \left(\frac{T}{2}\right)^{o}$. Calcula el ángulo $A\hat{C}B$.



Problema 1B (1 punto) Calcula el valor de $\frac{(101^4 - 4)(101^4 - 1)}{(101^2 - 2)(101^2 - 1)} - \frac{(101^4 - 4)(101^4 - 1)}{(101^2 - 2)(101^2 + 1)}$.

Problema 2B (1,5 puntos)

Sea *T* la respuesta del problema anterior y *n* la suma de las cifras de *T*. El trapecio *ABDE* de la figura siguiente está dividido en cuatro triángulos rectángulos como se muestra en la figura. Si $CD = \frac{n}{2}$ y DE = 2CD, calcula el área de dicho trapecio dando el resultado en forma de fracción irreducible.



Problema 3B (2 puntos)

Sea $T = \frac{a}{b}$, irreducible, la respuesta del problema 2B y k = a + b. Ordenamos por diagonales los números naturales en una cuadrícula, como se muestra en la figura siguiente. Si tomamos como eje de abscisas la fila de abajo (1, 3, 6, 10,...) y como eje de ordenadas la columna de la izquierda (1, 2, 4, 7,...) diremos que, por ejemplo, las coordenadas del número 9 son (2, 1), las del 5 (1, 1) y las del número 16 serán (0, 5). ¿Cuáles serán las coordenadas del número k?



Problema 4 (5 puntos)

Sea *a* la respuesta del problema **3A** y *b* la suma de las coordenadas de la respuesta del problema **3B**. Si llamamos "*t*" al área del triángulo *CED* y "*s*" al área del cuadrilátero *OAEB* de la figura siguiente, calcula s - t.



NIVEL II (4° de E.S.O.)

Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1

Un triángulo isósceles tiene una mediana de 15 cm y una altura de 24 cm. Calcula el área de cada uno de los dos triángulos determinados con estos datos.

Problema 2

Las soluciones de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$, con $b \neq c$, son los números reales ry s, y las soluciones de la ecuación $x^2 + cx + b = 0$ son los números reales r y t. Calcula s + t.

Segunda parte: problema encadenado (1 hora 30 minutos)

Problema 1A (1 punto)

El área de un octógono regular es $2+2\sqrt{2}$. Calcula la longitud del lado de dicho octógono.

Problema 2A (1,5 puntos)

Sea *T* la respuesta del problema anterior. Calcula el número de raíces reales de la ecuación $x^3 + (T+1)x^2 + (T+1)x + 1 = 0$.

Problema 3A (2 puntos)

Sea T la respuesta del problema anterior. Calcula $\lg_3 2 \cdot \lg_8 27 + \lg_3 2 \cdot \lg_4 5 \cdot \lg_{25} T$.

Problema 1B (1 punto)

El número positivo x expresa la medida, en grados sexagesimales, de un ángulo. Calcula el menor número x que verifica $senx = cos(x^2)$.

Problema 2B (1,5 puntos)

Sea T la respuesta del problema anterior. En la figura siguiente se observa un cuadrado ABCD y un triángulo equilátero ABP. Si el área del triángulo PBC es T, calcula la suma de las áreas de los triángulos ABP y PCD.



Problema 3B (2 puntos)

Sea *T* la respuesta del problema anterior. Calcula el número de puntos reticulares que hay en el interior del triángulo limitado por las rectas x = 0, y = 0, x + y = T. Notas: 1) Se llaman puntos reticulares a los que tienen sus coordenadas enteras. 2) Los puntos interiores de un triángulo no pertenecen a ninguno de sus lados.

Problema 4 (5 puntos)

Sea *a* la respuesta del problema **3A** y *s* la suma de los dígitos de la respuesta del **3B**. Desde un punto A de un río comienza a moverse una lancha a favor de la corriente con velocidad respecto de la orilla $v = \frac{s}{a}$ km/h. En el mismo instante un bote que se encuentra en un punto B, aguas abajo, comienza a moverse, también con velocidad constante, al encuentro de la lancha y se encuentran en un punto C situado entre A y B, tal que AC = 5 · CB. Si la lancha hubiera salido desde el punto B y el bote desde el punto A se habrían encontrado en un punto D tal que AD = DB. Calcula la velocidad de la lancha y del bote en aguas quietas.

NIVEL III (1º de Bachillerato)

Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1

En las rectas y = 2x, $y = \frac{x}{2}$ marcamos, respectivamente, los puntos *P* y *Q* de coordenadas enteras positivas, ambas menores que 99. Calcula el número de

parejas (P, Q) tales que los puntos A y B que dividen al segmento PQ en tres partes iguales tengan también sus coordenadas enteras.

Problema 2

Encuentra, si existen, cuatro enteros positivos consecutivos cuyo producto sea el mismo que el de otros dos enteros positivos consecutivos o justifica que no existen.

Segunda parte: problema encadenado (1 hora 30 minutos)

Problema 1A (1 punto)

Calcula el mayor entero *n* tal que $\left[\sqrt[n]{2014}\right] > 1$. (Recuerda: [x] es la parte entera de *x*.

Problema 2A (1,5 puntos)

Sea *T* la respuesta del problema anterior. Obtén la mayor solución de la ecuación $(\lg_T x)^2 = \lg_T x^2$.

Problema 3A (2 puntos)

Sea *T* la respuesta del problema anterior. Si *n* es un entero con $1 \le n \le 10T$, calcula el número de valores de *n* para los que el producto $(n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$ es divisible entre 5.

Problema 1B (1 punto)

Si $0 < x < 2\pi$, $x \neq \pi$, calcula el valor absoluto de la diferencia entre las soluciones de la ecuación sec $x = 1 + \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \dots$.

Problema 2B (1,5 puntos)

Sea *T* la respuesta del problema anterior y $k = \frac{4\pi}{T}$. Si $(a - bi)^k \cdot (a + bi)^k = 512$, calcula el valor de $a^2 + b^2$.

Problema 3B (2 puntos)

Sea T la respuesta del problema anterior Desde el punto P exterior a la circunferencia hemos trazado las tangentes PA y PB a dicha circunferencia. Si el

cociente entre el mayor y el menor de los arcos AB es T + 1, obtén el cociente entre el ángulo central correspondiente al menor de dichos arcos y el ángulo $A\hat{P}B$.



Problema 4 (5 puntos)

Sea *a* la respuesta del problema **3A** y *b* la respuesta del problema **3B**. Un trapecio tiene tres lados iguales cuyas medidas vienen expresadas con números enteros, siendo uno de ellos la base menor. Si el perímetro del trapecio es a(1 - b) y el área $k\sqrt{k}$, con *k* también entero, calcula el valor de *k*.

A Alberto Aizpún y a sus compañeros de época, in memoriam

José Javier Etayo

El pasado mes de febrero recibimos la noticia de que había fallecido Alberto Aizpún, nuestro compañero de tantos años en la Sociedad. Llevaba un tiempo con la salud quebrantada, hasta el punto de que había ido pasando los trastos en una labor que desempeñó como nadie podría hacerlo, la Tesorería de la Puig Adam, en esa complicada tesitura del que es tesorero sin tesoro. Con su fallecimiento desaparece la presencia entre nosotros de los matemáticos nacidos en los años 20, cuando él era el decano de todos ellos. Para nuestra Sociedad, como dejan patentes los números de homenaje que venimos publicando, estos últimos tiempos han sido una sangría que nos deja un vacío muy hondo. Como ya en nuestro anterior Boletín se publicó una detallada, aunque fuera urgente, semblanza de la personalidad de Aizpún, me ha parecido preferible aprovechar estas líneas para exponer algunas ideas que me suscita su fallecimiento, y la extinción de la generación a la que él pertenecía. Quizá resulten un poco deslavazadas, pero vienen al hilo de lo que he ido pensando al repasar el curriculum de estos compañeros que hemos ido perdiendo en nuestra Sociedad, y en el mundo matemático español, estos últimos años.

Alberto había nacido en Pamplona, allá en 1920. Y empezó su actividad docente desde abajo, como Maestro de Enseñanza Primaria, en 1945, tras una oposición en la que obtuvo el número 1. Tampoco entonces era fácil, en la Universidad, en los Institutos, y aun en la Enseñanza Primaria, las convocatorias de plazas llegaban con cuentagotas, y la competencia por ellas era tremenda. Hace unos meses intervine en un acto de homenaje a otro de nuestros compañeros fallecidos, Julio Fernández Biarge. Para preparar mis palabras, hice un rastreo, y localicé en el Boletín Oficial del Estado la publicación de las listas de admitidos a las oposiciones a tres cátedras de Instituto a las que se presentó, y que ganó. Creo que merece la pena detenerse un poco en ellas.

Por Orden de 13 de octubre de 1949 se convocaron a oposición libre cátedras de Matemáticas de los Institutos San Isidro de Madrid, Luis Vives de Valencia y Maragall de Zaragoza. La lista provisional de aspirantes se publicó por Resolu-

ción de 13 de febrero de 1950. Sin duda ante el hecho insólito de ser nada menos que tres las cátedras convocadas, la relación se extendía por un par de páginas del Boletín, con un total de 69 firmantes. Pero lo sorprendente es repasar los nombres. Han pasado 65 años, pero uno encuentra en esa relación de aspirantes a cátedras de Instituto a muchísimos nombres conocidos; espigando un poco, Federico Gaeta, Rafael Rodríguez Vidal, Eduardo García-Rodeja, Luis Esteban Carrasco, Luis Vigil, Baltasar Rodríguez-Salinas, Juan Marín Tejerizo, Julio Fernández Biarge, Antonio de Castro, Juan Casulleras, Juan Gutiérrez Suárez, José Teixidor, Norberto Cuesta. Hay que añadir con orgullo de amigos que entre esa lista, y para tres plazas, Biarge salió catedrático de San Isidro. Pero esto nos da una idea de cómo estaban de complicadas las cosas.

Hay más conocidos en esa relación. También hay señoras, claro. Entre ellas me gustaría resaltar a Griselda Pascual, que tuvo también una larga vida docente, fue Catedrática de Instituto, y miembro de la Junta Directiva de la Real Sociedad Matemática Española. Para los algebristas, además, es muy notoria como traductora del libro de Atiyah – McDonald.

Y hablando de algebristas y de mujeres, viene al hilo que recordemos aquí a María Josefa Wonenburger. Como marchó de España se perdió su rastro entre las nuevas generaciones, pero en los años 50 era una de los matemáticos en formación que se preparaban en Madrid. En 2006, María José Souto y Ana Tarrío publicaron en la Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española un excelente trabajo sobre su vida y sobre su actividad matemática. Entonces la descubrieron muchos que ignoraban por completo su origen y su formación; que eran bien conocidos por el mundo matemático madrileño de finales de los 50 y principios de los 60. Se había licenciado en la Universidad de Madrid en 1950, cursando el Plan de Estudios aprobado por Orden de 4 de septiembre de 1943 y Decreto de 7 de julio de 1944. Estas normas tenían origen en la Ley de 29 de julio de 1943, y cambiaban el nombre de la Sección en la Facultad de Ciencias, de Ciencias Exactas a Ciencias Matemáticas. La primera promoción que completó sus estudios por este Plan terminó en 1948, y no entiendo por qué se ha escrito que Wonenburger pertenecía a la primera promoción de Matemáticas. Pero sobre las cosas que se han escrito sobre ella volveré después. Terminada la Licenciatura, cursó los estudios de doctorado bajo la dirección de Germán Ancochea y Tomás Rodríguez Bachiller. Y en 1953 obtuvo una Beca Fullbright y marchó a Estados Unidos, doctorándose en Yale en 1957.

Una vez doctora regresó a España, y durante tres años trabajó como becaria en el Instituto Jorge Juan del CSIC, realizando su tesis doctoral dirigida por Germán Ancochea, pues la de Yale no le había sido convalidada. Fruto de este tiempo, son tres artículos publicados en 1960 en la Revista Matemática Hispano-Americana, y dos en Gaceta Matemática, en 1960 y 1961, así como el propio texto de la tesis que se publicó, como era usual, como memoria del Instituto Jorge Juan. En la versión en inglés, con la nota bien precisa de "This paper is the translation of the author's doctoral dissertation presented to the University of Madrid and written under the guidance of Professor G. Ancochea. The research was supported by the Fundación March". Para hacernos una idea de la época, los autores que firman en la 'Hispano' en 1960 son Joaquín Arregui, Francisco Botella, José Javier Etayo, Darío Maravall, Eduardo García-Rodeja, Juan Sancho Guimerá, Wonenburger, y dos extranjeros. En 24 de noviembre de 1961, la Junta Directiva de la Real Sociedad Matemática Española "acuerda conceder los premios correspondientes al año 1960 para autores de artículos publicados en Gaceta Matemática a D. José Javier Etayo Miqueo y D^a María Luisa (evidente error) Wonenburger".

A partir de 1961 se trasladó con una beca a Canadá y después a Estados Unidos. En América desarrolló una fructífera carrera, tanto en su investigación propia como en la dirección de discípulos, entre los que destacó sobremanera Robert Moody. Esta actividad, a partir de aquí internacional, no fue obstáculo para que en 1962 y 1964 publicara otros dos artículos en la Revista Matemática Hispano-Americana.

Después de haber sido redescubierta en 2006, cuando falleció el pasado año hubo que leer cosas extrañísimas en una especie de hagiografía que seguro que habría molestado mucho a la interesada. Así, por ejemplo, y son transcripciones textuales, "Investigar en Matemáticas en los difíciles tiempos de la postguerra española requería pasión por la ciencia y una enorme fortaleza mental y moral para seguir un camino vocacional. Gracias a becas extranjeras se le abrieron las puertas de entrada a universidades y a centros de investigación punteros. En la universidad española de la época no había sitio para el talento investigador de María, ni entorno profesional para el 'exotismo' de una matemática". O este otro, "La algebrista y matemática se vio obligada a continuar su carrera fuera de España porque en su propio país no se reconocía el doctorado que había cursado en la universidad de Yale". También, "el caso de María Wonenburger sería uno de los más actuales, pero a pesar de ello encontró grandes dificultades para realizar su trabajo por el hecho de ser una mujer". Y, para no cansar más, "Pero en la España de la dictadura franquista ser mujer y científica no era bien visto. (...) La joven catedrática (sic!) se vio obligada a doctorarse de nuevo en Madrid en 1960, por segunda vez, con ni siquiera la garantía de poder optar luego a unas oposiciones de profesora para conseguir, a lo mejor y con un poco de suerte, una plaza en algún instituto".

No merece la pena detenerse a comentar, una por una, tantas tonterías seguidas. Del relato de su actividad madrileña en los años 50 parece claro que María Josefa Wonenburger fue tratada exactamente como todos sus compañeros de formación de la época, que fue respetada y apreciada por ellos -eso me consta personalmente- y que tuvo la opción de marchar a América y la aprovechó con gran éxito profesional, lo que también habla alto de la calidad de la formación recibida en sus estudios de Licenciatura. De modo que ella continuó su carrera al otro lado del Océano, mientras sus compañeros la seguían en España. También he podido leer que "no le podían ofrecer nada, sino que se presentara a una oposición, y ni siquiera con la garantía de sacarla". Anda, pues claro, como todos los demás, entonces y ahora, hombres o mujeres. Basta para ello repasar los Boletines Oficiales del Estado de finales de los 50 y principios de los 60. Por no aburrir más al lector, transcribiremos la Resolución de 24 de noviembre de 1959 del Director General de Enseñanzas Técnicas, a la sazón Gregorio Millán, que publicaba los aspirantes a la cátedra de Matemáticas de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación: Gustavo Agudo, José Joaquín Parreño, Enrique Juan, Carlos Ibáñez, Juan Sancho Guimerá, José Javier Etayo, Julio Fernández Biarge, Joaquín Arregui, Procopio Zoroa, Antonio Jover, Julio Flórez, Luis Esteban Carrasco, Mariano Ros y Manuel Benito, un bonito total de catorce firmantes. Y, por pasar al ámbito de la Universidad, la de 18 de octubre de 1960 del Director General de Enseñanza Universitaria, Torcuato Fernández-Miranda, para las cátedras de Geometría proyectiva y Geometría descriptiva de las Universidades de Barcelona y Santiago: Luis Esteban Carrasco, José Javier Etayo, Joaquín Arregui, Juan Sancho Guimerá y Eduardo García-Rodeja.

Ya que estamos hablando de matemáticas en aquellos años, me permito ofrecer un nombre a las rastreadoras de pioneras que tanto abundan: el de María Cinta Badillo. Terminó sus estudios en la Universidad de Madrid en 1948, ella sí pertenecía a la primera promoción del plan de estudios que introdujo la denominación de Ciencias Matemáticas; la promoción, por ejemplo, de Baltasar Rodríguez-Salinas. Ella también se inició a la investigación en el Instituto Jorge Juan, bajo la dirección de Rodríguez Bachiller, en temas de lógica matemática. Asistió al International Congress of Mathematicians de Amsterdam en 1954, la primera española que fue a un ICM, y presentó un trabajo, cuyo resumen aparece en las actas del Congreso (vol. I, pág. 537). En dichas Actas aparece como "Ayudante de Equipo de Cálculo Electrónico del CSIC y de la Sociedad Española de Cibernética". En MathSciNet aparecen tres trabajos suyos de investigación, "Esquemas representativos de sistemas regidos por una lógica polivalente" (que es el trabajo presentado en el ICM), "Automatización de los silogismos en la lógica polivalente" y "Nuevas posibilidades en lógica trivalente y problemas resueltos con relevos y redes", todos publicados en la Revista de Cálculo Automático y Cibernética, respectivamente en 1955, 1956 y 1958. En la recensión del primero se dice, en francés, que "l'auteur considère des circuits comportant, au lieu des interrupteurs ordinaires, ce qu'il appelle des "roues dentées électroniques". Aparte de tratarle en masculino (ella había firmado M.C. Badillo), recuérdese en cuanto al trabajo en sí que estamos hablando de 1955. En realidad publicó más trabajos en esa revista pionera en España -y en el mundo- sobre lo que ahora llamamos Informática, y también en Gaceta Matemática. En 1961 obtuvo, junto con Eduardo García-Rodeja, el mismo premio a los autores de trabajos publicados en Gaceta Matemática que el año anterior se había concedido a Wonenburger. El trabajo premiado era "Lógica polivalente de los sistemas", que había sido presentado en la I Reunión Anual de Matemáticos Españoles. Y participó también en la vida asociativa de esta ciencia naciente: el 25 de mayo de 1953, en el Palacio de Comunicaciones de Madrid, se celebró la primera sesión científica de la Sociedad Española de Cibernética, con participación de D^a María de la Cinta Badillo, D. Angel González del Valle, y D. Valentín Quintas. La Sociedad, "primera de su clase en el mundo", había realizado su sesión inaugural en el mismo lugar el día 22. "El profesor Rodríguez Bachiller hizo un profundo análisis de la función de la matemática en la Cibernética", y después el Sr. Fernández de la Mora trató de las vinculaciones entre la Cibernética y la Sociología, y "a título de ejemplo estudió las posibles repercusiones políticas de los progresos cibernéticos llevados al límite". No vamos a comentar las conclusiones que extraía de ello el sr. Fernández de la Mora, pero no parece que anduvieran muy desencaminados estos pioneros de hace 60 años. Y entre ellos, y destacadamente, la Srta. Badillo, a la que no estaría de más que alguien dedicara un estudio monográfico.

Hecho este excurso por algunos de nuestros matemáticos emergentes de los años 50, hora es de que volvamos a fijar la atención en Alberto Aizpún. Lo hemos dejado como opositor triunfante al cuerpo de Maestros de Enseñanza Primaria en 1945. Pero continuó estudiando, como toda su vida, y en 1953 obtuvo la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad de Barcelona. Habiendo ejercido como maestro en una escuela unitaria durante nueve años, en 1959 obtuvo la Cátedra de Matemáticas de la Escuela Normal "María Díaz Jiménez". En ella desarrolló desde entonces su actividad, que colmó todos los aspectos que se esperan de un profesor universitario.

En primer lugar, por supuesto, la dedicación esforzada a la docencia. En su caso, a conseguir que los aspirantes a maestros tuvieran la mejor preparación; esfuerzo que le llevó a sufrir injustos sinsabores, bien difundidos por cierta prensa, cuando algunos alumnos se quejaron del nivel de la materia. Por otra parte, mediante la labor de difusión, dando a la estampa publicaciones sobre la enseñanza de la matemática, en lo que perseveró hasta edad avanzadísima cuidando de nuestro Boletín, y siendo el delegado de la Sociedad en la revista SUMA, de la Federación de Sociedades, junto con su esposa Mercedes. Probablemente entre sus publicaciones destaque "Teoría y didáctica de la Matemática actual" aparecido en 1969. En esta preocupación por la didáctica, intervino también en numerosos cursos de formación sobre la entonces llamada "Matemática moderna". Y además, innovando: al buscar documentación para redactar estas breves notas, he localizado unas "Máquinas de Alberto Aizpún", creadas en el transcurso de los años 70, y difundidas desde su Escuela y los Programas de Formación y Actualización del Profesorado de la Universidad Nacional de Educación a Distancia (U.N.E.D.).

Por último, pero no irrelevante, con la participación en la gestión. Cuando "sólo" era el catedrático de Matemáticas de la Escuela, llegó el momento de la integración de las Escuelas Normales en la Universidad, como consecuencia de lo dispuesto en la Ley General de Educación de 1970. Por Resolución de 31 de julio de 1972 del Director General de Universidades e Investigación, Luis Suárez, se nombró la Comisión Gestora de Integración: los Catedráticos de la Universidad Anselmo Romero y José Javier Etayo, el Profesor Agregado José Fradejas, la Directora de la Escuela Julia Morrós, y el Catedrático de la misma Alberto Aizpún. Ya integrada la Escuela en la Universidad, se hizo cargo de su dirección, cuando a propuesta de la Universidad, fue nombrado por Orden de 26 de abril de 1974, firmada por el Subsecretario del Ministerio, Federico Mayor Zaragoza. Continuaría sirviendo este cargo durante casi diez años.

Pero quizá la mejor descripción sobre el Alberto docente nos la dé Fernando Alonso Molina, cuando obtuvo el Premio Gonzalo Sánchez Vázquez: "*mi primer maestro fue Alberto Aizpún. Mi primera experiencia como profesor la tuve en la* Escuela de Magisterio de la que él era director. Se daba la paradoja de que yo me iniciaba en la enseñanza dando clase a futuros profesores, por lo que decidí asistir a sus clases en las que utilizaba materiales y técnicas didácticos. Fue un gran acontecimiento para mí, que lo único que tenía entonces, recién terminada mi carrera, eran unas cuantas ideas matemáticas embrolladas. Su autoridad intelectual y el trato exquisito que daba a todos sus alumnos me impresionaron y marcaron la forma de relacionarme con ellos a lo largo de mi vida." Con esto está todo dicho, porque de la bonhomía del amigo y de la laboriosidad del compañero somos conscientes todos en la Sociedad Puig Adam.

Vaya por ello aquí este reconocimiento tan merecido; por él, y como representante de todos aquellos predecesores nuestros que, nacidos en los años 20, se esforzaron en condiciones muy complicadas y consiguieron que ahora estemos nosotros, construyendo sobre lo que ellos hicieron. Sin su labor, habría sido imposible.

Otro modo de presentar la matemática elemental: visualizando y explorando con GeoGebra

E. Roanes Lozano^{†,‡}, E. Roanes Macías[†], J.L. Ruiz Lozano

[‡]Instituto de Matemática Interdisciplinar [†]Departamento de Algebra, Facultad de Educación Universidad Complutense de Madrid {eroanes,roanes}@mat.ucm.es, jlrlmv@hotmail.com

Resumen

Nowadays, dynamic geometry systems that allow to simultaneously show the graphic representation and the equations and coordinates of the drawn geometric objects exist. This simultaneity propitiates another way of presenting elementary mathematics to students, emphasizing visualization, exploration and even rediscovery. A miscellaneous collection of examples developed using GeoGebra is described in this article.

> Dedicado a nuestro querido amigo, el profesor Alberto Aizpún, referente de cuantos nos hemos dedicado, total o parcialmente, a la formación matemática de profesores de nivel primario. Agradecidos por lo que de él aprendimos y lo que nos ayudó.

Consideraciones previas

D. Pedro Puig Adam, en cuyo honor lleva el nombre nuestra Sociedad, en su célebre libro [1], dice: "Para los matemáticos orientales clásicos, demostrar era reducir a evidencia directa, lo cual perciben muchos alumnos mejor que un encadenamiento lógico, del que no suelen ver el alcance, ni la necesidad".

Miguel de Guzmán, en el Capítulo 0 de su libro [2] describe detalladamente la importancia de la *visualización* en el quehacer matemático. El gran matemático francés Jules Henri Poincaré decía: ¿Es posible entender una teoría si desde el primer momento se le da la forma definitiva que impone una lógica rigurosa, sin mencionar para nada el camino por el que ha llegado a adoptar esa forma? No, realmente no es posible entenderla, incluso resulta imposible retenerla si no es de memoria.

Ahora nos hacemos una pregunta: ¿Hasta qué punto es útil a una gran mayoría de alumnos aprender un teorema geométrico con el propósito de repetirlo en un examen o de aplicarlo mecánicamente a un simple ejercicio?

Sin embargo, orientando la actividad geométrica hacia la manipulación de modelos geométricos tangibles, se facilita la elaboración mental de los entes abstractos que son los objetos geométricos y al descubrimiento de relaciones entre ellos. Esto es más atractivo y útil para una gran mayoría de alumnos.

Tales manipulaciones pueden llevarse a cabo con los Sistemas de Geometría Dinámica (abreviadamente SGD) existentes en la actualidad. Los primeros SGD aparecieron a comienzo de los años 90 y desde entonces han surgido numerosos SGD. Cuatro de ellos han llegado a tener gran difusión (en orden cronológico de aparición): Cabrí [3], The Geometer's Sketchpad [4], Cinderella [5], GeoGebra [6]. El segundo de ellos, que ya describimos ampliamente en [7], lo hemos utilizado en numerosos cursos en la Univ. Complutense de Madrid. Aquí sólo nos ocuparemos de GeoGebra.

Iniciación a GeoGebra

Hay varias razones para haber elegido GeoGebra: 1) por ser un SGD de dominio público (gratuito); 2) por existir numerosos *Institutos GeoGebra* (nueve de ellos en España) que colaboran en la difusión e intercambio de información sobre actividades desarrolladas sobre este SGD; 3) por aparecer las expresiones algebraicas (coordenadas aproximadas con 2 decimales, ecuaciones, etc) de los objetos geométricos a la vez que estos van siendo dibujados o deformados.

Esta simultaneidad geométrico-algebraica siempre la habíamos echado en falta los autores de este artículo, haciéndola notar, e incluso proponiendo posibles modos de llevarla a cabo en aritmética exacta [8].

No pretendemos aquí describir el uso de todos los comandos de GeoGebra. Hoy existen excelentes publicaciones al respecto, entre otras: [9], [10], [11]. Preferimos centrar la atención en cómo GeoGebra puede ayudarnos a visualizar y explorar problemas concretos. Eso sí, para facilitar la labor a los novicios en GeoGebra, comenzaremos cada sección describiendo los comandos indispensables para elaborar la correspondiente configuración o protocolo. Conviene observar al respecto que, si bien los conceptos geométricos son eternos, las tecnologías se llegan a hacer obsoletas en muy poco tiempo hoy en día.

Abordaremos ejemplos de tres tipos de actividades representativas de las posibilidades de GeoGebra: de elaboración de construcciones geométricas, de composición de transformaciones geométricas y de visualización de conceptos relativos a funciones matemáticas y estadísticas.

GeoGebra es un SGD muy completo, que también permite ejecutar ciertos cálculos algebraicos. Ha sido desarrollado por el *International GeoGebra Institute* (office@geogebra.org). Se puede descargar gratuitamente por Internet desde la página www.geogebra.org/download, ya que es de dominio público. Por todo ello, está teniendo enorme difusión en muchos países, habiendo sido recomendado por instituciones educativas europeas y americanas.

Cada cierto tiempo aparece una nueva versión mejorada y extendida. Todas se manejan de modo similar. Pensando en quienes se acercan por primera vez a GeoGebra, iremos describiendo el uso de comandos utilizados en cada construcción, usando inicialmente la versión 4.4 en español.

Al iniciar una hoja de trabajo aparecen en la pantalla (ver Fig. 1) tres partes esenciales: 1) una región rectangular rotulada encima como Vista Gráfica (en adelante VG) con unos ejes de coordenadas, sobre la cual se van a ir dibujando los objetos geométricos; 2) a su izquierda otra región rectangular más estrecha rotulada encima como Vista Algebraica (en adelante VA), sobre la cual se van a ir anotando automáticamente las coordenadas o ecuaciones de los objetos representados, a medida que estos se vayan dibujando; 3) encima de ambas, una barra con doce iconos, cada uno con una flechita en la parte inferior derecha, de modo que, al hacer clic sobre la flechita se abre una ventana desplegable que ofrece posibles objetos a dibujar u operaciones a ejecutar; entonces, al hacer clic sobre la opción elegida y mover el cursor con el ratón hasta el lugar elegido del rectángulo de la VG para hacer clic allí, se dibuja el correspondiente objeto en dicho lugar o, alternativamente, se ejecuta la operación seleccionada.

1. ¿Dónde va el circuncentro al arrastrar vértices?

Tratamos de observar la situación del circuncentro, según sea el triángulo.

Comandos utilizados para desarrollar esta actividad

<u>Crear un nuevo punto</u>: hacer clic en el icono \checkmark y en el desplegable que se abre elegir la opción *Punto*, mover el cursor a un lugar del rectángulo VG y hacer clic; aparece allí un punto con el nombre asignado en mayúscula y en la VA su nombre igualado a sus coordenadas.

<u>Crear un segmento</u>: hacer clic en el icono \checkmark y elegir la opción Segmento, hacer clic en el lugar elegido para un extremo del segmento y luego en el otro; aparece el segmento con su nombre en minúscula y sus extremos, y en la VA su nombre igualado a su longitud y las coordenadas de sus extremos.

<u>Crear el punto medio de un segmento</u>: hacer clic en el icono y elegir la opción <u>Punto medio o centro</u>, hacer clic sobre el segmento (ya existente); aparece su punto medio con el nombre asignado y sus coordenadas en la VA.

<u>Crear una recta</u>: hacer clic en el icono \checkmark y elegir la opción Recta y hacer clic sucesivamente en dos puntos; aparece la recta que pasa por ellos y en la VA su ecuación y las coordenadas de los dos puntos.

<u>Crear la perpendicular por un punto a una recta o segmento</u>: clic en \searrow y elegir la opción <u>Recta perpendicular</u>, hacer clic sobre el punto y luego sobre la recta o segmento; aparece entonces en la VG tal perpendicular con su nombre y en la VA su nombre con su ecuación.

<u>Crear la mediatriz de un segmento</u>: hacer clic en el icono \square y elegir la opción <u>Mediatriz</u>, mover el cursor para hacer clic en el segmento; aparecen entonces la mediatriz en la VG y su ecuación en la VA.

<u>Crear la intersección de dos líneas ya construidas</u>: hacer clic en el icono y elegir la opción Intersección, hacer clic sobre una línea y luego sobre la otra; aparece el punto (o puntos) de intersección y en la VA sus coordenadas.

<u>Crear una circunferencia a partir del centro y uno de sus puntos</u>: clic en \bigcirc y elegir la opción <u>Circunferencia (centro, punto)</u>, clic en el lugar elegido como centro y clic en un punto por donde ha de pasar; aparece en la VG la circunferencia y en la VA su ecuación y las coordenadas de ambos puntos.

Ejecución de la construcción (Fig. 1)

Crear tres puntos no alineados, A, B, C, vértices del triángulo. Crear los tres lados del triángulo, es decir, los segmentos AB, BC, CA. Crear los respectivos puntos medios, D, E, F, de dichos lados. Trazar las rectas perpendiculares a cada lado por su punto medio. (De otro modo, trazar las mediatrices de los lados del triángulo). Determinar el punto de intersección, G, de dos de esas tres mediatrices. Trazar la circunferencia de centro G que pasa por un vértice del triángulo.

Protocolo de Construcción

Esta sucesión de pasos es guardada automáticamente por GeoGebra en el denominado *protocolo* (equivalente a lo que en informática se denomina un *procedimiento* o *programa*). Para acceder a tal protocolo, basta hacer clic en *Vista* de la barra superior y seleccionar *Protocolo de Construcción*.



Fig. 1: Circuncentro G del triángulo ABC

Algunos comandos de uso general

<u>Deshacer o rehacer</u>: al hacer clic en uno de los iconos <u>hacer</u> (el amarillo, a la izquierda) o *rehacer* (el verde, a la derecha) la última de las ejecuciones realizadas (por si se ha cometido algún error).

<u>Deformar por arrastre o desplazamiento</u>: al hacer clic en y elegir la opción <u>Elige y mueve</u>, entonces la configuración ya construida puede deformarse arrastrando con el ratón uno de los puntos iniciales, haciendo clic sobre ese punto y, sin dejar de pulsar el botón izquierdo del ratón, arrastrar el punto hasta la nueva ubicación elegida; en esta operación se mantienen las relaciones de incidencia entre los objetos geométricos de la configuración, actualizándose automáticamente las coordenadas y ecuaciones en la VA. (Haciendo lo mismo sobre una recta, este puede ser arrastrada paralelamente a sí misma).

Crear un punto sobre una recta (u otro objeto): hacer clic en el icono y elegir la opción Punto en objeto, hacer clic en cualquier lugar de la recta (previamente creada); entonces aparece allí un nuevo punto sobre dicha recta y sus coordenadas en la VA. (El punto así creado se puede desplazar con el cursor sobre sobre dicha recta, pero no se puede arrastrar fuera de esa recta).

<u>Cambiar el nombre de un objeto ya creado</u>: al poner el cursor sobre el nombre del objeto, la cruz que muestra su posición, +, se transforma en flecha; entonces pulsar el botón derecho del ratón y en el desplegable que aparece elegir *Renombra* y escribir el nuevo nombre en la ventana que aparece y pulsar OK.

Ejercicios sugeridos

 Arrastrar los vértices de ABC, para observar como varía la posición de G.
Dibujar un segmento AB, su mediatriz, un punto P sobre ésta con el comando Punto en objeto, trazar los segmentos PA y PB, y desplazar el punto sobre la mediatriz, para comprobar que PA y PB siguen siendo iguales.

3. Ahora justificar la construcción de la circunferencia circunscrita.

4. Partiendo de la situación de la Fig. 1, arrastrar C, hasta que G esté sobre el lado AB. ¿Cómo es ahora el ángulo \hat{C} del triángulo ABC?

5. Partiendo de la situación de la Fig. 1, arrastrar C, para que G sea exterior a ABC. ¿Cómo es ahora el ángulo \hat{C} del triángulo?

2. Concurrencia de alturas al modo de Euclides

Tratemos de justificar la concurrencia de alturas al modo clásico de Euclides.

Nuevos comandos utilizados en esta actividad

<u>Crear un polígono</u>: hacer clic en el icono \triangleright y elegir la opción Poligono, hacer clic en el punto elegido como primer vértice y luego en los siguientes vértices, para terminar haciendo clic de nuevo en el primer vértice; aparecen en la VG los vértices y lados del polígono y su interior coloreado con su nombre, y en la VA las coordenadas de sus vértices, longitudes de lados y su área.

<u>Crear la paralela por un punto a una recta o segmento</u>: hacer clic en \searrow y elegir la opción <u>Recta paralela</u>, hacer clic sobre el punto y luego sobre la recta o segmento; aparecen en la VG dicha paralela y en la VA su ecuación.

<u>Medir la distancia entre dos puntos</u>: hacer clic en \checkmark y elegir la opción Distancia o Longitud, hacer clic en un punto y después en el otro; aparece en la VG el rótulo del segmento de extremos los dos puntos igual a la distancia entre ellos y en la VA la distancia entre ellos.

Algunos comandos de uso general

<u>Ocultar/mostrar ejes de coordenadas y cuadrícula</u>: los dos iconos \square III aparecen al hacer clic en la flechita horizontal situada a la izquierda del rótulo Vista Gráfica (en la barra estrecha bajo los doce iconos); al hacer clic en el de la izquierda se ocultan/muestran los ejes de coordenadas y al hacer clic en el de la derecha se oculta/muestra la cuadrícula.

<u>Alterar el aspecto de líneas u otros objetos</u>: los iconos aparecen al seleccionar una línea u objeto con *Elige y mueve* (supuesto que ya mira hacia abajo la flechita horizontal situada a la izquierda de *Vista Gráfica*) y permiten alterar el aspecto de dicha línea u objeto, operando así:

i) al hacer clic en la flechita a la derecha del cuadrado negro aparece una paleta de 27 colores que invita a hacer clic sobre el color elegido para ;

ii) al hacer clic en la flechita a la derecha de la línea horizontal aparece un desplegable con opciones de línea punteada, discontinua,... y debajo un cursor para elegir la anchura deseada para dicha línea;

 $i\!i\!i)$ al hacer clic en la flechita a la derecha de AAaparece un desplegable con opciones para rotular dicha línea u objeto con su nombre, ecuación,....

(Tales alteraciones se pueden ejecutar sobre una línea, un polígono o sobre todos los objetos incluidos en una región rectangular seleccionada mediante la opción Elige y Mueve).

Ejecución de la construcción (Fig. 2)

Comenzar ocultando los ejes y la cuadrícula, para aliviar la representación. Usando el comando *Polígono*, crear un triángulo, *ABC*.

Trazar por cada vértice del triángulo ABC una recta perpendicular al lado opuesto (esto es, las rectas-alturas del triángulo ABC).

Trazar por cada vértice de ABC una recta paralela al lado opuesto.

Alterar el aspecto de esas tres rectas paralelas, aumentando su anchura.

Determinar los puntos de intersección D, E, F de cada par de esas paralelas. Medir las distancias DC, AB, CE.



Fig. 2: Concurrencia de alturas del triángulo ABC

Ejercicios sugeridos

 Arrastrando los vértices de ABC, ¿siguen siendo concurrentes sus alturas?
Arrastrando C, ¿se mantiene la igualdad de distancias DC=AB? ¿son DC y AB lados opuestos de un paralelogramo? ¿se mantiene la igualdad de distancias CE=AB? ¿son CE y AB lados opuestos de un paralelogramo?

3. Es C punto medio del segmento DE?

4. La recta-altura del vértice C del triángulo ABC, zes mediatriz de un lado del triángulo DEF?

5. ¿Son las rectas-altura del ABC mediatrices del triángulo DEF?

6. ¿Las tres rectas-altura de un triángulo son siempre concurrentes?

7. Arrastrar C, hasta que el punto común a las alturas de ABC esté sobre algunos de sus lados. ¿Cómo es ahora el triángulo ABC?

8. Arrastrar C, para que el punto común a las alturas de ABC sea exterior a ABC. ¿Cómo es ahora el triángulo ABC?

3. Abreviando la construcción de los excentros

Tratamos de determinar los excentros (o exincentros, en terminología clásica) de un triángulo (e.e., centros de las circunferencias tangentes a tres rectas, secantes dos a dos), minimizando el número de operaciones geométricas.

Nuevos comandos utilizados en esta actividad

<u>Crear un ángulo orientado</u>: hacer clic en el icono \checkmark y elegir la opción Angulo, hacer clic sucesivamente en un punto por donde ha de pasar el lado origen del ángulo, en el vértice del ángulo y en un punto del lado extremo del ángulo; aparece en la VG un sector circular (que visualiza la amplitud del ángulo) y el nombre asignado al ángulo (letra griega) igualado a su medida (en sentido positivo o antihorario), lo que también aparece en la VA.

<u>Crear una semirrecta</u>: hacer clic en el icono \checkmark y elegir la opción Semirrecta, hacer clic en el punto origen de la semirrecta y luego en otro punto de la semirrecta; aparece en la VG la semirrecta de origen el primer punto marcado y que pasa por el segundo y en la VA la ecuación de la recta completa y las coordenadas de ambos puntos.

<u>Crear la recta bisectriz de un ángulo orientado</u>: hacer clic en el icono in para elegir la opción <u>Bisectriz</u> y hacer clic sucesivamente en el punto sobre lado origen, en el vértice y en el punto sobre lado extremo usados para crear el ángulo; entonces aparece en la VG la recta bisectriz y en la VA su ecuación. (Si se hace clic en otros puntos de los lados del ángulo, entonces aparecen las dos bisectrices perpendiculares del ángulo y de su adyacente).

Ejecución de la construcción (Fig. 3)

Se puede comenzar cerrando la VA, para aumentar el espacio de la VG.

Crear tres puntos no alineados, A, B, C.

Trazar las rectas AB, BC, CA.

Usando el comando Polígono, crear el triángulo ABC.

Trazar las bisectrices interiores de cada uno de los tres ángulos del triángulo.

Determinar el punto de intersección, D de dos de esas bisectrices interiores. Trazar por D una perpendicular al lado AB.

Determinar el punto de intersección, E de esa perpendicular con el lado AB. Trazar la circunferencia de centro D que pasa por D (inscrita en ABC).

Crear un punto F sobre la recta BC, de modo que B esté entre C y F.

Trazar la bisectriz del ángulo exterior ABF del triángulo ABC.

Determinar el punto de intersección, G, de esa bisectriz exterior con la del ángulo interior C del triángulo ABC.

Trazar por G una perpendicular al lado AB.

Determinar el punto de intersección, I, de esa perpendicular con el lado AB. Trazar la circunferencia de centro G que pasa por I (circunferencia excrita de ABC tangente al lado AB).

Trazar de modo análogo las otras dos circunferencias excritas de ABC (la tangente al lado BC y la tangente al lado CA).

Ejercicios sugeridos

1. Arrastrar los vértices de ABC, para observar que se conserva la configuración de la Fig. 3, es decir, que las cuatro circunferencias siguen siendo tangentes a las tres rectas AB, BC, CA.

2. Crear el ángulo DBG de las bisectrices interior y exterior de vértice B, para ver su medida.

3. Arrastrar los vértices del triángulo ABC y comprobar que el ángulo DBG sigue siendo recto. ¿Por qué?

4. Observar que la perpendicular por B a la bisectriz interior del ángulo B pasa por dos excentros de ABC.

5. Aprovechar la perpendicularidad del ejercicio anterior para abreviar la construcción de la configuración de la Fig. 3, realizando el menor número posible de ejecuciones de comandos de GeoGebra (menor número posible de operaciones geométricas). ¿Cuantas?



Fig. 3: Incentro y excentros del triángulo ABC

4. Pentágono y pentadecágono regular con el áureo

Tratemos de dividir la circunferencia en diez arcos iguales para construir polígonos regulares de 5, 10 y 15 lados (sin hacer uso del comando *Polígono regular* de GeoGebra).

Nuevos comandos utilizados para esta actividad

<u>Crear una circunferencia a partir de su centro y radio</u>: hacer clic en \bigcirc para elegir la opción *Compás*, hacer clic sobre el segmento elegido como radio y luego sobre el punto elegido como centro; entonces en la *VG* aparece la circunferencia con su nombre en minúscula y en la *VA* su ecuación.

<u>Crear un arco de circunferencia a partir de un extremo</u>: hacer clic en \bigcirc para elegir la opción Arco de circunferencia, hacer clic en el punto elegido como centro de la circunferencia y luego en el punto elegido como origen del arco y desplazar para hacer clic en el punto elegido como extremo del arco; entonces en la VG aparece el arco y los tres puntos citados y en la VA las coordenadas de los puntos y la longitud del arco.

Consideraciones previas a la construcción

Siendo C el centro de dicha circunferencia y A, B dos de sus puntos consecutivos de división en diez arcos iguales (Fig. 4), entonces el ángulo central ACB, tendrá de amplitud $\alpha = \frac{360}{10} = 36^{\circ}$. La cuerda del arco AB y los dos radios CA y CB son lados de un triángulo isósceles, CAB, cuyos ángulos iguales tienen pues de amplitud $\frac{180-36}{2} = 72^{\circ}$.



Fig. 4: Lado AB del decágono regular de radio CA

Sea P el punto en que la bisectriz del ángulo A del triángulo CAB corta a su lado opuesto (Fig. 4). Al ser $\frac{76}{2} = 36^{\circ}$, los ángulos del triángulo ABPtambién miden 36° , 72° y 72° . Así pues, los triángulos CAB y ABP son semejantes y, en consecuencia, sus lados son proporcionales, $\frac{CA}{AB} = \frac{AB}{BP}$. Denotando por r y c a las medidas del radio CA y la cuerda AB, ello implica (al ser APCisósceles) $\frac{r}{c} = \frac{c}{r-c}$, luego $c^2 + r \cdot c - r^2 = 0$. La raíz positiva de esta ecuación de incógnita c permite expresar c en la forma $c = (\sqrt{5} - 1)\frac{r}{2}$. El segmento de longitud c es el segmento áureo del radio de longitud r.



Fig. 5: Construcción del áureo, AB, del radio CA

Ejecución de la construcción (Fig. 5)

Trazar la circunferencia d de centro C y radio r, y un punto, E, sobre ella. Trazar el radio CE y su punto medio M.

Trazar la circunferencia e de centro M que pasa por C.

Trazar la recta, b, perpendicular por C al radio CE.
Determinar los puntos de intersección, A, D, de b y d.

Trazar el segmento MA y su intersección, F, con e.

Entonces AF es el segmento áureo del radio, r, de d, según comprobaremos.

Ejercicios sugeridos

1. Calcular la longitud del segmento AF (Fig. 5) en función del radio CE. (Sugerencia: calcular la hipotenusa AM del triángulo ACM y restar el radio FM de la circunferencia e). Solución: $AF = (\sqrt{5} - 1)\frac{CE}{2}$.

2. En la configuración de la Fig. 5 aparece también la circunferencia g de centro A que pasa por F, que permite construir la cuerda AB de longitud el áureo de r. Crear el ángulo ACB para comprobar que su amplitud es de 36°.

3. Inscribir en una circunferencia diez cuerdas consecutivas iguales al áureo del radio. Entonces generar un decágono regular con el comando Polígono.

4. Dibujar un pentágono regular inscrito en una circunferencia, dividiéndola en diez arcos iguales y haciendo uso del comando Polígono.

5. En la Fig. 6 aparecen el triángulo equilátero CAD, el arco de circunferencia AD y el punto B de dicho arco, tal que AB es el áureo del radio CA. Así pues, el ángulo BCD mide $60^{\circ} - 36^{\circ} = 24^{\circ}$, luego la cuerda BD abarca un ángulo central de 24°. Como $24 = \frac{360}{15}$, la cuerda BD es lado de un pentadecágono regular inscrito en la circunferencia ABD. (De otro modo, ello sigue de: $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$). Aplicarlo a construir un polígono regular de 15 lados.



Fig. 6: Lado BD del pentadecágono regular de radio CA

5. Reflexiones de ejes paralelos y traslaciones

Se trata de aplicar reflexiones y traslaciones a polígonos, para visualizar y explorar propiedades de estas transformaciones, así como su composición o producto.

Definiciones de estas transformaciones

La reflexión (o simetría axial) de eje la recta r es la transformación en que la imagen de cada punto X es el punto X', tal que r sea la mediatriz del segmento X'. La Fig. 7 muestra un triángulo ABC y su imagen, A'B'C', en la reflexión de eje la recta DE.



Fig. 7: Reflexión de eje DE

Fig. 8: Traslación de vector \overrightarrow{DE}

La traslación de vector DE es la transformación en que la imagen de cada punto X es el punto X', tal que el vector XX' sea equipolente (e.e. de la misma dirección, sentido y módulo) que el vector DE. La Fig. 8 muestra un triángulo, ABC, y su imagen, A'B'C', en la traslación de vector \overrightarrow{DE} .

Comandos para ejecutar reflexiones y traslaciones

<u>Crear la imagen en una reflexión de eje (ya existente)</u>: hacer clic en ra elegir la opción *Refleja Objeto en Recta*, seleccionar una región rectangular que contenga a la figura (o figuras) a reflejar (presionando el ratón mientras se arrastra el cursor desde uno de los vértices del rectángulo hasta su opuesto) y luego hacer clic sobre el eje de reflexión; entonces aparece en la VG la imagen de la figura (o figuras) y en la VA sus coordenadas y/o ecuaciones de dicha imagen.

<u>Crear un vector</u>: hacer clic en el icono \bigcirc para elegir la opción Vector, hacer clic en el lugar elegido como origen del vector y luego en el lugar elegido como extremo del vector; entonces aparece en la VG el vector con el nombre asignado (en minúsculas) y sus extremos, y en la VA las coordenadas del vector y las de su origen y extremo.

<u>Crear la imagen en una traslación de vector (ya existente)</u>: hacer clic en para elegir la opción *Traslacion*, seleccionar una región rectangular que contenga a la figura (o figuras) a trasladar y hacer clic sobre el vector; entonces aparece en la VG la imagen de la figura (o figuras) y en la VA sus coordenadas y/o ecuaciones de dicha imagen.



Fig. 9: Reflexiones de ejes paralelos y traslación resultante

Ejercicios sugeridos

1. Dibujar un polígono y una recta. Crear la imagen del polígono en la reflexión de eje esa recta. Arrastrar algún vértice del polígono para observar cómo se desplaza su imagen en la reflexión.

2. Arrastrar ahora uno de los puntos usados para determinar el eje de reflexión, para observar cómo se desplaza la imagen en la reflexión.

3. Dibujar un polígono y un vector. Crear la imagen del polígono en la traslación por ese vector. Arrastrar algún vértice del polígono original, para observar cómo se desplaza su imagen en la traslación.

4. Arrastrar ahora el origen o el extremo del vector, para observar cómo se desplaza la imagen en la traslación.

5. Dibujar un cuadrilátero no convexo ABCD ("no convexo" para distinguir mejor la conservación del sentido u orientación en el plano), una recta EF y una paralela por G (Fig. 9). Crear la imagen de ABCD en la reflexión de eje EF y luego la imagen de A'B'C'D' en la reflexión de eje la paralela por G. Crear la imagen, F', de F en la reflexión de eje la paralela por G a EF y luego crear el vector $\overrightarrow{FF'}$. Aplicar a ABCD la traslación de vector $\overrightarrow{FF'}$, para comprobar que se llega al mismo polígono que al aplicar sucesivamente las dos reflexiones.

6. Repetir el ejercicio anterior, pero ahora cambiando el orden en que se ejecutan las dos reflexiones, para comprobar que resulta la traslación de vector opuesto al del ejercicio anterior.

7. Ejecutar una reflexión seguida de una traslación de vector perpendicular al eje de reflexión, para comprobar que resulta otra reflexión. Describir cuál es la reflexión resultante.

8. Ejecutar una reflexión de eje EF seguida de una traslación de vector EF, para comprobar que la transformación resultante no es traslación ni reflexión, pero cambia el sentido (es la denominada reflexión con deslizamiento o simetría deslizante).

9. Construir un friso. Para ello, considerar un rectángulo y en su interior dibujar un polígono (que puede tener ejes de simetría). Ahora aplicar a esa región rectangular sucesivas traslaciones de vector un lado de dicho rectángulo y también aplicarle las de vector opuesto. (Ver, por ejemplo, [12, 13]).

6. Reflexiones de ejes secantes y rotaciones

Se trata de aplicar a polígonos rotaciones y reflexiones de ejes concurrentes, para visualizar y explorar sus propiedades y su composición o producto.

Definiciones de estas transformaciones

La rotación de centro D y amplitud el ángulo orientado EFG es la transformación en que la imagen de cada punto X es el punto X', tal que DX'=DXy el ángulo orientado $\widehat{XDX'} = \widehat{EFG}$. La Fig. 10 muestra un triángulo ABCy su imagen A'B'C' en dicha rotación.



Fig.10: Imagen de ABC, en la rotación de centro D y amplitud ÉFG

Comando para ejecutar rotaciones

<u>Crear la imagen en una rotación de centro dado</u>: hacer clic en \bigcirc para elegir la opción Rota alrededor de un punto, seleccionar una región rectangular que contenga a la figura a rotar, hacer clic sobre el centro de rotación, elegir en la ventana que aparece la amplitud en grados o la letra griega con que GeoGebra haya designado el ángulo a rotar y pulsar OK; entonces aparece en la VG la imagen de la figura y en la VA sus datos algebraicos.

Ejercicios sugeridos

1. Dibujar un polígono, un punto y un ángulo orientado. Crear la imagen del polígono en la rotación de ese centro y amplitud. Arrastrar algún vértice del polígono para observar cómo se desplaza su imagen en la rotación.

2. Arrastrar ahora uno de los puntos que determinaron el ángulo, para observar cómo se desplaza la imagen en la rotación.

3. Dibujar un polígono ABCD, una recta EF y otra secante EG (Fig. 11). Crear la imagen de ABCD en la reflexión de eje EF y luego la imagen de A'B'C'D' en la reflexión de eje EG. Crear la imagen, F', de F en la reflexión de eje EG. Aplicar a ABCD la rotación de centro E y amplitud FEF', para comprobar que se obtiene el mismo polígono que con las dos reflexiones.

4. Repetir el ejercicio anterior, pero ahora cambiando el orden en que se ejecutan las dos reflexiones. ¿Qué rotación resulta?

5. Ejecutar una reflexión seguida de una rotación de centro en el eje de reflexión, para comprobar que resulta otra reflexión. ¿Cuál?

6. Construir un rosetón, reiterando sucesivas rotaciones de amplitud fija, divisor de 360°, a un sector circular de esa misma amplitud.



Fig.11: Reflexiones de ejes secantes y rotación

7. Homotecias y simetrías centrales

Se trata de aplicar homotecias y simetrías centrales a polígonos, para visualizar y explorar propiedades de estas transformaciones y su composición.

Definiciones de estas transformaciones

La homotecia de centro el punto D y razón el número real $r(\neq 0)$ es la transformación en que la imagen del punto X es el punto X', tal que $\overrightarrow{DX'} = r \cdot \overrightarrow{DX}$. En consecuencia D, X, X' son colineales (Fig. 12).



Fig.12: Imagen de ABC en la homotecia de centro D y razón 2

La simetría de centro el punto D es la transformación en que la imagen de cada punto X es el punto X', tal que D sea el punto medio del segmento XX'. Es decir, la homotecia de razón -1 (o rotación de 180°).

Comandos para ejecutar homotecias y simetrías centrales

<u>Crear la imagen de una figura en una homotecia</u>: hacer clic en \bigcirc para elegir la opción *Homotecia*, seleccionar una región rectangular que contenga a la figura (un polígono, por ejemplo), hacer clic sobre el centro de homotecia, escribir en la ventana que aparece la razón de homotecia y pulsar OK; entonces aparece en la VG su imagen y en la VA su área y sus vértices.

<u>Crear la imagen de una figura en una simetría central</u>: hacer clic en \mathbb{N} para elegir la opción Simetría Central, seleccionar una región rectangular que contenga a la figura y hacer clic sobre el centro de simetría; entonces aparece en la VG su imagen y en la VA los datos algebraicos.



Fig.13: Composición de homotecias de distintos centros

Ejercicios sugeridos

1. Dibujar un polígono y un punto. Crear la imagen del polígono en la homotecia de centro ese punto y razón 5/2. Arrastrar algún vértice del polígono para observar cómo se desplaza su imagen en la homotecia. Arrastrar ahora el centro de homotecia, para observar cómo se desplaza la imagen.

2. Comparar el área de un triángulo con la de su imagen en una homotecia.

3. Aplicar a un polígono p una homotecia razón 3. A la imagen obtenida, p', aplicarle una homotecia del mismo centro y razón 2, para obtener su imagen, p". Es claro, se puede pasar directamente de p a p" con una única homotecia del mismo centro. ¿Cuál será su razón? Comprobarlo con GeoGebra.

4. Aplicar a un triángulo ABC una homotecia razón 2. A la imagen obtenida, A'B'C', aplicarle una homotecia de distinto centro y razón 3/2, para obtener su imagen, A"B"C". Es claro, que debe haber una homotecia de razón 3 que transforme directamente ABC en A"B"C", pero cómo hallar su centro. La Fig. 13 sugiere una solución. Comprobar que los tres centros son colineales.

5. Comprobar que al aplicar una homotecia seguida de una traslación resulta otra homotecia de la misma razón.

6. Comprobar que al aplicar una simetría de centro A seguida de la simetría de centro B resulta la traslación de vector $2\overrightarrow{AB}$.

7. Comprobar que al aplicar una simetría central seguida de traslación resulta otra simetría central. (Sugerencia: tener en cuenta el ejercicio anterior).

8. Siendo A,B,C,D vértices consecutivos de un paralelogramo, al aplicar sucesivamente esas cuatro simetrías, ¿que transformación resulta?

8. Inversión

Se trata de visualizar y explorar propiedades de la transformación inversión. Definición de inversión

La inversión de polo el punto O y potencia el número real $p(\neq 0)$ es la transformación en que la imagen de cada punto X (distinto de O) es el punto

X', tal que O, X, X' son colineales y $OX \cdot OX' = p$.

El lugar de los puntos dobles o invariantes es la circunferencia de centro O y radio \sqrt{p} . La inversión queda determinada por dicha circunferencia.

La inversión es una transformación involutiva (el producto por sí misma es la identidad). Transforma circunferencias que pasan por el polo en rectas que no pasan y circunferencias que no pasan por el polo en otras que tampoco pasan. En la Fig 14 aparece un triángulo y su imagen en la inversión determinada por la circunferencia de puntos dobles representada en la figura.



Fig.14: Imagen del triángulo CDE en una inversión de polo O

Comando para ejecutar inversiones

<u>Crear la imagen en una inversión</u>: hacer clic en para elegir la opción Inversión, seleccionar la figura a la que se va a aplicar la inversión y hacer clic sobre la circunferencia de puntos dobles (previamente creada); entonces aparece la imagen de la figura en la inversión y en la VA sus coordenadas y ecuaciones, así como las ecuaciones parametrizadas de la inversión que ha utilizado GeoGebra.

Ejercicios sugeridos

1. Dibujar la circunferencia de puntos dobles, un punto P (distinto del polo) y su imagen en la inversión. Comprobar que son colineales con el polo. Desplazar P para observar como se desplaza su imagen.

2. Dibujar un segmento con un extremo interior y otro exterior a la circunferencia de puntos dobles, y obtener su imagen en la inversión.

3. Dibujar una recta y su imagen en la inversión. Desplazar los puntos que determinaron la recta, de modo que esta sea exterior, secante o tangente a la circunferencia de puntos dobles y observar como va variando su imagen.

4. Dibujar algunas rectas de un haz de paralelas y del haz ortogonal (Fig. 15). Determinar sus inversas y observar que se obtiene dos haces de circunferencias ortogonales (la inversión conserva los ángulos, pero no su sentido).



Fig.15: Haces ortogonales inversos

5. El clásico problema de Apolonio, relativo a la construcción de las circunferencias tangentes a tres dadas, puede resolverse por inversión, aprovechando el comando Inversión de GeoGebra. (Vease, por ejemplo, [14] en nuestro Boletín, donde se describe como hacerlo).

6. El problema de las cadenas de Steiner (también denominado porisma de Steiner), consistente en cadenas de circunferencias-eslabones tangentes cada una a la anterior y la siguiente, y todas ellas tangentes exteriormente a una circunferencia dada y tangentes interiormente a otra circunferencia dada, puede resolverse por inversión, aprovechando el comando Inversión de GeoGebra. (Véase, por ejemplo, [15] de nuestro Boletín).

9. Introduciendo datos vía la línea de escritorio

Hasta aquí hemos generado configuraciones geométricas haciendo uso exclusivamente del ratón, haciendo clic sobre los puntos u objetos elegidos y ejecutando las operaciones geométricas, haciendo clic sobre la opción deseada en la ventana desplegable del botón conveniente. Se trata ahora de describir otro modo de operar, introduciendo los datos a través de la línea de escritorio.

Las coordenadas de los puntos iniciales de una configuración y los comandos de las sucesivas operaciones geométricas pueden también ser introducidos a través de la *línea de escritorio* (Input Bar), situada en la parte inferior de la pantalla, rotulada como *Entrada* (Input). Todo ello, naturalmente, con la sintaxis propia de GeoGebra. Para dar brevemente una idea de este modo de operar, lo mejor será ejecutar un ejemplo concreto de generación de una configuración, introduciendo los datos de ese modo, a través de la línea de escritorio.

Se trata de generar la configuración de la Fig. 16 creando sucesivamente: tres puntos no colineales; el triángulo de vértices esos tres puntos; los puntos medios de sus tres lados; la circunferencia que pasa por esos tres puntos medios; el otro punto de intersección de dicha circunferencia con un lado del triángulo; la perpendicular a ese lado por el vértice opuesto.

Ejecución de la introducción de datos

Para construir sobre GeoGebra esta configuración podemos ir introduciendo en la línea de escritorio cada una de las diez siguientes órdenes, pulsando Intro al terminar cada orden. Al ejecutar cada orden el objeto aparece en la VG y sus coordenadas o ecuaciones en la VA. Notaremos que al comenzar a escribir el nombre de cada comando, GeoGebra avanza la sintaxis de sus argumentos en las distintas opciones que el comando ofrece. He aquí esas diez órdenes mencionadas:

A = (1, 1)B=(9,-2)C = (8, 4)Poligono[A,B,C] (aparecen definidos sus lados, denotados a, b c) PuntoMedio[a] (aparece definido D, como punto medio de a) PuntoMedio[b] (aparece definido E, como punto medio de b) PuntoMedio[c] (aparece definido F, como punto medio de c) Circunferencia [D, E, F] (aparece definida la circunferencia, denotada d) Interseca[d,a,2] (aparece el 2^{o} punto común de d y a, denotado G) Perpendicular[A,a] (aparece definida la perpendicular, denotada e) (Por supuesto, aunque las órdenes se hayan introducido por dicha vía, las

figuras se pueden alterar dinámicamente en la forma usual).



Fig.16: Circunferencia de los 9 puntos o de Feuerbach

Ordenación de objetos de la Vista Algebraica: Las coordenadas y ecuaciones que aparecen en la VA se pueden ordenar de otros modos. Para ello, haciendo clic en la flechita situada a la izquierda del rótulo Vista Algebraica, la flechita gira hacia abajo y en la barra gris estrecha situada inmediatamente debajo aparece una flechita, haciendo clic en el cual aparece una ventana desplegable que ofrece ordenar de otros modos: Orden de construcción,...

Ejercicios sugeridos

1. Arrastrar los vértices del triángulo de la Fig. 16, para observar que sigue ocurriendo lo mismo, es decir que d sigue pasando por G.

2. Continuar generando esta configuración añadiendo las perpendiculares por los otros dos vértices a sus lados opuestos (alturas) y sus puntos de intersección con ellos. Después de arrastrar los vértices de ABC, para observar si la circunferencia DEF sigue pasando por esos puntos.

3. Continuar construyendo la misma configuración, añadiendo la intersección de dos de esas perpendiculares (ortocentro) y, a continuación, el punto medio cada segmento de extremos el ortocentro y un vértice de ABC. Después de arrastrar los vértices de ABC, para observar si la circunferencia DEF sigue pasando por dichos puntos medios.

Nota: Los dos últimos ejercicios justifican el nombre de "circunferencia de los nueve puntos". (Si Karl Wilhelm Feuerbach hubiera dispuesto de Geogebra, habría disfrutado mostrando su descubrimiento con esta herramienta).

10. Representación de curvas usando deslizadores

Comencemos representando la gráfica de función $f(x) = x^2 - 2$, introduciéndola en la línea de escritorio. La visión de la gráfica puede ser mejorada de varios modos: cambiando su posición en el rectángulo de VG, acercando o alejando, e incluso poniendo un rótulo sobre la curva. Todo ello puede realizarse como se describe a continuación.

Ejecución de la representación gráfica de una función

1) teclear $f(x)=x^2-2$ en línea de escritorio y pulsar Intro; entonces aparece definida f(x) en la VA y representada en la VG (tal como se muestra en la Fig. 17);

2) hacer clic en el icono para elegir la opción *Desplaza Vista Gráfica*, hacer clic en cualquier lugar y mover el ratón, sin dejar de presionar su botón izquierdo, para desplazar todo conjuntamente (curva y ejes);

3) hacer clic en el icono $\textcircled{\bullet}$ para elegir la opción *Acercar o Alejar* y hacer clic en un punto cualquiera de la *VG*; entonces aumenta o disminuye el rectángulo visible del plano;

4) hacer clic en el icono para elegir la opción *Texto* y hacer clic en un punto de la curva; ahora, en el cuadro *Edita* de la ventana que aparece, escribir el rótulo deseado (*parábola*, por ejemplo) y pulsar *OK*.



Fig.17: Gráficas de $f(x) = x^2 - 2$ y de g(x) = x + 1

Se trata ahora de representar la gráfica de una cualquiera de las funciones de la familia $f(x) = a \cdot x^2 + b$, donde la x es la variable, siendo a y b parámetros. Al introducir la igualdad anterior en la línea de escritorio, Geogebra entiende que la única variable es la que aparece en el primer miembro, x, ofreciendo considerar a a y b como parámetros, de modo que el valor numérico asignado a cada parámetro pueda entonces ser elegido deslizando con el ratón el puntocursor sobre la barra *deslizador*. Ello se ejecuta del modo siguiente.

Ejecución de gráficas para familias de funciones con deslizadores

1) teclear $f(x)=ax\wedge 2+b$ en línea de escritorio y pulsar Intro; al pulsar el botón *Crea deslizadores* en la ventana que aparece, queda definida f(x) en la VA y representada en la VG la curva y dos barras horizontales con un punto-cursor en cada una, que son los deslizadores los parámetros a y b, a los cuales asigna inicialmente valor 1.

2) desplazando con el ratón el punto-cursor sobre un deslizador, hasta que el parámetro tome el valor deseado, tanto la gráfica de la curva, como su ecuación, se actualizan instantáneamente al cambiar el valor del parámetro.

3) definir la familia de rectas $g(x) = c \cdot x + d$, tecleando en línea de escritorio y pulsando Intro; ahora pulsar *Crea deslizadores* en la ventana que aparece, para crear los deslizadores de los parámetros $c \ge d$.

4) hacer clic en \square para elegir la opción *Intersección* y hacer clic sobre la gráfica de f(x) y luego sobre la de g(x); entonces aparecen en la VG los puntos de intersección de ambas curvas y en la VA sus coordenadas.

Nota: Las curvas representadas pueden ser cambiadas de estilo, anchura y color, del modo indicado para objetos geométricos. También el Protocolo de Construcción citado en la sección 1 es válido para cálculos funcionales.

Ejercicios sugeridos

1. Crear las gráficas de las familias de funciones representadas en la Fig. 17 y arrastrar el punto-cursor de cada uno de los 4 parámetros a, b, c, d, para observar cómo varían las gráficas de las curvas y sus puntos de intersección.

2. Crear la gráfica de $f(x) = a \cdot sin(b \cdot x)$ y arrastrar el punto-cursor de cada uno de los 2 parámetros a, b; crear la gráfica de $g(x) = c \cdot x$ y arrastrar el punto-cursor del parámetro c; determinar un punto de intersección de f(x)y g(x), para observar cómo varía al cambiar los parámetros.

11. Visualización de derivadas e integrales

Cálculo y visualización de derivadas

Sobre la gráfica de una función, se puede marcar un punto, dibujar la tangente en él y visualizar su pendiente, así como calcular la función derivada (Fig. 18). Ello puede ser ejecutado en GeoGebra de dos modos: ayudándose del ratón o introduciendo todos los datos a través de la línea de escritorio.



Fig.18: Visualización de la derivada de $f(x) = x^3 - x$

Ejecución con ayuda del ratón

1) teclear $f(x) = x^3 - x$ en la línea de escritorio y pulsar Intro;

2) hacer clic en \square para elegir la opción *Punto en objeto* y hacer clic en un punto de la gráfica (aparecen sus coordenadas en la *VA*);

3) hacer clic en Dara elegir la opción *Tangentes* y hacer clic en el punto y en la curva (aparece dibujada la tangente y su ecuación);

4) hacer clic en \checkmark para elegir la opción *Pendiente* y hacer clic en el punto (aparece visualizada la pendiente, mediante un triángulo de base 1 y altura la pendiente, *m*, y en la *VA* el valor de *m*);

5) hacer clic en $\boxed{\mathbb{N}}$ para elegir la opción *Elige y Mueve* y hacer clic el punto sobre la gráfica (los valores numéricos se van actualizando solos);

6) teclear Derivada [f] en la línea de escritorio (aparece representada la gráfica de la función derivada, f', y definida en la VA).

Ejecución sobre la línea de escritorio

Alternativamente a la ejecución anterior, los pasos pueden ser ejecutados escribiendo sucesivamente en la línea de escritorio:

```
f(x)=x∧2-3x+2
abs=0.67
t=Tangentes[f,abs]
m=Pendiente[t]
Derivada[f]
```

Cálculo y visualización de integrales

Para calcular, por ejemplo, la integral definida $\int_0^{\pi} (sen(x) + cos(x)) dx$ podemos introducir en la línea de escritorio:

f(x)=sen(x)+cos(x)Integral [$f(x), 0, \pi$]

donde el símbolo π (minúscula) se obtiene de la tabla que aparece al hacer clic en α , a la derecha de la línea de escritorio. Entonces aparece representada la interpretación gráfica de la integral (Fig 19) y su valor en la VA.



Fig.19: Visualización de la integral definida $\int_0^{\pi} (sen(x) + cos(x)) dx$

La integral indefinida o primitiva de la misma función, se obtiene tecleando en la línea de escritorio Integral[f(x), x] y entonces aparece la primitiva de f(x) con constante de integración nula y su gráfica en la VG.

Cálculo y visualización de límites

Para calcular, por ejemplo, el límite finito $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}$ podemos introducir en la línea de escritorio:

f(x)=sen(x)/xLimite[f(x),0]

y aparece el valor del límite en la VA y la gráfica de f(x) en la VG.

Nota: Al introducir la palabra *Limite* en la línea de escritorio, se ofrece calcular límite superior o inferior, etc.

Ejercicios sugeridos

1. Calcular y visualizar la derivada respecto de x de $f(x) = a \cdot sen(b \cdot x)$ en un punto, para valores iniciales 1 de los parámetros. Arrastrarlo sobre la gráfica para observar cómo varía la pendiente. Ahora, ir cambiando los valores de los parámetros para ver cómo varía la pendiente.

2. Calcular y visualizar la integral definida $\int_0^a e^{-x^2} dx$ para valor inicial 1 del parámetro a. Aumentar el valor de a y observar como cambia el resultado.

3. Representar $f(x) = \frac{x^2}{e^x} y$ calcular el límite de f(x) para $x = \infty y$ para $x = -\infty$. Comparar los resultados con la observación de la gráfica de f(x), para concluir si eran previsibles.

Nota: Ejercicios de mayor nivel sobre funciones pueden verse en [16].

12. Resolución gráfica y cómo "sistema simbólico"

Se trata de resolver aproximadamente sistemas de dos ecuaciones polinómicas de grado menor que 3 y dos incógnitas, determinando sus puntos de intersección. Consideremos, por ejemplo, el sistema de ecuaciones

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$$
; $x^2 - y^2 = 1$

Ejecución de la resolución gráfica

1) teclear $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ en la línea de escritorio y pulsar Intro;

2) teclear $x^2 - y^2 = 1$ en la línea de escritorio y pulsar Intro;

3) hacer clic en el icono \square para elegir la opción *Intersección* y hacer clic en una y otra gráfica; aparecen en la VG sus puntos comunes y en la VA las coordenadas de estos (Fig. 20).



Fig.20: Resolución gráfica del sistema: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$, $x^2 - y^2 = 1$

GeoGebra también permite resolver ecuaciones introduciendo datos como si se tratara de un sistema de cálculo simbólico (CAS), como se muestra a continuación. Nada mas abrir GeoGebra, en la ventana emergente Apariencias, situada a la derecha, comenzamos eligiendo CAS y Gráficos. Entonces aparecen otros iconos en la parte superior, de izquierda a derecha: evaluación exacta, aproximada, conserva entrada, factorización, desarrollo, sustitución, resolución, resolución numérica, derivada, probabilidad y elimina. Notemos que no aparece línea de escritorio, sino que van apareciendo sucesivas regiones numeradas en vertical (Fig. 21). Para concretar, suponiendo que se trata de determinar los puntos en que toman valores iguales las dos funciones $f(x) = x^3 - 1$ y g(x) = 2x - 1/2, podemos operar del siguiente modo.

Ejecución al modo de sistema simbólico (CAS)

1) en la región 1 introducimos $f(x) := x^3 - 1$ (con := de asignación) y pulsamos Intro; entonces, dentro de la misma ventana, aparece debajo repetida dicha función y simultáneamente en la VG aparece representada la función (pudiendo ser cambiados su color y anchura, del modo ya conocido).

2) en la región 2 introducimos, de igual modo, g(x) = 2x - 1/2

3) en la región 3 introducimos la ecuación f(x) - g(x) = 0

4) pulsando el botón \mathbf{x} = aparece debajo *Resuelve* y la lista de soluciones. (Si las soluciones exactas son incómodas de expresar, se devuelven aprox.).



Fig.21: Resolución al modo CAS de $x^3 - 1 = 2x - 1/2$

Ejercicios sugeridos

1. Determinar por método gráfico los puntos comunes de $f(x) = sen(a \cdot x) y$ $g(x) = b \cdot x$, dando valores a los parámetros a y b, de modo que se obtengan 3 soluciones distintas (aplicar Intersección una vez fijados los parámetros).

2. Resolver de modo exacto la ecuación $x^3 - x = 0$, para observar que se obtienen soluciones exactas (no aproximadas).

13. Sintaxis de los cálculos matriciales

GeoGebra permite ejecutar muchos cálculos matriciales usuales. Las matrices se definen introduciéndolas en la línea de escritorio y van apareciendo en la VA (Fig. 22) y en el *Protocolo de Construcción* (el cual es ofrecido como opción en la ventana de *Vista*). En el Protocolo las matrices aparecen con el nombre de *listas*, por ser gestionadas por GeoGebra como "listas de listas".

Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda				
▼ Vista Algebraica 🛛 🗙	 Protocolo de Construcción 			
(12)	n° Nombre	Definición	Valor	Rótulo
$O M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$	1 Lista M		$M = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$	
$O G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	2 Lista G		G = {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}}	
$O N = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 10 & 64 \end{pmatrix}$	3 Lista N	GM	N = {{22, 28}, {49, 64}}	
$(49 \ 64)$	4 Lista F	MG	F = {{9, 12, 15}, {19, 26, 33}, {29, 40, 51}}	
$O F = \left(\begin{array}{cc} 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{array} \right)$	5 Número a	Determinante[F]	a = 0	
○ a = 0 ○ H indefinido	6 Lista H	Inversa[F]	H indefinido	

Fig.22: Cálculos matriciales

Ejecución de los cálculos matriciales que aparecen en la Fig. 22 1) definir la matriz M de 1^a fila (1, 2), 2^a fila (3, 4) y 3^a fila (5, 6) tecleando M = {{1, 2}, {3, 4}, {5, 6}} y pulsando Intro; en la VA aparece la matriz con la notación usual (la VG puede ser cerrada previamente).

- 2) definir la matriz $G=\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$
- 3) definir la matriz producto N=G*M
- 4) definir la matriz producto F=M*G
- 5) calcular el determinante de esta última, tecleando a=Determinante[F]
- 6) intentar calcular la matriz inversa de F, tecleando H=Inversa[F]

Nota: En la sección 5 se definieron vectores a partir de su origen y extremo. También se pueden definir directamente en la línea de escritorio a partir de sus coordenadas. Por ejemplo, el vector v de coordenadas (4,3) se define tecleando v=Vector[(4,3)], apareciendo entonces en la VA como vector columna (y también, a la vez, en la VG, en el caso de vectores de dimensión 2).

Ejercicios sugeridos

1. Definir la matriz $R = \{\{\cos(\pi/3), -\sin(\pi/3)\}, \{\sin(\pi/3), \cos(\pi/3)\}\}, de$ rotación de 60° alrededor del origen; definir el vector v = (2,0) en la línea de escritorio; finalmente definir el vector w=R*v, para observar en la VG que w es la imagen de v en la rotación de 60° alrededor del origen.

2. Definir la matriz S de la simetría axial de eje el de abscisas; definir sobre la línea de escritorio el vector v = (1, 2); finalmente definir el vector w=S*v, para observar en la VG que w es la imagen de v en dicha reflexión.

14. Calculando y visualizando líneas de regresión

GeoGebra también permite determinar automáticamente líneas de regresión. Se trata, por ejemplo, de establecer la relación entre las calificaciones obtenidas por 15 alumnos en dos asignaturas, A y B. Los datos considerados: (5,6), (2,4), (4,5), (4,4), (5,4), (5,6), (7,8), (8,9), (6,5), (10,9), (5,7), (3,4),(6,6), (7,6), (8,8), se entiende que son los pares de calificaciones obtenidas por los alumnos en ambas asignaturas.

Ejecución para generar la recta de regresión de la Fig. 23

(Una vez arrancado GeoGebra, podemos cerrar la VG, por no utilizarse).

1) Hacer clic en Vista de la barra superior y seleccionar Hoja de cálculo.

2) En la hoja de cálculo que ha aparecido, introducir en cada una de sus filas un par de calificaciones (1^{*a*} componente en la columna $A \ge 2^{a}$ en la B).

3) Seleccionar en la hoja de cálculo el rectángulo que contiene a las casillas a considerar, operando así: hacer clic en la casilla del vértice superior izquierdo del rectángulo, pulsar la tecla de mayúsculas y, sin soltarla, hacer clic en la casilla del vértice opuesto del rectángulo (entonces éste queda coloreado).

4) Hacer clic en el icono aparece la ventana Fuente de datos y al hacer clic en su tecla Analiza, aparece la ventana Análisis de datos, con la nube de puntos correspondiente a la distribución considerada.

5) Ahora se puede elegir *Modelo de regresión*, haciendo clic en la flechita hacia abajo situada a la derecha de "Ninguno". Eligiendo *Lineal*, aparece en rojo la gráfica de la recta de regresión (de y sobre x) y su ecuación, y = 0.74x + 1.88. 6) Al escribir en la ventanita bajo la ecuación un valor para x y pulsar Intro, aparece en la ventanita a su derecha el correspondiente valor de y de la recta de regresión obtenida. Así, para x = 6.5, aparece a su derecha y = 6.6826.



Fig.23: Recta de Regresión

Nota 1: Si se hubiera elegido, por ejemplo, *Polinomio*, en vez de Lineal, habría aparecido el polinomio de grado 2 que mejor se ajusta a esa distribución (gráficamente *la parábola*, en vez de la recta que mejor se ajusta).

Nota 2: También se puede calcular automáticamente el histograma de una distribución unidimensional, eligiendo *Análisis de una variable*, en vez de Análisis de Regresión de dos variables, en el paso 4) de la ejecución anterior.

Ejercicios sugeridos

1. Calcular y dibujar la curva de regresión de grado 2 que mejor se ajusta a la distribución siguiente: (5, 4), (6, 2), (4, 5), (3, 6), (5, 3), (7, 4), (8, 9), (2, 6), (6, 2), (10, 9), (5, 4), (2, 5).

2. Determinar el histograma de la distribución unidimensional siguiente: (1,1), (2,2), (3,2), (4,4), (5,6), (6,6), (7,4), (8,2), (9,1)

donde la 1^a componente de cada par es el valor de la variable y la 2^a componente es la frecuencia absoluta, para ese valor de la variable.

15. Lugar geométrico con rastro y animación

Al hacer clic en el icono podemos elegir la opción *Lugar geométrico*. Se trata de un comando específico para determinar lugares. Vamos a aplicarlo a hallar el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos sea constante, para obtener una elipse por el método del jardinero.

Pasos de la construcción (Fig. 24)

Crear dos puntos distintos, denotados $A ext{ y } B$. Crear el segmento AB, denotado a. Crear un punto C sobre el objeto a (distinto de $A ext{ y } de B$). Crear el segmento AC, denotándolo b. Crear el segmento CB, denotándolo c. Crear dos puntos distintos, $D ext{ y } E$, tales que dist(D, E) < aCrear la circunferencia de centro $D ext{ y }$ radio b, denotada d. Crear la circunferencia de centro $E ext{ y }$ radio c, denotada e. Crear los puntos de intersección de $d ext{ y } e$, denotados $F ext{ y } G$. Crear el lugar de F al desplazarse C sobre el segmento a (activando Lugar geométrico, haciendo clic en $F ext{ y }$ luego en C, se obtiene la semielipse superior). Crear el lugar de G al desplazarse C sobre el segmento a (activando Lugar Geométrico, haciendo clic en G y luego en C, se obtiene la semielipse inferior). <u>Animación</u>: Haciendo clic con el botón derecho del ratón sobre C, se abre un menú contextual y eligiendo la opción Animación activada, se anima con movimiento C y, consecuentemente, F y G. Para parar repetir lo mismo. <u>Rastro</u>: Del mismo modo, haciendo clic sobre G y eligiendo la opción Rastro activado, al desplazar C, entonces G va dejando un rastro de puntos gruesos.



Fig.24: Lugar geométrico "elipse"

Ejercicios sugeridos

1. Construir sobre Geogebra el lugar geométrico "hipérbola", como lugar de los puntos cuya diferencia de distancias a dos fijos sea constante.

2. Construir sobre Geogebra el lugar geométrico "parábola", como lugar de los puntos equidistantes de un punto y una recta dados.

3. Dadas la recta AB, una paralela p (distinta de AB) y un punto P sobre la recta p, se considera la recta AP, su perpendicular por B y el punto de intersección X de estas dos últimas rectas. Construir el lugar del punto X al desplazarse P sobre la recta p.

16. Esfera mirándose al espejo en 3D

La versión 5 (v. provisional) de GeoGebra también permite operar en 3D. Tratemos, por ejemplo, de reflejar una esfera en un plano y mover la esfera, para observar como entonces se desplaza su imagen en la simetría especular.

Comenzamos a operar en GeoGebra 3D

Una vez cargada la v.5, elegir Algebra y Gráficos 3D en la ventana emergente inicial. Aparece entonces la Vista Gráfica 3D (en adelante VG3D) con sus tres ejes de coordenadas (rojo, verde y azul) con marcas en los puntos de coordenadas enteras y un plano gris conteniendo a los ejes rojo y verde (en adelante, plano z = 0). Todo ello dentro del ortoedro de representación 3D.

<u>Crear un nuevo punto con el ratón</u>: Hacer clic en el icono para elegir la opción Punto y hacer clic en un punto del plano gris (z = 0), que queda marcado y denotado A, apareciendo sus coordenadas en la VA (con tercera coordenada nula); al hacer clic de nuevo sobre ese punto aparecen dos flechas (hacia arriba y abajo) y sin dejar de pulsar el botón izquierdo del ratón, el punto se puede desplazar hacia arriba o abajo, para fijar su tercera coordenada, z, al soltar el botón del ratón, apareciendo entonces actualizada esa tercera coordenada en la VA. (De este mismo modo, se puede alterar la coordenada z de cualquier punto previamente dibujado).

<u>Crear un nuevo punto usando la línea de escritorio</u>: alternativamente, para crear, por ejemplo, el punto de coordenadas (3, 2, 1), se teclea sobre la línea de escritorio Punto [{(3,2,1)}] y se pulsa Intro.

Pasos de la construcción de la Fig. 25 (similar a cómo se hacía en 2D)

Crear el punto de coordenadas (3, 2, 1), que será denotado A.

Crear la recta paralela por A al eje rojo, que será denotada a.

Crear un punto sobre la recta a, que será denotado B.

Crear el plano perpendicular por B a la recta a.

Crear un punto sobre la recta a, que será denotado C.

Crear la esfera de centro C y radio 1.

Crear la imagen de esta esfera en la simetría respecto del plano anterior. (Esta sucesión de pasos es guardada automáticamente por GeoGebra en el Protocolo de Construcción, al igual que ocurría en 2D).

<u>Nota</u>: Haciendo clic en el icono C y eligiendo la opción Rota la Vista Gráfica 3D, se arrastra con el ratón el ortoedro de representación 3D.



Fig.25: Esfera reflejándose en un espejo

Ejercicios sugeridos

1. Realizar la construcción descrita. Mover el punto C sobre la recta a, para observar como se desplaza la esfera de centro C y su imagen. Mover ahora el punto B sobre a, para observar como se desplaza sólo la esfera imagen.

2. Construir un tetraedro y aplicarle la misma reflexión especular anterior, para comprobar si esa transformación 3D cambia el sentido.

3. Aplicar una rotación de eje z y amplitud 90° a un tetraedro, para observar si esa transformación 3D cambia el sentido.

4. Del mismo modo, comprobar si una simetría central cambia el sentido. Lo mismo para una homotecia de razón negativa. ¿Y si la razón es positiva?

Nota: Los tres últimos ejercicios pueden resolverse alternativamente vía algebraica, comparando el signo del producto mixto de tres vectores-arista de origen común un vértice del tetraedro con el producto mixto de sus imágenes.

Conclusiones

Somos conscientes de la existencia de docentes entusiastas y detractores de la incorporación de los SGD a la educación matemática, pero no conocemos a ninguno que habiéndolo utilizado haya desistido de seguir usándolo.

Por supuesto, no hemos descrito todos los comandos de GeoGebra 2D (por ejemplo, cónicas) y apenas hemos iniciado GeoGebra 3D, por razones de espacio. Pero el propósito de este artículo era exclusivamente el de mostrar el interés didáctico de la visualización y exploración de problemas geométricos con un *SGD* que, además, es gratuito y al alcance de todos.

Deseamos que las actividades presentadas sean de utilidad a usuarios de este SGD y que otros, no usuarios, hayan sido motivados a interesarse por él.

Referencias

- [1] P. Puig Adam (1960), *La matemática y su enseñanza actual*. Ministerio de Educación. Madrid.
- [2] M. de Guzmán (1996), El Rincón de la Pizarra. Ed. Pirámide, Madrid.
- [3] www.cabri.com

- [4] http://www.keycurriculum.com/
- [5] http://www.cinderella.de
- [6] www.geogebra.org
- [7] E. Roanes M., E. Roanes L. (1994), Nuevas Tecnologías en Geometría. Ed. Complutense, Madrid.
- [8] E. Roanes L., E. Roanes M., M. Villar (2003), A Bridge Between Dynamic Geometry and Computer Algebra. Mathematical and Computer Modelling, Vol. 37, n^o 9-10, págs. 1005-1028.
- [9] Anonymous (2013), Guía de Referencia Rápida de GeoGebra 4.2. En: http://www.geogebra.org/help/geogebraquickstart_es.pdf
- [10] Gerrit Stols (2013), GeoGebra 4.2 in a nutshell. University of Pretoria, South Africa. En: http://school-maths.com/documents/GeoGebra_4. 2_nutshell_stols.pdf
- [11] Anonymous (2014), Introduction to GeoGebra (vers. 4.4). Johannes Kepler University, Linz, Austria. En: http://www.geogebra.org/book/ intro-en.pdf
- [12] E. Roanes M., E. Roanes L. (1994), Geometría en la ornamentación periódica. Revista UNO, vol. 2, págs. 35-41.
- [13] E. Roanes M., E. Roanes L. (2001), Generación de los 17 Grupos de Simetría del Plano. Simulación Informática de sus Teselaciones. Bol. de la Soc. "Puig Adam", nº 27, págs. 53-76.
- [14] E. Roanes M., E. Roanes L. (1994), La Inversión y su simulación. Bol. de la Soc. "Puig Adam", nº 34, págs. 47-74.
- [15] E. Roanes M., E. Roanes L. (2005), Un método recursivo para construir cadenas de Steiner de circunferencias. Bol. de la Soc. "Puig Adam", nº 70, págs. 47-64.
- [16] M. López Beltrán (2014), GEOmetría + alGEBRA = GEOGEBRA. La Gaceta de la RSME, Vol. 17, n^o 2, págs. 349-359.

Mitos en la historia de las matemáticas

Javier Peralta

Facultad de Formación de Profesorado y Educación Universidad Autónoma de Madrid javier.peralta@uam.es

Abstract

In the present paper we explain, fundamentally, which were the most important myths in the classical Greece about the configuration of the universe: his arithmetization, from the Pythagoreans (and the corresponding of the Zenón's critiques to his arguments), and the conception of the geometry as a way to describe the world. With them we study also, briefly, the myths of the existence of a unique logically conceivable geometry and the structural perfection in the construction of the foundations of the mathematics.

> A la memoria del profesor Alberto Aizpún, que siempre fue joven

Introducción

En el artículo se expondrán varios importantes mitos que han surgido a lo largo de la historia de las matemáticas; con mayor extensión, los nacidos en el seno de la matemática griega sobre la configuración del universo: dos de origen aritmético y uno de tipo geométrico. Los dos primeros son el mito de la aritmetización del universo, de los pitagóricos, y el que trata de destruir su teoría (de la concepción del cuerpo como suma de puntos, el tiempo como suma de instantes...), debido a Zenón. El tercero, que inicia construyendo Platón, es la consideración de la geometría como manera de describrir el mundo.

El trabajo se completa con el estudio posterior de otros dos mitos, tratados de forma resumida: la existencia de una única geometría lógicamente concebible

(la euclídea) y la concepción formal de que la aritmética está libre de contradicciones.

Como algunos o muchos de los contenidos del artículo serán conocidos por el lector, parece obligado explicar qué razón ha movido a escribirlo, que es la siguiente. La de presentar los distintos mitos en una visión de conjunto, facilitando en un mismo documento una colección integrada de algunos de los más importantes surgidos en el desarrollo de las matemáticas, que generalmente aparecen aislados en la literatura correspondiente y que, además, es posible que se hubieran estudiado pasando de puntillas por ellos, sin tiempo suficiente para una reflexión serena. Si el lector es profesor, valorará, si –en el caso de que no esté haciéndolo ya- algunos de tales mitos podrían ser explicados en sus clases de bachillerato o universitarias, adaptándolos en su caso al nivel adecuado de sus alumnos.

1. Los pitagóricos y la aritmetización del universo

Como afirma Le Lionnais, en la matemática clásica el número tiene al menos el mismo papel que la célula en los organismos vivos; y su importancia ha sido también indiscutible a lo largo de toda la historia (en el siglo XIX, Balzac aseguraría que sin ellos la civilización caería en pedazos).

Para los pitagóricos, en concreto, tenían una gran trascendencia, pues el número era considerado el principio de todas las cosas, como explícitamente queda recogido en la siguiente reflexión, debida al filósofo pitagórico Filolao: "*El número reside en todo lo que es conocido. Sin él es imposible pensar nada ni conocer nada*" (citado en Le Lionnais, 1976, p. 80).

Para Pitágoras el universo era un cosmos, un todo ordenado y armoniosamente conjuntado, siendo los números el armazón inteligible de las formas. Desvelaban las proporciones que regían las consonancias musicales y, aún más, gobernaban todo, desde el cuerpo humano a los cuerpos celestes. El número era, en resumen, el principio inteligible a través del cual el cosmos divino dirigido por el espíritu manifestaba al hombre su armonía interna. El secreto de la armonía de los números, pues, debía de ser un paso previo a la comprensión del universo. Como puede advertirse, además, los pitagóricos tuvieron el mérito de haber aproximado la astronomía a la aritmética y a la geometría, y también a la música (Rioja y Ordóñez, 1999), relacionando así las disciplinas del *quadrivium*.

Este mito, el de la aritmetización del universo, se sustentaba en una "teoría atómica" según la cual todo objeto estaba formado por un cierto número de

"átomos" que contenía. Y esa aritmetización tan radical de la realidad se extendió también a la geometría, dando lugar con ello a la teoría de la proporcionalidad de segmentos y a la reducción de las razones geométricas a razones numéricas.

Pero a mediados del siglo V a. C. se produjo en la escuela pitagórica un descubrimiento sorprendente e inquietante, encaminado a destruir un sueño tan maravilloso. Ese indeseable hallazgo, que parecía obra de espíritus malignos y ocasionó el hundimiento del mito de la teoría atómica de la extensión geométrica, abriría sin embargo el camino a diversas investigaciones posteriores. Me estoy refiriendo, claro está, al descubrimiento de pares de segmentos inconmensurables; o sea, a la aparición de los números irracionales, causa de la primera crisis de fundamentos de la matemática.

En un viejo escolio del décimo libro de los *Elementos* de Euclides, atribuido a Proclo, se puede leer cómo fue acogido este descubrimiento por los helenos: "*Es fama que el primero en dar al dominio público la teoría de los irracionales pereciera en un naufragio, y ello porque lo inexplicable e inimaginable debería siempre haber permanecido oculto. En consecuencia, el culpable, que fortuitamente tocó y reveló este aspecto de las cosas vivientes, fue trasladado a su lugar de origen, donde es flagelado a perpetuidad por las olas*" (citado en Peralta, 1996, p. 36).

Parece ser, por otro lado, que el número irracional fue encontrado en los momentos menos esperados y cuando era previsible la máxima regularidad: no se sabe con seguridad si el tratar de determinar la razón de la diagonal de un cuadrado a su lado (lo que daría lugar a la aparición de raíz cuadrada de 2) o al calcular la razón de la diagonal al lado del pentágono regular (que condujo al descubrimiento de la razón áurea). Concretamente, el descubrimiento de tales segmentos inconmensurables tuvo lugar al tratar de hallar una unidad de medida común a dos segmentos dados (versión geométrica del denominado más tarde algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de dos números, y que los pitagóricos denominaron "antiphairesis"), observando que al aplicarlo a la diagonal del cuadrado o del pentágono regular el proceso no terminaba jamás (Guzmán, 1986).

Este descubrimiento tuvo serias consecuencias para la doctrina pitagórica: la primera de ellas, la conclusión de que efectivamente la geometría no era aritmética, como asimismo, que los objetos matemáticos no eran tan simples como se había pensado, puesto que las propiedades que parecían a la intuición claramente verdaderas, como que dos segmentos admiten siempre una unidad de medida común, se comprobaron falsas. En resumen, que la tesis de la teoría

atómica de la extensión geométrica era insostenible, lo que tiraba por tierra el mito de la aritmetización del universo (*ibíd*.).

Aunque bien es cierto que al lado de estos aspectos negativos, se extrajeron asimismo conclusiones de signo radicalmente contrario, como el hecho de la ampliación del campo numérico, el estímulo para el estudio de la razón áurea y el interés por la investigación en aritmética y teoría de números, lo que impulsó el desarrollo de estas ramas de las matemáticas. Pero acaso lo más interesante es que sentó las bases para el estudio de las sucesiones, las series numéricas y otros procesos infinitos, que, junto al postulado de Eudoxo-Arquímedes, constituirían el germen de lo que veinte siglos más tarde sería el análisis infinitesimal, al ser retomadas esas viejas ideas por Newton y Leibniz, y aquellos predecesores suyos que trabajaron en algoritmos infinitos (Vieta, Cataldi, Wallis...).

2. Los argumentos de Zenón

Un siglo después de Pitágoras surgen las primeras críticas a su teoría debidas a Zenón de Elea, que trata de destruir el objeto más sagrado de su escuela: la noción de número, aunque en un aspecto muy particular: en la concepción de los cuerpos como suma de puntos, del tiempo como suma de instantes o del movimiento como suma de pasajes de un lugar a otro. Las ideas de Zenón, por el contrario, se basan en la creencia de que un número ilimitado de cantidades positivas no puede tener una suma finita.

Con su célebre paradoja refuta la hipótesis de que las magnitudes geométricas estén compuestas por entes indivisibles y extensos, ya que, según razona, si algo está compuesto de elementos inextensos, por grande que sea su número, no puede dar sino una cantidad inextensa, es decir, nula. Pero, por otra parte, las unidades que componen toda la pluralidad deben estar separadas por algo, entre ese algo y la unidad anterior ha de haber a su vez otro algo, y así sucesivamente, de manera que un conjunto de infinitos elementos no puede dar sino una cantidad infinita. Luego toda pluralidad es nula e infinita al mismo tiempo.

Todo ello alude a la divisibilidad infinita de las cantidades, y pone en evidencia el peligro que entrañaba el manejo poco cuidadoso de un concepto tan vago como el infinito. Sin embargo, el mito de la escuela de Zenón de que un número ilimitado de cantidades positivas no puede tener una suma finita, fue desmontado siglos después con la teoría de las series infinitas, cuando se probó que, en muchos casos, la suma de un conjunto de infinitos números es en cambio finita.

Es bien conocido, por otro lado, su argumento para derribar la idea de movimiento como suma de pasajes, mediante --entre otras- la reflexión sobre la persecución de Aquiles, "el de los pies ligeros", a la tortuga que camina alejándose de él. Concluye que es imposible alcanzarla, porque estando en el instante de partida a una cierta distancia de ella, debe franquear un segundo instante en que la distancia será la mitad de la inicial, en el siguiente instante estará a un cuarto de la primera distancia, y así sucesivamente. Por supuesto que Zenón no cree en la inexistencia del movimiento: sabía que Aquiles alcanzaría a la tortuga en pocos instantes o que una flecha disparada por un arco efectivamente llegaría a su meta. Lo que quería dejar claro son las dificultades que presenta el mito de la existencia de una unidad última intrínsecamente indivisible, que lleva al concepto de continuidad como una de las notas del ser, echando por tierra la noción de discontinuidad que había inducido a los pitagóricos al "escándalo de los irracionales". Además, esa dicotomía del "ser" y "no ser" sentaba las bases del principio lógico de no contradicción, que en matemáticas llevaría a un importante recurso de demostración: el método de reducción al absurdo (Zenón fue el padre de la dialéctica, cuyo razonamiento característico es el que más tarde se llamaría método indirecto o método de reducción al absurdo).

Con esto finaliza el estudio del mito de la concepción pitagórica del universo y el debido a sus detractores, sustentados los dos en el concepto de número, como asimismo un esbozo de las consecuencias que posteriormente tuvieron ambas hipótesis. A continuación, será la otra rama de las matemáticas entonces existente la que juegue un papel fundamental en las teorías de la configuración del universo.

3. La geometría como manera de describir el mundo

Comenzaré en el siglo IV a. C., con la creencia de la constitución del mundo a partir de los cuatro elementos: fuego, aire, agua y tierra. Platón consideraba que los cuatro elementos eran cuerpos, y que todos los cuerpos eran sólidos. Como el universo sólo podía haber sido creado a partir de cuerpos perfectos, dichos elementos debían existir en forma de sólidos regulares, por lo que echó mano de los cinco poliedros regulares, ya estudiados en los *Elementos* de Euclides.

Platón, entre afirmaciones pseudomatemáticas tan curiosas como que "el aire es al agua como el agua es a la tierra", concluyó que "El fuego tiene la forma de tetraedro, puesto que el fuego es el elemento más pequeño, ligero y agudo ...; la tierra debe tener la forma de cubo, el sólido más estable de los cinco; mientras que el agua, el más móvil y fluido de los elementos, ha de tener como forma propia, o "semilla", el icosaedro, el sólido más cercano a la esfera y, por tanto, el que con mayor probabilidad puede rodar fácilmente. El aire, de tamaño, peso y fluidez, en cierto modo intermedios, se compone de octaedros" (citado en Dunham, 1992, pp. 113-114). Sin embargo, de ese modo había agotado todos los elementos, pero aún le quedaba un sólido regular por incluir en su explicación: el dodecaedro; así que despachó el asunto diciendo que ésta era la forma "que los dioses emplean para disponer las constelaciones en los cielos" (ibíd., p. 114). El dodecaedro, por lo tanto, representaría la forma del universo.

Sea como fuere, lo que parece innegable es que el mito de la concepción cosmológica platónica fue un interesante punto de partida para otras fructíferas teorías, además de potenciar una investigación más profunda de los cinco sólidos platónicos. Luca Pacioli, por ejemplo, profesor de Copérnico en Bolonia, haría un importante estudio de los poliedros regulares y sus relaciones con la "divina proporción", todo ello enmarcado en una filosofía neoplatónica entonces de actualidad.

Kepler, descubridor de las leyes del movimiento de los planetas, seguiría esa línea argumental, e incluso iría mucho más lejos. En su *Mysterium Cosmographicum* (1596) y luego en el *Harmonices Mundi Libri V* (1619), retomando las ideas pitagóricas de armonía universal del número y la proporción, pensó que había encontrado el secreto de las leyes planetarias. El sistema de Kepler suponía que entre los cinco planetas entonces conocidos y el sol se interponían los cinco poliedros regulares, a modo de un juego de "muñecas rusas".

Siguiendo el estudio de los poliedros, hacia 1675 Descartes, y algo más tarde y definitivamente Euler, enunciaría uno de los más geniales resultados de la historia de la matemática en relación con aquellos, fundando de paso la topología (denominada por Euler "analysis situs"), una nueva rama de esta ciencia. Concretamente, llegó a conjeturar que en todo poliedro el número de caras más el número de vértices es igual al número de aristas más 2; resultado que sobrepasa el campo de la geometría y constituye el primer ejemplo de invariante topológico, pues conserva su validez cuando el poliedro se somete a un homeomorfismo. Propiedad, por otro lado, íntimamente ligada a la que hace posible el paseo por los puentes Köenigsberg y al teorema de los cuatro colores, y que fue finalmente demostrada por Cauchy en el siglo XIX. Todo ello, recordemos, tuvo su punto de partida en el mito de la hipótesis cosmológica de Platón.

4. Otros mitos

Los mitos expuestos anteriormente se referían, como se ha dicho, a la configuración del universo; pero han existido otros varios también de importancia en la historia de las matemáticas. Expondré a continuación dos de ellos.

4.1. La existencia de una única geometría lógicamente concebible

Este primero tiene que ver también con la geometría y su explicación del mundo real, pero en un orden de ideas radicalmente distinto a los ya mencionados. Concretamente se trata de los *Elementos* de Euclides y su quinto postulado ("por un punto exterior a una recta puede trazarse una y solo una paralela a ella"), que responde más bien a una forma de ser de la geometría del espacio físico en que vivimos. Da la impresión, por tanto, de que no ha de haber necesidad de que se enuncie, sino que debe poder demostrarse partiendo de los otros cuatro, tal como creía Proclo: "*este postulado debería borrarse de la lista de los postulados, pues es un teorema*" (citado en Duham, 1992, p. 83).

Eso mismo pensaron algunos de los mejores matemáticos a lo largo de más de veinte siglos, pero, como es sabido, tan solo lograron expresar dicho postulado en forma equivalente, lo que no produjo avance alguno sobre el fondo de la cuestión. Poco a poco fue llegándose al convencimiento de que efectivamente se trataba de un postulado y no de un teorema, y que iban a ser inútiles todos los intentos de demostración. Si el postulado quinto es un verdadero postulado, el hecho de negarlo, aceptando los demás –pensaron- no debe conducir a contradicción alguna. Esa fue precisamente la idea que maduró durante la primera mitad del siglo XIX, y que tuvo como consecuencia el nacimiento de las geometrías no euclídeas, esto es, de las geometrías en las que el quinto postulado deja de ser válido.

En 1826 Lobachevski, y casi al mismo tiempo Bolyai, tomaron como hipótesis la aserción contraria al postulado, y demostraron que no entraba en contradicción con los demás postulados de la geometría, o dicho de otro modo: que el V postulado no se puede probar, es indecidible, y que la negación del mismo implica una serie de consecuencias que forman una teoría no contradictoria, lógicamente posible, que puede considerarse como una nueva geometría (la no euclídea). Dicha geometría es completamente lógica, y tan rica y
perfecta como la de Euclides, a pesar de que sus resultados estén en desacuerdo con la imagen intuitiva del espacio.

Así pues, el famoso postulado de las paralelas y el mito de la existencia de una única geometría lógicamente concebible, desembocan veintidós siglos después en el nacimiento de las geometrías no euclídeas: la geometría hiperbólica o de Lobachevski, que afirma que por un punto exterior a una recta se puede trazar más de una recta paralela a la misma, y la geometría elíptica o de Riemann, que establece en cambio que no se puede trazar ninguna. La concepción de la geometría de Riemann, con su enfoque métrico-diferencial, sería además genialmente aprovechada medio siglo más tarde por Einstein para formular la teoría de la relatividad mediante una mejor aproximación de nuestro espaciotiempo físico que la del modelo debido a Galileo y a Newton.

4.2. La perfección estructural de los fundamentos de la matemática

El descubrimiento de las geometrías no euclídeas en el siglo XIX no es sino uno más de los avances que se producen en el terreno de las matemáticas en esa centuria, que se caracteriza, entre otras cosas, por la revisión de sus fundamentos. Así por ejemplo, el cálculo infinitesimal nacido a finales del siglo XVII de la mano de Newton y Leibniz, y desarrollado espectacularmente a lo largo del XVIII, en especial por la riqueza de sus aplicaciones, comienza a presentar diferentes contradicciones, lo que obliga a la revisión de sus principios, a los que se les había prestado poca atención.

Sin embargo, como tan frecuentemente sucede con la ciencia, la solución de un problema abrió la puerta a otro. En este caso en concreto, al examinar el cálculo desde un punto de vista más riguroso, se pusieron al descubierto, por ejemplo, algunas contradicciones relativas a los números irracionales, que indujo a pensar que alguno de los conceptos fundamentales del análisis acaso descansara en otras nociones matemáticas aparentemente más simples. Y como consecuencia de ello nace la teoría de conjuntos, debida a Cantor.

No obstante, también surgieron críticos a esta teoría, como Kronecker, que presentaron diferentes objeciones, relacionadas principalmente con el concepto de infinito; y es que, en efecto, se habían dejado sin resolver aspectos delicados que daban lugar a ciertas paradojas inexplicables o antinomias, como la aparición del conjunto de todos los conjuntos. La resolución final de éste y de otros problemas requería una axiomatización formal de la aritmética, a modo de la realizada por Euclides con la geometría, lo que fue llevada a cabo por Bertrand Rusell y otros. Sin embargo, Godel, en 1931, probó que todos los esfuerzos para demostrar que

la aritmética está libre de contradicciones están condenados al fracaso; es decir, que el sistema formal creado por Rusell y por cualesquiera otros es esencialmente incompleto, o dicho de otro modo, que en todo conjunto consistente de axiomas aritméticos, existen afirmaciones aritméticas que no son derivables a partir del conjunto de axiomas. La aritmética, por tanto, es incompleta, lo que deshace el mito de perfeccionamiento estructural absoluto en la construcción de los fundamentos de la matemática, y deja patente las limitaciones internas de los sistemas formales.

La reina de las ciencias no es, pues, un mero capítulo de la lógica; no cabe pensar en su fundamentación estrictamente formal, sino que en sus entes esenciales (los axiomas del número y de la teoría de conjuntos) debe admitirse cierto sentido intuitivo, afirmación que pone en duda nuestra convicción acerca de lo absoluto de las verdades matemáticas.

Referencias

Dunham, W. (1992). Viaje a través de los genios. Madrid: Pirámide.

- Guzmán, M. de (1986). "Los pitagóricos". En *Historia de la Matemática hasta el siglo XVII* (pp.11-35). Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
- Le Lionnais, F. (1976). "El número". En F. Le Lionnais y colaboradores, *Las grandes corrientes del pensamiento matemático* (pp.80-81). Buenos Aires: Eudeba, 3^a ed.
- Peralta, J. (1996). Una incursión en los números irracionales y algunas ideas para obtener aproximaciones de los mismos. Madrid: Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.
- Rioja, A. y Ordóñez, J. (1999). *Teorías del Universo. Vol. I: De los pitagóricos a Galileo*. Madrid: Síntesis.

Curva más corta que divide un triángulo en dos regiones de igual área

José Alberto García Suárez I.E.S. Eduardo Pondal de Santiago de Compostela jalgasu@mundo-r.com

Abstract

In this note is proved that for any triangle, the shortest curve splitting it into two regions of equal area, is the circular arc centered in the vertex of the minor angle which determines the sector with half of the area.

Introducción

Es conocida la demostración, basada en el teorema isoperimétrico, de que la curva más corta que divide un triángulo equilátero en dos regiones de igual área, es el arco de circunferencia correspondiente al sector circular de área mitad comprendido entre dos lados. Si ∂ es la curva solución, fijado un vértice, mediante sucesivas reflexiones sobre un lado, se completa un hexágono regular que incluye a la curva cerrada Δ generada por ∂ (Figura 1) englobando la mitad de su superficie que rodea al vértice convertido en centro del hexágono.



Figura 1

La curva más corta que limita esa superficie es pues la circunferencia centrada en el vértice que encierra un área mitad de la del hexágono. Si el lado del triángulo es 1, esa área es $3\sqrt{3}/4$, el radio del círculo $(3\sqrt{3}/4\pi)^{1/2}$, y la longitud del arco comprendido en el triángulo $(3\sqrt{3}/4\pi)^{1/2}.\pi/3$.

Hay pues, para el triángulo equilátero, tres curvas solución iguales. Si el triángulo no es equilátero pero, al igual que este, contiene a los tres sectores de área mitad formados entre sus lados, la conjetura natural es que el menor de los arcos (es decir, el abarcado por los lados mayores), debe ser la curva más corta que secciona el área por la mitad. Conjetura que cabe extender a triángulos que no contengan a los tres sectores citados, ya que necesariamente contienen al formado por los lados mayores.

La falta de referencias a esta cuestión en triángulos no equiláteros, fue lo que me indujo al desarrollo que aquí expongo para confirmar esa conjetura.

1. Curva más corta entre dos lados que abarcan al sector de área mitad

Obviamente, en línea con lo expuesto en la introducción, el primer objetivo es determinar si cuando un triángulo contiene al sector circular de área mitad que comprenden dos de sus lados, el arco es la curva más corta entre ellos que divide el área en mitades.

Si el triángulo *ABC* es isósceles, de ángulo desigual α con vértice en *A*, tal que $\pi/\alpha = n$, entero, el procedimiento arriba descrito para el triángulo equilátero genera un 2n-ágono regular con su correspondiente curva cerrada simple englobando la mitad de la superficie, que (tomando AB=AC de longitud 1) es la del círculo de área $(1/2).n.sen\alpha = (\pi.sen\alpha)/2\alpha$ y radio $(sen\alpha/2\alpha)^{1/2}$. El arco de este comprendido entre los lados del triángulo, de longitud $(\alpha.sen\alpha/2)^{1/2}$, es pues la *curva más corta* entre ellos.

Pero si π/n no es entero, la iteración de reflexiones no conduce a la curva cerrada simple, y no es de aplicación el teorema isoperimétrico. Su lugar lo ocupará, en la obtención del resultado sin restricción sobre la medida angular (sea el triángulo isósceles o no), su variante que establece que entre las curvas con extremos comunes con un segmento dado, que limitan con este una región de área dada, la de menor longitud es un arco de circunferencia; lo cual implica que solo esa o un segmento rectilíneo, puede ser la forma de la curva más corta entre dos lados de cualquier triángulo, ya que en otro caso sería "mejorada"

sustituyendo un arco entre dos puntos sobre ella, por el arco de circunferencia que limita con esa cuerda un área igual.

Proposición 1. Si el triángulo ABC contiene al sector circular comprendido entre los lados AB y AC de área mitad, entonces el arco es la curva más corta entre ellos que secciona el área en mitades.

Demostración.

Fijémonos en que, si el triángulo es isósceles, de los segmentos entre los lados iguales, *AB*, *AC* que seccionan el triángulo en regiones con igual área (o más en general, con una razón dada entre sus áreas), el menor es el perpendicular a la altura sobre *BC*, que, a su vez, es mayor que el arco del sector circular con esa misma área mitad de la del triángulo formado entre los lados.

Esto implica que los extremos, E, F, de la curva óptima entre esos lados, Υ , no pueden estar a distancia desigual del vértice A, puesto que el segmento PQ, con la misma longitud que su cuerda, EF, y paralelo a la base (Figura 2.i), forma un triángulo APQ de mayor área que la de AEF; y si se traza sobre PQ el arco de circunferencia igual a Υ , resultaría que la región obtenida por unión del segmento circular y el triángulo APQ tendría área superior a la mitad, y en consecuencia habría un arco de circunferencia concéntrico de menor longitud, que dividiría el área en partes iguales.





Figura 2

Probado que los extremos del arco están a igual distancia del vértice A, falta probar que es este su centro. Si el arco \widehat{PQ} es el más corto que divide el área de ABC en mitades, también lo hace con el sector circular AB'C' de igual área (figura 2.ii). El centro, O, del arco está sobre la mediatriz de BC que lo corta en arcos iguales \widehat{PM} y \widehat{MQ} , los cuales seccionan en áreas iguales a los subsectores AB'M' y AM'C' respectivamente; pero si O y A no coinciden, entonces $AM \neq AP = AQ$ y no pueden ser los más cortos con tal propiedad.

Existirían por lo tanto arcos DE, EF menores que ellos y centrados en A que dividirían a cada subsector en áreas iguales, cuya unión DF, de longitud menor que la de PQ, sería el arco de centro A que divide tanto al sector AB'C' como al triángulo ABC en áreas iguales, contradiciendo la hipótesis sobre PQ.



Si los lados, *AB* y *AC*, son de distinta longitud, y el triángulo (sea isósceles o escaleno) contiene al sector circular de área mitad comprendido entre ellos, también lo contiene el triángulo isósceles *AB*'*C*' de su misma área y lados iguales $(AB.AC)^{1/2}$, para el cual su arco, Υ , es el más corto entre ellos que divide el área por la mitad (figura 3.i); además, cualquier segmento entre *AB* y *AC* que divida el área de *ABC* en mitades, es mayor que el que lo hace para el triángulo isósceles perpendicularmente a la altura.

Y si existiera entre AB y AC un arco menor que Υ que dividiera el área de ABC en mitades, él y su cuerda serían obviamente menores que el segmento que divide en partes iguales, perpendicularmente a su altura, el área de AB'C'; y por lo tanto el segmento circular que limitan podría "encajarse" en esta posición dentro de este triángulo, conformando una región como la descrita en el primer párrafo de la demostración, de área superior a la mitad, y limitada por un arco menor que Υ , lo que sería contradictorio.

En conclusión, si un triángulo comprende a los tres sectores circulares con la mitad de su área, formados entre los lados, la curva óptima es el arco del sector de menor ángulo. Es el caso de un triángulo acutángulo *ABC* con los tres ángulos mayores o iguales que $\pi/4$, ya que el radio del sector circular máximo incluido en él comprendido entre los lados *BA* y *BC* es *BA.senÂ* = *BC.senĈ*; mayor que *BA.* $\sqrt{2/2}$ y *BC.* $\sqrt{2/2}$; es decir, que abarca al triángulo *AB*'C' semejante a *ABC* con razón $\sqrt{2/2}$ y de área mitad (figura 3.ii). Y análogamente los correspondientes a los otros ángulos.

2. Triángulo que no contiene a los tres sectores de área mitad

Para demostrar el resultado en el caso general, falta probar que si el sector circular máximo comprendido entre dos lados no alcanza la mitad del área del triángulo, cualquier curva que divida el área en dos mitades con extremos en esos lados, es más larga que el arco del sector de área mitad entre los lados mayores. Se considerarán separadamente los casos del triángulo acutángulo con un ángulo menor que $\pi/4$, y del rectángulo u obtusángulo, haciendo uso de los lemas que se establecen a continuación.

Lema 2.1. – En un triángulo acutángulo, ABC, si $\hat{A} < \pi/4$, entonces se verifica que sen \hat{B} .sen $\hat{C} \ge \sqrt{2/2}$.

Demostración.

Sean $\hat{A} = \pi/4 - \alpha$, $\hat{B} = \pi/4 + \beta$, con $\alpha < \beta < \pi/4$ ya que el triángulo es acutángulo. Se tiene:

$$\hat{C} = \pi/2 - (\beta - \alpha),$$

y por lo tanto, dado que $\beta < \pi/4$ implica que $\cos\beta > \sin\beta$, luego

$$sen\hat{B}.sen\hat{C} = sen(\pi/4 + \beta).sen(\pi/2 - [\beta - \alpha]) =$$

$$(\sqrt{2/2}).(\cos\beta + \sin\beta).\cos(\beta - \alpha) \ge$$

$$\ge (\sqrt{2/2}).(\cos\beta + \sin\beta).\cos\beta = (\sqrt{2/2}).(\cos^2\beta + \sin\beta.\cos\beta) \ge$$

$$\ge (\sqrt{2/2}).(\cos^2\beta + \sin^2\beta) = \sqrt{2/2}.$$

Lema 2.2. Sea ABC un triángulo acutángulo con $\hat{A} < \pi/4$, y B'C' el segmento paralelo a BC que lo secciona en dos regiones de igual área. Sean $B\widehat{PP'}$ el mayor sector circular de vértice B contenido en el triángulo, T el punto de tangencia, y PQ el segmento perpendicular desde el extremo P del arco al otro lado del sector. Se verifica que PQ \geq B'C'.

Demostración.

Puesto que $B'C' = (\sqrt{2/2}).BC$, de la figura 4.i y por aplicación del lema 1 se deduce

$$PQ = sen\hat{B}.BP = sen\hat{B}.BT = sen\hat{B}.sen\hat{C}.BC \ge (\sqrt{2/2}).BC = B'C'.$$



Lema 2.3. En un sector circular de ángulo inferior a $\pi/2$, la distancia de un extremo del arco al otro lado, es menor que la suma de las distancias desde cualquier otro punto del arco a cada lado.

Demostración.

Sea OPR el sector circular, PQ el segmento perpendicular desde un extremo del arco al otro lado, X un punto situado en la mitad del arco contigua a P (en caso contrario consideraríamos la perpendicular desde el otro extremo, de igual medida) y XY, XZ, los segmentos perpendiculares desde X a cada lado del sector (figura 4.ii). Se trata de probar que XY + XZ > PQ, es decir, de probar que XY > PQ' = P'X, lo que será consecuencia de probar que en el triángulo XYP' es YPX > XYP'.

Puesto que en el triángulo *PXT* el ángulo *PX*^T es menor que el ángulo *XP*^T (ambos inscritos en la circunferencia que contiene al arco *PR*), se deduce que *PT* < *XT*, lo que implica, dada la semejanza de los triángulos *TPY* y *TQ'X*, que *PY* < *Q'X* = *PP'*, y para sus respectivos ángulos opuestos en el triángulo *PYP'* que *PP'Y* <*PŶP'*; de donde se deduce que en el triángulo *XYP'* se verifica la desigualdad *YP'X* > *XŶP'* y por lo tanto *XY* > *P'X*.

Proposición 2. La curva más corta que secciona un triángulo en dos regiones de igual área, es el arco del sector circular de área mitad correspondiente al ángulo menor.

Demostración.

Como se indicó al inicio de este apartado, quedan por considerar los casos de triángulos que, sin contener a los tres sectores circulares entre sus lados de área mitad, o son acutángulos con un ángulo menor que $\pi/4$, o no son acutángulos.

Sea en primer lugar, un triángulo acutángulo *ABC* de área *s* tal que $\hat{A} < \pi/4$, y sea $B\widehat{PP}$ ' el máximo sector sobre \hat{B} contenido en el triángulo, y su área menor que *s*/2.

La curva divisoria del área en mitades más corta entre los lados de \hat{B} o tiene algún extremo exterior al arco, en cuyo caso evidentemente es mayor que el segmento PQ, o bien lo corta en dos puntos (figura 5.i) y por el Lema 3 es también mayor que PQ.

En consecuencia, por el Lema 2, la curva es mayor que el segmento B'C' que secciona el triángulo en dos regiones de igual área.

El mismo resultado se obtiene para el ángulo \hat{C} si el área de su máximo sector contenido en el triángulo es menor que *s*/2, y por lo tanto la curva más corta es el arco del sector de área *s*/2 sobre el ángulo \hat{A} .



Sea ahora *ABC* un triángulo con el ángulo \hat{C} no agudo. Si el sector máximo de este ángulo tiene área inferior a s/2 (figura 5.ii), es evidente que cualquier curva entre sus lados que divida el área del triángulo en mitades, o tiene algún extremo fuera del sector, o lo corta en dos puntos; y en ambos casos su longitud es superior a la de su radio, coincidente con la altura desde *C* y mayor por tanto que el arco del sector de área s/2 entre los lados *AB* y *AC*.

Y si lo mismo sucediera con el sector máximo del ángulo agudo, \hat{B} , del Lema 2.3 resultaría que también toda curva entre sus lados que divida el área en mitades, sería mayor que esa altura.

En consecuencia, el arco del sector de área s/2 correspondiente al menor ángulo, \hat{A} , es la curva más corta que divide el triángulo en dos regiones de igual área.

Bibliografía

[1] Halmos, Paul (1991). *Problemes pour mathématiciens, petits et grands*. Problèm 5-I. Cassini, Paris 2000. Traducción de *Problems for mathematicians, young and old*. Mathematical Association of America. Washington, D.C.

Condiciones algebraicas de existencia de Ternas Pitagóricas

Jesús Álvarez Mesa Dpto. de Matemáticas. IES Calatalifa jalvarezconsusmates@hotmail.com

Resumen

It is known that the equation $x^2 + y^2 = z^2$ has infinite solutions in positive whole numbers, in the same way as $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = 1$, with $\hat{x} = \frac{x}{z}$, $\hat{y} = \frac{y}{z}$, has infinite rational positive solutions. This article proves that rational solutions of $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = 1$ can only be achieved if the quotient $\frac{\hat{y}}{\hat{x}}$ fulfils specific algebraic conditions that are investigated and, consequently, we can only obtain Pythagorean triples (x, y, z) if those conditions are confirmed. Finally, Pythagorean triples are obtained from the equations that have been used previously.

1. Ecuaciones paramétricas

Proposición 1.1. La ecuación de Pitágoras homogénea

$$\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = 1 \tag{1}$$

donde $\hat{x} = \frac{x}{z}$, $\hat{y} = \frac{y}{z}$, si tiene alguna solución en números racionales positivos no trivial, será la solución del sistema

$$\begin{cases} \hat{x}^2 + \hat{y}^2 = 1\\ , \ con \ m \in \mathbb{Q}, 0 < m < 1\\ \hat{y} = m\hat{x} \end{cases}$$

$$(2)$$

Demostración. Si deseo buscar soluciones racionales no triviales, el cociente $\hat{y} \div \hat{x}$ debe ser racional. Llamo m a dicho cociente, con lo que se obtiene que $\hat{y} = m\hat{x}$. Ahora bien, si (\hat{a}, \hat{b}) es una solución de la ecuación (1), también será solución el par ordenado (\hat{b}, \hat{a}) , pues, evidentemente, $\hat{a}^2 + \hat{b}^2 = \hat{b}^2 + \hat{a}^2 =$ 1. Por lo tanto, las soluciones en números racionales positivos de (1), al representarlas, serán simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante, tal como se muestra en la figura 1.



Figura 1: Gráfica de (1) con puntos simétricos.

En consecuencia, para estudiar las soluciones en números racionales positivos de (1), es suficiente buscarlas a la derecha de la recta y = x, es decir, con $m \in \mathbb{Q}$, 0 < m < 1. *Observación*: El caso m = 0 lo omito por ser trivial y el caso m = 1, en el que $\hat{y} = \hat{x}$, jamás tendrá soluciones racionales, pues $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = 1$, con $\hat{y} = \hat{x}$ implica $\hat{x}^2 + \hat{x}^2 = 1 \Rightarrow 2\hat{x}^2 = 1 \Rightarrow \hat{x}^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, pero $\sqrt{2}$ es irracional, con lo que \hat{x} también lo será.

Proposición 1.2. Las soluciones de (2) corresponden a las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} \hat{x} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \\ , \ con \ m \in \mathbb{Q}, \ 0 < m < 1 \end{cases}$$

$$\hat{y} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$(3)$$

Demostración. Para resolver el sistema (2) utilizo el método de sustitución:

$$\begin{cases} \hat{x}^2 + \hat{y}^2 = 1\\ \hat{y} = m\hat{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{x}^2 + m^2\hat{x}^2 = 1\\ \hat{y} = m\hat{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{x}^2 \left(1 + m^2\right) = 1\\ \hat{y} = m\hat{x} \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{x}^2 = \frac{1}{1 + m^2}\\ \hat{y} = m\hat{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{x} = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}\\ \hat{y} = m\hat{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{x} = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}\\ \hat{y} = m\hat{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{x} = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}\\ \hat{y} = m\hat{x} \end{cases} \Rightarrow \end{cases}$$

En todo lo que sigue supondremos que \hat{x} , \hat{y} , m son números racionales positivos menores que la unidad. Lógicamente, encontrar soluciones racionales implica buscar valores racionales de m que hagan que $\sqrt{1+m^2}$ sea, también, racional.

2. Existencia de soluciones racionales

Partiendo de (3), se tiene que para que $\sqrt{1+m^2}$ sea racional, $1+m^2$ ha de ser el cuadrado de un número racional, que podemos llamar q:

$$1 + m^2 = q^2$$

Pero, al ser 0 < m < 1, necesariamente q > m. Puedo descomponer q en dos sumandos positivos, m y a, siendo $a \in \mathbb{Q}$ y a > 0: q = m + a. Tenemos, por tanto, que:

$$1 + m^2 = (m+a)^2 \Rightarrow 1 + m^2 = m^2 + 2am + a^2 \Rightarrow 2am = 1 - a^2.$$

Es decir:

$$m = \frac{1 - a^2}{2a} \tag{4}$$

Esta expresión nos indica que m depende racionalmente de a, m = m(a), y si a puede tomar infinitos valores racionales dentro de un intervalo, mtambién es racional. En consecuencia existen infinitas soluciones en números racionales positivos de (1).

Si sustituimos el valor de m de (4) en (3), tenemos:

$$\begin{cases} \hat{x} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \\ \hat{y} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \\ \Rightarrow \begin{cases} \hat{x} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^2}} \\ \hat{y} = \frac{m}{\sqrt{1+\left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^2}} \\ \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} \hat{x} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1+a^4-2a^2}{4a^2}}} \\ \hat{y} = \frac{m}{\sqrt{1+\left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^2}} \\ \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} \hat{x} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4a^2+1+a^4-2a^2}{4a^2}}} \\ \hat{y} = \frac{m}{\sqrt{\frac{4a^2+1+a^4-2a^2}{4a^2}}} \\ \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} \hat{x} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+a^4+2a^2}{4a^2}}} \\ \hat{y} = \frac{m}{\sqrt{\frac{1+a^4+2a^2}{4a^2}}} \\ \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} \hat{x} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^2}} \\ \hat{y} = \frac{m}{\sqrt{\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^2}} \\ \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} \hat{x} = \frac{1}{\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)} \\ \hat{y} = \frac{m}{\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)} \\ \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} \hat{x} = \frac{1}{2a} \\ \hat{y} = \frac{1-a^2}{2a} \\ \frac{1+a^2}{2a} \end{cases}$$

Por tanto:

$$\begin{cases} \hat{x} = \frac{2a}{1+a^2} \\ \hat{y} = \frac{1-a^2}{1+a^2} \end{cases}$$
(5)

También podíamos llegar al mismo resultado si usamos las ecuaciones

$$\begin{cases} \hat{x} = \frac{1}{m+a}\\ \hat{y} = \frac{m}{m+a} \end{cases}$$

con $m = \frac{1-a^2}{2a}$, pues:

$$\begin{cases} \hat{x} = \frac{1}{\frac{1-a^2}{2a} + a} \\ \hat{y} = \frac{\frac{1-a^2}{2a}}{\frac{1-a^2}{2a} + a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{x} = \frac{1}{\frac{1-a^2+2a^2}{2a}} \\ \hat{y} = \frac{\frac{1-a^2}{2a}}{\frac{1-a^2+2a^2}{2a}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{x} = \frac{1}{\frac{1+a^2}{2a}} \\ \hat{y} = \frac{\frac{1-a^2}{2a}}{\frac{1+a^2}{2a}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{x} = \frac{2a}{1+a^2} \\ \hat{y} = \frac{1-a^2}{2a} \end{cases}$$

Si en (4) quiero, según se vió en la proposición 1.1, que $m \in \mathbb{Q}$, 0 < m < 1, se deben acotar todos los posibles valores de $a \in \mathbb{Q}$. Como $m^2 + 1 = (m+a)^2$ y 0 < m < 1, resulta que $0 < m + a < \sqrt{2}$ y 0 < a < 1.

Estas condiciones dan lugar al siguiente sistema de inecuaciones, teniendo en cuenta (4):

$$\begin{cases} 0 < \frac{1-a^2}{2a} + a \\ \frac{1-a^2}{2a} + a < \sqrt{2} \\ 0 < a < 1 \end{cases}$$
(6)

Resolvamos la inecuación $\frac{1-a^2}{2a} + a < \sqrt{2}$:

$$\frac{1 - a^2}{2a} + a < \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1 - a^2 + 2a^2}{2a} < \sqrt{2}$$

Al ser a > 0, tenemos:

$$1 - a^2 + 2a^2 < 2a\sqrt{2} \Rightarrow a^2 - 2a\sqrt{2} + 1 < 0$$

Primero resuelvo la ecuación $a^2 - 2a\sqrt{2} + 1 = 0$:

$$a = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8 - 4}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \pm 2}{2} = \begin{cases} \sqrt{2} + 1\\ \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

Sabiendo que el primer miembro de $a^2 - 2a\sqrt{2} + 1 < 0$ es un polinomio de segundo grado con coeficiente principal positivo, la solución de la inecuación $a^2 - 2a\sqrt{2} + 1 < 0$ es $a \in (\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1)$. Si nos fijamos en las demás inecuaciones de (6), se concluye, recordando que *a* debe ser racional, que la solución de dicho sistema es: $a \in \mathbb{Q}$, tal que $\sqrt{2} - 1 < a < 1$. La gráfica de $m(a) = \frac{1-a^2}{2a}$, junto con la acotación hallada se muestra en

la figura 2.



Figura 2: Gráfica de m(a) con valores acotados.

Obtención de Ternas Pitagóricas 3.

La función $m(a) = \frac{1-a^2}{2a}$ tiene por dominio: Dom $m(a) = \{a \in \mathbb{Q}/\sqrt{2} - 1 < a < 1\}$ Algunos valores de m y a, racionales, se muestran en la tabla 1 para comprobar, de otra forma, si cumpliendo la condición anterior, $\sqrt{2}-1 < a < 1$ se verifica que $m + a < \sqrt{2}$:

m(a)	a	m+a
$m\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{91}{60} > 1$	$\frac{3}{10}$	$\frac{109}{60} > \sqrt{2}$
$m\left(\frac{4}{10}\right) = \frac{21}{20} > 1$	$\frac{4}{10}$	$\frac{29}{20} > \sqrt{2}$
$m\left(\frac{41}{100}\right) = \frac{8319}{8200} > 1$	$\frac{41}{100}$	$\frac{11681}{8200} > \sqrt{2}$
$m\left(\frac{42}{100}\right) = \frac{2059}{2100} < 1$	$\frac{42}{100}$	$\frac{2941}{2100} < \sqrt{2}$
$m\left(\frac{5}{10}\right) = \frac{3}{4} < 1$	$\frac{5}{10}$	$\frac{5}{4} < \sqrt{2}$
$m\left(\frac{6}{10}\right) = \frac{8}{15} < 1$	$\frac{6}{10}$	$\frac{17}{15} < \sqrt{2}$
$m\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{51}{140} < 1$	$\frac{7}{10}$	$\frac{149}{140} < \sqrt{2}$
$m\left(\frac{8}{10}\right) = \frac{9}{40} < 1$	$\frac{8}{10}$	$\frac{41}{40} < \sqrt{2}$
$m\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{19}{180} < 1$	$\frac{9}{10}$	$\frac{181}{180} < \sqrt{2}$
$m\left(\frac{95}{100}\right) = \frac{39}{760} < 1$	$\frac{95}{100}$	$\frac{761}{760} < \sqrt{2}$

Tabla 1: Comprobación de acotaciones de valores de m y a

Si quiero obtener Ternas Pitagóricas primero deberé obtener soluciones racionales de la ecuación de Pitágoras homogénea, a partir de (5). En la tabla 2, para algunos valores de *a* que cumplen nuestra acotación, se muestran soluciones de la ecuación de Pitágoras homogénea, base necesaria para obtener, más adelante, las Ternas Pitagóricas (x, y, z) con x > y.

\hat{x}	\hat{y}	\hat{z}
$\hat{x}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$	$\hat{y}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5}$	1
$\hat{x}\left(\frac{6}{10}\right) = \frac{15}{17}$	$\hat{y}\left(\frac{6}{10}\right) = \frac{8}{17}$	1
$\hat{x}\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{140}{149}$	$\hat{y}\left(\frac{7}{10}\right) = \frac{51}{149}$	1
$\hat{x}\left(\frac{8}{10}\right) = \frac{40}{41}$	$\hat{y}\left(\frac{8}{10}\right) = \frac{9}{41}$	1
$\hat{x}\left(\frac{85}{100}\right) = \frac{680}{689}$	$\hat{y}\left(\frac{85}{100}\right) = \frac{111}{689}$	1
$\hat{x}\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{180}{181}$	$\hat{x}\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{19}{181}$	1
$\hat{x}\left(\frac{95}{100}\right) = \frac{760}{761}$	$\hat{y}\left(\frac{95}{100}\right) = \frac{39}{761}$	1
$\hat{x}\left(\frac{96}{100}\right) = \frac{1200}{1201}$	$\hat{y}\left(\frac{96}{100}\right) = \frac{49}{1201}$	1
$\hat{x}\left(\frac{97}{100}\right) = \frac{19400}{19409}$	$\hat{y}\left(\frac{97}{100}\right) = \frac{591}{19409}$	1
$\hat{x}\left(\frac{99}{100}\right) = \frac{19800}{19801}$	$\hat{y}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{199}{19801}$	1

Tabla 2: Soluciones de (1), según (5).

Es decir, para obtener algunas soluciones de $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = 1$ se ha utilizado

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}=\frac{2a}{1+a^2}\\ \hat{y}=\frac{1-a^2}{1+a^2} \end{array} \right.$$

con $a \in \mathbb{Q}$ tal que $\sqrt{2} - 1 < a < 1$. Si me fijo en los numeradores de la operación resultante de la primera y segunda columna obtengo distintos valores de x, y, naturales, que son los dos primeros términos de las Ternas Pitagóricas. El tercer término, z, de la Terna Pitagórica lo obtengo fijándome, para cada valor de $\hat{x}(a)$, en los denominadores. Así pues, una tabla de Ternas Pitagóricas obtenidas para los valores de $a = \frac{1}{2}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}, \dots$ es la tabla 3:

x (entero positivo)	y (entero positivo)	z (entero positivo)
4	3	5
15	8	17
140	51	149
40	9	41
680	111	689
180	19	181
760	39	761
1200	49	1201
19400	591	19409
19800	199	19801

Tabla 3: Ternas Pitagóricas obtenidas a partir de la tabla 2.

Ahora me planteo si realmente m puede tomar cualquier valor racional entre 0 y 1 para que pueda obtener Ternas Pitagóricas. En otras palabras: ¿Puedo conseguir una Terna Pitagórica (x, y, z) con x > y y cuyo cociente $\frac{y}{x}$ sea un número racional m fijado de antemano tal que 0 < m < 1? Por ejemplo, ¿puedo conseguir una Terna Pitagórica (x, y, z) donde $\frac{y}{x}$ sea $\frac{1}{2}$?

Este problema se reduce a hallar, si es posible, el valor racional de a perteneciente al dominio de m que haga $m(a) = \frac{1-a^2}{2a} = \frac{1}{2}$. La solución positiva de la ecuación de segundo grado $\frac{1-a^2}{2a} = \frac{1}{2}$ es: $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,61803$, que es irracional, con lo que la respuesta a la cuestión anterior es negativa. No puedo conseguir en todos los casos una Terna Pitagórica (x, y, z) con x > y y cuyo cociente $\frac{y}{x}$ sea un número racional m fijado de antemano tal que 0 < m < 1. Sin embargo puedo encontrar una Terna Pitagórica (x, y, z) donde $\frac{y}{x} \approx \frac{1}{2}$. Veamos cómo hacerlo. Basta con poner el valor de a igual al valor aproximado hallado $(0,61803 = \frac{61803}{10^5})$ en (5):

$$\hat{x}\left(\frac{61803}{10^5}\right) = \frac{12360600000}{13819610809}$$
$$\hat{y}\left(\frac{61803}{10^5}\right) = \frac{6180389191}{13819610809}$$

La Terna Pitagórica (x, y, z) que cumple que $\frac{y}{x} \approx \frac{1}{2}$ es:

(x, y, z) = (12360600000, 6180389191, 13819610809)

Se puede comprobar que es Pitagórica:

$$\sqrt{12360600000^2 + 6180389191^2} = 13819610809$$

Además, el cociente $\frac{y}{x} = \frac{6180389191}{12360600000} = 0,50000721575... \approx \frac{1}{2}.$

Resumiendo, si quiero fijar de antemano un valor de m racional para obtener Ternas Pitagóricas en las que $\frac{y}{x}$ sea igual a m, puede ocurrir que ano sea racional. Pero puedo obtener Ternas Pitagóricas que den una buena aproximación en el caso que a sea irracional.

Otra consecuencia natural, teniendo en cuenta el teorema de Pitágoras, hace referencia a la figura 3, donde $m = \tan(\alpha) = \frac{y}{x} = \frac{\hat{y}}{\hat{x}}$: Sólo puedo obtener triángulos rectángulos de lados números naturales para ciertos valores del ángulo agudo α en virtud de que sólo puedo obtener Ternas Pitagóricas para ciertos valores de m.



Figura 3: Triángulo rectángulo, donde la existencia de Ternas Pitagóricas depende del valor de α .

Conclusiones

Es conocido [1] que las soluciones en enteros positivos de $x^2 + y^2 = z^2$ vienen dadas por las fórmulas:

$$x = uv, \qquad y = \frac{u^2 - v^2}{2}, \qquad z = \frac{u^2 + v^2}{2}$$
 (7)

las cuales, siendo $u \neq v \ (v < u)$ números impares y primos entre sí, permiten obtener todos los números enteros positivos x, y, z, libres de divisores comunes, que verifican $x^2 + y^2 = z^2$. Pero, aunque podamos obtener cualquier Terna Pitagórica por dichas fórmulas, al depender éstas de dos variables, $u \neq v$, no podemos de antemano averiguar con facilidad a partir de (7) si existe una terna cuyo cociente $\frac{y}{x}$ tenga un valor fijado previamente. Sin embargo, con este artículo se ha solventado esta dificultad trabajando en \mathbb{Q} con la ecuación de Pitágoras homogénea que, al implicar sólo dos variables racionales, \hat{x}, \hat{y} , ha permitido que las soluciones dependan de un sólo parámetro racional, $m = \frac{\hat{y}}{\hat{x}}$, lo que ha simplificado enormemente el trabajo. Además, dicho parámetro también nos ha servido para la obtención de Ternas Pitagóricas a partir de las soluciones racionales de la ecuación de Pitágoras homogénea, dando lugar, todo ello, a un planteamiento más próximo al álgebra que el enfoque clásico sobre el mismo tema.

Bibliografía

 Guelfond, A.O. (1984), Resolución de ecuaciones en números enteros. Ed. Mir, Moscú.

Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el Boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, congresos, etc., deben enviarse *en formato electrónico*, del modo especificado a continuación.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex.

En caso de usar Word

El formato de texto debe ser 17cm(alto) x 12.8cm(ancho), exactamente como este archivo. Configuración de página con márgenes: superior 3cm; inferior 9,7cm; izquierdo 4,1cm; derecho 4,1cm; encuadernación 0cm. Todo en el estilo de letra Times New Roman.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos en el estilo de letra usual; debajo el nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en estilo de letra negrita; debajo la referencia de su departamento o institución de trabajo en 11 puntos en el estilo de letra usual; y debajo la dirección de correo electrónico en estilo de letra Courier New en 11 puntos.

A continuación la palabra Abstract, en minúsculas de 12 puntos en estilo de letra negrita y debajo su contenido en inglés el tamaño de letra de texto 11 puntos en estilo itálica o cursiva, estrechado a ambos lados aproximadamente 1 cm.

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto. La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como en estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

En caso de usar Latex

Usar estilo "article" en 11 puntos y, por lo demás, tener en cuenta lo indicado para usuarios de Word. Para la dirección de correo electrónico usar el tipo de letra \tt.

Si se usan paquetes específicos de Latex distintos de los usuales, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

En caso de usar otro procesador (distinto de Word o Latex)

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTex, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato 17cm(alto) x 12.8cm(ancho), exactamente como este archivo, pues habría de ser escaneado. En todo caso, siguiendo en lo posible las instrucciones indicadas para caso de usar Word.

Respecto de las Figuras

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser impresas.

Las figuras deben llevar debajo numeración (Figura 1, Figura 2, ...), para referirse a ellas en el texto.

No debe escribirse texto a ninguno de los lados de la figura, ni a la izquierda ni a la derecha (es decir, las figuras no deben intercalarse en el texto).

Reseñas de libros

Las reseñas de libros, se enviarán como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Envío de originales

Se enviará en formato electrónico a nuestra cuenta <u>puigadam@mat.ucm.es</u> o bien en un CD o disquete formateado para PC compatible.

De otro modo, también puede enviarse impreso en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, cuya dirección que figura en la página 2 del Boletín. Pero, una vez aceptado para su publicación, se ha de enviar el correspondiente archivo en formato electrónico en la forma anteriormente indicada.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de diez euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70,71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97 y 98

El importe puede ser abonado enviando un cheque a nuestra Sede (citada en la página 2) a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o también mediante transferencia a la cuenta corriente de la Sociedad, número

ES13-3025-0006-2414-0000-2948

al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella *la dirección a donde se han de enviar* y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia*.