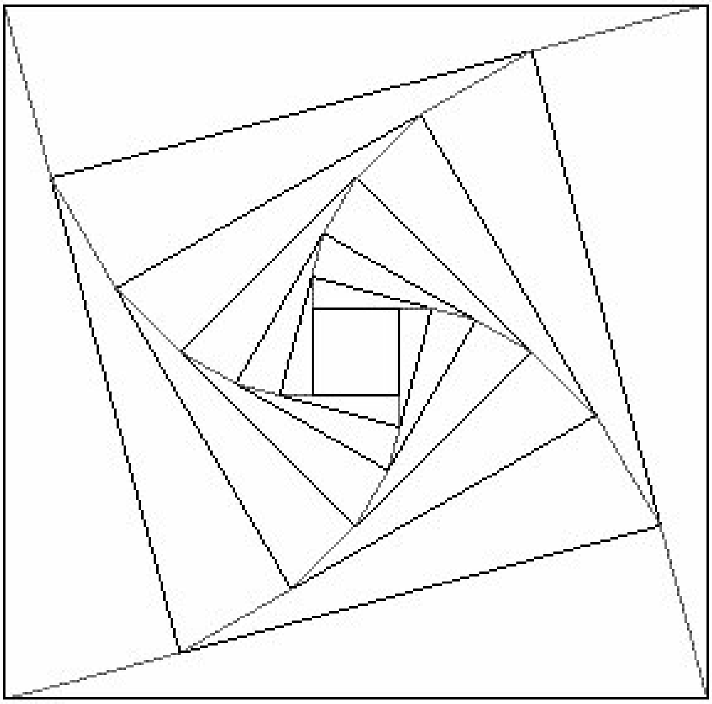
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 97
JUNIO DE 2014

Número especial dedicado al Profesor Julio Fernández Biarge

ÍNDICE

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE
ENTRE LOS SOCIOS DE LA
SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen ahora en "MathEduc", es decir, en lo que antes era Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), que ha cambiado su nombre.

La confección de este número ha estado a cargo de Antonio Hernando, Eugenio Roanes Lozano y Eugenio Roanes Macías.

ISSN: 1135-0261
Depósito Legal: M-7762-1995
Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Telf.: 91 611 59 94 – e-mail:loureiro@graficasloureiro.es

En la portada de este número aparece la figura adoptada como logotipo de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado "La Matemática y su enseñanza actual", publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Algebra) Despacho 3215
Rector Royo Villanova, s/n - 28040 - Madrid
Teléf.: 91 394 62 48

Página web de la Sociedad "Puig Adam":
http://www.sociedadpuigadam.es

Todo lo relativo a publicación en el Boletín (de artículos, etc), debe hacerse
a través del correo electrónico: puigadam@mat.ucm.es

JUNTA DIRECTIVA

Acta de la Asamblea General Ordinaria de 2014 de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas

En la Facultad de Matemáticas de la UCM, sita en la Ciudad Universitaria, a las doce horas del día 26 de abril de 2014, en segunda convocatoria, reunidos los miembros de la Sociedad, bajo la presidencia de D. José Javier Etayo Gordejuela, dio comienzo la Asamblea General Ordinaria del año dos mil catorce.

Se desarrolló con arreglo al siguiente

ORDEN DEL DÍA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.

Se procede a la lectura del acta de la Asamblea de 6 de abril de 2013, que queda aprobada por unanimidad.

2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.

El Presidente informa que desde la Asamblea anterior se han publicado los números 94, 95 y 96 del Boletín.

El Presidente dedica unas bonitas palabras de recuerdo a los profesores Fernández Biarge y Etayo Miqueo. También recuerda que los boletines 94, 95 y 96 se han dedicado de forma especial a la memoria de dichos profesores.

En esta misma línea, el Presidente comunica el fallecimiento del Profesor Alberto Aizpún López, resaltando de él su gran labor como Profesor y Director del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la UCM y en particular como Tesorero de nuestra Sociedad, amigo muy querido por todos los miembros de la Sociedad. Un número especial de nuestro Boletín será dedicado a la memoria del Profesor Alberto Aizpún López.

También informa de los concursos Puig Adam, Intercentros y de la fase regional de la Olimpiada Matemática Española:

Concurso Puig Adam: El XXXII Concurso de Resolución de Problemas Puig Adam se celebrará el 14 de junio de 2014 y se espera una buena participación como otros años.

Concurso Intercentros: Al igual que otros años se celebró el penúltimo sábado de noviembre en la Facultad de Matemáticas de la UCM. Con una buena participación de centros y estudiantes de nuestra Comunidad. En el Boletín nº 96 aparece una reseña de los resultados del XIII Concurso Intercentros.

También se informa que el sábado 5 de abril se ha celebrado el XVIII *Concurso de Primavera* de Matemáticas de la Comunidad de Madrid. Este año participaron 40141 alumnos en la primera fase del Concurso, que se realiza en los 481 Centros Escolares inscritos y 3197 alumnos en la 2ª fase del Concurso en la Facultad de Matemáticas de la UCM. Hay que destacar que algunos miembros del equipo organizador del Concurso son miembros de la Sociedad.

3. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.

El Tesorero en funciones, D. Fernando Lisón Martín, reparte entre los asistentes la documentación relativa a los movimientos de tesorería, explicando detalladamente los ingresos apuntados y los gastos efectuados. Se someten a aprobación las cuentas desde el 6 de abril de 2013 hasta el 5 de abril de 2014. Pasando a la votación quedan aprobadas por unanimidad.

Se propone el cambio de fecha en el cobro de los recibos, pasando del mes de marzo al de enero, fundamentalmente para saber por cuantos socios hemos de pagar la cuota a la Federación de Sociedades Matemáticas (por la que recibimos la revista SUMA), tratando de evitar que abonemos a la Federación la cuota anual por algún socio que se haya dado de baja. Se somete a votación y se aprueba por unanimidad.

El Presidente, en nombre de toda la Junta Directiva, agradece al Profesor D Fernando Lisón Martín el gran trabajo que ha realizado al sustituir de forma provisional al fallecido Tesorero D Alberto Aizpún López.

4. Elección de nuevos cargos directivos.

El Presidente manifiesta que procede el cese de los siguientes miembros de la Junta Directiva de la Sociedad, el Presidente D Javier Etayo Gordejuela, Vicepresidentes D Eugenio Roanes Macías y D Vicente Mendiola-Muñoz Morales, Vicesecretaria Dª María Gaspar Alonso-Vega.

Se pasa a la nueva elección de dichos cargos, quedando de la siguiente manera:

Presidente D Javier Etayo Gordejuela.

Vicepresidentes D Eugenio Roanes Macías y D Vicente Mendiola-Muñoz Morales.

Vicesecretaria Dª María Gaspar Alonso-Vega.

También se nombra Tesorero a D Fernando Lisón Martín, en la vacante producida por el fallecimiento de D.Alberto Aizpún López.

5. Asuntos de tramite:

Se recuerda que el 14 de junio se celebrará el XXXII Concurso de Resolución de Problemas Puig Adam y se agradece la colaboración de todos los patrocinadores del Concurso.

6. Ruegos y preguntas:

No hay

Sin más asuntos que tratar, el Presidente levanta la sesión a las doce y cincuenta minutos del día de la fecha arriba indicada.

Vº Bº El Presidente El Secretario

XVIII Concurso de Primavera de Matemáticas

Tanquam ex ungue leonem

¡Dieciocho ediciones! La gran fiesta de las matemáticas de la Comunidad de Madrid ya puede sacarse el carné de conducir.

En la primera fase de esta edición participaron **40140** estudiantes de **451** centros educativos de la Comunidad de Madrid. La segunda fase, celebrada en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid el sábado 5 de Abril, congregó a **3495** alumnos.

¿Qué esconden las matemáticas para enganchar a tantísimos estudiantes?, ¿qué fuerza intangible les empuja a querer resolver problemas que nunca antes habían visto en sus libros de texto?, ¿por qué un niño de once años, después de hora y media resolviendo veinticinco problemas de matemáticas, vuelve a la carga y busca a su profesora para preguntarle cómo se resolvía aquel problema? Lo que está claro es que los docentes de matemáticas tenemos aprovechar esta fuerza que tiene nuestra materia para quitar esa espantosa máscara que la otra gran parte de nuestros alumnos ve en las dichosas matemáticas. Volviendo a las preguntas anteriores, ¿quién las contesta? Tal vez Newton o su sobrina...

En 1696, Johann Bernouilli desafió a *los mejores matemáticos que ahora viven en el mundo* con este reto: ¿cuál es la curva por la que un cuerpo desciende en el menor tiempo posible, desde un punto a otro más bajo que no esté en su vertical, movido solo por la gravedad? Al cabo de un año solo cuatro matemáticos habían contestado correctamente: Leibniz, los dos Bernouilli (Jakob y Johann) y el conde de Tschirnhaus. Pero llegó también una solución anónima que en nueve líneas (¡setenta y siete palabras!) identificaba dicha curva como la cicloide. Cuando Johann leyó la solución del matemático anónimo exclamó: "¡es Newton! lo reconozco como al león por sus garras". Cuando la sobrina de Newton escribió sus memorias relata este hecho diciendo que "cuando mi tío recibió este reto, no durmió hasta que hubo resuelto el problema, lo que sucedió hacia las cuatro de la madrugada".

Debemos cuidar a todos estos chicos y chicas que, como Newton, son capaces hasta de dormir poco para resolver un problema.

En señal de agradecimiento a todos los estudiantes, profesores y familiares, aquí van las garras de los tres primeros leones clasificados por niveles:

PRIMER NIVEL (5º y 6º de Primaria)

1. Andrés Villegas Taillafer. 6º Primaria, Colegio San Agustín, Madrid
2. Jimena Lozano Simón. 5º Primaria, Colegio Alemán, Madrid
3. Beltrán Meliá García. 6º Primaria, Colegio Retamar, Pozuelo
3. Javier Artero Mompó. 6º Primaria, Colegio Everest, Pozuelo
3. Daniel Carreño López. 6º Primaria, Colegio Casvi, Boadilla del Monte
3. Pablo Mateo Torrejón. 6º Primaria, CEIP Gonzalo Fdez de Córdoba, Madrid
3. David Sánchez González. 6º Primaria, CP Andrés Segovia, Ciempozuelos

SEGUNDO NIVEL (1º y 2º ESO)

1. Diego Sierra Corredera. 2º ESO, Colegio San José del Parque, Madrid
1. Alejandro Epelde Blanco. 2º ESO, Montessori School, Los Fresnos
3. Alberto Pérez Mugía. 1º ESO, Colegio Amor de Dios, Madrid

TERCER NIVEL (3º y 4º ESO)

1. Jialin Yang. 4º ESO, Colegio Liceo San Pablo, Leganés
1. Daniel Puignau Chacón. 4º ESO, IES Alameda de Osuna, Madrid
3. Saúl Rodríguez Martín. 3º ESO, Colegio Villa de Griñón, Griñón

CUARTO NIVEL (1º y 2º Bachillerato)

1. Ángel Prieto Naslin. 2º Bach, Liceo Francés, Madrid
2. Marc Isern Hacker. 1º Bach, Colegio Alemán, Madrid
3. Janos Meny. 2º Bach, Colegio Alemán, Madrid

Esteban Serrano Marugán
Miembro del Comité Organizador del
Concurso de Primavera de Matemáticas

La 50 Olimpíada Matemática Española

por Joaquín Hernández y Juan Jesús Donaire

Desde el curso 2004-2005, los responsables de la Olimpiada Matemática Española (OME) en la Comunidad de Madrid intentamos que los estudiantes que acuden a la última prueba de selección en nuestra Comunidad para la fase nacional de OME hayan superado previamente algunas pruebas, no sólo para que la selección sea lo más fiable posible, sino, fundamentalmente, para que no sean tantos los estudiantes que observan una diferencia abismal entre la dificultad de los problemas que normalmente hacen en sus centros y los problemas que suelen aparecer en la fase local de la OME. En esa línea, llevamos diez años organizando una primera prueba, de opción múltiple, en la que de los aproximadamente 400 participantes seleccionamos a los 75 con mejor nota en dicha prueba.

En el curso 2013-2014 hemos añadido una prueba más: Esos 75 estudiantes han debido pasar una prueba de diez problemas cortos, de donde salieron los 18 ganadores de la OME en la Comunidad de Madrid (recordad que las normas de la OME recogen que en cada comunidad habrá tantos ganadores como el triple de universidades públicas). Finalmente, estos 18 estudiantes acudieron a la última prueba de la que han salido los 9 representantes de la Comunidad de Madrid en la fase nacional de la OME, celebrada en Requena a finales de marzo.

Merece la pena destacar el entusiasmo de todos los participantes, máxime sabiendo -ya llevamos tres años así- que no hay ningún premio en metálico para ningún ganador de la fase local, por lo que esos 400 estudiantes, luego 75, luego 18 y finalmente 9, han participado con la única intención de poner a prueba su talento, su dedicación y su capacidad para resolver problemas en un tiempo controlado.

Desde estas páginas queremos dar las gracias a todos ellos y a sus profesores y, como no podía ser de otra manera, hacer notar los nombres y los centros de nuestros nueve representantes en la fase nacional, en la que estamos convencidos que obtendrán, como siempre, resultados brillantes.

Los enunciados de las diversas pruebas de selección los podéis ver en nuestra página web. Aquí tenéis los de las dos últimas pruebas: la prueba de selección para elegir los dieciocho ganadores en la Comunidad de Madrid y la última prueba, que junto a esta nos ha servido para seleccionar a nuestros nueve representantes en la fase nacional.

Fase Local en la Comunidad de Madrid

Como hemos establecido desde el año 2004, la "Fase Cero", primera prueba de la fase local, consistió en 30 cuestiones de opción múltiple, a desarrollar en tres horas, que se celebró el viernes 29 de noviembre de 2013 en la Facultad de Matemáticas de UCM. Más de 350 estudiantes, obviamente la mayoría de Bachillerato pero también estudiantes de 4º y alguno de 3º de ESO, se presentaron a dicha prueba de la que quedaban seleccionados los 75 que obtenían mayor puntuación. En nuestra página web podéis ver el contenido de la misma.

Como hemos manifestado más de una vez, creemos que ha sido un acierto establecer esta prueba como primera selección, pues son muchos los buenos estudiantes poco acostumbrados a resolver problemas pero sí que se sienten atraídos por pruebas de este estilo, ya que con ella pueden tener contacto con este mundo fascinante de la Olimpiada Matemática Española.

Los 75 estudiantes con más alta puntuación pasaron a la segunda prueba de la fase local, que tuvo lugar el jueves 19 de diciembre de 2013, en la Facultad de Matemáticas de la UCM.

Esta segunda prueba, que se establecía este año por primera vez, nos iba a servir para fijar los 18 ganadores de la Olimpiada en la Comunidad de Madrid, de los que con pruebas posteriores saldrían nuestros 9 representantes en la fase nacional. Consistió en la resolución de 10 problemas cortos, en un tiempo de tres horas y media, que podéis ver al final de esta crónica.

La respuesta de los participantes fue igual de entusiasta y responsable que en la prueba anterior y nos ha parecido que merece la pena continuar con ella en los próximos años.

Finalmente, los días viernes 17 de enero y sábado 18 de enero tuvo lugar la última prueba de la fase local: la resolución de 6 problemas, 3 cada día en un periodo de tres horas y media, que no pudo celebrarse los dos días en la Facultad de Matemáticas pues, por problemas de apertura de los sábados, tuvimos que desplazarnos a la Facultad de Odontología el sábado 18 de enero.

Los enunciados de los 6 problemas, así como la relación de los 18 participantes, aparecen también al final de esta crónica. Los 9 estudiantes con mayor puntuación, entre esta prueba y la anterior, acudieron el viernes 28 y el sábado 29 de marzo a la fase nacional de la 51 Olimpiada Matemática Española, que se celebró en la Comunidad de Valencia, en concreto en Requena, una ciudad que, gracias fundamentalmente al trabajo de nuestro compañero Antonio Ledesma y un grupo de profesores de Matemáticas de allí, se ha convertido en un referente en las Matemáticas de todo el territorio nacional.

Relación de los 18 Ganadores de la Fase Local en la Comunidad de Madrid

Primer Premio

1.- Miguel BARRERO SANTAMARÍA (2º Bto., IES Alameda de Osuna)

2.- Ismael SIERRA DEL RÍO (1º de Bto., IES San Mateo)

3.- Álvaro RODRÍGUEZ GARCÍA (2º de Bto., IES San Mateo)

4.- Janos MANY (2º Bto., Colegio Alemán de Madrid)

4.- Ruizhe YU XIA (1º de Bto., IES Don Pelayo)

6.- Ángel PRIETO NASLIN (2º Bto., Liceo Francés de Madrid)

Segundo Premio

7.- Mark ISERN HACKER (1º Bto., Colegio Alemán de Madrid)

8.- Gonzalo GÓMEZ ABEJÓN (1º Bto., IES Ramiro de Maeztu)

8.- Víctor SAINZ UBIDE (2º de Bto., Colegio Santa Joaquina de Vedruna)

8.- Jialin YANG (4º ESO, Liceo San Pablo)

11.- Daniel PUIGNAU CHACÓN (4º de ESO, IES Alameda de Osuna)

11.- Javier SÁNCHEZ-BLANCO BOYER (2º Bto., IES San Mateo)

Tercer Premio

13.- Álvaro PEÑA PASTOR (2º Bto., Colegio Brains)

13.- Javier RAMOS GUTIÉRREZ (1º Bto., IES San Juan Bautista)

15.- Javier GONZÁLEZ (4º ESO, IES San Juan Bautista)

15.- Guillermo PASCUAL PÉREZ (2º Bto., Colegio Fray Luis de León)

15.- José Ignacio GARCÍA GONZÁLEZ (1º Bto, IES Príncipe Felipe)

18.- Andrés BARRUECO GARCÍA (2º Bto., Colegio San Viator)

Fase Nacional

Como hemos apuntado ya, el último fin de semana de marzo tuvo lugar en Requena la fase nacional de la 50 Olimpiada Matemática Española (OME).

Organizar la fase nacional de una OME requiere trabajo y dedicación de un numeroso grupo de personas durante más de un año. Trabajo y dedicación que, naturalmente, se hace sin ningún tipo de compensación económica ni reducción en los horarios de otras actividades, lo que para algunos, fundamentalmente si son profesores de Secundaria y sin ninguna posibilidad, por tanto, de abrir un paréntesis en su trabajo diario, supone un esfuerzo importante. Por eso, la Comisión de Olimpiadas de la Real Sociedad Matemática Española acoge de muy buena gana cualquier sugerencia de una Comunidad ofreciéndose como sede. Pero, si alguna vez la fase nacional de la OME se celebrara como premio en la ciudad que más hubiera aportado a las Matemáticas para jóvenes de Secundaria, nadie, con cierta información, tendría ninguna duda, en que Requena sería sede. El trabajo de Antonio Ledesma, desde hace muchos años, así lo justificaría.

Así fue este año, y no como premio, pues el esfuerzo y la dedicación ya sabemos que no suele ser premiado en nuestro país, sino porque Antonio consiguió convencer a un Ayuntamiento entusiasta que colaboró para hacernos pasar unos días verdaderamente agradables.

Merece la pena resaltar la participación de los 9 estudiantes de nuestra Comunidad. Como probablemente sabéis, en la fase nacional de la OME participan 75 estudiantes de todo el territorio nacional, de los que a la Comunidad de Madrid le corresponden 9 y en el reparto final de medallas se premia a los 36 mejores: 6 oros, 12 platas y 18 bronces. Los 9 estudiantes de nuestra comunidad estuvieron entre esos 36, 2 de ellos entre los 6 oros y 4 entre las 12 platas, aparte de que el ganador absoluto, Ismael Sierra, es uno de nuestros chicos.

Naturalmente que la razón fundamental del éxito de nuestros estudiantes es su talento, pero el talento suele estar uniformemente repartido a lo largo de todo el territorio nacional. Posiblemente influya también el hecho de que en nuestra Comunidad hemos sabido sembrar un interés, en algunos chicos entusiasmo, con nuestros Concurso de Primavera, Concurso Intercentros, Concurso Puig Adam, Proyectos ESTALMAT y EPM Miguel de Guzmán, desde edades muy tempranas, pero también en muchas otras Comunidades existen concursos de problemas y proyecto ESTALMAT.

Pero en la Comunidad de Madrid hay un grupo de antiguos olímpicos que trabajan desde hace años desinteresadamente cada sábado con los chicos a los que les gusta hacer problemas. Este grupo, por razones debidas a estancias en el extranjero o ausencias por motivos de estudio, se ha visto este año extraordinariamente reducido, a un solo estudiante. Pero, creemos que hay que decirlo aquí, ese estudiante de 2º año de Matemáticas-Informática, Jaime Mendizábal –antiguo olímpico- acude cada sábado a la Facultad de Matemáticas de la UCM a trabajar con estos chicos. Creemos que, aunque la recompensa más importante que Jaime tendrá será la satisfacción por su trabajo, no estaría fuera de lugar que la Administración o algún otro organismo contemplara alguna otra, para él y para otros estudiantes que en los próximos años seguro que le van a ayudar.

Ganadores de los 6 Oros de la Fase Nacional

1.- Ismael SIERRA DEL RÍO (de Madrid)

2.- Gerard ORRIOLS GIMÉNEZ (de Cataluña)

3.- Gonzalo CAO LABORA (de Galicia)

4.- Raúl ALONSO RODRÍGUEZ (de Galicia)

5.- Janos MANY (de Madrid)

6.- Damià TORRES LATORRE (de Valencia)

En la foto (cedida por cortesía del Presidente de la Real Sociedad Matemática Española) aparecen los seis ganadores de medallas de Oro y también Jesús Dueñas Pamplona (de Castilla y León), que obtuvo la 1ª Medalla de Plata y sustituirá a Janos Meny (por tener este pasaporte alemán) en el Equipo Español que participará en la Ciudad del Cabo en la Olimpiada Internacional del presente año.

La próxima edición de la Fase Final de la Olimpíada Matemática Española está previsto que se celebre en Badajoz, organizada por la delegación de la RSME en la Universidad de Extremadura.

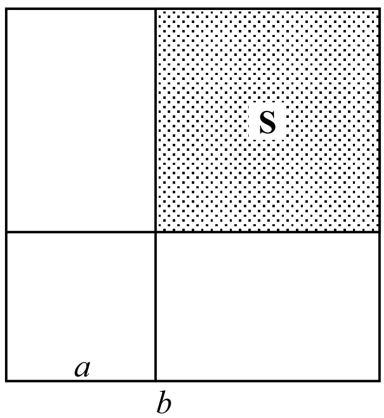
El Presidente de la RSME ha sugerido que se dedique a la memoria del Prof. Carlos Benítez Rodríguez, recientemente fallecido, que fue entusiasta impulsor de la OME en dicha universidad.

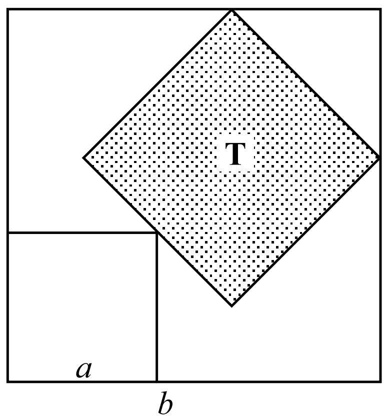
Problemas propuestos en la
50 Olimpíada Matemática Española

Enunciados de los 10 problemas de la 2ª Prueba de la Fase Local en los Distritos de Madrid

Problema 1

En las figuras adjuntas se observan dos cuadrados iguales de lado b, y en su interior dos cuadrados iguales de lado a y dos cuadrados, S y T, uno en cada una de las figuras. Los lados del cuadrado S son paralelos a los de lados a y b, y las diagonales del cuadrado T también son paralelas a los lados de los cuadrados de lados a y b. Calcula el cociente (área de S) **:** (área de T).





Problema 2

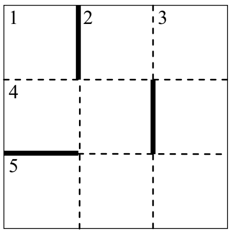
Seis vacas se comen toda la hierba de un prado –que crece a ritmo constante– en tres días. Tres vacas, con la misma hambre, se la comen en siete días. ¿Cuántos días tardaría una vaca en comerse toda la hierba si estuviera ella sola?

Problema 3

Considera todos los números de cinco cifras cuya suma es 43: por ejemplo, el número 79 999. Si elegimos uno de ellos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea múltiplo de 11?

Problema 4

Cada casilla del cuadro siguiente se rellena siguiendo las siguientes reglas:



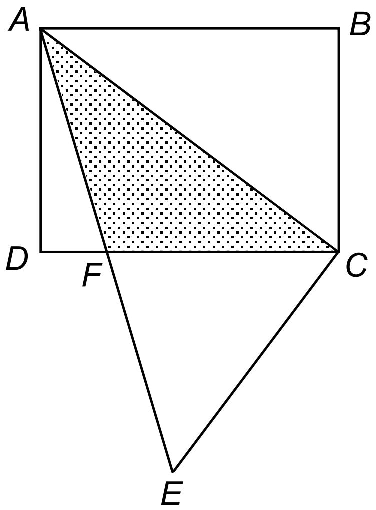
H Horizontales	Verticales
2: suma de cifras de 2 vertical (dos cifras)	1: producto de dos primos (dos cifras)
4: número primo (dos cifras)	2: múltiplo de 99 (tres cifras)
5: 1 vertical + 2 horizontal + 3 vertical (tres cifras)	3: cuadrado de 4 horizontal. (tres cifras)

Problema 5

Halla todos los conjuntos de tres enteros positivos diferentes tales que cada uno de ellos divida a la suma de los otros dos.

Problema 6

La figura muestra un rectángulo $ABCD$ con $AB = 16$ y $BC = 12$. Si el ángulo $A\hat{C}E$ es recto y $CE = 15$, calcula el área del triángulo ACF.



Problema 7

La suma de cinco enteros consecutivos es un cuadrado perfecto, y la suma de los tres centrales es un cubo perfecto. Si todos son menores que 2013, halla la raíz de su suma.

Problema 8

Determina la menor distancia posible desde el origen de coordenadas a los puntos (x, y) de la curva de ecuación $(x - y)xy = 8$ situados en el primer cuadrante.

Problema 9

En un triángulo rectángulo de lados enteros, el radio de la circunferencia inscrita es 12. Calcula el mayor valor posible para la hipotenusa de dicho rectángulo.

Problema 10

En el trapecio $ABCD$, de bases AD y BC, se verifica que $DA = DB = DC$. Sea E el punto de corte de la mediatriz del lado DC con la prolongación del lado AB. Si $B\hat{C}E = 2 \cdot C\hat{E}D$, calcula $B\hat{C}E$.

Enunciados de los 6 problemas de la última Prueba de la Fase Local en los Distritos de Madrid

Problema 1

Se considera un polígono de 90 vértices, numerados del 1 al 90 de manera aleatoria. Demostrar que siempre podemos encontrar dos vértices consecutivos cuyo producto es mayor o igual que 2014.

Problema 2

Hallar todas las soluciones enteras de la ecuación $x^4 + y^4 = 3x^3y$.

Problema 3

Se considera un cuadrado ABCD y su circunferencia circunscrita K. Sea P un punto de K. Demostrar que la distancia de P a alguno de los vértices del cuadrado debe ser un número irracional.

Problema 4

Sean a y b números reales positivos. Demostrar que

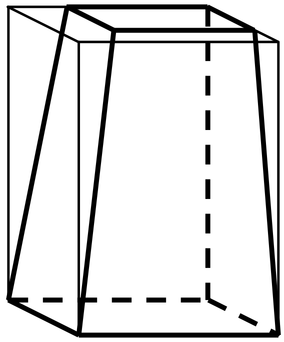
$$a + b \geq \sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Problema 5

Encontrar las tres últimas cifras del número 7^{2014}.

Problema 6

De un prisma recto de base cuadrada, con lado de longitud L1, y altura H, extraemos un tronco de pirámide, no necesariamente recto, de bases cuadradas, con lados de longitud L1 (para la inferior) y L2 (para la superior), y altura H. Las dos piezas obtenidas aparecen en la imagen siguiente:



Si el volumen del tronco de pirámide es 2/3 del total del volumen del prisma, ¿cuál es el valor de L_1/L_2?

Enunciados de los 6 problemas de la Fase Nacional

Problema 1

¿Es posible disponer sobre una circunferencia los números 0, 1, 2,…, 9 de tal manera que la suma de tres números sucesivos cualesquiera sea, como mucho:
a) 13, b) 14, c) 15?

Problema 2

Dados los números racionales *r, q* y *n*, tales que $\frac{1}{r+qn}+\frac{1}{q+rn}=\frac{1}{r+q}$, probar que $\sqrt{\frac{n-3}{n+1}}$ es un número racional.

Problema 3

Sean B y C dos puntos fijos de una circunferencia de centro O,que no sean diametralmente opuestos. Sea A un punto variable sobre la circunferencia, distinto de B y C, y que no pertenece a la mediatriz de BC. Sean H, el ortocentro del triángulo ABC; y M y N los puntos medios de los segmentos BC y AH, respectivamente. La recta AM corta de nuevo a la circunferencia en D, y, finalmente, NM y OD se cortan en el punto P. Determinar el lugar geométrico del punto P cuando A recorre la circunferencia.

Problema 4

Sea (x_n) la sucesión de enteros positivos definida por $x_1 = 2$ y $x_{n+1} = 2x_n^3 + x_n$ para todo $n \geq 1$. Determinar la mayor potencia de 5 que divide al número $x_{2014}^2 + 1$.

Problema 5

El conjunto M está formado por números enteros de la forma $a^2 + 13b^2$, con a y b enteros distintos de cero.

i) Demostrar que el producto de dos elementos de *M* es un elemento de *M*.

ii) Determinar, razonadamente, si existen infinitos pares enteros (x, y), tales que $x + y$ no pertenece a M, pero $x^{13} + y^{13}$ sí pertenece a *M*.

Problema 6

Se tienen 60 puntos en el interior de un disco unidad (es decir, un círculo de radio 1, y su circunferencia frontera). Demostrar que existe un punto V de la frontera del disco, tal que la suma de las distancias de V a los 60 puntos es menor o igual que 80.

Fallecimiento del Prof. Alberto Aizpún López

Con profundo pesar, comunicamos a nuestros socios y lectores el fallecimiento, el pasado mes de febrero, de nuestro querido compañero el Tesorero de nuestra Sociedad, Profesor Alberto Aizpún López.

Nuestro querido Alberto tuvo una larga y fructífera vida. Nació en Pamplona en 1920. Comenzó como Maestro de Enseñanza Primaria en 1945, con el número uno de sus Oposiciones. En 1953 obtuvo la Licenciatura en Matemáticas por la Univ. de Barcelona. En 1959 obtuvo la Cátedra de Matemáticas de la Escuela de Magisterio "Maria Díaz Jiménez" de Madrid, por oposición libre, con el número uno. Y fue Director de la misma casi diez años.

Fue Miembro de la Junta de Gobierno de la Universidad Complutense como representante de Directores de Escuelas Universitarias.

Formó parte de numerosas Comisiones nacionales para la elaboración de Planes de Estudio de Magisterio. Entre ellas, en 1979 fue nombrado por el Ministerio de Universidades para redactar un Proyecto de Planes de estudio y organización de las Escuelas Universitarias de Profesorado.

También fue designado como miembro de numerosas comisiones internacionales relativas a la Formación de Maestros, en París, Estrasburgo, Alemania, Reino Unido y Estados Unidos.

Asistió a muchos congresos internacionales sobre enseñanza de la matemática e impartió numerosos cursos y seminarios relacionados con la Formación de Profesorado en diversas universidades públicas y centros privados.

Es autor de numerosos libros y manuales de texto para alumnos de Escuelas de Magisterio y dirigió colecciones de libros de matemáticas para la Educación General Básica. También dirigió una colección de libros publicados por la Universidad Nacional de Educación a Distancia. Así como diversos temas de Matemáticas para la promoción de adultos, publicados por el Ministerio de Educación.

También publicó numerosos artículos en Revistas de Pedagogía y de Magisterio, así como entrevistas y reportajes.

Pero quizás lo más original que publicó Alberto fue la colección de cintas magnetofónicas, editadas por la Fonoteca del Ministerio de Educación y Ciencia para los Centros de EGB en distintos niveles, sobre diversos temas matemáticos.

También fue Presidente de la Asociación Nacional de Catedráticos y profesores Agregados de Escuelas Universitarias del Profesorado de E.G.B.

En cuanto a nuestra Sociedad fue siempre uno de sus miembros más activos y, en especial, uno de sus miembros fundadores. En la actualidad continuaba siendo el Tesorero de nuestra Sociedad, llevando siempre personalmente todos los quehaceres inherentes al cargo: actualización de altas, bajas, de cambios de cuenta bancaria de socios, de emisión de facturas, de comunicación con la entidad bancaria donde se ubica la cuenta de la Sociedad, etc. Todo ello, no sólo lo llevaba siempre actualizado por escrito, además lo llevaba con todo detalle en su cabeza, de modo que, cuando se le preguntaba por un socio, te daba todo detalle de su adscripción, sin necesidad de mirar ninguna lista. Solo en los últimos meses, cuando su enfermedad empeoró y le obligó a permanecer al nivel del mar, necesitó la asistencia del Tesorero adjunto, Fernando Lisón, nuestro actual Tesorero.

Como dato anecdótico de su amor por la Sociedad, alguna vez, cuando, por ejemplo, había que pagar a la imprenta la elaboración de un número de nuestro Boletín y no quedaba dinero suficiente en la cuenta corriente de la Sociedad, él adelantaba el dinero de su cuenta corriente particular y no se resarcía hasta que el Banco hubiera cobrado los recibos a los socios. De ello no nos enterábamos hasta que nos presentaba por escrito las cuentas anuales en la Asamblea General. Alberto era un Tesorero muy especial.

Más de una vez, los demás miembros de la Junta Directiva le invitamos a hacerse cargo de la Presidencia de la Sociedad, lo que rechazaba diciendo que ello le supondría mayor esfuerzo, ya que tendría que seguir dirigiendo la Tesorería, cuyos entresijos sólo él conocía a fondo. Menos mal que, previendo su final, por su avanzada edad, puso al día a su Tesorero Adjunto, que le ha sucedido.

Por otra parte, siempre colaboró activamente en la selección y corrección de artículos publicados en nuestro Boletín. Y también como autor de varios artículos publicados en él, el último de ellos titulado "Las matemáticas y la gente", publicado hace dos años en el número 91 de nuestro Boletín.

En esta fotografía aparece Alberto (cuarto de derecha a izquierda) ante la portada de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense, junto con otros miembros de la Sociedad, tras la celebración de la Asamblea General del año 1998.

Pero su aportación a la Sociedad no se limitaba, a las propias de la Tesorería. Cada vez que la Junta Directiva se reunía para seleccionar los Problemas a proponer en el Concurso de Resolución Problemas "Puig Adam" (que organizábamos conjuntamente con el Colegio Oficial de Doctores y Licenciados), él traía una gran colección de problemas originales, de la que siempre se elegían unos cuantos. Y lo mismo sucedía con otros concursos en los que miembros de nuestra Sociedad colaboran, como el "Concurso de Primavera", el "Concurso Intercentros" de Matemática de la Comunidad de Madrid, la Fase Local de la Olimpíada Matemática Española que organiza la Real Sociedad Matemática Española, etc.

Alberto entendía la matemática como un sacerdocio, como los antiguos pitagóricos. Cuando alguno de nuestros socios se daba de baja por jubilación académica, se mostraba contrariado, manifestando que "*nuestra profesión nadie debe abandonarla, mientras viva*".

Su entrega en todo lo relativo a nuestra Sociedad no tenía límites. En los últimos tiempos Alberto tenía que asistir a nuestras reuniones con su botella de oxígeno, ayudado por su esposa, Mercedes, también miembro de nuestra Sociedad (ambos fueron durante muchos años los dos Asesores de la revista SUMA representantes de nuestra Sociedad).

En la Asamblea General de 2014, celebrada el pasado mes de abril, se aprobó por unanimidad la dedicación al Prof. Alberto Aizpún de un número especial de nuestro Boletín, invitando a presentar artículos a cuantos compañeros, alumnos y amigos lo deseen.

Querido Alberto, nunca podremos olvidar tu calidad humana, tu dedicación a la Sociedad y el entusiasmo que ponías en todo lo relativo a ella. Así te recordaremos.

La Junta Directiva

Sobre el problema 15 del libro VII de la *Aritmética* de Diofanto

Ricardo Moreno Castillo
Catedrático de Instituto jubilado
moreno_castillo@hotmail.es

Abstract

This article provides a method to find all the solutions to a problem set out in Diofanto's Arithmetics.

Dedicado a Julio Fernández Biarge.

Enunciado del problema

El problema 15 del libro VII de la *Aritmética* de Diofanto dice lo siguiente:

> *Dado un cuadrado, descomponerlo en cuatro sumandos, de manera que si al cuadrado se le restan el primero o el segundo, den cuadrados, y si se le suma el tercero o el cuarto, también den cuadrados*.

Para encontrar todas las soluciones del problema, necesitaremos del siguiente:

Lema aritmético: Si $c < a^2$, entonces: $\sqrt{a^2+c} - a < a - \sqrt{a^2-c}$

Demostración: La desigualdad a demostrar equivale a $\sqrt{a^2+c} + \sqrt{a^2-c} < 2a$, de donde se deduce que $2a^2 + 2\sqrt{a^4-c^2} < 4a^2$ lo que da lugar a su vez a $\sqrt{a^4-c^2} < a^2$. Elevando al cuadrado ambos miembros tenemos que $a^4 - c^2 < a^4$, lo cual es obviamente cierto.

2. Resolución del problema

Si el número cuadrado que nos dan es a^2, se trata de encontrar cuatro números *x*, *y*, *z* y *t* tales que

$$x+y+z+t=a^2,\ a^2-x=u^2,\ a^2-y=v^2,\ a^2+z=w^2 \text{ y } a^2+t=r^2$$

Esto significa resolver el siguiente sistema lineal en *x*, *y*, *z* y *t*:

$$\begin{aligned} y+z+t&=u^2\\ x\qquad +z+t&=v^2\\ x+y+2z+t&=w^2\\ x+y+z+2t&=r^2 \end{aligned}$$

Resuelto el sistema, llegamos a lo siguiente:

$$\begin{aligned} x&=w^2+r^2-2u^2-v^2\\ y&=w^2+r^2-u^2-2v^2\\ z&=u^2+v^2-r^2\\ t&=u^2+v^2-w^2 \end{aligned}$$

De aquí tenemos que:

$$a^2=w^2+r^2-u^2-v^2=(w^2-u^2)+(r^2-v^2)$$

Cada desglose de a^2 en dos sumandos da soluciones al problema. Si $a^2=b+c$, no hay más que resolver las ecuaciones

$$w^2-u^2=b \quad \text{y} \quad r^2-v^2=c$$

aunque no todas sus soluciones nos servirán. En efecto, para cada par de números racionales *p* y *q* tenemos las soluciones:

$$w=\frac{b+p^2}{2p} \qquad u=\frac{b-p^2}{2p} \qquad r=\frac{c+q^2}{2q} \qquad v=\frac{c-q^2}{2q}$$

Necesitamos ahora saber cuáles son los *p* y *q* que hacen que *x*, *y*, *z* y *t* sean positivas.

Como $x = a^2 - u^2$, $a > u$, en consecuencia $p^2 + 2pa - b > 0$ y $p > \sqrt{a^2 + b} - a$. Además, $z = w^2 - a^2$, luego $w > a$, $p^2 - 2pa + b > 0$ y $p < a - \sqrt{a^2 - b}$. Entonces:

$$\sqrt{a^2 + b} - a < p < a - \sqrt{a^2 - b}$$

Del mismo modo se demuestra que:

$$\sqrt{a^2 + c} - a < q < a - \sqrt{a^2 - c}$$

El lema garantiza la existencia de unos intervalos por donde *p* y *q* pueden moverse. En todos los ejemplos que vienen a continuación, supondremos $a^2 = 25$ (como así es en la *Aritmética*).

Ejemplo I

Hacemos $b = 20$ y $c = 5$. Las acotaciones son $1.8 < p < 2.7$ y $0.478 < q < 0.526$. Si tomamos $p = 2$ y $q = 1/2$, entonces:

$$w = 6,\ u = 4,\ r = 21/4,\ v = 19/4.$$

En consecuencia:

$$x = 9,\ y = 39/16,\ z = 11,\ t = 41/16.$$

Comprobación:

$$25 - 9 = 4^2 \qquad 25 - \frac{39}{16} = \left(\frac{19}{4}\right)^2 \qquad 25 + 11 = 6^2 \qquad 25 + \frac{41}{16} = \left(\frac{21}{4}\right)^2$$

Ejemplo II

Sean ahora $b = 15$ y $c = 10$. Las acotaciones son $1.35 < p < 1.80$ y $0.92 < q < 1.10$. Tomamos $p = 3/2$ y $q = 1$. Entonces:

$$w = 23/4,\ u = 17/4,\ r = 11/2,\ v = 9/2,$$

$$x = 111/16,\ y = 19/4,\ z = 129/16,\ t = 21/4.$$

Comprobación:

$$25 - \frac{111}{16} = \frac{289}{16} = \left(\frac{17}{4}\right)^2 \qquad 25 - \frac{19}{4} = \frac{81}{4} = \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$25 + \frac{129}{16} = \frac{289}{16} = \left(\frac{23}{4}\right)^2 \qquad 25 + \frac{21}{4} = \frac{121}{4} = \left(\frac{11}{2}\right)^2$$

Ejemplo III

Hacemos $b = 50/3$ y $c = 25/3$. Las acotaciones son $1.455 < p < 2.112$ y $0.776 < q < 0.916$. Cogemos $p = 5/3$ y $q = 5/6$. Entonces:

$$w = 35/6,\ u = 25/6,\ r = 65/12,\ v = 55/12,$$

$$x = 1100/144,\ y = 575/144,\ z = 1300/144,\ t = 625/144.$$

Comprobación:

$$25 - \frac{1100}{144} = \frac{2500}{144} = \left(\frac{25}{6}\right)^2 \qquad 25 - \frac{575}{144} = \frac{3025}{144} = \left(\frac{55}{12}\right)^2$$

$$25 + \frac{1300}{144} = \frac{4900}{144} = \left(\frac{35}{6}\right)^2 \qquad 25 + \frac{625}{144} = \frac{4225}{144} = \left(\frac{65}{12}\right)^2$$

Esta es la solución que se proporciona en la *Aritmética*.

Ejemplo IV

Con la misma partición, caben más elecciones para p y q. Por ejemplo, $p = 2$ y $q = 4/5$. Entonces:

$$w = 31/6,\ u = 19/6,\ r = 673/120,\ v = 627/120,$$

$$x = 539/36,\ y = 27071/14400,\ z = 61/36,\ t = 92929/14400.$$

Comprobación:

$$25 - \frac{539}{36} = \frac{361}{36} = \left(\frac{19}{6}\right)^2 \qquad 25 - \frac{27071}{14400} = \frac{332929}{14400} = \left(\frac{577}{120}\right)^2$$

$$25 + \frac{61}{36} = \frac{961}{36} = \left(\frac{31}{6}\right)^2 \qquad 25 + \frac{92929}{14400} = \frac{452929}{14400} = \left(\frac{673}{120}\right)^2$$

¿Podría el problema tener soluciones enteras?

Para que existan soluciones enteras, *b* y *c* tendrían que descomponerse en producto de dos factores de la misma paridad: $b = pp^*$ y $c = qq^*$, y entonces las soluciones serían:

$$w = \frac{p + p^*}{2} \qquad u = \frac{p - p^*}{2} \qquad r = \frac{q + q^*}{2} \qquad v = \frac{q - q^*}{2}$$

Ahora bien, puesto que $p < a - \sqrt{a^2 - b}$, tenemos también que $\sqrt{a^2 - b} < a - p$, lo que nos lleva a que $a^2 - b < a^2 - 2ap + p^2$, lo cual a su vez da lugar a $b > 2ap - p^2$. Como $b = pp^*$, tenemos que $p^* > 2a - p$. Pero $2a - p = a + (a - p) > a > b$, luego entonces $p^* > b$, lo cual es imposible. Por tanto, el problema no tiene nunca soluciones enteras.

Agradecimientos

Hago constar mi reconocimiento a Mercedes Sánchez Benito, quien leyó y corrigió este texto, hurtando así tiempo a otras labores más amenas que la de leer este artículo.

Bibliografía

DIOFANTO (2007), *La Aritmética y el libro Sobre los números poligonales*, Editorial Nivola, Madrid.

Software libre y propietario en el contexto de la Educación Superior en España: elementos para un debate.

Antonio Souto-Iglesias
ETSI Navales, UPM
antonio.souto@upm.es

Resumen

Se pretende establecer en este artículo un marco para poder debatir sobre la utilización de software libre y propietario en el contexto de la formación universitaria en España. Para ello se han revisado las funciones de la universidad como institución que forma profesionales competentes en la realización de tareas ya existentes pero también capaces de aportar desde la cultura de la innovación, vinculando ambas funciones con las ideas de software propietario y libre respectivamente. Se contextualiza después este debate incorporando al mismo el coste económico que tiene para la universidad el que software propietario forme parte de su oferta formativa y la influencia que tiene en ese coste el que existan o no alternativas libres competitivas.

Abstract

The objective of this article is to establish a framework to discuss the use of free and proprietary software alternatives in the context of higher education in Spain. With this aim, the functions of university as an institution that trains competent professionals, capable of carrying out existing tasks but capable also of contributing through innovation, are reviewed. Such functions are linked to the ideas of proprietary and free software respectively. This debate is later contextualized incorporating the economic cost of including proprietary software as part of the training offer as well as the influence on such cost of the existence of competitive free alternatives.

Nuestros alumnos se han de enfrentar a lo largo de su vida con problemas mucho más graves, y sobre todo más dinámicos, que los que tuvo cualquier generación pasada; ciertamente dispondrán de medio mucho más eficaces y poderosos, que, en gran medida dependerán de la Informática. Ayudémosles, por tanto, a valerse de esos medios en su tarea de construir un mundo mejor.

Julio Fernández Biarge, 1984

1. Introducción

En los últimos años ha aumentado el número de asignaturas que han integrado como parte de sus competencias las de de utilizar un determinado software (SW), el cual puede ser necesario tanto para otras asignaturas como durante la vida profesional. En general, las competencias transversales relativas a tecnologías de la información y la comunicación están entre las más valoradas por los empleadores, como se puede comprobar por ejemplo en los libros blancos de titulaciones de grado tan representativas como Ingeniería Industrial [1] y Economía [2], donde aparecen datos estadísticos que justifican dicha afirmación.

Julio Fernández Biarge fue uno de los pioneros de la utilización de la informática en el contexto universitario en España. Como investigador del Consejo Superior de Investigaciones Científicas (CSIC) colaboró en la creación de su centro de cálculo en 1962 y fue su primer director durante esos primeros años. Desde su cátedra en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales (ETSIN) de la Universidad Politécnica de Madrid, conseguida en 1960, incorporó la programación en FORTRAN a los planes de estudio de Ingeniero Naval de la UPM de los años 1964 (y su reestructuración alargándolo 6 años en 1976) mediante el diseño de diagramas de flujo en Álgebra de primer año y a través de una parte completa de la asignatura Cálculo Numérico, Informática y Estadística, de tercer curso.

Julio Fernández Biarge participó también en el desarrollo de programas de generación de despieces y planos de corte para Astilleros Españoles desde 1971 a 1984, contribuyendo a que ese grupo se convirtiese en uno de los mayores fabricantes de buques del mundo en la época. En conversaciones con él me contaba que esa relación con la industria aquellos años fue muy enriquecedora para él y los recordaba como un momento muy feliz de su carrera profesional.

Una vez jubilado a principios de los años noventa y ya como profesor emérito, Julio fue clave para introducir en la ETSIN la enseñanza de SW de diseño asistido por ordenador (CAD) a través de la impartición de cursos de MICROSTATION y AUTOCAD, los cuales formaban parte de las asignaturas del área de expresión gráfica.

Como compañero y amigo de Julio Fernández Biarge y coordinador de la enseñanza de la informática en la ETSIN desde el año 1996, me siento muy honrado de participar en este número especial en su memoria. Aunque lo hago hablando de un tema no estrictamente matemático estoy convencido que lo hubiese considerado propio, en consonancia con la trayectoria arriba reseñada y la cita que precede a estas líneas.

En la universidad moderna, a menudo hay interés por parte de los empleadores eh que los estudiantes adquieran competencias en SW específico durante su formación. En particular, en el contexto de la ingeniería, esto sucede en cálculo de estructuras, diseño de circuitos, mecánica de fluidos computacional, modelado geométrico, gestión de proyectos en ingeniería [16], programación [15], etc. En otros contextos sucede lo mismo con paquetes de ofimática, bases de datos, ERPs, etc.

Para estas aplicaciones existen a menudo alternativas libres [5] ("free and open-source software, FOSS") y alternativas propietarias [4], normalmente de pago estas últimas. La necesidad de este gasto ha sido puesta en cuestión por los representantes sindicales en febrero de 2013 en la UPM a raíz del anuncio del despido de 302 PAS, sugiriendo como medida de ahorro el paso paulatino a SW libre. Las referencias asociadas [20, 3, 19] son particularmente interesantes para los debates sobre SW libre y propietario en el contexto de una educación superior con fuertes restricciones presupuestarias.

La Comisión sectorial de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones de la Conferencia de Rectores de Universidades Españolas (CRUE-TIC) viene realizando un trabajo importante documentando la situación de las TIC en el sistema universitario español. Para ello ha publicado en los últimos años los informes UNIVERSITIC [17] sobre y organizado las Jornadas CRUE-TIC con fines similares. Aunque el SW es solo una pequeña parte de esos informes, es reseñable que uno de los objetivos que se marca la CRUE es "facilitar el acceso a herramientas de software libre y código abierto".

En el artículo realizamos primero una valoración de los aspectos formativos del SW, de su influencia en la cultura de la innovación y la formación continua. A continuación revisamos la información existente sobre los costes asociados a SW en la universidad española, terminando con unas valoraciones generales y conclusiones. El autor empezó a trabajar sobre estas ideas para una presentación realizada en las jornadas SAGE/Python de Vigo en Junio 2012 y aquí aparecen desarrolladas, ampliadas y estructuradas como un artículo.

2. SW libre y propietario

No es el objeto de este trabajo entrar en detalles sobre las diferentes clasificaciones de SW libre ni proporcionar definiciones exhaustivas de los conceptos de SW libre y propietario. Para ello hay referencias muy completas en la literatura (e.g. [5, 18]). Sin embargo, sí que vamos a establecer que en este artículo nos referiremos a SW libre como aquel cuya utilización sea gratuita tanto en entornos formativos como profesionales, independientemente de que sea de código abierto o no. SW propietario será el que no cumple esta condición.

3. Formación

3.1. General

El contexto al que se refieren estas reflexiones es el de la faceta formativa del sistema universitario español. Sin embargo, los costes asociados al SW en la universidad y su utilización transcienden a la faceta formativa y son parte esencial de la gestión de la misma y de sus actividades de investigación y transferencia de resultados de investigación.

3.2. Formación para la profesión

La misión de la universidad en su vertiente formativa es la de proporcional al mercado de trabajo titulados con ciertas competencias. Esta misión está “consagrada” por la Ley Orgánica de Universidades de 2001, que indica que una de las funciones de la universidad es la “*preparación para el ejercicio de actividades profesionales que exijan la aplicación de conocimientos y métodos científicos y para la creación artística*”.

Además, actualmente en prácticamente todos los perfiles profesionales cubiertos específicamente por titulados superiores se exigen competencias en el manejo de determinados paquetes informáticos. De hecho, por ejemplo, el conocimiento a nivel intermedio del entorno Windows y del Ms-Office se da por supuesto. Se invita al lector interesado el plantear estas dos preguntas al círculo de amigos que ejerzan la profesión fuera de la universidad:

1. ¿Qué SW te hubiese gustado saber utilizar al dejar la universidad?
2. ¿Qué SW ha sido importante para ti profesionalmente de entre el que aprendiste a utilizar en la universidad?

Comprobará ese lector probablemente que el SW cuyo conocimiento se demanda es en general propietario y bastante específico de las diferentes titulaciones. En el entorno de la ingeniería, por ejemplo, es muy habitual que se requieran conocimientos de programas de cálculo estructural, diseño detallado, simulación en mecánica de fluidos, etc. Una búsqueda online de “NASTRAN + trabajo” (NASTRAN es un paquete de cálculo estructural) muestra el tipo de ofertas vinculadas a manejo de SW a las que me refiero. En otros entornos sucede algo similar con el ERP SAP, ORACLE, etc...

Esta situación de partida lanza un mensaje muy claro al sistema universitario patrio: Las competencias en el manejo de ese SW deben ser parte de los objetivos de las diferentes titulaciones. Debe ser una formación creo que integrada con la general de cada materia pero formación específica en esos paquetes al fin y al cabo. Una opción es plantear que toda la formación debería realizarse con SW libre, algo que sucede por ejemplo en la UOC [5], ejemplo en nuestra opinión no muy significativo dado que esta universidad funciona básicamente a través de plataformas de tele-enseñanza. También en nuestra opinión, realizar toda la formación con SW libre supone ignorar una parte importante de la realidad del mercado de trabajo en la actualidad, tal como comentábamos más arriba, algo que la universidad no debe hacer, siendo pragmáticos.

Sin embargo, también es importante que la universidad esté atenta a tendencias del mundo profesional en la línea de incorporar SW libre en sus actividades como sucede por ejemplo con OPEN-FOAM en el mundo de la simulación en mecánica de fluidos o con Python como sustituto de MATLAB para scripting de procesos así como para análisis de datos. Para que las migraciones de estas empresas a productos de SW libre tengan éxito es fundamental que dispongan de personal formado en esas tecnologías [13].

3.3. Formación para la innovación

La universidad debe formar titulados que ayuden a las empresas a dar un salto cualitativo en determinados aspectos de su modelo de negocio. Es interesante que los nuevos titulados que se incorporen a las empresas puedan tener un brillo diferente al personal existente y puedan aportar ideas y soluciones que sea viable implementar en su entorno de trabajo. El SW libre, competitivo con el propietario en multitud de campos, ofrece oportunidades muy interesantes en ese sentido, debido a su bajo o nulo coste, facilidad de customización, etc. Esta es una idea que se ha potenciado a nivel europeo a través de diferentes proyectos que tratan de utilizar las potencialidades del SW libre para impulsar el desarrollo y la innovación [4]. También es algo que se ha visto como una oportunidad de desarrollo de las PYMES [7], las cuales pueden acceder mediante SW libre a multitud de soluciones a problemas complejos a bajo coste y en determinados casos apoyarse en las mismas para ofertar servicios de gran calidad.

Esto tiene una lectura interesante también desde la perspectiva del SW propietario, y así se la hicieron ver al autor en las jornadas SAGE/Python de 2012 mencionadas, en el sentido de que de algún modo cargas/penalizas a un estudiante al que solo formas en tecnologías propietarias, que después demanda en su trabajo y que suponen un coste adicional muy importante para las empresas (en general entre uno y dos órdenes de magnitud más grande que el que suponen las licencias de uso académico o de investigación). Este coste extra es mitigado a menudo por la utilización de SW pirata no licenciado, pero esto es algo con lo que no se puede contar en general y con lo que además no se puede ofertar servicios a determinados niveles profesionales.

3.4. Formación básica

La utilización de determinado SW se ve en la universidad moderna en muchos casos no como un fin en si mismo sino como un medio que ayuda a comprender determinadas materias [12], a menudo básicas. La enseñanza de ese SW puede ser utilizada además como laboratorio virtual de los conceptos teóricos. No se entiende un curso de cálculo numérico sin la utilización de SW de apoyo por ejemplo, ni uno de cálculo de estructuras, ni quizá uno de cálculo o álgebra básicos. La selección de ese SW no es inocente y la dicotomía libre/propietario aparece de modo habitual. Julio Fernández Biarge [9] ya adivinó los cambios metodológicos que la Informática generaría en los diseños curriculares, afectando por ejemplo a su evaluación [14]. También insistió en la importancia que se debe dar a la formación básica, en un contexto tan cambiante [8]. Si escuchamos únicamente a los empleadores, podemos quedar atrapados en el discurso de la tiranía de lo relevante [10], de lo momentáneo, olvidando que la formación básica es la que permite construir profesionales capaces de adaptarse a entornos cambiantes.

3.5. Formación en valores

La utilización de SW libre está percibida socialmente como un medio para perseguir el bien común, mitigando la componente económica de los avances tecnológicos [18]. De hecho, el SW libre tiene mucho de formación en valores de trabajo colaborativo, algo que es muy importante para funcionar bien en organizaciones en las que ser proactivo es importante. Hay universidades como Macquarie, en Australia, que han hecho de este tipo de aspectos éticos/formales de la educación una parte central de sus curriculums.

3.6. Formación continua

La Ley Orgánica de Universidades identifica de modo explícito las cuatro funciones principales de la universidad española. Además de la ya comentada referida a la preparación para las actividades profesionales, otra de esas cuatro funciones principales es “la difusión del conocimiento y la cultura a través de la extensión universitaria y la formación a lo largo de toda la vida”. Mientras que universidades de otros países están tremendamente implicadas en la formación continua a las empresas, la universidad española contribuye relativamente poco a cubrir esas necesidades del mundo profesional [6] a pesar de disponer de personal cualificado e infraestructura para hacerlo.

A menudo, dicha formación adicional se refiere a temas en los que el manejo de determinado SW, libre o propietario, es parte central de la misma (gestión de proyectos, Python, MATLAB, bases de datos, SAP, etc.). Que ese SW sea libre facilita en general la organización de la acción formativa.

4. Consideraciones sobre costes

4.1. General

No se ha encontrado información general sobre lo que se gasta en España en SW, ni sobre importaciones de SW. Por ejemplo, MICROSOFT, SAP y ORACLE facturan en torno a 600, 300 y 200 M€/año, respectivamente[1]. No parece exagerado estimar que el total invertido en SW ronde 4000M€, teniendo en cuenta que no se dispone de los datos de IBM, uno de los mayores proveedores. La mayor parte de estos costes suponen un impacto directo sobre la balanza de pagos. A estos costes se añaden los correspondientes al soporte que prestan a grandes empresas (bancos, cadenas de supermercados, eléctricas, etc...) otras grandes empresas como TECNOCOM, por ejemplo, con una facturación en 2011 de 400M€.

Se ha encontrado escasa información sobre costes de SW en el contexto universitario en España y no se dispone por tanto estadísticas de costes totales ni de parciales por universidades, tipos de estudios, paquetes específicos, etc... Dentro de los informes CRUE-TIC citados [17], que corresponden a encuestas realizadas a 65 universidades, cubriendo el 92 % del alumnado, se indica que el presupuesto centralizado dedicado al mantenimiento de licencias SW en explotación es, en media, de 480.000€/año por universidad. Para valorar esta cifra hay que tener en cuenta que hay licencias permanentes y otras de renovación anual, que este gasto no incluye el realizado por facultades y departamentos y que tampoco permite discriminar el gasto de SW que se dedica a tareas formativas del que se dedica a temas de administración y

[1] Para tener una idea de la magnitud de estos valores, la renta per capita en España en 2012 fue, de acuerdo con el INE, de 22772€

gestión.

Las empresas que desarrollan y comercializan SW están generalmente bastante interesadas en que su SW pase a la oferta formativa de las universidades. La idea es que si ese SW se enseña en la universidad ello incidirá después en que sea demandado por esos usuarios cuando pasen al mundo empresarial. Debido a ello estas empresas ofertan licencias educacionales a un precio significativamente inferior al de mercado. Por ejemplo, IBERISA, distribuidor de todo el conjunto de productos NASTRAN, ofrece un set completo de todo su SW como licencias flotantes (100) por un fijo de 2500€ más un mantenimiento anual de 625€, que es una oferta bastante atractiva.

Sin embargo, el coste sigue siendo significativo y esto es un aspecto central a considerar en el debate sobre SW libre y propietario en educación superior, sobre todo en un contexto de recortes extremos en las posibilidades de gasto por parte de las universidades. De hecho, como se comentaba en la introducción, este tema ha sido puesto sobre la mesa por los representantes sindicales en febrero de 2013 en la UPM a raíz del anuncio del despido de 302 PAS, sugiriendo como medida de ahorro el paso paulatino a SW libre [20, 3]. La respuesta del equipo rectoral [19] a esa propuesta saca a la luz un tema que puede ser relevante en determinados aspectos: "SW libre no es SW gratis, pues normalmente incluye costes de instalación, particularización y mantenimiento, aunque se ahorre el coste de algunas licencias". Aunque ese pueda ser el caso para determinado tipo de aplicaciones, lo habitual es que las solicitudes de servicios de mantenimiento del SW propietario utilizado en la universidad para formación sean mínimas, como lo son también las de SW libre utilizado en tareas formativas. Además, es importante destacar que la gestión de licencias de SW propietario en sistemas de usuarios como los habituales en las escuelas y facultades plantea problemas muy serios al personal informático, que se traducen en tiempo y dinero, mientras que la instalación de SW libre es en general muy sencilla.

La universidad considera como un activo de su oferta formativa el poder incorporar la formación en determinado SW a diferentes asignaturas. Por ejemplo, no se concibe un arquitecto que termine su carrera sin saber utilizar AUTOCAD. Sin embargo, el punto de equilibrio precio/valor no está nada claro. En mi opinión, con alternativas de SW libre competitivas, el coste que pagan las universidades podría reducirse e inclusive podría negociar cobrar de las empresas de SW por incorporar dicho SW a su oferta formativa.

Este SW, cuando es muy específico, se suele licenciar promovido por algún profesor con cierto apoyo departamental. El siguiente nivel son aquellas licencias que se gestionan a nivel Escuela/Facultad como puede ser RHINOCEROS o MAXSURF en nuestra escuela, y que afectan a asignaturas estrella de las titulaciones como “Sistemas CAD” o “Proyectos” en estos casos respectivamente. Finalmente, otras licencias se gestionan para toda la universidad mediante lo que se conoce como licencias CAMPUS. Dado su impacto en costes y el valor más general de los razonamientos al respecto de este tipo de licencias, nos ocuparemos en este artículo principalmente de las mismas, analizando si existen alternativas libres para ellas y valorando si merece la pena el abandono de la alternativa propietaria. En general, cuando se quiere introducir SW propietario en una determinada asignatura, se atacan esos tres niveles para conseguir la financiación.

4.2. Licencias CAMPUS

Conocer el coste de las licencias campus de diferentes paquetes informáticos utilizados en docencia en las universidades españolas no es una tarea fácil. Esa información no figura en general en la web de las empresas, salvo excepciones como National Instruments, ni tampoco en el desglose de gastos de la universidad, al menos de un modo accesible.

Sin embargo, la respuesta del equipo rectoral citada [19] facilita una cifra sobre el coste total en SW que paga la UPM desde servicios centrales (300.000€), con algunos detalles extractados sobre los que más adelante discutiremos. Algo de información detallada se puede encontrar en el “perfil de contratante”[2] de las diferentes universidades y en el caso de la UC3M esa información está bastante detallada. Damos unos datos genéricos (sin IVA) combinando información de los perfiles de contratante UPM y UC3M así como alguno entresacado de [19]:

1. MICROSOFT (100000€/año) Windows, Office, Visio, Project, Visual Studio, etc. Este conjunto de SW transciende completamente las tareas de formación dado que Windows es el sistema operativo de la mayor

[2] http://www.upm.es/perfildelcontratante

parte del PDI y de la práctica totalidad del personal de gestión, y Office su herramienta habitual de ofimática.

2. MATLAB (70€/licencia para licencias flotantes - UC3M 2010): no está claro en la documentación del perfil pero parece que se compran licencias permanentes flotantes, quizá del orden de 100. Hay que tener en cuenta que la licencia de MATLAB crudo sin toolboxes para un profesional cuesta del orden de 6000€. Las alternativas libres son Octave o directamente Python. En opinión del que esto escribe esas alternativas no son tales por diferentes razones que escapan a los objetivos de este artículo.

3. NI LabView suite. 14649€/año. Se usa en la enseñanza de electrónica y control. Es un SW muy relacionado con el Hardware de adquisición de datos y control de National Instruments. Su posición en el mercado es dominante y no hay alternativa libre disponible.

4. MAPLE: 30798€. No está claro que MAXIMA o el propio SAGE sean alternativas libres competitivas.

5. SPSS y STATGRAPHICS, con los que compite R (libre). Se desconoce el coste de sus licencias académicas.

En la medida en que haya SW libre competitivo, el precio que la universidad paga por SW propietario podría ser reducido mediante una negociación entre partes. Esto no es así en algunos casos como hemos visto más arriba (MATLAB, LabView, etc.), y mucho menos en otros campos más específicos. Por ejemplo, en el mundo offshore no existe ninguna alternativa libre a los paquetes informáticos para cálculo de movimiento de objetos flotantes y fondeos. La enseñanza de tecnologías como estas se ha convertido en un valor añadido fundamental para nuestros titulados y el hecho de que no haya un SW libre competitivo es utilizado por las empresas para imponer unos precios difícilmente asumibles por la universidad. Esto probablemente sucede en muchas otras áreas, no solo de la ingeniería, sino de biblioteconomía, diagnóstico genético, etc.

4.3. Licencias escuela/facultad

El siguiente nivel son aquellas licencias que se gestionan a nivel Escuela/Facultad como las de los programas RHINOCEROS o MAXSURF en mi escuela, necesarios para asignaturas estrella de las titulaciones como “Sistemas CAD” o “Proyectos”. El número de licencias suele depender del número de puestos en el aula de ordenadores. Suponiendo unos 6.000€/año por escuela, en una universidad del orden de 20 facultades como la nuestra tendríamos unos 120.000€ /año por universidad.

4.4. Licencias a nivel asignatura/departamento

No hay un apoyo específico ni a nivel universidad ni a nivel escuela y es el propio profesor interesado el que tiene que tratar de buscar soluciones a bajo coste, financiación externa, etc... La capacidad de negociación a este nivel es pequeña. Suponiendo 1.500€/departamento/año, el total puede rondar en cada universidad en torno a 100.000€/año.

A este nivel, las licencias son normalmente soportadas por el capítulo de fungible de cada departamento encargado de la asignatura. Si hay buena sintonía con la dirección del departamento, hay algún remanente de fungible, y se trata de licencias permanentes, se puede intentar. Cuando las licencias son de renovación anual, asumir ese coste fijo por parte de un departamento es a menudo inviable.

4.5. SW de gestión

Las universidades utilizan SW también para aspectos internos de gestión, como la gestión de matrícula y calificaciones, gestión económica, el VPN, biblioteca, etc. En general es SW propietario. Incluso las universidades que más han apostado por SW libre recurren a SW propietario para gestión de matrícula, gestión económica, de personal, etc. [11].

El coste asociado al SW de gestión es en general bastante alto y con cierta dificultad se encuentra información sobre el mismo en el perfil de contratante de cada universidad. Entre este tipo de SW destacan ORACLE, cuya licencia se gestiona en la UPM de modo bianual por un importe total de 172.000€(es del mismo orden en otras universidades), y el SW de biblioteca (SUMMON), que ha supuesto 19.136€/año en la adjudicación de 2013. En general creemos que convendría separar el coste asociado a este SW, que puede suponer en torno al 50 % del total pagado desde servicios centrales, de aquel dedicado a temas vinculados de modo directo con la formación, aunque hay licencias, como la campus de MICROSOFT Windows y OFFICE que se utilizan tanto para gestión como para formación e investigación.

Una mención aparte merece el SW libre MOODLE, sobre el que se han articulado la gran mayoría de las plataformas de tele-enseñanza en nuestro país. Nos preguntamos el coste que tendría prestar esos mismos servicios que todos disfrutamos utilizando una plataforma propietaria. Probablemente el nivel de implantación y desarrollo de estos sistemas hubiese sido muy inferior.

4.6. SW libre y propietario y actividades de investigación y transferencia de tecnología en la universidad

Un aspecto adicional a considerar es que el SW no se usa en la universidad solo para temas de formación. Se utiliza de modo rutinario en tareas de investigación y transferencia de tecnología, a menudo con proyectos de prestación de servicios LOU83. Estos proyectos pueden consistir en servicios de consultoría técnica que suponen una compensación económica para el investigador contratante; parte del valor de dicho servicio nace de la utilización de dicho SW.

Esta utilización del SW para proyectos de prestación de servicios es una de las razones por las que las empresas de SW son reacias a facilitar su SW a un precio incluso inferior al que ya ofertan las licencias académicas. La razón es que a menudo se confunden las funciones formativas con las de prestación de servicios, utilizando licencias cuya misión es de formación para prestación de servicios.

Siendo realistas, hay que valorar en cualquier caso que para poder enseñar determinado SW es muy importante que el docente utilice ese SW de modo rutinario en sus tareas de investigación y transferencia de tecnología. En general, hay que buscar cierta sintonía - partnership - entre empresas de SW y universidad, tratando de ser pragmáticos con estos temas que tienen que ver con implantación de SW propietario, calidad de la enseñanza, prestación de servicios, etc.

4.7. Estimación de costes totales

Tras el análisis previo, no parece muy aventurado estimar que el coste total de SW propietario en la UPM para formación esté en el entorno de los 400.000€/año, y el coste total para las universidades españolas alrededor de 25M€/año .

5. Consideraciones finales

Con unos costes totales aproximados de 25M€/año y una población universitaria de 1.5M, el coste por estudiante del SW propietario es de unos 17€/estudiante/año. Teniendo en cuenta que se maneja una cifra estándar de 10000€/estudiante/año, 17€ suponen un porcentaje mínimo de esta cantidad total, y por tanto quizá un poco irrelevante preocuparse específicamente de ella.

Por otro lado, la importancia del SW en la vida profesional de nuestros titulados, y en particular en su productividad, es cada día más importante, y también lo son los costes que estas herramientas suponen a las empresas. Que cada estudiante reciba una formación que lo capacite adecuadamente en su utilización es, por tanto, algo a lo que se debe prestar atención.

Respecto a la dualidad SW libre y propietario, el autor cree que la universidad debe saber moverse entre esos dos mundos con sutileza, tratando de sacar lo máximo de los mismos, y haciendo valer su importancia como mecanismo de introducción de determinado SW en el mercado a efectos de fijar precios a pagar por el mismo; debe saber también formar a nuestros estudiantes en la utilización de soluciones libres que les permitan aportar valor añadido en el mundo profesional a bajo coste y estar alerta a las oportunidades que, a todos los niveles, ofrece el mundo del SW libre.

6. Conclusiones

Se ha tratado en este artículo de establecer un marco en el que se pueda debatir sobre la utilización de alternativas de software libre y propietario en el contexto de la formación universitaria en España. Para ello se han revisado las funciones de la universidad como institución que forma profesionales competentes en la realización de tareas ya existentes pero también capaces de aportar desde la cultura de la innovación. Mientras que la formación de profesionales en lo que demanda el mercado laboral está normalmente vinculada a la utilización de software propietario, la cultura de la innovación se potencia de modo más eficaz desde el contexto del software libre. Se ha contextualizado después este debate incorporando al mismo el coste económico que tiene para la universidad el que software propietario forme parte de su oferta formativa. Aunque podría pensarse que la universidad debería recibir ese software de modo gratuito por parte de las empresas, ese no es el caso. La universidad debe potenciar que sus estudiantes adquieran competencias en el manejo del software (tanto propietario como libre) que se utiliza en el mundo profesional, y asumir que debe pagar por ello cuando sea necesario. Sin embargo la universidad debe negociar con fuerza para reducir esos costes utilizando como arma de negociación la existencia de alternativas libres competitivas cuando las hay, que no siempre es el caso, y estar alerta a las oportunidades que ofrece el dinámico mundo del software libre.

Para terminar, me gustaría volver a la figura de Julio Fernández Biarge. En la cultura universitaria española comparten espacio varias sub-culturas. La primera de ellas, la caciquil, es heredera de la universidad franquista de la mediocridad y el desmoche del talento, y se perpetúa hasta nuestros días a través de los procesos endogámicos LRU y post LRU. Pero también hay una sub-cultura del conocimiento, que cree que la universidad es una de las herramientas más poderosas de las sociedades modernas para impulsar su progreso tanto técnico como social, capaz de canalizar energías para la crítica, para la formación de profesionales competentes, para generar conocimiento y para dar contrapunto a las necesidades técnicas de la industria. A ella pertenecía Julio y, aunque le tocó vivir muchos años la hegemonía de aquella otra universidad, tuvo la fuerza suficiente como para mantener su carrera profesional vinculada a este segundo modelo. Su memoria sirve de inspiración a los que compartimos sus ideas.

Agradecimientos

Se agradece a José Luis Cercos-Pita y Guillem Borrell su paciencia e interés para discutir de modo habitual sobre estos temas.

Referencias

[1] ANECA. Libro Blanco. Título de Grado en Ingeniería Informática, 2004.

[2] ANECA. Libro Blanco. Título de Grado en Economía y en Empresa, 2005.

[3] L. Arjona. Migración a software libre y prescindir de licencias en la UPM, 2013.

[4] CENATIC. Estudio sobre la situación actual del Software de Fuentes Abiertas en las Universidades y Centros de I+D españoles. Technical report, Centro Nacional de Referencia de Aplicación de las TIC basadas en Fuentes Abiertas, 2009.

[5] H. Coll, D. Bri, M. Garcia, and J. Lloret. Free software and open source applications in higher education. In *Proc. 5th WSEAS/IASME int. conf. on Engineering education*, EE'08, pages 325–330, 2008.

[6] Consejo_de_Universidades. La formación permanente y las universidades españolas. Technical report, Comisión de Formación Continua, Consejo de Universidades, 2010.

[7] EOI. La oportunidad del software libre: capacidades, derechos e innovación. Technical report, EOI, Escuela de Negocios, 2009.

[8] J. Fernández-Biarge. Enseñanzas técnicas para el futuro. Las matemáticas en las enseñanzas técnicas. *Ingeniería Naval*, 481:375–385, July 1975.

[9] J. Fernandez-Biarge. Educación e Informática. *Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, Boletín*, (4):27–36, 1984.

[10] Matthew Flinders. The tyranny of relevance and the art of translation. *Political Studies Review*, 11(2):149–167, 2013.

[11] K. C. Green. *Campus computing 2004: The 15th national survey of computing and information technology in American higher education.* Encino, CA, 2004.

[12] Allan Jones. Proprietary software tools as learning aids. In *AACE Ed-Media*, June 2007.

[13] L. Lin. Impact of Users' Expertise on the Competition between Proprietary and Open Source Software. In *39th Hawaii International Conference on System Sciences*, 2006.

[14] A. Souto-Iglesias. Pruebas de evaluación en un aula de ordenadores. In *XX CUIEET, Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas*. Universidad de Las Palmas de Gran Canarias, July 2012.

[15] A. Souto-Iglesias and J. L. Bravo-Trinidad. Implementación ECTS en un curso de Programación en Ingeniería. *Revista de Educación*, (346):487–511, Mayo 2008.

[16] A. Souto-Iglesias, I. Martonez-Barrios, M. Toman, R. Guadalupe-Garcia, and A. Fernandez-Coracho. Integrated Learning of Production Engineering Software Applications in a Shipbuilding Context. *International Journal of Engineering Education*, 29(6):1400–1409, 2013.

[17] J. Uceda-Antolín. UNIVERSITIC 2012: Descripción, gestión y gobierno de las TI en el Sistema Universitario Español. Technical report, Conferencia de Rectores de Universidades Españolas (CRUE-TIC), 2012.

[18] Shahron Williams van Rooij. Adopting open-source software applications in U.S. higher education: A cross-disciplinary review of the literature. *Review of Educational Research*, 79(2):682–701, 2009.

[19] J. Vazquez-Minguela and C. Perez-Garcia. Respuesta del equipo rectoral a las propuestas de los representantes de los trabajadores en la mesa de negociación. Technical report, Universidad Politécnica de Madrid - UPM, March 2013.

[20] J. Vila-Baceiredo. Propuestas de los representantes de los trabajadores en la mesa de negociación relativa a los recortes de la UPM. Technical report, Universidad Politécnica de Madrid - UPM, March 2013.

Boletín de la Soc. Puig Adam, núm 97 (Junio 2014)

Cauchy/L'Hôpital contra L'Hôpital con aplicaciones y comentarios

Aurel Muntean
IES *Marqués de Santillana* de Colmenar Viejo (Madrid)
Doctor en Matemáticas por la Univ. "Babes-Bolyai" de Cluj-Napoca, Rumanía
aurelmuntean@yahoo.com

Abstract

The aim of this article is to emphasize some subtleties of the L'Hôpital type rules and to provide the Cauchy/L'Hôpital version. In the paper are analyzed different examples of the indeterminate forms when the L'Hôpital's rule cannot be applied and the usual procedure is the Cauchy/L'Hôpital theorem. Finally, we have established relationships between sets of functions defined in terms of the applicability of the L'Hôpital type rules or the Cauchy/L'Hôpital theorem.

Introducción

Aunque la regla de L'Hôpital es un tema muy estudiado, en Bachillerato no se suele ahondar mucho en "detalles". Así, las sutilezas que presentan las reglas de tipo L'Hôpital pasan desapercibidas para los libros de texto de Bachillerato, profesores y estudiantes.

El presente artículo está enfocado a destacar, a través de ejemplos, la utilidad de la versión Cauchy/L'Hôpital como herramienta para "salvar" indeterminaciones donde no sea aplicable la regla de L'Hôpital. La consideración de ellas en el ámbito del análisis matemático, no es nueva.

Las relaciones entre los campos de aplicabilidad de las reglas de tipo L'Hôpital y del teorema de Cauchy/L'Hôpital, que presentamos al final del artículo, no son más que una nueva combinación de viejas ideas de Bernoulli-L'Hôpital-Cauchy.

1 Comentarios sobre el uso y mal uso de las reglas de L'Hôpital

Esta útil regla se ha usado y mal usado para intentar obtener ciertos límites, algunos de los cuales ni siquiera se pueden deducir a partir de la regla aunque ésta pueda aplicarse. Según Martínez de la Rosa [3], *la regla de L'Hôpital es el típico resultado que se suele aplicar de manera automática, sin embargo su uso indiscriminado puede llevarnos a resultados falsos.* Con una visión también concreta, en un trabajo de carácter didáctico (Muntean [4]) analizamos algunos errores en la aplicación de la regla de L'Hôpital, siendo los libros de texto de Bachillerato y algunos textos universitarios el punto de partida.

Ejemplo 1. Se pretende determinar mediante la regla de L'Hôpital el límite $l = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x}$. Intentando aplicar la regla obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{1} = \text{no existe}.$$

Sin embargo, el límite pedido existe y vale $l = \lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$. Esta situación se debe a que no se cumple la hipótesis sobre la existencia del límite del cociente de las derivadas antes de aplicar la regla de L'Hôpital.

¿Es válido el recíproco del teorema de L'Hôpital? Es decir, ¿es válida la implicación

$$(\exists) \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \Longrightarrow \qquad (\exists) \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ ?$$

Veámoslo con el siguiente contraejemplo:

Contraejemplo 1. Tomemos $f(x) = x + \cos x$ y $g(x) = x$.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x + \cos x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{\cos x}{x}\right) = 1,$$

mientras que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{1} = \text{no existe}.$$

2 Cauchy/L'Hôpital versus L'Hôpital

El teorema de L'Hôpital da *condiciones suficientes* para el cálculo de límites de la forma $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ cuando se presenta una indeterminación de tipo $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$, suponiendo que $x_0\in[a,\,b]\subset\overline{\mathbb{R}}$ y las funciones $f,\,g:(a,\,b)\backslash\{x_0\}\to\mathbb{R}$ son derivables, etc. Surge el interrogante:

¿Qué pasa cuando x_0 es finito y las funciones $f,\,g$ son derivables sólamente en x_0 ?

Es por lo tanto lógico contemplar nuevas hipótesis bajo las que el cálculo de tales límites de funciones puede solucionarse.

Teorema 2.1 (Cauchy/L'Hôpital). *Sean $I\subset\mathbb{R}$ un intervalo, $x_0\in I$ y dos funciones $f,\,g:I\longrightarrow\mathbb{R}$ derivables en x_0 y tales que $f(x_0)=g(x_0)=0$ y $g'(x_0)\neq 0$.*

Entonces existe un entorno $\mathcal{U}(x_0)$ tal que $g(x)\neq 0$, $(\forall)\,x\in\mathcal{U}(x_0)\backslash\{x_0\}$ y se tiene que $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Demostración. Como

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=g'(x_0)\neq 0$$

existirá un entorno $\mathcal{U}(x_0)$ tal que

$$(\forall)\,x\in\big(\mathcal{U}(x_0)\setminus\{x_0\}\big)\cap I\,,\quad \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\neq 0\quad\Longrightarrow\quad g(x)\neq g(x_0)\,.$$

Por otra parte, a partir de la igualdad $f(x_0)=g(x_0)=0$, deducimos:

$$(\forall)\,x\neq x_0\,,\quad \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}\quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\,.$$

Ejemplo 2. ¿Cuánto vale el límite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}}{\ln(1+x)}$?

Tomando las funciones $f,\ g : (-1,\ +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \in (-1,\ 0) \cup (0,\ +\infty) \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \ln(1+x)$$

nótese que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{1+x}} = \text{no existe},$$

por lo tanto la regla de L'Hôpital no es aplicable. Como

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0 \quad \wedge \quad g'(0) = 1,$$

es lícito aplicar el teorema de Cauchy/L'Hôpital y así obtener:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

***Nota* 1.** El teorema anterior es muy útil para eliminar indeterminaciones en el cálculo de límites de cocientes de *funciónes definidas en varias ramas*.

Ejemplo 3. Sean las funciones $f,\ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 4x - 4, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 2x - 2, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Nótese que $x = 1$ es el único punto en el que las dos funciones son derivables, por lo tanto la regla de L'Hôpital no es aplicable para calcular el límite $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Si aplicamos el teorema de Cauchy/L'Hôpital, se tiene que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{4}{2} = 2$$

Ejemplo 4. En el caso $f,\ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - \cos x\,, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x\,, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x\,, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

el límite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ resulta inabordable con la regla de L'Hôpital. Lo hacemos aplicando el teorema de Cauchy/L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{1} = 0$$

***Nota* 2.** La idea del teorema de Cauchy/L'Hôpital funciona en condiciones más generales.

Si $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) = 0\,,\quad (\forall)\, k \in \{1,\, 2,\, \ldots\,,\, n-1\}$ y $g^{(n)}(x_0) \neq 0\,,$ entonces:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}\ .$$

Ejemplo 5 (propuesto por el autor de este artículo).

Sean las funciones $f,\ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}\,, & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2\,, & \text{si } x \leq 0 \\ 3x^2\,, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Nos encontramos con una función que causa respeto, debido a que f es una función no elemental indefinidamente derivable en todo $\mathbb{R}$ y posee la propiedad de que

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N}.$$

En primer lugar, precisemos que:

$$\begin{cases} f'_{Izq}(0) = \displaystyle\lim_{x\nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\nearrow 0} \frac{0}{x} = 0 \\ \\ f'_{Dcha}(0) = \displaystyle\lim_{x\searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\searrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0 \end{cases}$$

y, por consiguiente:

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ \\ \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}\,, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Como se hizo anteriormente, utilizando derivadas laterales y además el límite

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^k} = 0, \quad (\forall)\, k \in \mathbb{N},$$

obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} f''_{Izq}(0) = \displaystyle\lim_{x \nearrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{0}{x} = 0 \\ \\ f''_{Dcha}(0) = \displaystyle\lim_{x \searrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0 \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad f''(0) = 0.$$

De este modo, podemos escribir:

$$f'' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \qquad f''(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ \\ \Big(\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{2}{x^3}\Big) e^{-\frac{1}{x}}\,, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Por otra parte,

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x\,, & \text{si } x \leq 0 \\ 6x\,, & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \wedge \quad g''(x) = \begin{cases} 6x^2 + 6\,, & \text{si } x \leq 0 \\ 6\,, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Si aplicamos el teorema de Cauchy/L'Hôpital, se tiene que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f''(0)}{g''(0)} = \frac{0}{6} = 0.$$

3 Relaciones entre los campos de aplicabilidad de los teoremas de tipo L'Hôpital

Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo (no compacto), $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ y $\mathcal{F}(I) = \{\, f : I \longrightarrow \mathbb{R}\,\}$.

Proponemos las siguientes denotaciones:

- El campo de funciones que produce una indeterminación en el punto x_0

$$\mathcal{I} = \Big\{ \big(f,\ g\big) \in \mathcal{F}(I) \times \mathcal{F}(I) \ \Big| \ \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \ \vee \\ \vee \ \Big(\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \ \wedge \ \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty \Big) \Big\}$$

- El campo de aplicabilidad del teorema de L'Hôpital

$$\mathcal{H} = \Big\{ \big(f,\ g\big) \in \mathcal{I} \ \Big| \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \ \text{se puede calcular aplicando la regla de L'H} \Big\}$$

- El campo de aplicabilidad del teorema de Cauchy/L'Hôpital

$$\mathcal{C}/\mathcal{H} = \Big\{ \big(f,\ g\big) \in \mathcal{I} \ \Big| \ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \ \text{se puede calcular aplicando el teor. C/L'H} \Big\}$$

Mediante contraejemplos se establecen las siguientes relaciones:

$$\mathcal{H} \setminus (\mathcal{C}/\mathcal{H}) \neq \varnothing\,; \qquad (\mathcal{C}/\mathcal{H}) \setminus \mathcal{H} \neq \varnothing\,; \qquad \mathcal{H} \cap (\mathcal{C}/\mathcal{H}) \neq \varnothing$$

Cualquiera de los ejemplos 2, 3 y 4 nos proporciona un par de funciones $\big(f,\ g\big) \in (\mathcal{C}/\mathcal{H}) \setminus \mathcal{H}$ que sirve para justificar la relación $(\mathcal{C}/\mathcal{H}) \setminus \mathcal{H} \neq \varnothing$.

***Nota* 3.** Para $x_0 = \pm\infty$ el teorema de Cauchy/L'Hôpital no se puede aplicar. Sin embargo, utilizando la regla de L'Hôpital se pueden resolver indeterminaciones en el infinito. Para ilustrar, tomemos el ejemplo muy conocido:

Ejemplo 6. Consideremos $f(x) = e^x \;\wedge\; g(x) = x^k \quad\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{kx^{k-1}} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{k\,!} = +\infty\,.$$

Como consecuencia obtenemos $(f,\, g) \in \mathcal{H} \setminus (\mathcal{C}/\mathcal{H})$. De esta forma, resulta claramente la relación $\mathcal{H} \setminus (\mathcal{C}/\mathcal{H}) \neq \varnothing$.

***Nota* 4** (Boss [2], p. 64)**.** La idea empleada en la demostración del teorema de Cauchy/L'Hôpital nos sugiere contemplar la regla de L'Hôpital bajo la suposición adicional (que se suele verificar en muchos casos) de que f' y g' sean continuas en x_0 (finito). En tal caso, existirán $f'(x_0)$ y $g'(x_0)$ y se tendrá:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\,,$$

que parece preferible como método práctico de resolución de límites indeterminados, aunque aquí es necesario suponer, además, que $g'(x_0) \neq 0$.

Ejemplo 7. Si $f(x) = \cos x - 1 \;\wedge\; g(x) = x^2 \quad\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{f''(0)}{g''(0)} = -\frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad (f,\, g) \in \mathcal{H} \cap (\mathcal{C}/\mathcal{H})$$

La existencia de situaciones de este tipo justifica que $\mathcal{H} \cap (\mathcal{C}/\mathcal{H}) \neq \varnothing$.

4 Conclusiones

A pesar de que la regla de L'Hôpital es un tema muy estudiado y que varios autores de libros de texto de Bachillerato y profesores consideran que, por lo general, desde el punto de vista de la enseñanza «*el rigor característico de las Matemáticas debería tener carácter local - en determinadas parcelas - y no extenderse al conjunto de la materia*», nosotros consideramos que merece la pena reflexionar sobre algunas de sus sutilezas, ya que pensamos que son especialmente interesantes para nuestros cursos.

Bibliografía

[1] Boas, R. P. (1986): Counterexamples to L'Hôpital's Rule, *Amer. Math. Monthly*, vol. 93, 644-645. Disponible en Web:

`http://www.maa.org/pubs/Calc_articles/ma041.pdf`

[2] Boss, V. (2007): *Lecciones de matemática: Análisis*, tomo I, Editorial URSS, Moscú.

[3] Martínez de la Rosa, F. (2006): ¿Teoremas o fórmulas? *SUMA, revista sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*, 51, pp. 31-39.

[4] Muntean, A. (2011): Sobre algunos errores en los libros de texto de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato. *Boletín de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, 87, pp. 30-53.

Reflexiones sobre la fundación de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

José Aldeguer Carrillo
Dr. Ingeniero de Construcción. Universidad Politécnica de Valencia
jaldegue@upvnet.upv.es

Abstract

The road that led to the Academy foundation is shown in a simple way through a line of people defined by their special condition, showing the kindness of those who, beyond its foundation, contribute to its continuity.

A la memoria del Prof. Dr. D. Julio Fernández Biarge

El conocimiento matemático es muy antiguo , va asociado a la naturaleza del hombre. Me gusta recordar como ejemplo, que definimos el número π como el cociente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. Las sucesivas aproximaciones históricas, dan como resultado el conocido 3,1415…La primera aproximación que yo conozco, aparece en el Antiguo Testamento, en el Libro de los Reyes, (cap. 7, vers. 13, 14, 23), en el que se cita que: "*Hiram, lleno de sabiduría, de entendimiento y de conocimiento para hacer toda suerte de obras de bronce…… hizo un mar de bronce, de diez codos de uno al otro lado, re-dondo, …, y lo ceñía en derredor un cordón de treinta codos*". Históricamente ha sido conocido como el mar de bronce de Salomón. El número π tiene una primera significación con el número 3.

El conocimiento matemático va siguiendo un proceso histórico, asociado a las necesidades de la evolución del hombre. Siempre ha supuesto un lenguaje de apoyo a las técnicas del progreso. Se va concentrando en pequeñas comunidades, en muchos casos reacias a su divulgación, al considerarlo un privilegio de uso limitado, pero cada vez más importante.

El crecimiento de esa importancia obliga a dotarlo de carácter estatal, siendo el Rey Felipe II a quién corresponde el honor de firmar en Lisboa, mediante un decreto de fecha 25-12-1582 la creación de la Academia que ampare y desarrolle los conocimientos de Matemáticas, como apoyo a las técnicas en desarrollo. Unos meses después Juan de Herrera, da realidad al citado decreto creando la Academia , que incluye las Matemáticas y la Arquitectura Civil y Militar.

Hay que hacer notar, que en esa misma época funcionaron Academias de Matemáticas en Sevilla, Cádiz, Burgos y Valladolid, pero al no contar con medidas de protección económica suficiente, terminaron por desaparecer. Juan de Herrera, es por lo tanto el primer director de la Academia de Matemáticas, su nombramiento tiene lugar en 1583, ubicándose dentro de lo que era el Alcázar Real, pasando luego a ocupar unos locales en donde actualmente está situado el Teatro Real. Juan de Herrera dirigió la Academia hasta 1597.

Unos años después, en 1612, la Academia se ubica, en lo que se llamaba , casa del Marqués de Leganés situada en la calle ancha de San Bernardo. Llamada ancha por sus dimensiones de amplitud en comparación con las calles vecinas. En este barrio de San Bernardo posteriormente han tenido cabida la Universidad Central, el Real Conservatorio de Música y la Iglesia de Montserrat de la que cabe significar que su proyecto y construcción fueron dirigidos por Juan de Herrera.

Por falta de asistencia al conocimiento matemático, y ante la dispersión geográfica de las grandes potencias dominantes, se produce en 1625 una caída en el funcionamiento de la Real Academia de Matemáticas, Arquitectura Civil y Militar de Madrid. Ha funcionado unos 43 años, hasta que se decide en 1630, entregar todas sus pertenencias al Colegio Imperial. La influencia española en Europa es muy grande durante todo el siglo XVII, orientándose el conocimiento matemático hacia las zonas en donde su apoyo contribuye al progreso general de la sociedad de la época. El Capitán de los Tercios de Veteranos, Sebastián Fernández de Medrano funda la "Academia Real y Militar del Ejército de los Países Bajos" hacia 1675, siendo en las materias tratadas el más importante centro de Europa.

Gracias a las enseñanzas impartidas bajo la dirección del militar Fernández de Medrano, se tiene constancia del gran número de ingenieros y arquitectos militares, cuya bondad profesional llevó a que dichas enseñanzas se trasladaran a Suecia, Italia y Francia . En Francia durante el reinado de Luís XIV, se crea un gran centro que nuevamente tiene una gran influencia cultural en España a través de la Casa de Borbón. Hay que hacer constar, no obstante que ya en 1694, en Barcelona funciona una “Lectura de Matemáticas y Geometría”, orientándose hacia la construcción arquitectónica, considerada como especificación geométrica. Podría haberse llamado como más adecuadamente: “*Lectura de Matemáticas y Arquitectura*”. Se llega en Barcelona al año 1710, y de nuevo un militar Jorge Próspero de Verboon, Ingeniero General crea la “Real y Militar Academia” en esa ciudad.

En 1711, concretamente el 17-abril-1711 se crea el Cuerpo de Ingenieros Militares, para toda España y sus dominios. Casi al mismo tiempo, el Comisario de Artillería Mateo Calabro es el director en 1720 de la “Real Academia de Matemáticas y Fortificación” de Barcelona. Hay que hacer constar que en 1755, en las publicaciones realizadas, dicho centro de Barcelona figura como “Real Academia Militar de Matemáticas, del Cuerpo de Ingenieros”.

La fortificación a lo largo de la historia, va constituyendo una ciencia militar muy importante, formándose una bibliografía como base de estudio, a la que se llama :”Principios de Fortificación”. La terminación de dicha bibliografía se debe al trabajo realizado por Ramírez de Arellano. Hemos de destacar que la Escuela de Fortificación Hispanoamericana, tiene su base en dichos principios.

La regulación de los conocimientos matemáticos, sobre todo los relacionados y de apoyo a la ingeniería, llevan al Estado a crear la Academia de Ingenieros que fue ubicada en Alcalá de Henares, funcionando de 1803 a 1808. Posteriormente su asentamiento estable, inicia una serie de recorridos desde el 24-5-1808, siendo uno de los lugares de permanencia la Isla de León (Cádiz). En 1815 se da por finalizada tanta vicisitud y se establece con carácter fijo de 1815 a 1823 en Alcalá de Henares. No obstante se inicia por dicha Academia un recorrido por Madrid y otras ciudades, coincidente con una progresiva y reiterada orden de disolución que se materializa en 1833. En el mismo año y con gran acierto se crea en Guadalajara la Academia de Ingenieros, permaneciendo hasta 1837. Su prestigio es cada vez mayor y de 1837 a 1840 dicha Academia es trasladada a Madrid, para volver en 1840 a Guadalajara. Dicha Academia de Guadalajara funcionó hasta 1931. La calidad profesional de los trabajos realizados y la exposición a través de numerosas publicaciones de la apertura matemática a las Ciencias Aplicadas, muestran un gran progreso en Topografía, Trigonometría, Ciencias del Espacio, Astronomía, Navegación y un gran apoyo técnico a la Construcción en sus fases de urbanismo, suministro y traslado de energía, comunicaciones y fortificaciones como defensa y protección frente a los medios de destrucción.

La plenitud y desarrollo científico de la Escuela de Guadalajara, se nota también como una gran influencia en el desarrollo civil. Iniciándose una creación sucesiva de entidades de apoyo, como van a ser las nuevas Escuelas Técnicas Superiores de Ingeniería. Destacando sobre todo la Academia de Artillería e Ingenieros en Segovia.

En pleno funcionamiento de la Academia de Ingenieros de Guadalajara, y visto el desarrollo de las Ciencias Matemáticas; como apoyo a las ingenierías crecientes, en 1847, concretamente el 25-2-1847 se pronuncia el decreto en el que se crea la Real Academia de Ciencias, con el nombre de "Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales". D. Mariano Roca de Togores, Marqués de Molins figura como Ministro de Fomento, Instrucción y Obras Públicas.

El acercamiento a una cumbre, exige la preparación de los caminos de acercamiento. Una vez establecida la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales; la actividad profesional de matemáticos de gran valía han permitido la creación de caminos de acceso a la investigación, con la dirección de doctorados y su apoyo total a la capacidad de iniciativa a las ideas originales. En mi recuerdo está el profesor don Julio Fernández Biarge. Lo tuve como profesor en Geometría Analítica allá por el 1956-1957. Realizando el curso de Formación de Profesorado lo tuve como Profesor Tutor, en el Instituto San Isidro de Madrid, labor que compartió con D. Emilio Pérez Carranza en el 1961-1962.

Las actividades didácticas de ambos catedráticos fueron siempre calificadas como extraordinarias. Por aquel entonces D. Julio Fernández Biarge, ganó las oposiciones a la Cátedra de la ETS de Ingenieros Navales, un caso totalmente singular, pues las Escuelas Técnicas Superiores dependían de los Ministerios y estaban ocupadas siempre por técnicos superiores del ramo correspondiente. Fue el primer caso en el que un titulado universitario accedía a una Escuela Superior de Ingeniería.

En la ETS de Ingenieros Navales realicé mis actividades como profesor en Álgebra Lineal, Ampliación de Matemáticas y Cálculo Tensorial durante los cursos 1966-1967 y 1967-1968 bajo su dirección.

Clasificó siempre de una manera sencilla, el enlace de las proposiciones, la lógica del pensamiento como proceso y las conclusiones, convirtiendo la Matemática en un lenguaje de acercamiento a nuestra propia vida.. Su comportamiento profesional era siempre de ayuda a la capacidad de iniciativa y al esfuerzo.

Es bueno reflexionar sobre el progreso del conocimiento matemático, hasta la creación de la Real Academia de Ciencias Exactas, pero lo es también apuntar la bondad de los que con su esfuerzo y capacidad, como fue el caso de D. Julio Fernández Biarge, han cuidado de los cimientos y caminos de superación en la investigación matemática.

Vaya este cariñoso recuerdo, para que desde el Cielo nos ayude como siempre lo hizo.

Agradecimientos

Se manifiesta el agradecimiento a los Ingenieros Industriales Ignacio Arcas Muñoz, y Rosina Pérez López por sus valiosas colaboraciones en la redacción del presente trabajo

Bibliografía

[1] Zapatero, Juan Manuel: *La Escuela de Fortificación Hispanoamericana.* Revista de Historia Militar nº 25. Imprime M. de Defensa, 1968

[2] Quesada Gómez, Agustín; De Sequera Martínez, Luis;…Zamorano García, Carlos: Anciones de la Torre, Rafael. *Estudio-Historia del Arma de Ingenieros. Tomo I.* Imprime Ministerio de Defensa, 1997.

[3] Carrillo de Albornoz y Galbeño, Juan; Ferrandis Poblaciones, José Antonio; Cerón Martínez, Honorio. *Memorial del Arma de Ingenieros, nº 86.* Imprime Ministerio de Defensa, 2011.

Del Teorema de Viviani, del Principio de Reflexión y de otros hitos camino del punto de Fermat

Francisco J. Baena
Departamento de Matemáticas del IES El Brocense de Cáceres
frcobaena@gmail.com

Abstract

This paper attempts to relieve the shortage of texts dealing with the issue of Fermat's point of a triangle and, more precisely, the difficulty to find in most of them a complete solution to the problem of the existence, uniqueness and position of Fermat's point for an arbitrary triangle, without restricting ourselves to those whose angles are less than 120º. *Two complete solutions of Fermat's point problem are offered in this paper. The first one is based on Infinitesimal Calculus and the second one, of an entirely geometric character, relies on two results which have their own interest: a generalized Reflection Principle, in which the reflection axis is not a straight line but a circle, and a generalization of Viviani's Theorem. The paper finishes with one construction of the Fermat's point of a triangle using a ruler and a compass.*

El punto de Fermat de un triángulo

Dados tres puntos A, B y C del plano euclídeo que no están alineados, al punto P de dicho plano cuya suma de distancias a los tres puntos A, B y C es la mínima posible se le llama *punto de Fermat del triángulo* ABC .

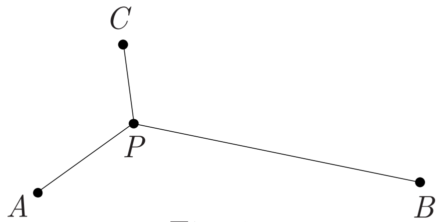


Fig. 1

El planteamiento original del problema de la localización de dicho punto se atribuye a Pierre de Fermat (1601-1665), quien lo envió a Evangelista Torricelli (1608-1647) para que éste lo resolviera, aunque no hay referencia documental que lo confirme. Al parecer, Torricelli resolvió el problema, pero fue Vincenzo Viviani (1622-1703), discípulo suyo, quien publicó la solución en 1659 con el nombre de su maestro. Otros autores, en cambio, le atribuyen el planteamiento y la solución de dicho problema a Jacob Steiner (1796-1863).

A pesar de que el problema del punto de Fermat aparece tratado en diversos libros de Geometría, como el clásico *Fundamentos de Geometría* de H. S. M. Coxeter, o el magnífico *¿Qué son las Matemáticas?* de R. Courant y H. Robbins, al estudio detallado de la existencia y unicidad del punto de Fermat se dedican muy pocos textos y, aquéllos que lo hacen, suelen limitar el problema a triángulos con ángulos agudos o, a lo más, a triángulos con ángulos menores que 120º.

Es ésta la razón por la que hemos compuesto dos demostraciones completas e independientes de la existencia, unicidad y localización del punto de Fermat en cualquier tipo de triángulo; la primera basada en el Cálculo Diferencial y la segunda en la Geometría clásica. Se expone para terminar una construcción sencilla con regla y compás del punto de Fermat de un triángulo.

El problema del punto de Fermat no merece tan ilustre apellido si los puntos A, B y C están alineados, pues si, por ejemplo, C está entre A y B en la recta que los une y X es un punto del plano distinto de C (figura 2), entonces $XC > 0$ y

$$XA + XB + XC \geq AB + XC > AB = CA + CB = CA + CB + CC$$

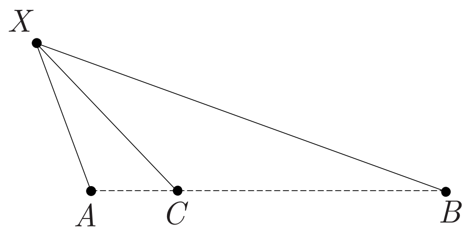


Fig. 2

La suma $XA + XB + XC$ sólo es por tanto mínima cuando $X = C$, es decir, sólo hay un punto que minimiza la suma de distancias a tres puntos alineados A, B y C, y es, de los tres, el situado entre los otros dos en la recta que comparten.

Enunciamos ya con precisión el que hemos llamado *problema del punto de Fermat*, que consiste en demostrar la existencia y unicidad de dicho punto en cualquier tipo de triángulo y determinar su posición exacta.

El problema del punto de Fermat: *Dados tres puntos A, B y C del plano euclídeo que no están alineados, existe un único punto P en dicho plano cuya suma de distancias a A, B y C es la mínima posible. A P se le llama punto de Fermat del triángulo ABC y su posición depende del triángulo ABC como sigue:*

i) Si los tres ángulos del triángulo ABC son menores que 120º (figura 3)*, el punto P es el único punto del plano (necesariamente interior al triángulo) desde el que se ve cada lado del triángulo bajo un ángulo de* 120º.

ii) Si un ángulo del triángulo ABC es mayor o igual que 120º (figura 4)*, el punto P es el vértice del triángulo correspondiente a dicho ángulo.*

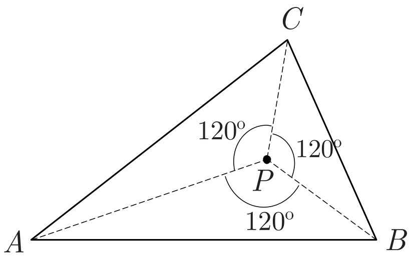


Fig. 3

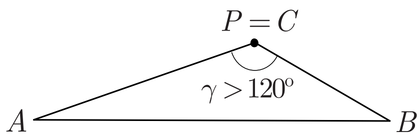


Fig. 4

1. Una solución del problema basada en el Cálculo Diferencial

En los subepígrafes 1.1 y 1.2 se prueban lemas que serán de utilidad en la primera demostración de la existencia y unicidad del punto de Fermat de un triángulo.

El recurso al Cálculo Diferencial para resolver el problema pasa, claro está, por el estudio de la función que a cada punto del plano del triángulo *ABC* le asigna la suma de sus distancias a los puntos *A, B* y *C*. En el Lema 1.1 se estudian la continuidad y la diferenciabilidad de dicha función.

1.1. Lema (La función suma de distancias a tres puntos del plano)

Dados tres puntos cualesquiera $A,B,C\in\mathbb{R}^2$*, la función* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *dada por:*

$$f(X)=XA+XB+XC$$

es continua en todo el plano $\mathbb{R}^2$ *y diferenciable en todo* $\mathbb{R}^2$ *excepto en A, B y C. El vector gradiente de* f *es, en cada punto* $X\in\mathbb{R}^2$ *distinto de A, B y C,*

$$\nabla f(X)=\frac{1}{AX}\cdot\overrightarrow{AX}+\frac{1}{BX}\cdot\overrightarrow{BX}+\frac{1}{CX}\cdot\overrightarrow{CX}$$

Demostración

Fijado $M \in \mathbb{R}^2$, la función $f_M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_M(X) = XM$, que a cada punto del plano le asigna su distancia a *M*, es continua en cada $X_0 \in \mathbb{R}^2$, pues si $X \in \mathbb{R}^2$ es cualquiera, de la *desigualdad triangular* se deduce que $|XM - X_0M| \leq XX_0$ y:

$$0 \leq |f_M(X) - f_M(X_0)| = |XM - X_0M| \leq XX_0$$

Si $X \to X_0$, entonces $XX_0 \to 0$ y de la doble desigualdad anterior se sigue que $|f_M(X) - f_M(X_0)| \to 0$, es decir, que $\lim_{X \to X_0} f_M(X) = f_M(X_0)$. También f_M es diferenciable en cada punto distinto de $M = (m,n)$, pues las derivadas parciales de f_M, que son las funciones de $\mathbb{R}^2 - \{M\}$ en $\mathbb{R}$ dadas por

$$\frac{\partial f_M}{\partial x}(x,y) = \frac{x-m}{\sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2}}, \qquad \frac{\partial f_M}{\partial y}(x,y) = \frac{y-n}{\sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2}}$$

son funciones continuas en un entorno de cada punto distinto de (m,n), por ser cociente de funciones continuas cuyo denominador no se anula. El gradiente de f_M en cada punto $(x,y) \neq (m,n)$ es así:

$$\nabla f_M(X) = \nabla f_M(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2}}(x-m, y-n) = \frac{1}{MX} \cdot \overrightarrow{MX}$$

De lo probado para f_M se deduce que la función $f = f_A + f_B + f_C$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$ y diferenciable en cada $X \in \mathbb{R}^2$ distinto de *A*, *B* y *C*. El vector gradiente de f en dichos *X* es, dada su linealidad:

$$\nabla f(X) = \nabla(f_A + f_B + f_C)(X) = \nabla f_A(X) + \nabla f_B(X) + \nabla f_C(X) =$$

$$= \frac{1}{AX} \cdot \overrightarrow{AX} + \frac{1}{BX} \cdot \overrightarrow{BX} + \frac{1}{CX} \cdot \overrightarrow{CX} \; \blacksquare$$

Previo a la prueba de la existencia y unicidad del punto de Fermat, el siguiente aserto pone cerco a dicho punto en triángulos con ángulos menores que 120º.

1.2. Lema

Dado un triángulo ABC del plano euclídeo con ángulos menores que 120º*, existe un único punto P en dicho plano (necesariamente interior al triángulo) desde el que se ven sus tres lados bajo ángulos iguales de* 120º (figura 3). *Si el triángulo ABC tiene un ángulo mayor o igual que* 120º*, no existe tal punto P.*

Demostración

Si existe el punto P, debe ser interior al triángulo ABC, pues si fuese exterior o estuviese sobre algún lado (figura 5), uno de los tres ángulos $\measuredangle APB$, $\measuredangle BPC$ o $\measuredangle CPA$ sería la suma de los otros dos, lo que es absurdo pues los tres miden igual.

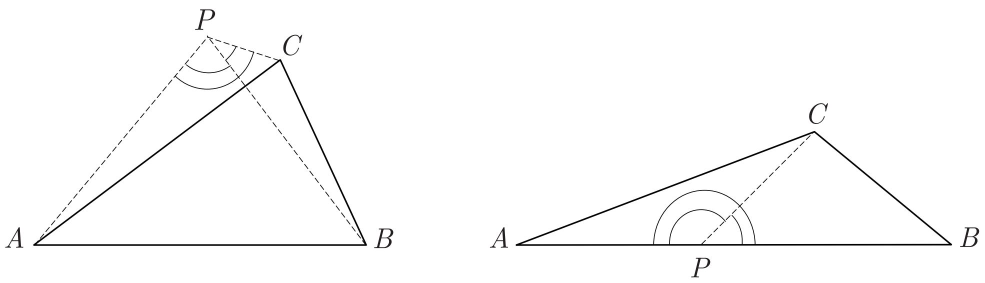


Fig. 5

Esto descarta la existencia de tales puntos P en triángulos ABC con un ángulo mayor o igual que 120º, pues si, por ejemplo, $\measuredangle ACB \geq 120^{\circ}$ y desde P se vieran los tres lados de ABC bajo ángulos de 120º, el punto P sería interior al triángulo y por tanto $\measuredangle APB > \measuredangle ACB \geq 120^{\circ}$, pero esto es imposible pues $\measuredangle APB = 120^{\circ}$.

Si los tres ángulos del triángulo ABC son menores que 120º, la condición sobre P, $\measuredangle APB = \measuredangle BPC = \measuredangle CPA = 120^{\circ}$, dice que P debe estar en los arcos capaces de 120º sobre los tres lados del triángulo y trazados hacia su interior. Probamos que en todo triángulo de ángulos menores que 120º, los arcos capaces de 120º sobre sus tres lados y hacia su interior se cortan en un único punto.

Veamos; si un punto P pertenece a los arcos capaces de 120º sobre dos lados del triángulo, también pertenece al arco capaz de 120º sobre el tercero, pues si $\measuredangle APB = \measuredangle BPC = 120^{\circ}$, entonces $\measuredangle APC = 360^{\circ} - \measuredangle APB - \measuredangle BPC = 120^{\circ}$, luego sólo hay que probar que los arcos capaces sobre dos lados cualesquiera del triángulo se cortan en algún punto. Pero esto es inmediato, porque el ángulo que forma un segmento con su arco capaz de 120º en cualquiera de sus dos extremos es de $180^{\circ} - 120^{\circ} = 60^{\circ}$ (figura 6), así que como cada ángulo del triángulo es menor que 120º, en ninguno de ellos caben dos tales arcos sin cortarse (figura 7).

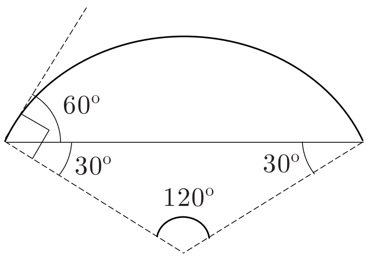


Fig. 6

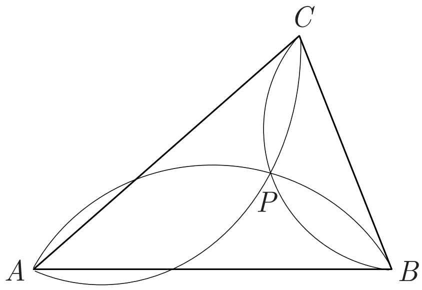


Fig. 7

1.3. Primera solución al problema del punto de Fermat

Considérese la función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(X) = XA + XB + XC$. Se probará que f alcanza mínimo absoluto en un único punto P situado como se indica en los apartados i) o ii) del enunciado del problema. La demostración de estas cuestiones se ofrece en las tres etapas siguientes:

1. *Si existe algún punto de Fermat del triángulo ABC, está en el recinto cerrado y acotado* Δ *que encierra el triángulo* (figura 8).

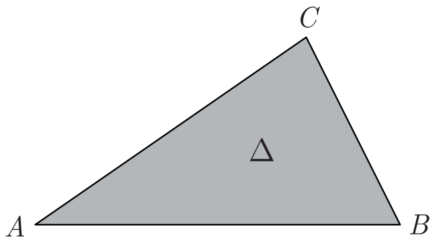


Fig. 8

Probamos que para cada punto X exterior al triángulo ABC existe otro punto $X' \in \Delta$ tal que $f(X') < f(X)$, lo que garantizará que, caso de existir puntos de Fermat, no son exteriores al triángulo. Si X es exterior al triángulo ABC, es decir, si $X \notin \Delta$, se da alguna de las dos posibilidades siguientes:

- X está en la región encerrada por uno de los tres ángulos del triángulo, incluidos sus lados, pongamos $\measuredangle BCA$ (figura 9). Entonces, si $X' \neq X$ es el punto de Δ donde se cortan el lado AB y el segmento XC, por ser X exterior al triángulo, se cumple que $AB < XA + XB$ y $X'C < XC$, luego:

$$f(X') = X'A + X'B + X'C = AB + X'C < XA + XB + XC = f(X)$$

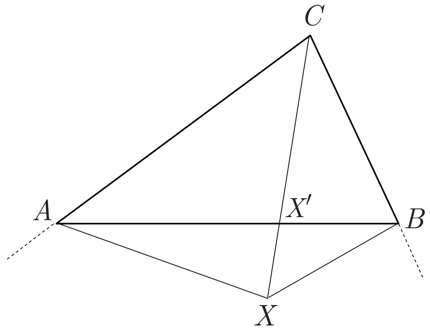


Fig. 9

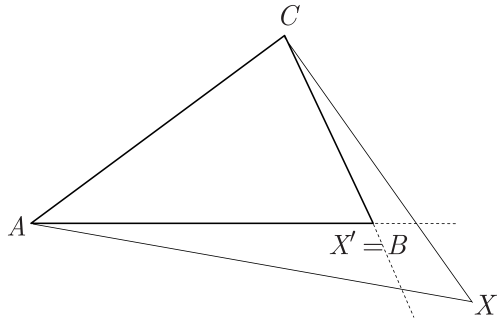


Fig. 10

- X está en el interior de la región que encierra el ángulo opuesto a un ángulo del triángulo (figura 10), pongamos $\measuredangle ABC$. Ahora, B es interior al triángulo AXC, luego $BA + BC < XA + XC$ y basta tomar $X' = B \in \Delta$, pues

$$f(B) = BA + BB + BC = BA + BC < XA + XC < XA + XB + XC = f(X)$$

2. *Existe algún punto de Fermat del triángulo ABC.*

En 1.1 se probó que la función f es continua en todo $\mathbb{R}^2$, así que también lo es su restricción al conjunto compacto Δ. Del *Teorema de Weierstrass* se deduce que dicha restricción alcanza mínimo absoluto en un punto de Δ, es decir, que existe algún punto $P \in \Delta$ tal que $f(P) \leq f(X')$, para todos los $X' \in \Delta$. Además, si $X \notin \Delta$, se comprobó en 1.3.1 que existe otro punto $X' \in \Delta$ tal que $f(X') < f(X)$, luego $f(P) \leq f(X') < f(X)$.

Queda demostrado así que, para todo $X \in \mathbb{R}^2$, es $f(P) \leq f(X)$, es decir, que f alcanza mínimo absoluto en P y que dicho punto P está en el recinto cerrado y acotado Δ que encierra el triángulo ABC. En otras palabras, se ha probado la existencia de puntos P de Fermat del triángulo ABC y su ubicación en Δ.

3. *El punto de Fermat del triángulo ABC es único.*

Según 1.1, f sólo deja de ser diferenciable en A, B y C, así que cada punto en el que f alcanza su mínimo absoluto, es decir, cada punto de Fermat del triángulo ABC, o es uno de los vértices A, B, C, o es un punto crítico de f.

Los puntos críticos de f son las soluciones X distintas de A, B y C, de la ecuación vectorial $\nabla f(X) = \vec{0}$, ecuación que es, según 1.1,

$$\frac{1}{AX} \cdot \overrightarrow{AX} + \frac{1}{BX} \cdot \overrightarrow{BX} + \frac{1}{CX} \cdot \overrightarrow{CX} = \vec{0}$$

Dado que los tres sumandos del primer miembro son vectores unitarios cuya suma es el vector nulo, dichos vectores forman dos a dos ángulos iguales de 120º (figura 11).

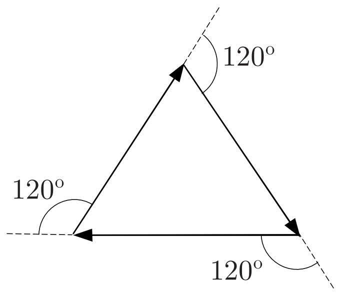


Fig. 11

Pero dichos ángulos son, precisamente, $\measuredangle AXB$, $\measuredangle BXC$ y $\measuredangle CXA$, así que los puntos críticos de f son las soluciones X del sistema de ecuaciones $\measuredangle AXB = 120º$, $\measuredangle BXC = 120º$ y $\measuredangle CXA = 120º$, es decir, son los puntos X desde los que se ven los tres lados del triángulo ABC bajo ángulos iguales de 120º, si es que tales puntos existen. Estas condiciones nos obligan a distinguir como en el enunciado del problema:

i) Si los tres ángulos del triángulo ABC son menores que 120º, en virtud del Lema 1.2, existe un único punto P en el plano (interior al triángulo) desde el que se ven sus tres lados bajo ángulos iguales de 120º (figura 12), a saber, la intersección de los arcos capaces de 120º sobre los tres lados del triángulo y dibujados hacia su interior.

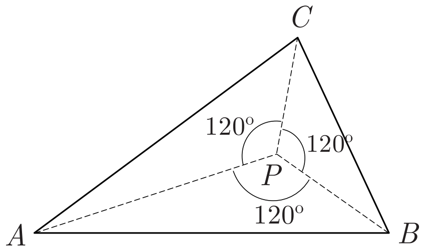


Fig. 12

La función f tiene así un único punto crítico P y el punto de Fermat del triángulo ABC, es decir, el punto en el que f alcanza su valor mínimo es alguno de los puntos P, A, B, C. Para decidir cuál, comparamos el valor de f en dichos puntos aplicando el *Teorema del coseno* al triángulo APB:

$$BA^2 = PA^2 + PB^2 - 2PA \cdot PB \cdot \cos 120^{\circ} = PA^2 + PB^2 + PA \cdot PB =$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}PA + PB\right)^2 + \tfrac{3}{4}PA^2 > \left(\tfrac{1}{2}PA + PB\right)^2$$

Al extraer raíces cuadradas se tiene que $BA > \frac{1}{2}PA + PB$ y, por idénticas razones, $CA > \frac{1}{2}PA + PC$, y al sumar ambas desigualdades:

$$f(A) = AA + BA + CA = BA + CA >$$

$$> \left(\tfrac{1}{2}PA + PB\right) + \left(\tfrac{1}{2}PA + PC\right) = PA + PB + PC = f(P)$$

es decir, $f(A) > f(P)$. Razonamientos análogos sobre los vértices B y C prueban que $f(B) > f(P)$ y $f(C) > f(P)$, por lo que P es el único punto en el que f alcanza su mínimo absoluto. Se ha deducido así que el punto de Fermat del triángulo ABC es único, a saber, el único punto interior del triángulo ABC desde el que se ven sus lados bajo ángulos iguales de 120º.

ii) Si un ángulo del triángulo ABC es mayor o igual que 120º, en virtud del Lema 1.2, no hay punto alguno desde el que se vean sus tres lados bajo ángulos iguales de 120º, así que f no tiene puntos críticos y el punto P de Fermat del triángulo ABC, cuya existencia está probada, es alguno de los tres vértices. Siendo así, $f(P)$ es la suma de las longitudes de los dos lados que concurren en P y como dicha suma es mínima, dichos lados son los dos menores, es decir, P es el vértice del ángulo mayor (figura 13). Dado que ningún triángulo tiene dos ángulos de al menos 120º, el punto de Fermat es único.

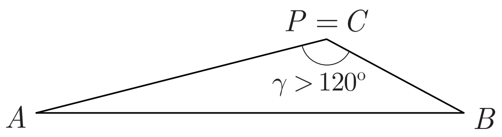


Fig. 13

2. Una solución del problema completamente geométrica

En 2.1 y 2.2 se prueban lemas necesarios para la demostración geométrica que se nos ocurrió de la existencia y unicidad del punto de Fermat. El primero de ellos es consecuencia del *Principio de Reflexión*, según el cual, *dada una recta r en el plano euclídeo y dos puntos A y B situados en el mismo semiplano respecto de r* (figura 14), *existe un único punto P en r cuya suma de distancias a A y B es la mínima posible*. Tal punto *P* resulta ser la intersección de *r* con el segmento AB', donde B' es el simétrico de *B* respecto de *r*, es decir, *P* es el único punto de *r* en el que coinciden los ángulos que forma *r* con los segmentos *PA* y *PB*.

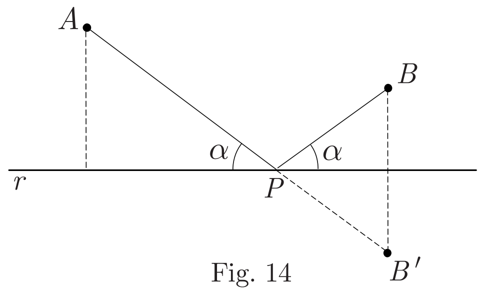


Fig. 14

Cuando se pretende minimizar la longitud del camino entre dos puntos y dicho camino, en lugar de tocar una recta, debe tocar una circunferencia, es de aplicación la siguiente consecuencia del *Principio de Reflexión*, de la que se deducirá una condición necesaria para punto de Fermat.

2.1. Lema

En el plano euclídeo se consideran una circunferencia $\mathcal{C}$ *y dos puntos A y B exteriores a* $\mathcal{C}$. *Si P es un punto de* $\mathcal{C}$ *que minimiza la suma de distancias* $XA+XB$, *para* $X \in \mathcal{C}$, *la recta tangente a la circunferencia* $\mathcal{C}$ *en el punto P forma ángulos iguales con los segmentos* PA *y* PB.

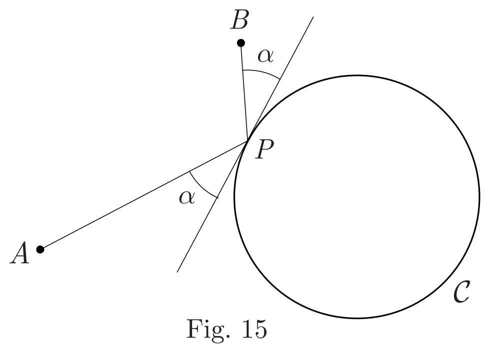


Fig. 15

Demostración

Distinguimos varios casos en función de la posición relativa de la circunferencia $\mathcal{C}$ y el segmento AB.

- Si el segmento AB corta a $\mathcal{C}$ en dos puntos (figura 16), éstos son los únicos $X \in \mathcal{C}$ que minimizan la suma de distancias $XA + XB$, pues sólo ellos cumplen que $XA + XB = AB$. Además, si P es cualquiera de ambos puntos, la tangente a $\mathcal{C}$ en P forma con los segmentos PA y PB ángulos que son opuestos por el vértice P y, por tanto, iguales.

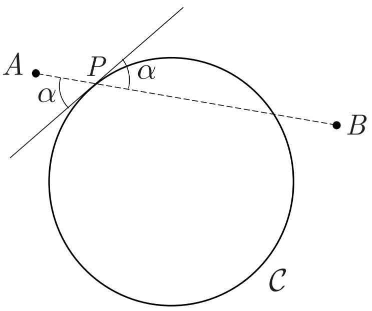


Fig. 16

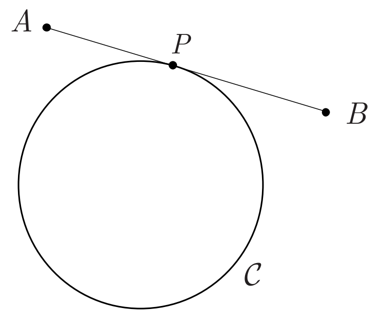


Fig. 17

- Si el segmento AB es tangente a $\mathcal{C}$ en P (figura 17), el valor mínimo de la suma $XA + XB$, para $X \in \mathcal{C}$, se alcanza sólo en P, pues P es el único $X \in \mathcal{C}$ tal que $XA + XB = AB$. Además, la tangente en P contiene a los segmentos PA y PB, así que forma con ellos ángulos nulos.

- Si el segmento AB es exterior a la circunferencia $\mathcal{C}$ y $P \in \mathcal{C}$ minimiza la suma de distancias $XA + XB$, para $X \in \mathcal{C}$, al trazar la elipse de focos A y B y constante $PA + PB$, el punto P está en dicha elipse por la definición de ésta y también está en $\mathcal{C}$. Si elipse y circunferencia tuvieran otro punto en común (figura 18), existiría algún punto $Q \in \mathcal{C}$ interior a la elipse. Este punto Q, por estar en $\mathcal{C}$, cumpliría $QA + QB \geq PA + PB$, y por ser interior a la elipse, $QA + QB < PA + PB$, lo que es imposible. Por tanto, elipse y circunferencia sólo tienen en común el punto P, luego son tangentes en P y admiten recta tangente común t en P.

  Por el *Principio de Reflexión*, existe un único punto $P' \in t$ que minimiza la suma de distancias $XA + XB$, para $X \in t$, y la tangente t a la circunferencia $\mathcal{C}$ en dicho punto P' forma ángulos iguales con los segmentos $P'A$ y $P'B$.

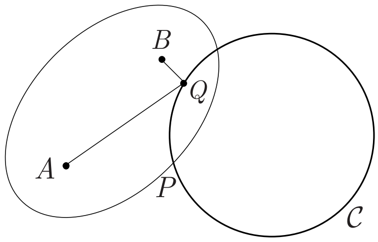


Fig. 18

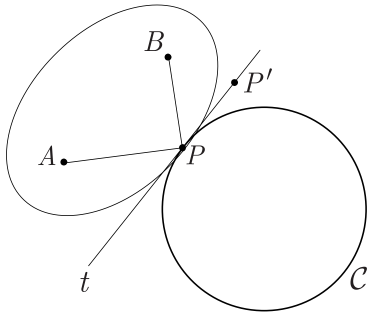


Fig. 19

Si fuese $P' \neq P$ (figura 19), P' sería exterior a la elipse y $P'A + P'B$ sería mayor que la constante de la elipse, es decir, $P'A + P'B > PA + PB$, pero esto es imposible, pues $P \in t$ y la suma $P'A + P'B$ es mínima, luego $P' = P$ y los ángulos que forman los segmentos PA y PB con la tangente t son iguales ■

El *Teorema de Viviani* establece que la suma de las distancias de un punto interior de un triángulo equilátero a sus tres lados no depende de la posición de dicho punto y es igual a la altura del triángulo. Se expone aquí una generalización de dicho Teorema que será utilizada para probar la unicidad del punto de Fermat.

2.2. Lema (Generalización del Teorema de Viviani)

En el plano euclídeo se consideran un triángulo equilátero ABC de altura h y un punto P cualquiera. Si A', B' y C' son las proyecciones ortogonales respectivas de P sobre los lados BC, CA y AB del triángulo, entonces:

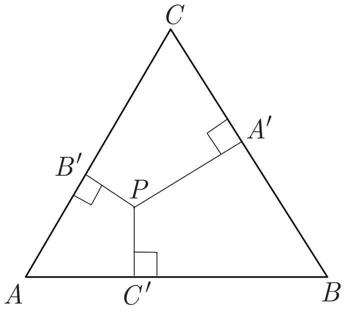
$$\pm PA' \pm PB' \pm PC' = h$$

donde cada signo $+$ o $-$ del primer miembro se elige como sigue:

i) *Si P está en el interior del triángulo ABC o sobre uno de sus lados* (figura 20)*, deben ponerse signos $+$ a las tres distancias.*

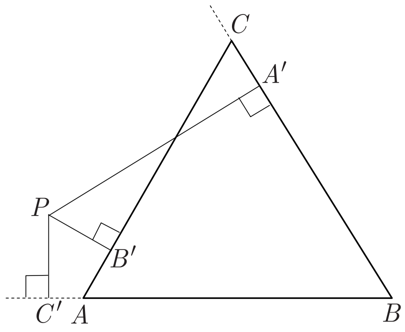
ii) *Si P es exterior al triángulo ABC y está en la región encerrada por uno de sus ángulos* (figura 21)*, se pone signo $-$ a su distancia al lado opuesto a dicho ángulo y signo $+$ a sus distancias a los otros dos lados.*

iii) *Si P es exterior al triángulo ABC y está en la región encerrada por el ángulo opuesto a uno de sus ángulos* (figura 22)*, se pone signo $+$ a su distancia al lado opuesto a dicho ángulo y signo $-$ a sus distancias a los otros dos lados*



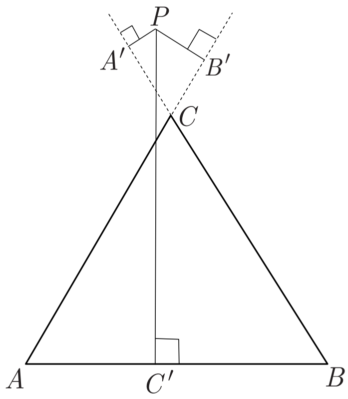
$PA' + PB' + PC' = h$

Fig. 20



$PA' - PB' + PC' = h$

Fig. 21



$-PA' - PB' + PC' = h$

Fig. 22

Demostración

Si P es interior al triángulo equilátero ABC (figura 23) y lo unimos con los tres vértices del triángulo, se forman los triángulos BCP, CAP y ABP, cuyas áreas suman el área de ABC, es decir, $\frac{1}{2}BC \cdot PA' + \frac{1}{2}CA \cdot PB' + \frac{1}{2}AB \cdot PC' = \frac{1}{2}AB \cdot h$. Dado que $AB = BC = CA$ es la medida del lado del triángulo, al dividir por $\frac{1}{2}AB$, se obtiene la igualdad que había que probar, que es

$$PA' + PB' + PC' = h$$

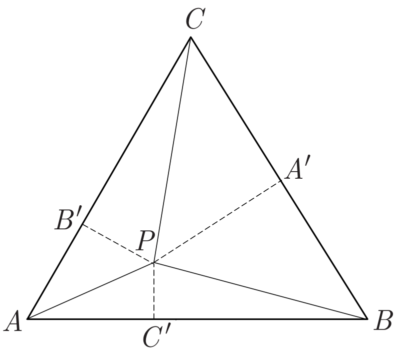


Fig. 23

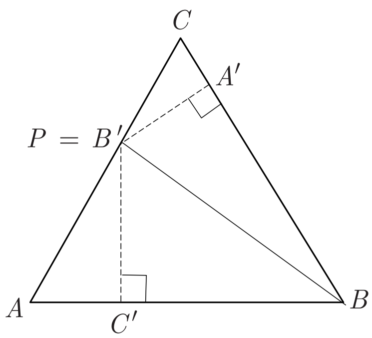


Fig. 24

Si P está sobre un lado, pongamos AC (figura 24), entonces es $P = B'$ y la suma de las áreas de los triángulos BPC y APB es el área del triángulo ABC, es decir, $\frac{1}{2}BC \cdot PA' + \frac{1}{2}AB \cdot PC' = \frac{1}{2}AB \cdot h$. Como $AB = BC$, al dividir por $\frac{1}{2}AB$ en la igualdad anterior se obtiene que

$$PA' + PB' + PC' = PA' + PC' = h$$

Si el punto P es exterior al triángulo equilátero y está en la región encerrada por el ángulo $\measuredangle ACB$ (figura 25); de la relación entre áreas de triángulos: $\text{área}(BPC) + \text{área}(CPA) - \text{área}(APB) = \text{área}(ABC)$, se deduce, razonando como en los párrafos anteriores, que

$$PA' + PB' - PC' = h$$

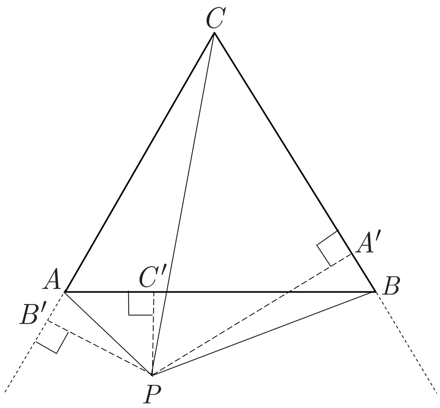


Fig. 25

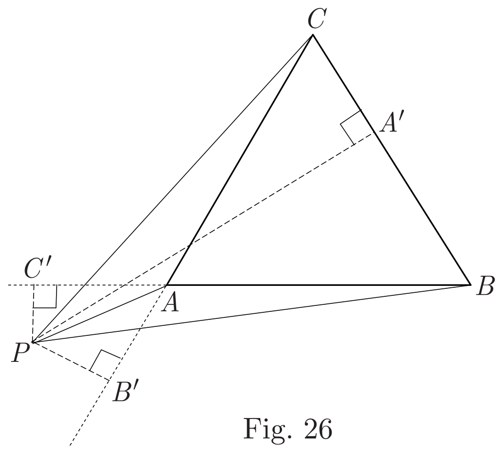


Fig. 26

Si P es exterior al triángulo y no está en la región encerrada por ninguno de sus tres ángulos (figura 26), está en la región contenida por el ángulo opuesto a un ángulo del triángulo por un vértice, pongamos $\measuredangle CAB$ por el vértice A. Entonces, de la igualdad $\text{área}(BPC) - \text{área}(CPA) - \text{área}(APB) = \text{área}(ABC)$, se sigue, razonando como en los casos anteriores, que

$$PA' - PB' - PC' = h$$

2.3. Segunda solución al problema del punto de Fermat

Supóngase que existe algún punto de Fermat del triángulo ABC. Si alguno de ellos es un vértice del triángulo, la suma de sus distancias a los tres vértices es la suma de las longitudes de los dos lados que concurren en dicho vértice, suma que, por ser mínima, debe ser la de las longitudes de los dos lados menores. El citado punto de Fermat sería, por tanto, el vértice del ángulo mayor del triángulo.

Admitamos, por el contrario, que no hay vértices entre los puntos de Fermat del triángulo ABC y sea *P* un punto de Fermat, esto es, un punto distinto de *A*, *B* y C y tal que $XA+XB+XC \geq PA+PB+PC$, para todo punto X del plano. Si $\mathcal{C}$ es la circunferencia de centro en C y radio $PC>0$, es claro que $P \in \mathcal{C}$ y que *P* hace mínima la suma de distancias $XA+XB$ entre los $X \in \mathcal{C}$, pues si fuese $QA+QB<PA+PB$ para algún $Q \in \mathcal{C}$, como es $QC=PC$, también sería $QA+QB+QC<PA+PB+PC$, en contra de que $PA+PB+PC$ es mínima.

Los puntos A y B son exteriores a $\mathcal{C}$, pues si alguno de ellos, pongamos *B*, estuviera en el interior de $\mathcal{C}$ o sobre $\mathcal{C}$ (figura 27), sería $BC \leq PC$ y entonces $BA+BB+BC=BA+BC \leq PA+PB+PC$. Pero como $PA+PB+PC$ es mínima, la anterior desigualdad es una igualdad y dicha suma mínima se alcanzaría también en el vértice *B*, contra la hipótesis de que ningún punto de Fermat es un vértice. Por tanto, el punto *B* es exterior a la circunferencia $\mathcal{C}$ y, mediante un razonamiento análogo, se deduce que también lo es A.

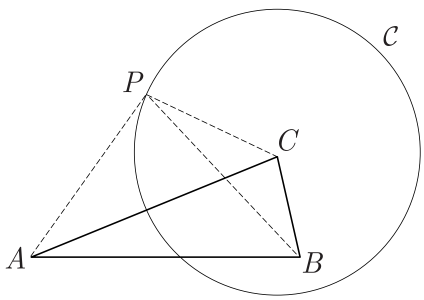


Fig. 27

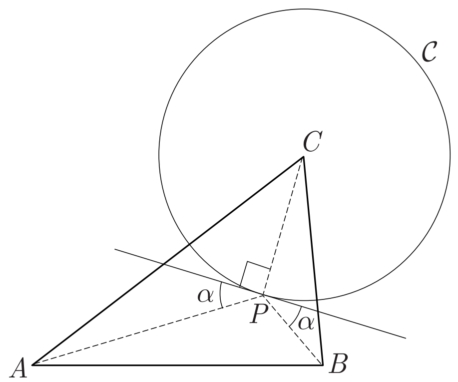


Fig. 28

Dado que A y B son exteriores a $\mathcal{C}$ y que P hace mínima la suma de distancias $XA+XB$ entre los $X \in \mathcal{C}$, en virtud de 2.1, los ángulos que forman PA y PB con la tangente a la circunferencia $\mathcal{C}$ en P coinciden. Si se llama α al ángulo común (figura 28), se tiene que $\measuredangle BPC=\alpha+90^{\circ}=\measuredangle CPA$. Un razonamiento análogo al descrito, pero con la circunferencia de centro *A* y radio $PA>0$, prueba que $\measuredangle APB=\measuredangle CPA$, luego $\measuredangle APB=\measuredangle BPC=\measuredangle CPA$ y, como los tres ángulos suman 360º, se tiene que

$$\measuredangle APB=\measuredangle BPC=\measuredangle CPA=120^{\circ}$$

Se ha demostrado así que, caso de existir algún punto de Fermat $P \notin \{A,B,C\}$ del triángulo ABC, desde él se ven los tres lados del triángulo bajo ángulos iguales de 120º. En atención a ello, debemos hacer las siguientes distinciones:

i) Si los tres ángulos del triángulo ABC son menores que 120º, según el Lema 1.2. existe un único punto P en el plano desde el que se ven los tres lados del triángulo bajo ángulos iguales de 120º, punto que además es interior al triángulo. Probamos que, recíprocamente, P es el único punto de Fermat del triángulo, es decir, que $P'A + P'B + P'C > PA + PB + PC$, para todo $P' \neq P$.

   Esto puede hacerse como sigue: Si por cada uno de los vértices A, B y C del triángulo se traza la perpendicular al segmento que lo une con P, las tres perpendiculares forman un triángulo equilátero LMN (figura 29). La razón es sencilla: los ángulos del cuadrilátero $APBN$ son $\measuredangle NAP = \measuredangle NBP = 90º$, $\measuredangle APB = 120º$ y por tanto

$$\measuredangle MNL = \measuredangle ANB = 360º - 90º - 90º - 120º = 60º$$

   Se deducen igual $\measuredangle LMN = \measuredangle NLM = 60º$, luego LMN es un triángulo equilátero.

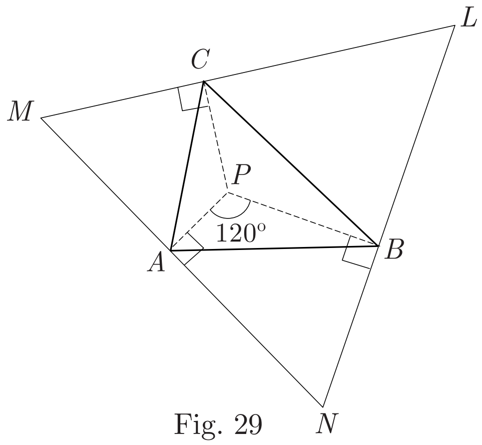


Fig. 29

   Dado que P es interior al triángulo equilátero LMN, según el *Teorema de Viviani* (Lema 2.2) ocurre que

$$PA + PB + PC = h$$

   donde h es la altura del triángulo equilátero LMN.

Si P' es un punto cualquiera distinto de P, y A', B' y C' son sus proyecciones ortogonales respectivas sobre los lados *MN*, *NL* y *LM* del triángulo equilátero *LMN* (figura 30), son $P'A \geq P'A'$, $P'B \geq P'B'$, $P'C \geq P'C'$ y alguna desigualdad es estricta por ser $P' \neq P$, luego:

$$P'A + P'B + P'C > P'A' + P'B' + P'C'$$

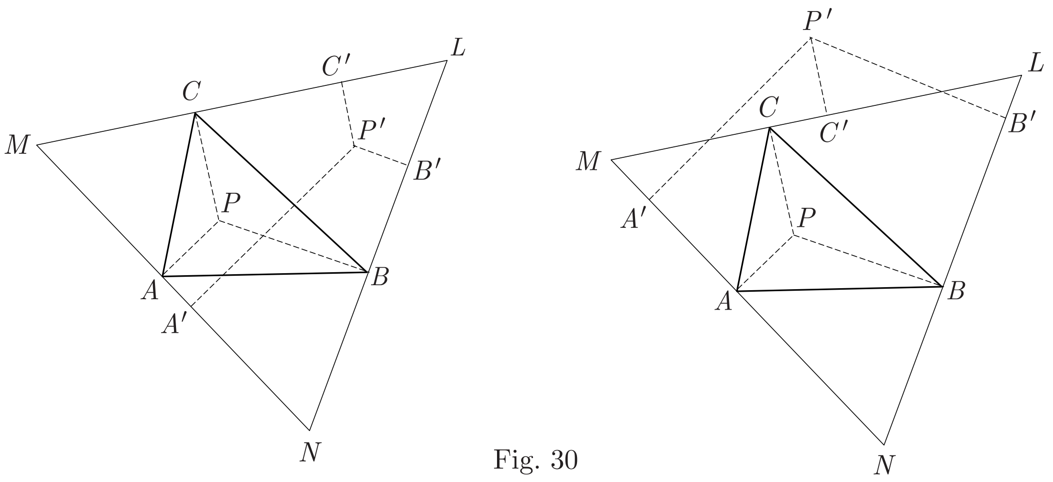


Fig. 30

De nuevo según 2.2 es $\pm P'A' \pm P'B' \pm P'C' = h$, para cierta elección de tres signos $+$ o $-$ que depende de la posición de P', y para dicha elección es

$$P'A' + P'B' + P'C' \geq \pm P'A' \pm P'B' \pm P'C' = h = PA + PB + PC$$

Por tanto,

$$P'A + P'B + P'C > P'A' + P'B' + P'C' \geq PA + PB + PC$$

y esto prueba que *P* es el único punto del plano cuya suma de distancias a los vértices *A*, *B* y *C* del triángulo original es la menor de entre todas.

ii) Si uno de los tres ángulos del triángulo ABC, digamos $\measuredangle ACB$, es mayor o igual que 120º, no hay, según el Lema 1.2, punto en el plano desde el que se vean los tres lados del triángulo bajo ángulos iguales de 120º. Es por ello que, caso de existir algún punto de Fermat del triángulo ABC, necesariamente es alguno de los tres vértices del triángulo y, por lo razonado al principio de esta solución, éste no puede ser otro que el vértice *C* del ángulo mayor $\measuredangle ACB$.

Demostramos que C es el único punto de Fermat del triángulo ABC, es decir, que todo punto $P' \neq C$ cumple $CA + CB + CC < P'A + P'B + P'C$. Sea, pues, P' un punto distinto de C y llámense, por simplificar la notación, $\measuredangle ACP' = \alpha$, $\measuredangle BCP' = \beta$ y $\measuredangle ACB = \gamma$.

Si P' está en la región encerrada por el ángulo $\measuredangle ACB$ (figura 31), entonces $\alpha + \beta = \gamma$; si P' está en la región encerrada por el ángulo suplementario de $\measuredangle ACB$ y adyacente a él por el lado AC (resp. BC) (figuras 32 y 33), entonces $\alpha - \beta = -\gamma$ (resp. $\alpha - \beta = \gamma$); por último, si P' está en la región que encierra el ángulo opuesto de $\measuredangle ACB$ por el vértice C (figura 34), entonces $\alpha + \beta = 360^{\circ} - \gamma$.

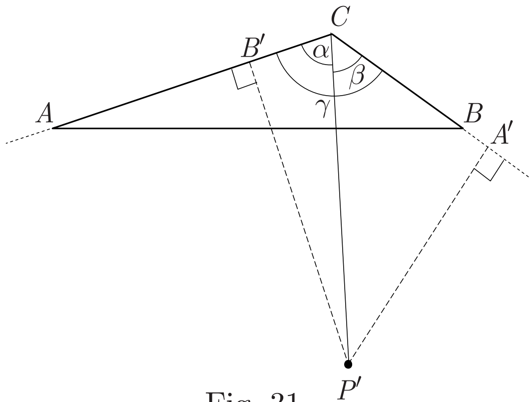


Fig. 31

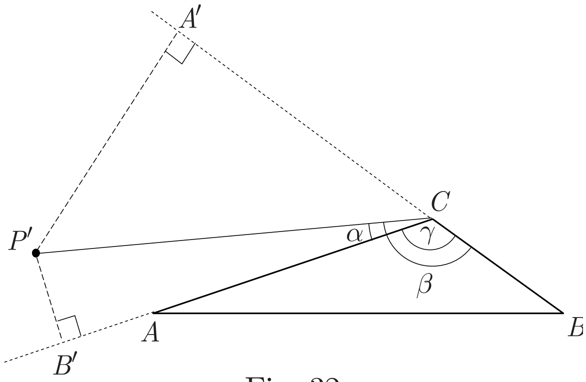


Fig. 32

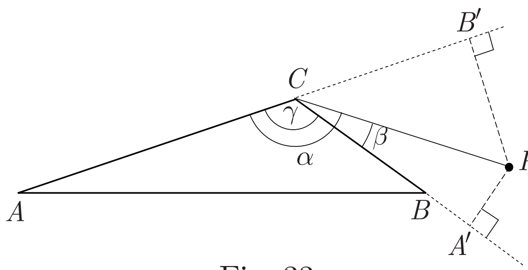


Fig. 33

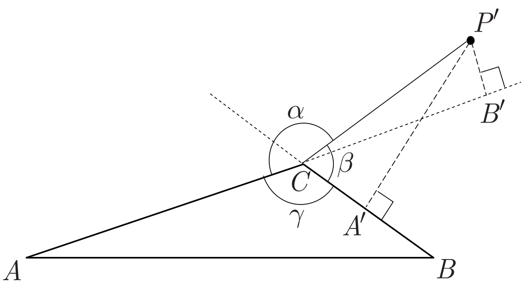


Fig. 34

Sean ahora A' y B' las proyecciones respectivas del punto P' sobre los lados BC y AC (figuras 31 a 34). Sea cual sea la posición de P' se cumple que $CA = P'C \cdot \cos\alpha \pm B'A$ y $CB = P'C \cdot \cos\beta \pm A'B$, y al sumar ambas se deduce que:

$$CA + CB = \pm B'A \pm A'B + P'C \cdot (\cos\alpha + \cos\beta) =$$

$$= \pm B'A \pm A'B + 2 \cdot P'C \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \leq$$

$$\leq B'A + A'B + 2 \cdot P'C \cdot \left|\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right|$$

Por lo razonado en el párrafo anterior a las figuras 31 y sucesivas, y dado que $\cos(-x) = \cos(360^{\circ} - x) = \cos x$, uno de los dos cosenos del último miembro es $\cos\frac{\gamma}{2}$ y, como es $60^{\circ} \leq \frac{\gamma}{2} \leq 90^{\circ}$, será $0 \leq \cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{2}$, luego:

$$CA + CB \leq B'A + A'B + 2 \cdot P'C \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1 = B'A + A'B + P'C$$

Por último, de la definición de A' y B' se sigue que $B'A \leq P'A$ y $A'B \leq P'B$, y alguna de las dos desigualdades es estricta por ser $P' \neq C$, luego $B'A + A'B < P'A + P'B$ y entonces

$$CA + CB + CC = CA + CB \leq B'A + A'B + P'C < P'A + P'B + P'C$$

Queda así probado que C es el único punto de Fermat del triángulo ABC y la segunda demostración de la existencia y unicidad de dicho punto está completa.

3. Una construcción del punto de Fermat en triángulos con ángulos menores que 120º

Exponemos por último un método para dibujar el punto P de Fermat de un triángulo ABC con ángulos menores que 120º que no requiere de la construcción de los arcos capaces de 120º sobre dos lados del triángulo. Encontraremos en lugar de ello un camino de longitud $PA + PB + PC$ entre dos puntos del plano, longitud que es mínima, claro está, cuando dicho camino es rectilíneo.

Supongamos que P es el punto de Fermat de un triángulo ABC con todos sus ángulos menores que 120º, punto del que ya se sabe que es interior al triángulo. Construimos sobre el lado AB, y hacia el exterior de ABC, un triángulo equilátero ABC' (figura 35).

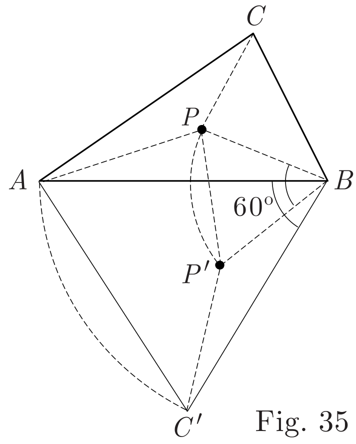


Fig. 35

Si g_B es el giro de centro en B y amplitud 60º, el punto $P' = g_B(P)$ cumple que $PB = P'B$ y $\measuredangle PBP' = 60^{\circ}$ y el triángulo PBP' es equilátero. Además, g_B conserva las distancias y $g_B(A) = C'$, así que $PA = P'C'$ y $PB = P'B = PP'$, luego

$$PA + PB + PC = P'C' + PP' + PC$$

es la longitud de la quebrada $CPP'C'$.

Como P minimiza la anterior suma de distancias, la línea quebrada $CPP'C'$ debe ser un segmento de recta (figura 36). Para que esto ocurra, y dado que P es interior al triángulo, es necesario que el segmento CC' interseque al lado AB en un punto distinto de B, o lo que es igual, que sea $\measuredangle CBA < 120^{\circ}$, pero esta desigualdad es cierta por hipótesis. Se deduce así que P pertenece al segmento CC' y que

$$PA + PB + PC = CC'$$

Si se construye un nuevo triángulo equilátero ACB' sobre el lado AC y hacia el exterior de ABC (figura 37), por análogas razones a las expuestas, P está sobre el segmento BB', luego

$$PA + PB + PC = BB'$$

Por tanto, P es el punto donde se cortan los segmentos CC' y BB'.

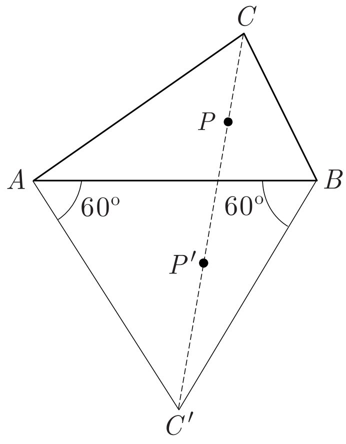


Fig. 36

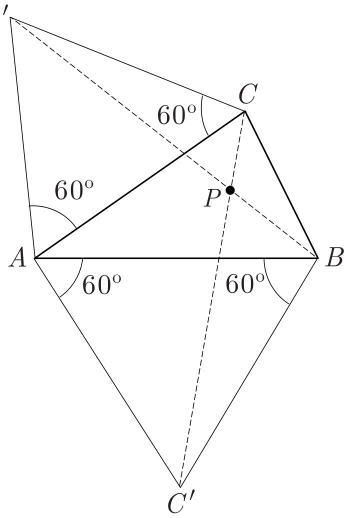


Fig. 37

Este hecho facilita una construcción sencilla del punto de Fermat P del triángulo ABC: Dibújense sendos triángulos equiláteros ABC' y ACB' sobre los lados AB y AC del triángulo y hacia el exterior de ABC y trácense los segmentos CC' y BB'; el punto donde se cortan ambos segmentos es el punto P de Fermat del triángulo ABC y la suma mínima $PA+PB+PC$ es la longitud BB' o, la que es igual, CC'.

Agradecimientos

Mi más cariñoso agradecimiento a Braulio De Diego, por animarme a escribir este artículo hasta sus últimas consecuencias y por todo lo que aprendí con él, y a José Manuel Gamboa, por las estupendas ideas que aportó al artículo y por su infinita paciencia para leerlo repetidas veces.

Bibliografía

Courant, R. y Robbins, H. *¿Qué son las Matemáticas?* Fondo de Cultura Económica. 2002.

Coxeter, H. S. M. *Fundamentos de Geometría*. Limusa-Wiley. 1971.

De Diego, B.; Llerena, A.; Baena, F.; Rodríguez, B.; Gamboa, J. M.; Lorenzo, J.M.; Salgueiro, B. *Problemas de Oposiciones, Volumen* 5. Deimos. 2013.

Tikhomirov, V. T. *Stories about maxima and minima*. AMS/MAA. 1990.

La Escuela de Traductores de Toledo

Mª Concepción Romo Santos
Departamento de Álgebra. Universidad Complutense
`romosan@mat.ucm.es`

Abstract

Between the twelfth and thirteenth place in Toledo a cultural project known as the Escuela de Traductores. *This name should not lead us to think in a school with teachers and students, but rather a team of people who worked together and followed common methods to convey the wisdom of Eastern Europe and, in particular, that of the ancient Greeks and Arabs.*

A la memoria del Prof. Dr. Julio Fernández Biarge
D. Julio ha tenido una vida extraordinariamente fecunda,
dedicada por completo a las Matemáticas.
Además ha sido un hombre sencillo y asequible a todos.
Descanse en paz.

1. Alfonso X de Castilla

Alfonso X de Castilla, llamado el Sabio (Toledo, 23 de noviembre de 1.221- Sevilla, 4 de abril de 1.284), fue rey de Castilla entre 1.252 y 1.284.

A la muerte de su padre, Fernando III el Santo, reanudó la ofensiva contra los musulmanes, ocupando Jerez (1.253) y Cádiz (1.262). En 1.264 tuvo que hacer frente a una importante revuelta de los mudéjares de Murcia y el valle del Guadalquivir. Como hijo de Beatriz de Suabia, aspiró al trono del Sacro Imperio Romano Germánico, proyecto al que dedicó más de la mitad de su reinado sin obtener éxito alguno. Los últimos años de su reinado fueron especialmente sombríos, debido al conflicto sucesorio provocado por la muerte prematura del primogénito de Alfonso X, Fernando de la Cerda, y la minoridad de sus hijos, lo que desembocó en la rebelión abierta del infante Sancho y gran parte de la nobleza y las ciudades del reino. Alfonso murió en Sevilla durante el transcurso de esta revuelta, no sin antes haber desheredado a su hijo Sancho.

Alfonso X fue un rey polifacético interesado por las ciencias, la historia, el derecho, la literatura. Fue el impulsor de la escuela de traductores de Toledo.

2. Escuela de Traductores de Toledo

Entre los siglos XII y XIII se desarrolla en Toledo un proyecto cultural conocido como Escuela de Traductores. Esta denominación no debe llevarnos a pensar en un centro educativo con profesores y estudiantes, sino más bien a un equipo de personas que trabajaron juntas y siguieron unos métodos comunes para transmitir a Europa la sabiduría de Oriente y, en especial, la de los antiguos griegos y los árabes.

Las universidades europeas se habían alimentado hasta entonces de la cultura latina y, aunque se tenía conocimiento de la existencia de los grandes filósofos griegos, no existían traducciones y se ignoraba su contenido. Los árabes, en su expansión por las tierras de Bizancio -heredera de la antigüedad griega- asimilaron, tradujeron, estudiaron, comentaron y conservaron las obras de sus autores, y finalmente las trajeron consigo hasta la Península Ibérica junto con un ingente bagaje cultural que ellos mismos habían generado.

Toledo fue la primera gran ciudad musulmana conquistada por los cristianos (1.085). Como en otras ciudades de Al-Andalus, existían en ella bibliotecas y sabios conocedores de la cultura que los árabes habían traído del Oriente y de la que ellos mismos habían hecho florecer en la Península Ibérica. Con la presencia en Toledo de una importante comunidad de doctos hebreos y la llegada de intelectuales cristianos europeos, acogidos por el cabildo de su catedral, se genera la atmósfera propicia para que Toledo se convierta en la mediadora cultural entre el Oriente y el Occidente de la época.

La Escuela de Traductores de Toledo tuvo dos periodos separados por una fase de transición. El primero fue el del arzobispo don Raimundo que, en el siglo XII, impulsó la traducción de obras de filosofía y religión del árabe al latín. Gracias a su labor, en las universidades europeas comenzó a conocerse el aristotelismo neoplatónico. Se tradujeron obras de Aristóteles comentadas por filósofos árabes como Avicena y Alfarabí, de autores hispano-judíos como Ibn Gabiron, y también se tradujeron el Corán y los Salmos del Antiguo Testamento. Por otra parte, en esta fase se empieza a recibir la ciencia oriental en Europa, a través de las traducciones de obras que sirvieron de manuales para los universitarios hasta el siglo XVI: el Canon de Avicena y el Arte de Galeno. La astrología, astronomía y aritmética se enriquecieron igualmente al ser vertidas al latín las obras de Al-Razi, Ptolomeo o Al-Khwarizmi.

Con la llegada del rey Alfonso X, ya en el siglo XIII, comienza la etapa de traducciones de tratados de astronomía, física, alquimia y matemáticas. La recepción de un caudal de conocimientos tan enorme fructifica en la composición, a instancias del rey, de obras originales como el Libro de las Tablas Alfonsíes. Se tradujeron tratados de Azarquiel, de Ptolomeo y de Abul Alí al-Haitam, pero también obras recreativas como los Libros del Ajedrez, dados y tablas y recopilaciones de cuentos tan fecundas para las literaturas occidentales como Calila e Dimna y Sendebar. En esta segunda fase las traducciones ya no se hacen al latín, sino al castellano, con lo que el romance se desarrollará para ser capaz de abordar temas científicos que hasta entonces sólo habían sido tratados en latín.

Los métodos de traducción evolucionaron con el tiempo. En un primer momento, un judío o cristiano conocedor del árabe traducía la obra original al romance oralmente, ante un experto conocedor del latín que, a continuación, iba redactando en esta lengua lo que escuchaba. Más tarde en la época de Alfonso X, los libros comienzan a ser traducidos por el único traductor conocedor de varias lenguas, cuyo trabajo era revisado al final por un enmendador.

Alfonso X, impulsor de la Escuela de Traductores de Toledo, fue un rey polifacético interesado por multitud de disciplinas de la época: las ciencias, la historia, el derecho, la literatura… Su labor consistió en dirigir y seleccionar a los traductores y obras, revisar su trabajo, fomentar el debate intelectual e impulsar la composición de nuevos tratados. Se rodeó de sabios musulmanes y judíos, fue mecenas de eruditos y trovadores y a él se debe, en gran parte, el florecimiento de la cultura de esta época. Meritoria fue también la tarea de una larga lista de traductores, como Gerardo de Cremona, Domingo Gundisalvo, Abraham Alfaquí y otros muchos que, con sus conocimientos lingüísticos y su formación científica, pusieron en manos de Europa las claves de un posterior desarrollo científico e intelectual.

3. Los Científicos Judíos de la Corte de Alfonso X. Isaac Ben Sayid y Yehudá Ben Moisés

Contra la idea generalizada de la intervención personal de Alfonso X en las obras científicas preparadas bajo su mecenazgo, el examen de treinta obras astrónomico-astrológicas en castellano pone de manifiesto la gran participación de intelectuales judíos, que intervinieron en el 74% de esas obras, y eso sin entrar a valorar la importancia de las mismas. Esas obras pueden clasificarse en tres grupos: traducciones del árabe, tratados más o menos originales seguramente basados en fuentes árabes, y tablas astronómicas. El examen rebela la parte destacadísima de Yehudá ben Moisés y de Isaac ben Sayid, que colaboraron en el 58% de las obras, entre las cuales figuran las célebres tablas astronómicas que la posteridad conoció con el nombre de tablas alfonsíes.

Los demás colaboradores judíos fueron don Abraham, don Mossé y Samuel Haleví.

La historia recuerda bien las tablas alfonsíes, compuestas para el meridiano de Toledo y el año radix 1.252. Con esta denominación se conservan dos obras esencialmente distintas: 1) unos cánones, y 2) unas tablas numéricas, aplicables (gracias a un sencillo expediente matemático) sea el calendario cristiano, sea el calendario musulmán. Fueron adaptadas para fechas posteriores, y citadas y quizás utilizadas por astrónomos como Tycho Brahe, Galileo y Kepler, hasta que este último las superó con sus tablas rudolfinas en 1.627, es decir, después de casi cuatro siglos de vigencia.

4. Principales Obras Astronómicas Hispano-Judías

<u>Libro de Las Formas e Imágenes que están En Los Cielos</u>
Toledo, 1.276- 1.279. Manuscrito sobre pergamino; iluminado. Encuadernación escurialense. Biblioteca Laurentina, San Lorenzo de El Escorial (Madrid). Ms,h-1-16 (procede de la capilla real de Granada).

Producido en el Escritorio Real, se cree concebido a modo de prólogo o índice del Lapidario o de una serie de tratados astrológicos que Alfonso X pensaba mandar o ya había mandado escribir. Lleva iniciales moradas y azules, calderones rojos y azules y epígrafes rojos; la primera capital en oro y colores representa una figura de cuerpo entero sentada y con corona, mostrando un libro a otros cinco que están de rodillas; otras miniaturas con los signos del zodiaco.

<u>Lapidario</u>
Toledo, 1.250 (texto), y 1.276-1.279 (iluminación). Manuscrito sobre pergamino; iluminado. Biblioteca Laurentina. San Lorenzo de El Escorial. Ms, h-I-15. Encuadernación Escurialense (perteneció a Diego Hurtado de Mendoza). Primera obra astrológica que mandó traducir Alfonso X el Sabio, es un tratado acerca de las propiedades de 360 piedras y de su relación con los signos astrológicos, así como un manual de ciencia aplicada a modo de vademécum medieval de farmacopea o libro de remedios. Lo tradujeron del árabe Yehudá ben Moisés, Hacobén ibn Mosca y Garci Pérez entre 1.243 y 1.250, es decir, antes del advenimiento de Alfonso X al trono.

La obra está dividida en cuatro partes de las que sólo se terminaron de iluminar las dos primeras. La decoración, realizada en el Escritorio Real, presenta numerosas miniaturas de asunto mitológico y astrológico, con abundancia de tipos de la época – cristianos, moros y judíos – así como seres fantásticos. Las más interesantes del Primer Lapidario son las que narran la búsqueda y hallazgo de cada piedra, así como las grandes ruedas a toda página con organización radial y presidida por un signo del zodiaco, que figuran al final de cada uno de los doce capítulos en que se divide el texto.

Libros del Saber de Astronomía
Toledo, 1.255-1.279. Manuscrito sobre vitela; iluminado. Biblioteca de la Universidad Complutense, Madrid. Villa- Amil n.156.

Contiene once tratados astrológicos, unos originales y otros adaptados de obras anteriores, elaborados por judíos que desarrollaron su actividad científica colaborando en la importantísima tarea de trasvase cultural impulsada por Alfonso X el Sabio. Entre los originales hay diez libros de Isaac ibn Sid (Sayid) de Toledo, sobre los astrolabios, cuadrantes y relojes, y otro de Samuel el Leví de Toledo "Del relogio de la candela".

Libros del Saber de Astronomía
Toledo, 1.255-1.279; copia del siglo XVI. Manuscrito sobre papel; iluminado. Encuadernado en tabla forrada de vaqueta roja con estampaciones doradas y el escudo de Felipe II en las tapas. Biblioteca Laurentina. San Lorenzo de El Escorial (Madrid). Ms, h-I-1.

Copia del códice complutense descrito anteriormente, con ciento sesenta y tres dibujos en color hechos por el arquitecto Juan de Herrera. La copia fue encargada por Felipe II en 1.562 para el príncipe D. Carlos a instancias de su preceptor, Honorato Juan, "*por ser el más principal y más necesario que en esta sciencia se halla*"; la llevó a cabo Diego de Valencia, natural de Nájera.

Entre los traducidos figuran: los adaptados por el alfaquín del rey Yehudá Hacohén ibn Mosca y el clérigo Guillén Arremón Daspá; a saber, los cuatro libros de las estrellas y el libro de la esfera (1.259 y 1.277); y el libro de la azafeha de Azarquiel (1.029-1.100), traducido primeramente (1.255-1.256) por Fernando de Toledo y luego (Burgos, 1.277) por Bernardo el Arábigo y don Abrahem "alfaquín del rey". Se tiene a este códice por el princeps que saliera del Escritorio Real y conserva parte de su espléndida iluminación, mereciendo destacarse las que ilustran los libros de las estrellas y los de relojes.

Astrolabio
España, 1.229. Bronce, 13,5 cm diámetro. Staat Sbibliothek Preussischer Kulturbesitz, Orienttabteilung, Berlín (Alemania) Ms Sprenger 2050.

El astrolabio es el principal instrumento de cálculo usado por los astrónomos medievales; de hecho era la calculadora analógica de entonces. La mayoría de los conservados son árabes, pero algunos llevan inscritas palabras en hebreo. El presente lo fabricó Muhamad ibn Alsafar; lleva alrededor una inscripción en árabe, en cuya parte superior puede leerse la palabra hebrea quéset, “arco”, y encima de la pieza base aparece también en hebreo la palabra Córdoba.

Bibliografía

[1] M. Alonso Alonso, *Notas sobre los traductores toledanos Domingo Gundisalvo y Juan Hispano*. Al-Andalus, vol. VIII, págs. 155-188, 1.943.

[2] A. González Palencia, *El arzobispo Don Raimundo de Toledo.* Editorial Labor. Barcelona, 1.942.

[3] M. C. Romo Santos, *Las ciencias matemático-astronómicas en la Edad Media*. Boletín de la Sociedad “Puig-Adam” de profesores de Matemáticas, nº 57, págs.. 32-40.

Reseña de libros

MARTÍN ROMO, ALEJANDRO y ROMO SANTOS, MARÍA CONCEPCIÓN: *Matemáticas recreativas en Madrid hasta la Conquista Cristiana* (128 págs.). ISBN: 978-162934120-0. Editorial: Cultiva Libros. Madrid, 2013.

No es una novedad aseverar que la historia de las matemáticas es un valioso recurso para la enseñanza de las matemáticas, pero ¿también es útil la historia –a secas- para ese propósito? Y al revés, ¿es posible valerse de las matemáticas para facilitar el aprendizaje de la historia? Pues bien, en el libro que ahora comentamos se comprueba que ambas preguntas tienen una respuesta afirmativa; así, el matemático podrá aprender historia y apoyarse en ella para sus clases y, recíprocamente, quizá le sirva al historiador para interesarse por las matemáticas.

En particular, al lector de esta revista le permitirá conocer diversos episodios de la historia de Madrid y de algunas de sus ciudades (como Alcalá de Henares, la antigua Complutum), realizando un viaje por la Prehistoria, el Imperio Romano, la Época Visigoda, los restos del Mayrit Islámico (con sus personajes: Muhammad I, Maslama, Abu'l Quassim...) y la Reconquista Cristiana; como asimismo aprender distintas curiosidades en relación con todo ello. Por ejemplo, advertirá que la dieta romana era ya nuestra dieta mediterránea (la estatura media en el Imperio Romano era unos 10 cm superior que en el Medievo); la influencia de la lengua y cultura visigodas en la lengua castellana; por qué el Campo del Moro o la Morería se denominan así o a los madrileños se les llama gatos; cuál es la razón para que la Virgen de la Almudena sea la patrona de Madrid; etc.

De igual modo, quizá le sirva para sus clases de matemáticas, puesto que esta historia de Madrid va salpicada de numerosas actividades matemáticas, no pocas de ellas de matemática recreativa, y enmarcadas en su contexto histórico. Historia, matemáticas, curiosidades, acertijos…; una atractiva combinación para aprender historia y matemáticas, y para su posible implementación en clase.

La obra está escrita por Concha Romo Santos, catedrática de Álgebra de la UCM y buena divulgadora de la historia de las matemáticas, y por su hijo Alejandro Martín Romo, ingeniero en geodesia y cartografía. Felicidades a ambos por este interesante libro que, según se anuncia, continuará en otro posterior.

Javier Peralta

Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el Boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, congresos, etc., deben enviarse *en formato electrónico*, del modo especificado a continuación.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex. El formato de texto debe ser 17cm (alto) x 12.8cm (ancho), exactamente como este archivo. El tamaño de letra de texto 11 puntos.

En caso de usar Word: estilo de letra Times New Roman y configuración de página con márgenes: superior 3cm; inferior 9,7cm; izquierdo 4,1cm; derecho 4,1cm; encuadernación 0cm.

Si se usa Latex: estilo "article" y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTex, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en estilo de letra negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y "Abstract" de unas líneas en inglés en letra Courier New, si se usa Word, o en tipo de letra tt, si se usa Latex.

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como en estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser impresas. Las figuras deben llevar debajo numeración (Figura 1, Figura 2, …), para referirse a ellas en el texto. No debe escribirse texto a ninguno de los lados de la figura, ni a la izquierda ni a la derecha (es decir, las figuras no deben intercalarse en el texto).

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Envío de originales

Se enviará en formato electrónico a nuestra cuenta `puigadam@mat.ucm.es` o bien en un CD o disquete formateado para PC compatible.

De otro modo, también puede enviarse impreso en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, cuya dirección que figura en la página 2 del Boletín. Pero, una vez aceptado para su publicación, se ha de enviar el correspondiente archivo en formato electrónico en la forma anteriormente indicada.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55,

56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76,

77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96 y 97

El importe puede ser abonado enviando un cheque a nuestra Sede (citada en la página 2) a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o también mediante transferencia a la cuenta corriente de la Sociedad, número

ES13 3025-0006-24-1400002948

al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella *la dirección a donde se han de enviar* y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia*.